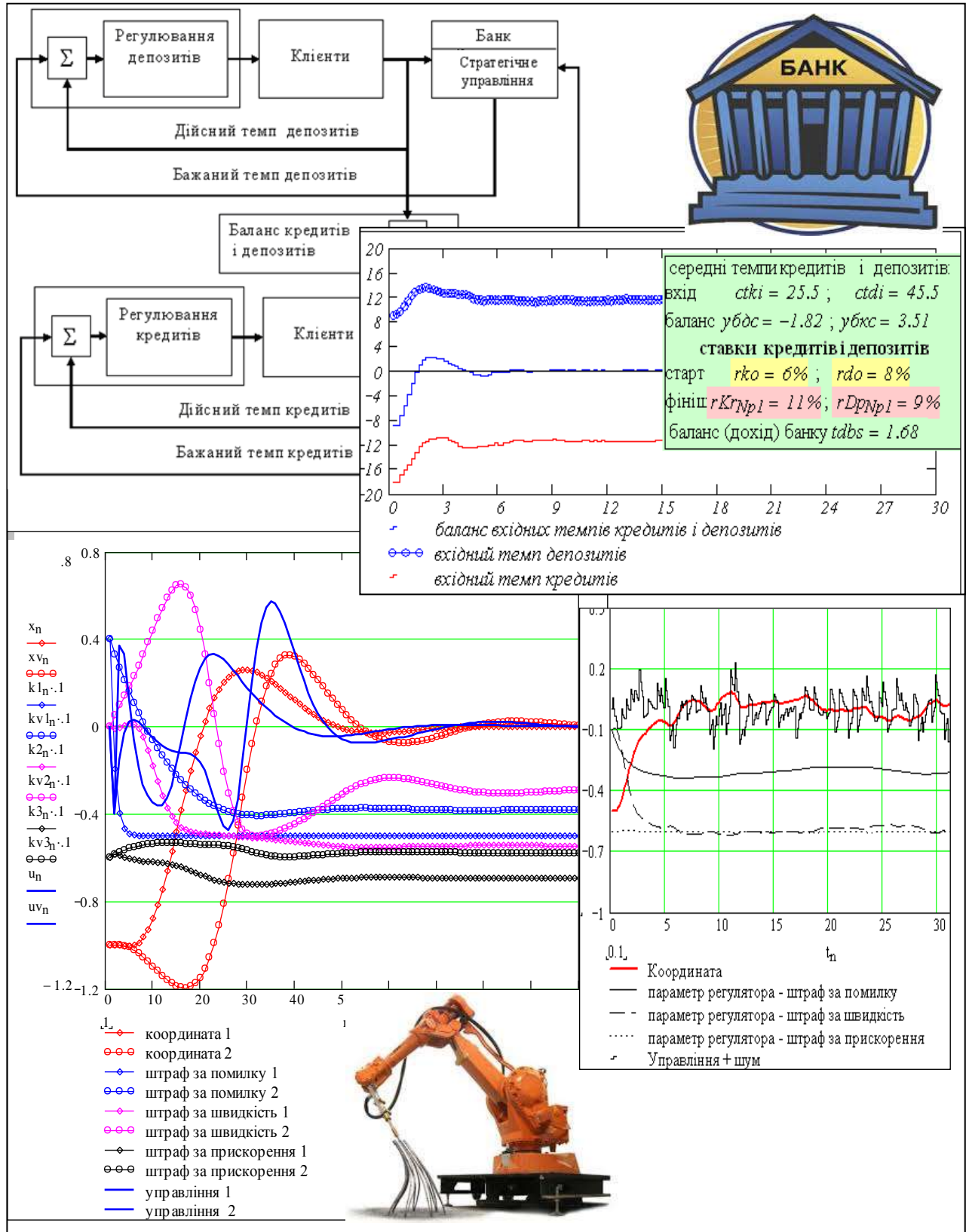


# Т. М. Боровська

## Теорія автоматичного управління

### Курс лекцій



Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**Т. М. Боровська**

**Теорія автоматичного управління**  
**Курс лекцій**  
**(електронне видання)**

Вінниця  
ВНТУ  
2016

Надано гриф «Курс лекцій» та рекомендовано до використання в навчальному процесі Методичною радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 6 від 22.12.2016 р.)

Рецензенти:

**В. М. Дубовой**, доктор технічних наук, професор (ВНТУ)

**А. Я. Кулик**, доктор технічних наук, професор (ВНМУ ім. М.И. Пирогова)

**В. М. Папінов**, кандидат технічних наук, доцент (ВНТУ)

**Боровська, Т. М.**

Б Теорія автоматичного управління : курс лекцій / Т. М. Боровська – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 253 с.

В курсі лекцій подано фундаментальні основи ТАУ і нові актуальні розділи – термінальне управління, асимптотичні ідентифікатори. Цінним є рішення задач економіки і фінансів методами ТАУ. Ці нові теми подані з прикладами синтезу управління і моделювання в середовищі математичного пакету. Даний курс лекцій розрахований для студентів спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології. Наявність прикладів синтезу управління і моделювання в середовищі математичного пакету в даному курсі лекцій дає можливість його використання при виконанні курсових робіт і для самостійної роботи. Нові розділи відповідають сучасному рівню теорії автоматичного управління і практики програмно-апаратної реалізації систем автоматичного управління. Курс лекцій розроблений на базі наукових і практичних робіт автора.

