Branko J. Malešević
ETF Beograd, 2020.

3 Matrice i determinante

Osnovne definicije

Matrica formata $m\times n$ nad poljem $\mathbb{F}=(F,+,\cdot)$ jeste pravougaona tabela oblika:

(1)
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Označimo sa A prethodnu tabelu nad poljem $\mathbb{F}$. U daljem tekstu, polje koje razmatramo može da bude proizvoljno polje.

Napomenimo da se samo izdvajanje elementa a_{ij} iz matrice A može odrediti kao vrednost funkcije

(2)
$$\mathsf{A} : \{1,\, 2,\, \dots\, ,\, m\} \times \{1,\, 2,\, \dots\, ,\, n\} \longrightarrow F.$$

U tom smislu svaka funkcija (2) određuje matricu A formata $m \times n$.

Niz elemenata $a_{i1},\dots,a_{in}$ čine *i-tu vrstu*, a niz elemenata $a_{1j},\dots,a_{mj}$ čine *j-tu kolonu*. Element $a_{ij}\in F$ matrice A nalazi se na poziciji i-te vrste i j-te kolone, gde $i\in\{1,\dots,m\}$ i $j\in\{1,\dots,n\}$. Pri tom, i je *indeks vrste* i j je *indeks kolone*. Prirodan broj m određuje broj vrsta i prirodan broj n određuje broj kolona matrice A formata $m\times n$.

Za i-tu vrstu $a_{i1},\dots,a_{in}$ koristimo oznaku $\mathsf{A}_{i\rightarrow}$ i tada *matrica i-te vrste* je matrica formata $1\times n$

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}.$$

Za j-tu kolonu $a_{1j},\dots,a_{mj}$ koristimo oznaku $\mathsf{A}_{j\downarrow}$ i tada *matrica j-te kolone* je matrica formata $m\times 1$

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Primer 1. *Za realnu matricu*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -3 & 0 \\ 11 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -10 & 9 \end{bmatrix}$$

formata 3×4 izdvajamo redom sledeće matrice-vrste:

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 11 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -10 & 9 \end{bmatrix}$$

i izdvajamo redom sledeće matrice-kolone:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

■

Dalje, u slučaju da je $m = n$ pravougaona tabela (1) postaje kvadratna tabela i takve matrice nazivamo *kvadratnim matricama*. Prirodan broj n nazivamo *redom kvadratne matrice*. Za kvadratne matrice određujemo *glavnu dijagonalu* kao niz elemenata $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ii}, \ldots, a_{nn}$ i određujemo *sporednu dijagonalu* kao niz elemenata $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{i(n+1-i)}, \ldots, a_{n1}$.

Za prirodne brojeve m i n skup svih matrica formata $m \times n$ nad poljem $\mathbb{F} = (F, +, \cdot)$ označavaćemo

$$F^{m \times n}.$$

Za proizvoljnu matricu $\mathsf{A} \in F^{m \times n}$ koristimo sledeći zapis matrice sa svojim elementima

$$\mathsf{A} = [\, a_{ij} \,]_{m \times n}.$$

Za dve matrice $\mathsf{A} = [\, a_{ij} \,]_{m \times n}$ i $\mathsf{B} = [\, b_{ij} \,]_{m \times n}$ nad poljem $\mathbb{F}$ smatramo da su *jednake matrice*, u oznaci

$$\mathsf{A} = \mathsf{B},$$

ako važi:

$$(\forall i \in \{1, \ldots, m\})(\forall j \in \{1, \ldots, n\})\; a_{ij} = b_{ij}.$$

Može se dokazati da relacija jednakosti matrica je relacija ekvivalencije, tj. važi:

(i) $\mathsf{A} = \mathsf{A}$ (refleksivnost),

(ii) $\mathsf{A} = \mathsf{B} \implies \mathsf{B} = \mathsf{A}$ (simetričnost),

(iii) $\mathsf{A} = \mathsf{B} \wedge \mathsf{B} = \mathsf{C} \implies \mathsf{A} = \mathsf{C}$ (tranzitivnost),

za matrice $\mathsf{A} = [\, a_{ij} \,]_{m \times n}$, $\mathsf{B} = [\, b_{ij} \,]_{m \times n}$ i $\mathsf{C} = [\, b_{ij} \,]_{m \times n}$.

Zbir matrica, proizvod skalara i matrice

Zbir matrica $\mathsf{A} = [\, a_{ij} \,]_{m \times n}$ i $\mathsf{B} = [\, b_{ij} \,]_{m \times n}$ nad poljem $\mathbb{F}$ je matrica

$$\mathsf{C} = \mathsf{A} + \mathsf{B} = [\, c_{ij} \,]_{m \times n}$$

određena elementima

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

gde $i \in \{1, \ldots, m\}$ i $j \in \{1, \ldots, n\}$. Za matricu C kažemo da je dobijena *sabiranjem matrica* A i B.

Suprotna matrica matrice $\mathsf{A} = [\, a_{ij} \,]_{m \times n}$ nad poljem $\mathbb{F}$ je matrica

$$-\mathsf{A} = [\, -a_{ij} \,]_{m \times n},$$

gde $i \in \{1, \ldots, m\}$ i $j \in \{1, \ldots, n\}$. Na osnovu suprotne matrice uvodimo *razliku matrica* $\mathsf{A} = [\, a_{ij} \,]_{m \times n}$ i $\mathsf{B} = [\, b_{ij} \,]_{m \times n}$ nad poljem $\mathbb{F}$ kao matricu

$$\mathsf{A} - \mathsf{B} = \mathsf{A} + (-\mathsf{B}).$$

Samim tim razlika matrica

$$\mathsf{D} = \mathsf{A} - \mathsf{B} = [\, d_{ij} \,]_{m\times n}$$

je određena elementima

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij},$$

gde $i\in\{1,\ldots,m\}$ i $j\in\{1,\ldots,n\}$. Za matricu D kažemo da je dobijena *oduzimanjem matrica.*

Primer 2. *Za realne matrice*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 11 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad i \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 12 & 0 \\ -4 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

zbir i razlika su matrice

$$\begin{aligned} \mathsf{C} \;=\; \mathsf{A}+\mathsf{B} \;&=\; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 11 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 12 & 0 \\ -4 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+3 & -2+2 & 0+12 & 4+0 \\ 5-4 & 4+4 & 5-2 & 1+3 \\ 0+2 & 11+7 & 3+0 & 1+8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 12 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 18 & 3 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \mathsf{D} \;=\; \mathsf{A}-\mathsf{B} \;&=\; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 11 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 12 & 0 \\ -4 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-3 & -2-2 & 0-12 & 4-0 \\ 5+4 & 4-4 & 5+2 & 1-3 \\ 0-2 & 11-7 & 3-0 & 1-8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -4 & -12 & 4 \\ 9 & 0 & 7 & -2 \\ -2 & 4 & 3 & -7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Poizvod skalara $\alpha\in F$ i matrice $\mathsf{A}=[\, a_{ij} \,]_{m\times n}$ nad poljem $\mathbb{F}$ je matrica:

$$\mathsf{C} = \alpha\cdot\mathsf{A} = [\, c_{ij} \,]_{m\times n}$$

određena elementima

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij},$$

gde $i \in \{1,\ldots,m\}$ i $j \in \{1,\ldots,n\}$. Za matricu C kažemo da je dobijena *množenjem skalara α i matrice* A.

Primer 3. *Za realnu matricu*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

proizvod broja 5 *i matrice* A *je određen kao matrica*:

$$5\,\mathsf{A} = 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}.$$

Primer 4. *Za realne matrice*

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad i \quad \mathsf{B}=\begin{bmatrix}6 & 7\\ 8 & 9\end{bmatrix},$$

matrica $5\,\mathsf{A}-\mathsf{B}$ *je određena kao matrica:*

$$5\,\mathsf{A}-\mathsf{B}=5\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 7\\ 8 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-6 & 10-7\\ 15-8 & 20-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 7 & 11\end{bmatrix}.$$

Nula matrica je oblika $[\,0\,]_{m\times n}$ i označavamo je sa $\mathsf{0}$.

Važi tvrđenje.