© Т. Боровська, 2016

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП.....</b>	<b>8</b>
<b>1 МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ .....</b>	<b>10</b>
1.1 Основні поняття та терміни.....	10
1.2 Історія ТАУ.....	11
1.3 Приклади об'єктів та систем автоматичного управління.....	12
1.4 Склад типової САУ .....	19
1.5 Фундаментальні принципи управління .....	19
1.6 Динамічні системи .....	20
1.7 Лінеаризація. Метод малих збурень .....	22
<b>2 АНАЛІЗ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ ТА ММ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЛАНОК САУ .....</b>	<b>27</b>
2.1 Аналіз лінійних динамічних систем (ЛДС).....	27
2.1.1 Перетворення Лапласа і його застосування для аналізу та синтезу САУ.....	27
2.1.2 Інтерпретації перетворення Лапласа.....	28
2.1.3 Властивості перетворення Лапласа.....	30
2.1.4 Застосування перетворення Лапласа для розв'язання диференціальних рівнянь. Передаточні функції .....	32
2.1.5 Передаточні функції багатомірних САУ .....	34
2.2 Частотні характеристики .....	36
2.2.1 Експериментальне та аналітичне отримання ЧХ.....	36
2.2.2 Аналітичне отримання ЧХ.....	37
2.2.3 Приклади отримання ЧХ.....	38
2.2.4 Виведення аналітичного виразу для ЧХ .....	40
2.2.5 Логарифмічні частотні характеристики .....	43
2.2.6 Приклад отримання ЛАЧХ.....	45
2.2.7 Класифікація частотних характеристик.....	46
2.3 Часові характеристики .....	47
2.3.1 Вагова та перехідна функції.....	47
2.3.2 Часові характеристики багатомірних САУ. Перехідна функція стану .....	49
2.4 Математичні моделі елементарних ланок САУ .....	50
2.4.1 Елементарні ланки та їх характеристики .....	50
2.4.2 Немінімально-фазові ланки .....	59
2.4.3 З'єднання ланок. Структурні схеми .....	61
2.4.4 Структурні схеми та їх еквівалентні перетворення.....	62

2.4.5 Правила переносу суматора і точки гілкувань крізь блок .....	63
2.4.6 Зворотні зв'язки. Класифікація, практичне застосування .....	64
<b>3 АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ТА ОЦІНКА ЯКОСТІ РЕГУЛЮВАННЯ</b>	
<b>НЕПЕРЕРВНИХ САУ .....</b>	<b>67</b>
3.1 Проблема стійкості та її сучасні прояви.....	67
3.2 Класифікація типів стійкості.....	68
3.3 Збурений і незбурений рух.....	70
3.4 Теорема Ляпунова про стійкість за першим наближенням (про стійкість лінеаризованих систем) .....	72
3.5 Алгебраїчні критерії стійкості.....	75
3.5.1 Необхідні умови стійкості.....	75
3.5.2 Критерій Рауса .....	76
3.5.3 Критерій Гурвиця .....	80
3.6 Частотні критерії стійкості .....	81
3.6.1 Принцип аргументу .....	83
3.6.2 Частотний критерій стійкості Михайлова .....	85
3.6.3 Частотний критерій стійкості Найквіста .....	87
3.7 Запас стійкості по амплітуді та фазі.....	89
3.8 Аналіз стійкості САУ по частотним характеристикам.....	91
3.9 Побудова областей стійкості в площині параметрів системи. Метод D-розбиття.....	92
3.10 Аналіз стійкості систем з запізненням .....	94
3.11 Задача про граничне запізнення .....	96
3.12 Оцінка якості регулювання САУ за часовими характеристиками.....	98
3.12.1 Непрямі оцінки якості перехідних процесів .....	100
3.12.2 Оцінка якості САУ в усталених режимах .....	102
3.13 Промислові регулятори .....	106
<b>4 СИНТЕЗ НЕПЕРЕРВНИХ САУ .....</b>	<b>108</b>
4.1 Огляд і порівняльний аналіз методів синтезу.....	108
4.2 Класифікація критеріїв оптимізації САУ .....	110
4.3 Класифікація методів синтезу САУ .....	112
4.4 Синтез управління по вектору стану .....	114
4.5 Синтез управління по вектору стану при неповній його вимірюваності.....	121
4.6 Виведення властивостей САУ зі спостерігачем стану.....	124
4.7 Стійкість САУ із спостерігачем стану .....	125
<b>5 МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ АНАЛІЗУ, СИНТЕЗУ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>127</b>
5.1 Імпульсні САУ. Приклади імпульсних САУ.....	127

5.2 Класифікація ІСАУ .....	129
5.3 Динаміка ІСАУ.Поняття про решітчасті функції та різницеві рівняння .....	131
5.4 Приклад використання ЦОМ в якості регулятора.Редукція до неперервної САУ .....	132
5.5 Z – перетворення .....	135
5.5.1 Властивості Z – перетворення .....	136
5.5.2 Застосування Z-перетворення для розв’язання лінійних різницевих рівнянь.....	138
5.5.3 Z-передаточні функції розімкнених імпульсних систем ....	139
5.5.4 Z-передаточна функція імпульсної системи з фіксатором 0-го порядку .....	140
5.5.5 Передаточні функції замкнених ІСАУ .....	141
5.6 Стійкість ІСАУ .....	141
5.6.1 Критерії стійкості ІСАУ та метод білінійного перетворення .....	143
5.6.2 Критерій Шура і Кона .....	145
5.6.3 Іннорні критерії стійкості.....	147
5.7 Багатовимірні САУ .....	151
5.8 Управління з кінцевим часом встановлення (УКЧВ). Спостерігач з кінцевим часом встановлення (СКЧВ).....	155
5.8.1 Синтез УКЧВ і СКЧВ .....	158
5.8.2 Область застосування УКЧВ і СКЧВ та особливості синтезу .....	159
6 АНАЛІЗ І СИНТЕЗ НЕЛІНІЙНИХ ТА РЕЛЕЙНИХ САУ .....	161
6.1 Нелінійні системи. Визначення. Класифікація. Характеристики нелінійних систем .....	161
6.2 З’єднання нелінійних ланок.....	166
6.3 Методи фазового простору .....	169
6.3.1 Властивості фазових траєкторій .....	170
6.3.2 Класифікація особливих точок.....	173
6.4 Стійкість нелінійних систем .....	174
6.4.1 Другий метод Ляпунова .....	174
6.4.2 Абсолютна стійкість. Критерій абсолютної стійкості В. М. Попова .....	176
7 АНАЛІЗ І СИНТЕЗ ТЕРМІНАЛЬНИХ САУ .....	180
7.1 Класифікація задач термінального управління .....	180
7.2 Постановка задачі термінального управління .....	181
7.3 Розв’язання задачі розгону.....	182
7.4 Розв’язання задачі приведення .....	187
7.5 Розв’язок задачі зближення .....	189