Teorema 1. *Važi*

(1) $(F^{m\times n},+)$ *jeste komutativna grupa;*

(2) $(\forall\alpha\in F)(\forall\mathsf{A},\mathsf{B}\in F^{m\times n})\ \alpha\,(\mathsf{A}+\mathsf{B})=\alpha\mathsf{A}+\alpha\mathsf{B}$*;*

(3) $(\forall\alpha,\beta\in F)(\forall\mathsf{A}\in F^{m\times n})\ (\alpha+\beta)\,\mathsf{A}=\alpha\mathsf{A}+\beta\mathsf{A}$*;*

(4) $(\forall\alpha,\beta\in F)(\forall\mathsf{A}\in F^{m\times n})\ \alpha\,(\beta\mathsf{A})=(\alpha\beta)\,\mathsf{A}$*;*

(5) *za jedinični skalar* $1\in F$ *važi* $(\forall\mathsf{A}\in F^{m\times n})\ 1\mathsf{A}=\mathsf{A}$.

Proizvod matrica

Proizvod matrica $\mathsf{A}=[\,a_{is}\,]_{m\times n}$ *i* $\mathsf{B}=[\,b_{sj}\,]_{n\times k}$ nad poljem $\mathbb{F}$ je matrica

$$\mathsf{C}=\mathsf{A}\cdot\mathsf{B}=[\,c_{ij}\,]_{m\times k}$$

određena elementima

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj},$$

redom za indekse $i\in\{1,2,\ldots,m\}$ i $j\in\{1,2,\ldots,k\}$. Za matricu C kažemo da je dobijena *množenjem matrica* A i B.

Primer 5. *Za realne matrice*

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 5 & 4 & 5\end{bmatrix} \quad i \quad \mathsf{B}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & 1\\ -2 & 4 & -1 & 3\\ 1 & 5 & 11 & -7\end{bmatrix}$$

proizvod je matrica

$$\begin{aligned}\mathsf{C}&=\mathsf{A}\cdot\mathsf{B}\\ &=\left[\begin{array}{ccc}1 & 2 & 0\\ \hline 5 & 4 & 5\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{r|r|r|r}3 & 2 & 0 & 1\\ -2 & 4 & -1 & 3\\ 1 & 5 & 11 & -7\end{array}\right]\\ &=\begin{bmatrix}(1\cdot3+2\cdot(-2)+0\cdot1) & (1\cdot2+2\cdot4+0\cdot5) & (1\cdot0+2\cdot(-1)+0\cdot11) & (1\cdot1+2\cdot3+0\cdot(-7))\\ (5\cdot3+4\cdot(-2)+5\cdot1) & (5\cdot2+4\cdot4+5\cdot5) & (5\cdot0+4\cdot(-1)+5\cdot11) & (5\cdot1+4\cdot3+5\cdot(-7))\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-1 & 10 & -2 & 7\\ 12 & 51 & 51 & -18\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Prema prethodnoj definiciji proizvod dve matrice $\mathsf{A}=[\,a_{is}\,]_{m\times n}$ i $\mathsf{B}=[\,b_{sj}\,]_{n\times k}$ određuje matricu

$$\mathsf{C}=\mathsf{A}\cdot\mathsf{B}=[\,a_{is}\,]_{m\times n}\cdot[\,b_{sj}\,]_{n\times k}=\Big[\sum\nolimits_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}\Big]_{m\times k}.$$

Primetimo da za proizvoljne dve matrice A i B nad datim poljem nije uvek definisan proizvod $\mathsf{A}\cdot\mathsf{B}$. Naime, samo ako je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B postoji proizvod $\mathsf{A}\cdot\mathsf{B}$ nad datim poljem. U tom slučaju smatramo da su matrice A i B *matrice saglasnog formata* za proizvod matrica, inače *matrice nisu saglasnog formata.*

Jedinična matrica I_n, reda n, je kvadratna matrica koja ima na glavnoj dijagonali elemente $1\,(\in F)$ i van glavne dijagonale elemente $0\,(\in F)$, tj.

$$\mathrm{I}_n=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

Za matricu $\mathsf{A}\in F^{m\times n}$ i jedinične matrice I_n, I_m važi:

$$(1)\qquad \mathsf{A}\cdot\mathrm{I}_n=\mathrm{I}_m\cdot\mathsf{A}=\mathsf{A}.$$