7.6 Структурна схема термінальної САУ .....	193
7.7 Термінальне управління при застосуванні декількох паралельно працюючих виконавчих елементів (приводів) .....	193
7.8 Принципи розв'язку термінального управління для багатомірного об'єкта .....	196
7.9 Структурна схема термінальної САУ .....	198
7.10 Загальні властивості управління по вищій похідній.....	199
<b>8 ОПТИМАЛЬНІ САУ .....</b>	<b>202</b>
8.1 Оптимальні САУ. Класифікація оптимальних САУ.....	202
8.1.1 Постановка задачі оптимізації.....	203
8.1.2 Класифікація критеріїв оптимізації .....	204
8.1.3 Методи оптимізації.....	204
8.1.4 Синтез оптимального за швидкодією управління.....	205
8.2 Система оптимального управління синтезом стиролу .....	206
8.3 Оптимальне управління банківською системою .....	214
<b>9 АДАПТИВНІ САУ .....</b>	<b>227</b>
9.1 Адаптивні САУ з настроюванням власної частоти .....	227
9.2 "Швидка" адаптивна САУ .....	234
9.3 Адаптивна САУ на базі нечіткої логіки .....	245
9.4 Адаптивна САУ на базі нейронної мережі.....	251
<b>ЗАКЛЮЧЕННЯ.....</b>	<b>258</b>
<b>РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА .....</b>	<b>259</b>

## ВСТУП

Зміст курсу лекцій відповідає робочій програмі навчальної дисципліни “Теорія автоматичного управління”. Теорія автоматичного управління – фундаментальна наукова дисципліна, яка формує у студентів знання про загальні принципи і процеси функціонування автоматичних систем управління найрізноманітнішими об’єктами. Мета даного курсу лекцій – формування у студентів знань, умінь та навичок з розв’язання задач аналізу та синтезу автоматичних систем управління для сучасних об’єктів за умов невизначеностей і збурень.

Курс лекцій дає можливість отримати такі знання:

- фундаментальні принципи побудови систем управління поточним і кінцевим станом, програмного та зі зворотними зв’язками; математичні моделі об’єктів та засобів управління і методику отримання математичних моделей;

- методику математичного опису автоматичних систем з простими об’єктами, методи лінеаризації статичних характеристик елементів системи та складання рівнянь статички і динаміки;

- форми опису та подання динамічних властивостей елементів та систем – диференціальні рівняння, передаточні функції, частотні та часові характеристики;

- правила перетворення структурних схем, отримання еквівалентних передаточних функцій для замкнених автоматичних систем регулювання;

- методи оцінки стійкості САУ, критерії стійкості, визначення областей стійкості, показники та критерії якості перехідних процесів;

- розробка математичних моделей довільних нелінійних систем для аналізу і синтезу управління з урахуванням запізнень, застосування методу фазового простору до їх аналізу, методи лінеаризації та оцінки стійкості та якості перехідних процесів;

- приклади моделювання, аналізу і синтезу оптимальних і адаптивних САУ.

Сьогодні практично немає обмежень на складність алгоритмів управління, зокрема фільтрації, ідентифікації, оптимізації. Не проблема і онлайн-овий (під час функціонування САУ) синтез параметрів регулятора. Вартість апаратних засобів для реалізації системи автоматичного управління – сенсорів, виконавчих елементів і мікроконтролерів – зменшилась в десятки разів. Ефективна адаптивна САУ на базі мікроконтролерів знаходить параметри регулятора пошуковими методами, і аналітичні методи немов би вже і непотрібні. Фундаментальні методи ТАУ, теорія лінійних систем є необхідною базою, яка орієнтована на комп’ютерні методи.

В останніх розділах посібника подані рішення задач аналізу і синтезу



адаптивних САУ для нестандартних об'єктів управління – хімічного реактора, банка. Подані приклади «інтелектуальних регуляторів» - на базі нечіткої логіки, штучних нейронних мереж. Це вже матеріал для переходу студента до самостійних пошуків нових рішень для нових задач управління. Для таких систем відсутні загальні методи синтезу. Кожний новий об'єкт управління вимагає пошуку нових методів, нових способів управління, а для простих регуляторів простих лінійних об'єктів всі задачі аналізу і синтезу вирішують комп'ютерні системи.

Посібник попри невеликий обсяг дає студенту потрібні знання з ТАУ.

# 1 МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

## 1.1 Основні поняття та терміни

Термін “керування” (вживається також “управління”) охоплює надзвичайно широке коло понять, що викликано різною природою об’єктів, наприклад керування технологічним процесом, підприємством чи державою. Крім того, під керуванням (управлінням) розуміють також командування військами, керування транспортними засобами (судном, літаком, автомобілем), диригування оркестром і інша. З цієї точки зору ТАУ – частина кібернетики, яка вивчає процеси використання інформації і управління в системах різної фізичної природи.

*Автоматизація виробництва* – один з важливих факторів науково-технічного процесу, за рахунок якої відбувається інтенсифікація процесів випуску продукції та зменшення витрат енергетичних та матеріальних ресурсів. Сучасні системи керування мають складну багаторівневу (ієрархічну) структуру, в якій використовуються обчислювальні мережі різного рівня на основі ЕОМ та мікропроцесорних засобів.

В даних текстах лекцій розглядаються локальні системи автоматичного регулювання, які призначені для підтримання необхідних технологічних режимів, які характеризуються певним набором значень технологічних змінних – температури, рівня, тиску, концентрації і інш. Розглядаються також питання оптимізації технологічних режимів, а також можливості пристосування (адаптації) систем до змінюваних умов роботи. Для складних технологічних об’єктів розробляються системи керування, які також мають достатньо складну структуру і розвинені зв’язки між окремими частинами(елементами).

*Автоматика* – технічна наука, яка розробляє принципи побудови автоматичних систем та необхідних для них засобів, методи аналізу і синтезу цих систем.

*Керування технічним процесом* – цілеспрямована діяльність, направлена на досягнення бажаних результатів (отримання прибутку, мінімальної собівартості продукції, забезпечення її якості) на основі отримання та обробки інформації про стан об’єкта та умови його роботи. В процесі керування виконується ряд операцій, які відповідають таким етапам :

- збирання інформації про стан об’єкта та зовнішнє середовище;
- аналіз та обробка інформації;
- прийняття рішень на основі необхідної інформації;

– реалізація керуючих дій за допомогою технічних засобів.

Виконання цих операцій забезпечує автоматичний контроль процесу, пуск та зупинку технологічних агрегатів, підтримання необхідних режимів при виконанні вимог надійності та стійкості.

Система автоматичного управління (керування) – сукупність об'єкта та автоматичного пристрою керування.