Elementi jedinične matrice se označavaju *Kronekerovim* (*Kronecker*) *simbolom*:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1\ :\ i=j,\\ 0\ :\ i\neq j.\end{cases}$$

Ukoliko je poznat red n kvadratne matrice nad poljem $\mathbb{F}$, tada umesto I_n koristimo i oznaku I. *Dijagonalna matrica*

$$\mathsf{D}_n=\mathsf{D}_n(d_1,\ldots,d_n)$$

reda n je kvadratna matrica koja ima na glavnoj dijagonali elemente $d_1,\ldots,d_n$ i van glavne dijagonale elemente 0, tj.

$$\mathsf{D}_n=\begin{bmatrix}d_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_n\end{bmatrix}.$$

Donje trougaona matrica je matrica $[\,a_{ij}\,]_{n\times n}$ kod koje je $a_{ij}=0$ za $j>i$, tj. matrica oblika

$$\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \ldots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}.$$

Gornje trougaona matrica je matrica $[\,a_{ij}\,]_{n\times n}$ kod koje je $a_{ij}=0$ za $j<i$, tj. matrica oblika

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}.$$

Primetimo da je, dijagonalna matrica je istovremeno i donje trougaona i gornje trougaona.

Skalarna matrica jeste specijalna dijagonalna matrica

$$\mathsf{D}_n = \mathsf{D}_n(d, \dots, d)$$

za izabrani skalar $d \in F$. Za skalarnu matricu D_n određenu skalarom $d \in F$ koristimo i kraći način pisanja $\mathsf{D}_n(d)$ kao zamenu za $\mathsf{D}_n(d, \dots, d)$. Očigledno važi

$$\mathsf{D}_n(d) = d\,\mathrm{I}_n.$$

Dalje, navodimo dva tvrđenja.

Teorema 2. *Važi*

(*i*) *Za svako* $\mathsf{A} \in F^{m\times n}$, $\mathsf{B} \in F^{n\times k}$, $\mathsf{C} \in F^{k\times q}$ *važi:*

$$(\mathsf{A}\cdot\mathsf{B})\cdot\mathsf{C} = \mathsf{A}\cdot(\mathsf{B}\cdot\mathsf{C}).$$

(*ii*) *Za svako* $\mathsf{A} \in F^{m\times n}$ *i svako* $\mathsf{B}, \mathsf{C} \in F^{n\times k}$ *važi:*

$$\mathsf{A}\cdot(\mathsf{B} + \mathsf{C}) = \mathsf{A}\cdot\mathsf{B} + \mathsf{A}\cdot\mathsf{C}.$$

(*iii*) *Za svako* $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in F^{m\times n}$ *i svako* $\mathsf{C} \in F^{n\times k}$ *važi:*

$$(\mathsf{A} + \mathsf{B})\cdot\mathsf{C} = \mathsf{A}\cdot\mathsf{C} + \mathsf{B}\cdot\mathsf{C}.$$

(*iv*) *Za svako* $\mathsf{A} \in F^{m\times n}$, $\mathsf{B} \in F^{n\times k}$ *i svako* $\alpha \in F$ *važi:*

$$(\alpha\mathsf{A})\cdot\mathsf{B} = \mathsf{A}\cdot(\alpha\mathsf{B}) = \alpha(\mathsf{A}\cdot\mathsf{B}).$$

Teorema 3. *Algebarska struktura* $(F^{n\times n}, +, \cdot)$ *jeste prsten sa jedinicom* I_n.

Napomenimo da generalno *množenje matrica istog formata nije komutativno*, kao što pokazuje sledeći primer.

Primer 6. *Za realne kvadratne matrice drugog reda*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad i \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

važi

$$\mathsf{A}\cdot\mathsf{B} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \mathsf{B}\cdot\mathsf{A}.$$

Znači da prsten $(F^{n\times n}, +, \cdot)$ *jeste primer nekomutativnog prstena sa jedinicom.* ■

Stepeni kvadratne matrice

Za kvadratnu matricu $\mathsf{A} \in F^{n\times n}$ određujemo $\mathsf{A}^1 = \mathsf{A}$ i za $m \in \{2, 3, \dots\}$ određujemo *m-ti stepen matrice* sa:

$$\mathsf{A}^m = \mathsf{A}^{m-1}\cdot\mathsf{A}.$$

Na osnovu asocijativnosti proizvoda za m-ti stepen matrice važi

$$\mathsf{A}^m = \mathsf{A}\cdot\mathsf{A}^{m-1}.$$

Dodatno, za kvadratnu matricu $\mathsf{A} \neq \mathsf{0}$, reda n, definišemo $\mathsf{A}^0 = \mathrm{I}_n$.

Primer 7. 1°. *Za realnu matricu*

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

matematičkom indukcijom se jednostavno pokazuje

$$\mathsf{A}^m=\begin{bmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (m\in N).$$

2°. *Za realnu matricu*

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

važi $\mathsf{A}^2=3\,\mathsf{A}$ *i odatle:*

$$\mathsf{A}^m=3^{m-1}\mathsf{A}=\begin{bmatrix}3^{m-1} & 3^{m-1} & 3^{m-1}\\ 3^{m-1} & 3^{m-1} & 3^{m-1}\\ 3^{m-1} & 3^{m-1} & 3^{m-1}\end{bmatrix} \qquad (m\in N).$$

■

Za kvadratnu matricu A kažemo da je *nilpotentna matrica* ako postoji prirodan broj $k\in N$ takav da $\mathsf{A}^k=\mathsf{0}$. Najmanji prirodan broj k sa prethodnom osobinom određuje *stepen nilpotentnosti.* Kvadratna matrica A je *idempotentna matrica* ako je $\mathsf{A}^2=\mathsf{A}$. Kvadratna matrica A je *involutivna matrica* ako je $\mathsf{A}^2=\mathrm{I}$.

Primer 8. 1°. *Za realnu matricu*

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix}3 & -9\\ 1 & -3\end{bmatrix},$$

važi $\mathsf{A}^2=\mathsf{0}$ *i odatle:*

$$\mathsf{A}^m=\mathsf{0}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (m=2,\,3,\,\ldots).$$

2°. *Za realnu matricu*

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix}3 & -6\\ 1 & -2\end{bmatrix},$$

važi $\mathsf{A}^2=\mathsf{A}$ *i odatle:*

$$\mathsf{A}^m=\mathsf{A}=\begin{bmatrix}3 & -6\\ 1 & -2\end{bmatrix} \qquad (m\in N).$$

3°. *Za realnu matricu*

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 15 & -4\end{bmatrix},$$

važi $\mathsf{A}^2=\mathrm{I}$ *i odatle:*

$$\mathsf{A}^{2k}=\mathrm{I} \quad i \quad \mathsf{A}^{2k+1}=\mathsf{A} \qquad (k\in N_0).$$

Teorema 4. *Za kvadratnu matricu* A *i brojeve* $p,q\in N_0$ *važi:*

$$\mathsf{A}^p\mathsf{A}^q=\mathsf{A}^{p+q} \quad i \quad (\mathsf{A}^p)^q=\mathsf{A}^{p\,q}.$$

Prirodno se postavlja pitanje za koje kvadratne matrice A, reda n, postoji kvadratna matrica A', istog reda, takva da je ispunjen uslov

$$\mathsf{A}\cdot\mathsf{A}'=\mathsf{A}'\cdot\mathsf{A}=\mathrm{I}_n.$$

Ako za matricu A postoji matrica A' tako da je ispunjena prethodna jednakost, tada matricu A' nazivamo *inverznom matricom* za matricu A. Tako na primer za skalarne matrice $\mathsf{A}=\mathsf{D}_n(d)$, sa skalrom $d\neq 0$, postoji inverzna matrica $\mathsf{A}'=\mathsf{D}_n\left(d^{-1}\right)$. Sa druge strane kvadratna nula matrica $\mathsf{0}$, reda n, nema inverznu matricu. Potrebni i dovoljni uslovi za postojanje inverzne matrice biće naknadno razmatrani.

Transponovana matrica

Za matricu $\mathsf{A}=[\,a_{ij}\,]\in F^{m\times n}$ *transponovana matrica* jeste matrica $\mathsf{A}^T=[\,\alpha_{ij}\,]\in F^{n\times m}$ takva da važi

$$\alpha_{ij}=a_{ji}$$

za sve indekse $i\in\{1,\ldots,m\}$ i $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Primer 9. *Za realnu matricu*

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$$

formata 2×3 *transponovana matrica je matrica*

$$\mathsf{A}^T=\begin{bmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{bmatrix}$$

formata 3×2. ∎

Za operaciju transponvanja važi sledeće tvrđenje.