Автоматизована система керування передбачає участь у формуванні керуючих дій людини (особи, яка приймає рішення - ОПР). Автоматизовані системи створюються для складних об'єктів, де участь людини в прийнятті рішень є визначальною, а для цього необхідно отримати та переробити великі масиви інформації.

Автоматичні системи забезпечують виконання всіх функцій керування без участі людини (автоматично), але для обслуговування, ремонту та налагодження потрібні кваліфіковані спеціалісти.

*Автоматичні системи регулювання (АСР)* – сукупність об'єкта та пристрою керування (автоматичного регулятора), процес функціонування яких характеризується тим, що відомі задані значення регульованих координат.

*Об'єкт керування* (регулювання, автоматизації, керований об'єкт) – технологічний процес, агрегат або комплекс, призначений для здійснення впливу на сировину, матеріали для отримання продукту чи напівпродукту. В складних системах керування об'єктом може бути виробництво, підприємство, галузь промисловості. В будь-якому випадку для досягнення мети функціонування необхідно сформулювати керуючі дії, які компенсують небажані відхилення від обраного режиму. Зрозуміло, що об'єкти можуть бути різної природи, мають різне призначення, виконувати різні функції. В той же час система керування створюється саме для об'єкта, тому його властивості визначають основні характеристики системи керування – її структуру, функції, показники стійкості та якості. Таким чином, саме об'єкт визначає призначення системи керування, наприклад : автоматизована система керування підприємством, автоматична система керування випарною установкою, автоматична система регулювання температури і т.д.

## **1.2 Історія ТАУ**

Перші пристрої автоматичного управління – самостріли, водяні та повітряні двигуни, з'явилися багато тисячоліть тому. Математичні елементи – диференціальні рівняння – кілька століть тому, але теорія саме автоматичного управління – не більше 100-130 років.

Перші праці (Раус, Гурвиць, Ляпунов, Вишнеградський, ...) були пов'язані з розробкою регуляторів частоти обертання парових машин, парових турбін, електродвигунів (1860-1900 роки).

Саме тоді інженери захотіли не підбирати, а розраховувати параметри регуляторів так, щоб САУ була стійкою, точною, швидкодіючою.

Далі областями застосування САУ були виробничі процеси (регулювання: температури, тиску, рівня, концентрації – всього, що можливо вимірювати і чим, зрозуміло, можна управляти, для чого і були отримані математичні моделі). З'явилися авторульові автопілоти.

З 30-х років почалися прикладні праці по ракетній техніці – ракета, на відміну від літака без САУ зовсім нестійка.

З тих пір системи озброєння – керовані ракети, танкові приціли, бомбові, ..., системи посадок, взльоту, стиковки, ... і т.д. стали традиційною областю застосування передових технічних і програмно-математичних методів управління.

Починаючи з 1970-х років з'являється нова область застосування САУ – станки з числовим програмним управлінням, роботи. Причому, роботу потрібно було не підтримувати температуру чи швидкість, а встановлювати колесо автомобіля на рухомому конвеєрі, заливши герметиком по контуру складне по формі скло автомобіля.

Відомі системи запалювання і вприску палива, які забезпечують мінімальні витрати пального. Найбільш масові регулятори в розвинених країнах – це регулятори в пральних машинах, тостерах, плитах, кондиціонерах і, найголовніше, в опалювальних системах.

### 1.3 Приклади об'єктів та систем автоматичного управління

#### ПРИКЛАД 1: Крилата ракета

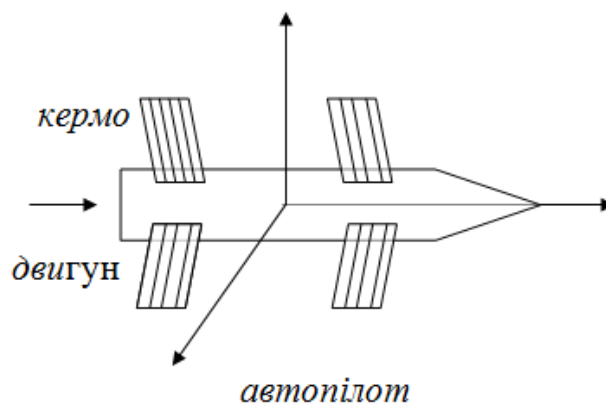


Рисунок 1.1 – Безпілотний літак

На рис. 1.1 представлений безпілотний літак з 0,5 т вибухівки; точність наведення до сантиметрів, може поцілити в замок на воротах ангара, у вентиляційну шахту.

Літає, зазвичай, на висоті 40-200м, використовуючи канами, русла для маскування дальності польоту 1000-5000 км.

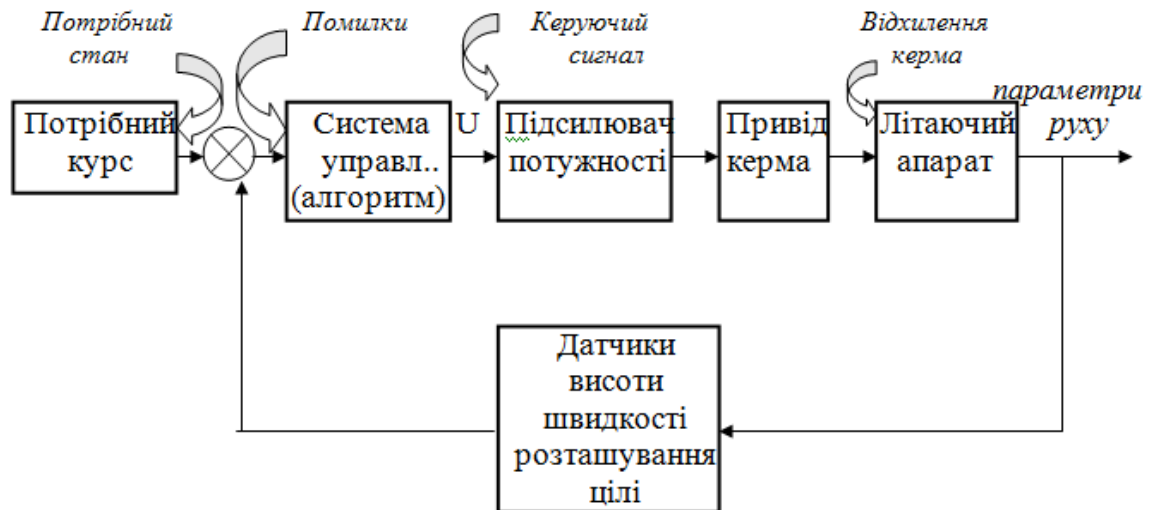


Рисунок 1.2 – Структурна схема системи управління безпілотним літаком

ПРИКЛАД 2: Терморегулятор устаткування для обробки напівпровідникових пластин

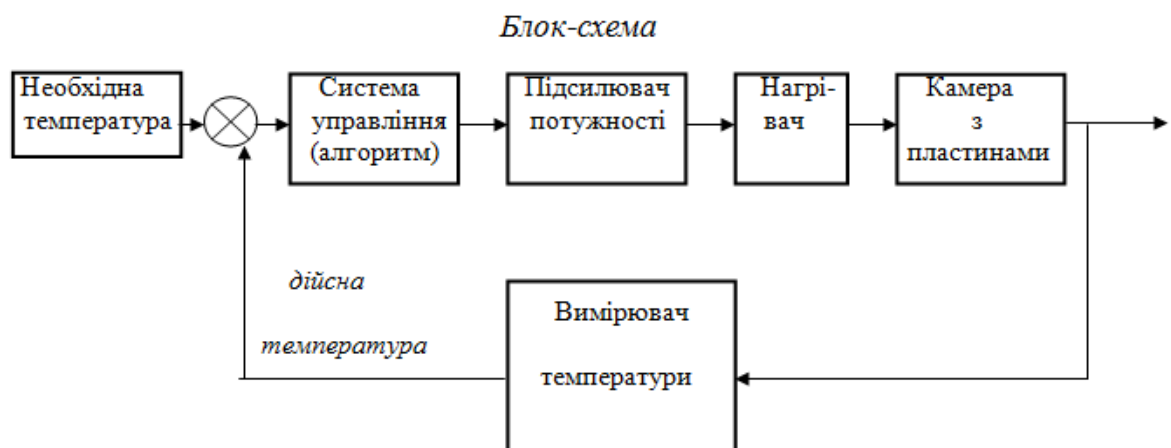


Рисунок 1.3 – Блок-схема терморегулятора

Якість пластин суттєво залежить від температури. Необхідна точність  $\pm 0,1^{\circ}\text{C}$ . На неіснуючому ВО "ЖОВТЕНЬ" мікросхеми температури

регулювалися вручну. Рівень браку – 70-80 %. В Японії на такому ж виробництві – 0,3 %, в США – 3%.

### ПРИКЛАД 3:

Системам автоматичного управління доручають: управляти нафтокомбінатом, енергосистемою, великим літаком, атомною електростанцією. Відмови в таких системах безцінні. Якою повинна бути ідеальна система для таких випадків? Розглянемо два приклади.

На рис. 1.4 наведена звичайна схема аварійного гасіння реактора при відсутності охолоджуючої води.



Рисунок 1.4 – Звичайна схема аварійного гасіння реактора

На рис. 1.5 наведена аварійна система (Швеція), яка не має датчиків і приводів. При падінні тиску в магістралі просто більш густа вода з солями барію витісняє воду та глушить і охолоджує реактор. Ідеальна САУ повинна бути звичайним механізмом, не мати цих самих датчиків, підсилювачів, приводів тощо.

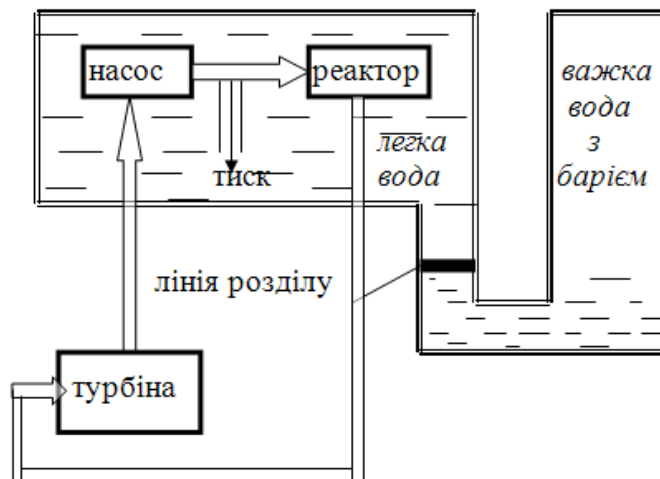


Рисунок 1.5 – Схема аварійного гасіння реактора (Швеція)

ПРИКЛАД 4: Система регулювання приводу лазерного компакт- диску - привід CD-ROM

Всі ви знаєте, що в сучасних масових комп'ютерах, крім звичних пристроїв зовнішньої пам'яті на магнітних дисках, широко використовуються лазерні компакт-диски, першочергово розроблені для звукозапису/відтворення.

До речі, про термінологію: те, що для аудіоплатівок — програвач, те що для магнітних дисків — дисковід, а те, що для лазерних комп'ютерних дисків (КД) —привід.

Сьогодні привід КД коштує 200-800\$ і буде дешевшати, диск сам по собі—2-3 \$, а ціна його визначається тим, що там записано:

- енциклопедія – 50-100 \$;
- ігри – 10-20 \$;
- програмна система з документацією – 1000 \$.

Стандартна ємність компакт-диска  $\approx 600$  Мбайт. Ширина доріжки 1/200 товщини людської волосини.

Нормально може працювати така система при субмікронній точності позиціонування головки відносно доріжки на диску (мікрон = 0,001 мм).

На відміну від приводу магнітного диску, голівкою зчитування керує не одна, а цілих три САУ:

- 1) позиціонування на доріжці;
- 2) витримування висоти над доріжкою;
- 3) витримування постійної лінійної швидкості переміщення диску під голівкою зчитування.