Teorema 5. *Važi*

(i) Za svako $\mathsf{A}\in F^{m\times n}$ *važi:* $\left(\mathsf{A}^T\right)^T=\mathsf{A}$.

(ii) Za svako $\mathsf{A},\mathsf{B}\in F^{m\times n}$ *važi:* $(\mathsf{A}+\mathsf{B})^T=\mathsf{A}^T+\mathsf{B}^T$.

(iii) Za svako $\mathsf{A}\in F^{m\times n}$ *i svako* $\alpha\in F$ *važi:* $(\alpha\mathsf{A})^T=\alpha\,(\mathsf{A})^T$.

(iv) Za svako $\mathsf{A}\in F^{m\times n}$ *i svako* $\mathsf{B}\in F^{n\times k}$ *važi:* $(\mathsf{A}\cdot\mathsf{B})^T=\mathsf{B}^T\cdot\mathsf{A}^T$.

Napomena. *Za niz matrica* $\mathsf{A}_1,\ldots,\mathsf{A}_q$ $(q\in N)$, *istog formata nad poljem* $\mathbb{F}$, *važi:*

$$(\mathsf{A}_1+\ldots+\mathsf{A}_q)^T=\mathsf{A}_1^T+\ldots+\mathsf{A}_q^T.$$

Za niz matrica $\mathsf{A}_1,\ldots,\mathsf{A}_q$ $(q\in N)$ *nad poljem* $\mathbb{F}$, *takvih da postoji proizvod* $\mathsf{A}_1\cdot\ldots\cdot\mathsf{A}_q$ *postoji i proizvod* $\mathsf{A}_q^T\cdot\ldots\cdot\mathsf{A}_1^T$, *i važi:*

$$(\mathsf{A}_1\cdot\ldots\cdot\mathsf{A}_q)^T=\mathsf{A}_q^T\cdot\ldots\cdot\mathsf{A}_1^T.$$

Preko transponovane matrice definišemo pojmove simetrične i kososimetrične matrice. Kvadratna matrica $\mathsf{A}\in F^{n\times n}$ je *simetrična matrica* ako je $\mathsf{A}^T=\mathsf{A}$. Sa druge strane, kvadratna matrica $\mathsf{A}\in F^{n\times n}$ je *kososimetrična matrica* ako je $\mathsf{A}^T=-\mathsf{A}$. Kvadratna matrica $\mathsf{A}\in F^{n\times n}$ je *ortogonalna matrica* ako je $\mathsf{A}^T\mathsf{A}=\mathrm{I}_n$.

Primer 10. *Odredimo sve ortogonalne kososimetrične matrice sledećeg oblika:*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

za $a, b \in F$*; ako je:*

(i) $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$,

(ii) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Prema uslovu ortogonalnosti važi:

$$\mathsf{A}^T \cdot \mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Samim tim, jednakost $a^2+b^2 = 1$ *je potreban i dovoljan uslov da je posmatrana matrica* A *ortogonalna kososimetrična matrica nad poljem* $\mathbb{F}$.

(i) *Ako je* $\mathbb{F} = \boldsymbol{Z}_2$, *tada rešenje jednačine* $a^2+b^2=1$ *nad* Z_2 *čine uređeni parovi*

$$(a,\ b) \in \{(1,0),\ (0,1)\}.$$

(ii) *Ako je* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, *tada rešenje jednačine* $a^2+b^2=1$ *nad* R *određujemo sa*

$$a=t,\ b=\sqrt{1-t^2}, \quad ili \ \ a=t,\ b=-\sqrt{1-t^2};$$

za $t \in [0,\ 1]$. *Drugi način pisanja prethodnog rešenja je*

$$a=\cos\varphi,\ b=\sin\varphi;$$

za $0 \leq \varphi < 2\pi$. *Za tako određene vrednosti a i b tražene matrice su oblika*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

i takve matrice se nazivaju matricama rotacije *u* R^2. ■