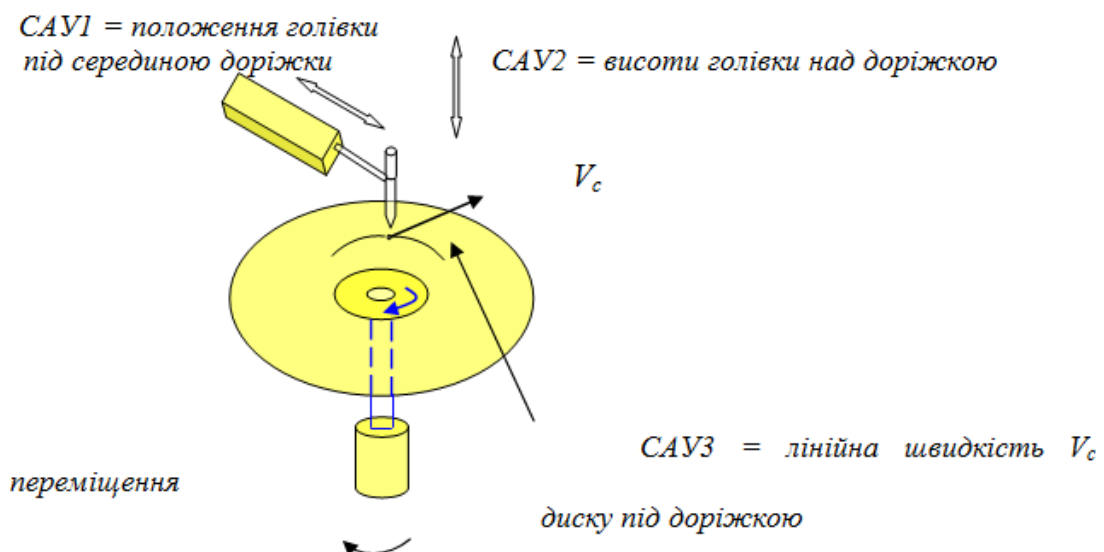


Рисунок 1.6 – Керування САУ голівкою зчитування

Між іншим, *навіщо тут потрібні САУ?*

Тому, що диск з'ємний, при обертанні має радіальні та вісьові биття – і щоб голівка читала потрібну доріжку, не розфокусовувалась необхідно на кожному оберті рухати голівку, відстежуючи ці биття.

Саме ці системи були не під силу радянській промисловості.

Сьогодні навіть виробництво обгортки для шоколаду, програвачів – неможливе без високої науки, без високої технології, не в останню чергу – в галузі управління.

ПРИКЛАД 5: Електродвигун постійного струму з незалежним збудженням

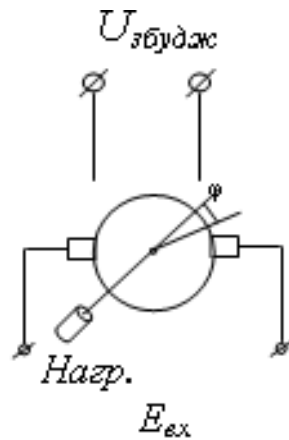


Рисунок 1.7 – Електродвигун постійного струму

Запишемо рівняння динаміки для ротора двигуна і того, що цей електродвигун переміщує. В якості змінної виберемо кут повороту вала  $\varphi$  (1.1)

$$\underbrace{I_{\text{прив.}}}_{\text{приведений момент інерції}} \cdot \underbrace{\frac{d^2\varphi}{dt^2}}_{\text{кутове прискорення}} = \underbrace{M_{\text{рух.}}}_{\text{рухомий момент}} - \underbrace{M_{\text{нав.}}}_{\text{момент навантаження}} \quad (1.1)$$

Для електродвигуна постійного струму з незалежним збудженням справедлива залежність:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\text{двиг.}} = \underbrace{k}_{\text{парам. двигуна}} \cdot \underbrace{i_{\text{я}}}_{\text{струм якоря}} \end{array} \right. \quad (1.2)$$

$$i_{\text{я}} = \frac{U_{\text{я}}}{R_{\text{я}}} \quad (1.3)$$



Для кола якоря рівняння Кірхгофа для напруг мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\text{вх.}} = U_{\text{я}} + \underbrace{U_c}_{\text{проти ЕРС}}, \\ U_c = c \cdot \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\text{парам. кутова}} \end{array} \right. \quad (1.4)$$

двиг. швидкість

Вирішуючи спільно (1.1)-(1.5) і нехтуючи моментом навантаження  $M_{\text{навант.}}$ , отримаємо:

$$\frac{I_{\text{прив}} \cdot R_{\text{я}}}{k \cdot c} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{c} \cdot E_{\text{вх.}} \quad (1.6)$$

Введемо стандартні позначення:

$$\underbrace{T_{\text{ем}} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}}_{\substack{\text{електро-механ.} \\ \text{пост. часу}}} + \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\substack{\text{коеф.} \\ \text{передачі}}} = k_1 \cdot E_{\text{вх.}} \quad (1.7)$$

Якщо ввести замість  $\varphi$  змінну  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  – швидкість обертання, то маємо:

$$T_{\text{ем}} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega = k_1 \cdot E_{\text{вх}} \quad (1.8)$$

В сталому режимі,  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ , тому:

$$\omega = k_1 \cdot E_{\text{вх}} \quad (1.9)$$

Рівняння (1.8) – рівняння динаміки, рівняння (1.9) – рівняння статики.

Розглянемо коротко ще декілька класичних об'єктів управління – детальні процедури отримання математичних моделей (ММ) динаміки для цих об'єктів можете знайти в учбових посібниках.

ПРИКЛАД 6: Економіка - динаміка виробництва

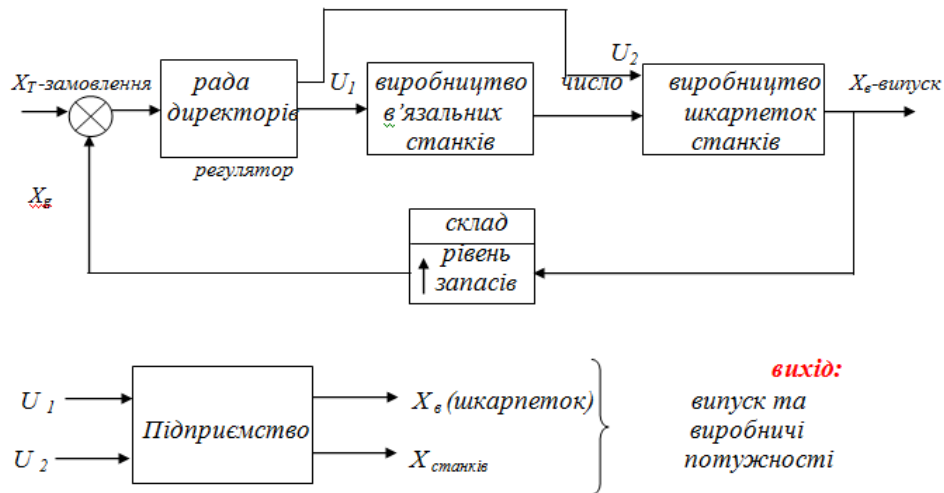


Рисунок 1.8 – Структурна схема управління виробництвом

**Вхід** – капіталовкладення:

$U_1$  – в основні фонди – виробництво станків;

$U_2$  – в робочу силу та сировину – виробництво шкарпеток.

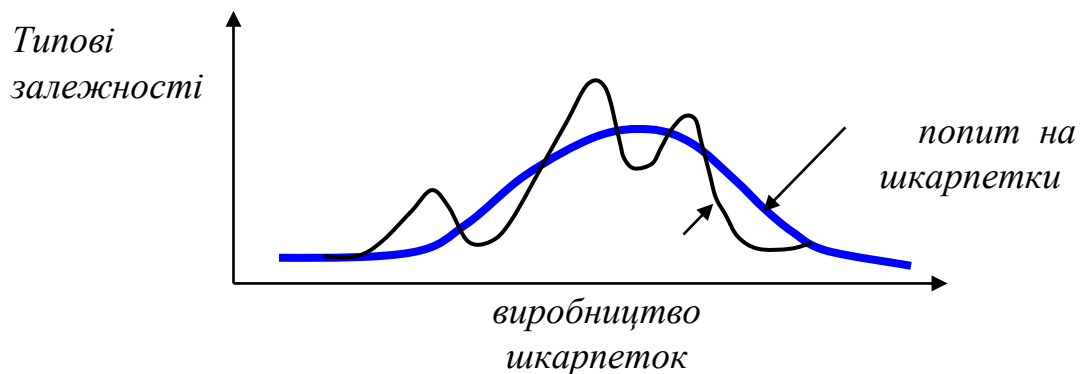


Рисунок 1.9 – Залежність виробництва від попиту

Попередні висновки: підприємство, як і літак, може бути нестійким.

## 1.4 Склад типової САУ

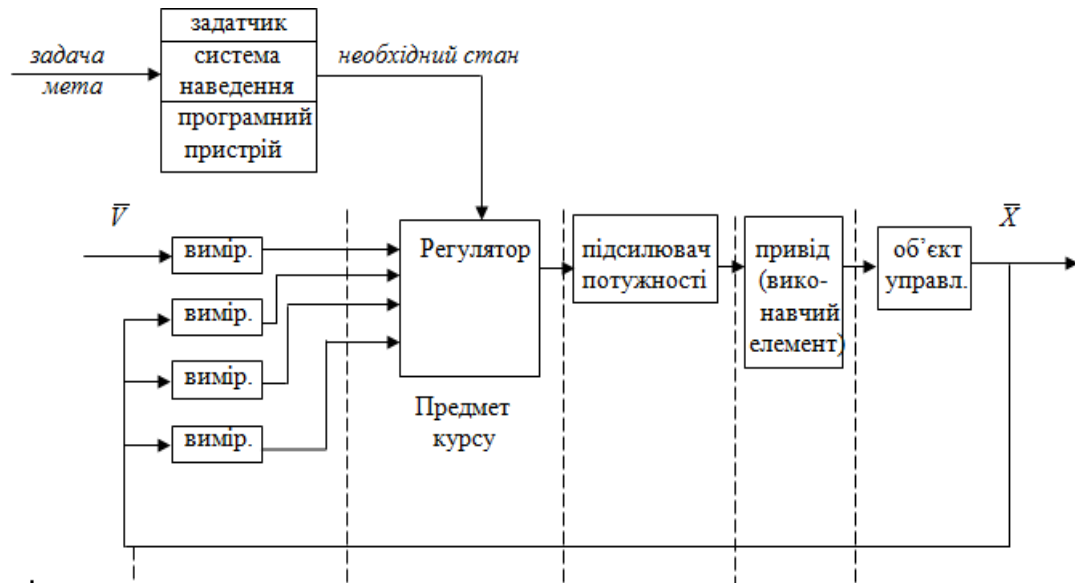
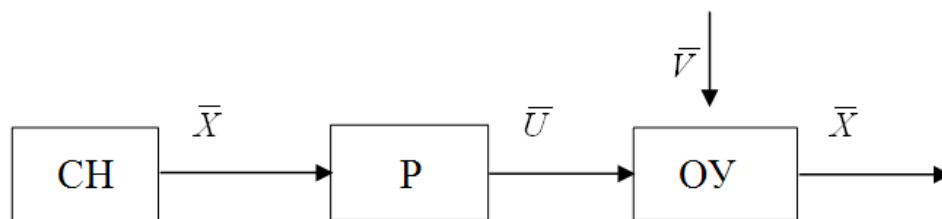


Рисунок 1.10 – Склад типової САУ

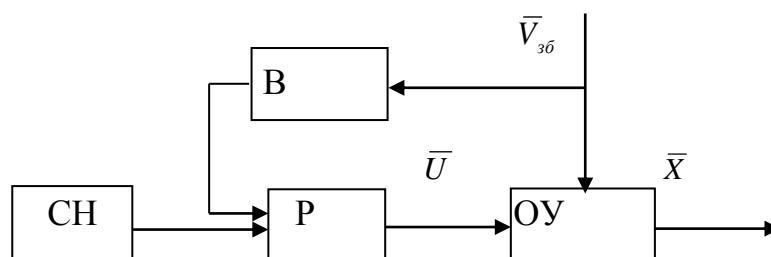
Предметом курсу в основному є вивчення регулятора (аналіз і синтез), все інше при синтезі САУ, як правило задано.

## 1.5 Фундаментальні принципи управління

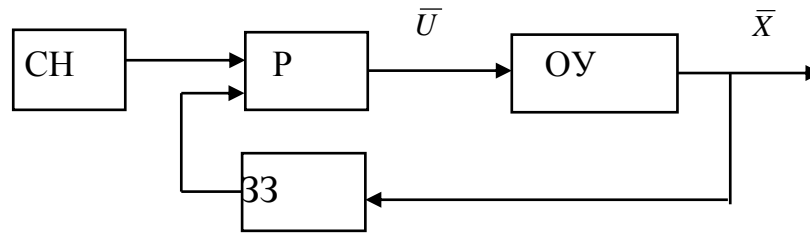
1) *Принцип програмного управління* (закон зміни керованої величини раніше відомий).



2) *Принцип управління по збуренню.*



3) *Принцип управління по відхиленню (по помилці) – зі зворотнім зв'язком.*



СН – система наведення (програмний пристрій, задавач);

Р – регулятор;

ОУ – об'єкт управління;

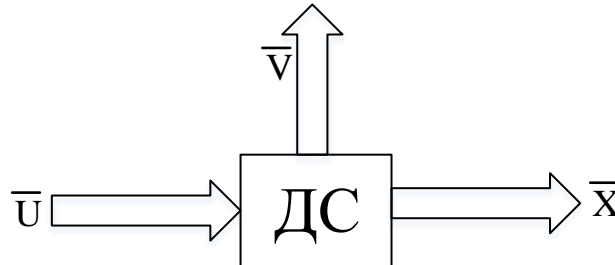
ЗЗ – зворотній зв'язок;

В – вимірювач.

В реальних системах можна зустріти всі три типи управління.

## 1.6 Динамічні системи

Всі об'єкти і системи можуть бути описані в термінах управління, збурення, виходу (стану).



$\bar{U}$  – управління (вхід керуючий)

(вектор управління);

$\bar{V}$  – збурення (вхід обурюючий)

(вектор збурення);

$\bar{X}$  – стан (вихід )

(вектор стану).

Більш загальний математичний опис динамічної системи (ДС):

$$F_j(\bar{X}, \dot{\bar{X}}, \ddot{\bar{X}}, \dots, \bar{U}, \dot{\bar{U}}, \ddot{\bar{U}}, \dots, \bar{V}, \dot{\bar{V}}, \ddot{\bar{V}}, \dots) = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

де  $m$  – кількість рівнянь;

похідні можуть бути будь-якого порядку;

функції можуть бути будь-якого виду, наприклад,  $\left(\frac{d^2 x_1}{dt^2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{d^3 u}{dt^3}\right)$ .

За допомогою нескладних підстановок можемо отримати систему диференціальних рівнянь з похідними не вище першого порядку, наприклад, запишемо рівняння:

$$\frac{d^4 x}{dt^4} = u,$$

чотирма наступними рівняннями:

<i>Заміна</i>	<i>Диф. рівняння</i>
$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ x_3 = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} \\ x_4 = \frac{d^3 x}{dt^3} = \dddot{x} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = u \end{array} \right.$

Отже, одне диференціальне рівняння 4-го порядку можемо замінити чотирма рівняннями першого порядку.

В більшості випадків можна вирішити диф. рівняння відносно похідних:

$$\dot{\bar{x}}_i = f_i(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t), t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Такий вид рівняння називається *формою Коші*.

Визначення: динамічні системи, в яких коефіцієнти прямо залежать від часу, називаються нестационарними.

Найбільш типовий приклад нестационарних систем – космічна ракета, маса якої зміниться в польоті в 5-20 раз через вигорання палива і скидання ступенів.

В деяких випадках функції  $f_i$  – лінійні:

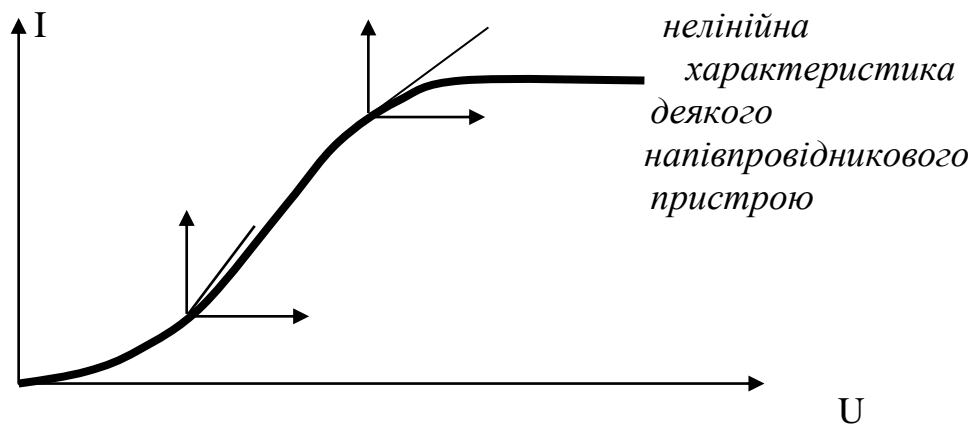
$$\dot{\bar{x}}_i = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} \cdot x_n + b_{i1} \cdot u_1 + \dots + b_{im} \cdot u_m,$$

де  $a_{in}, b_{im}$  – коефіцієнти.

Для лінійних динамічних систем (ЛДС) існують загальні фундаментальні і потужні методи аналізу і синтезу, а для нелінійних систем таких загальних методів не існує.

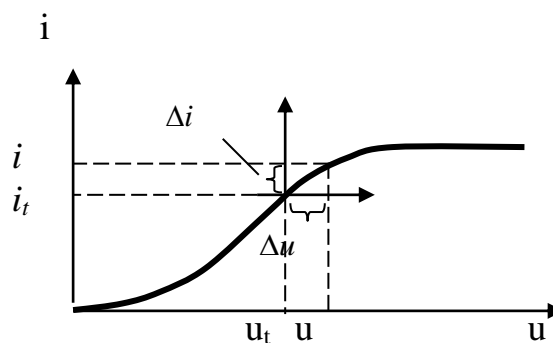
Реальні об'єкти взагалі нелінійні.

Чи можливо так хитро скласти рівняння об'єкта, щоб вони були лінійні? Ваші пропозиції?



Чи можливо користуватись лінійною залежністю?

Так, якщо вибрати на нелінійній залежності відповідно початок і діапазон вимірювання змінних.



$$\begin{cases} \Delta i = i - i_t, \\ \Delta u = u - u_t. \end{cases} \quad \Delta i = k \cdot \Delta u \text{ — лінійна залежність; } k = \left. \frac{di}{du} \right|_{U=U_T}.$$

Процес отримання лінійної математичної моделі з початкової нелінійної називається *лінеаризацією*.

Розглянемо один з методів лінеаризації нелінійних рівнянь динаміки об'єкта – *метод малих збурень*.

### 1.7 Лінеаризація. Метод малих збурень

*Обґрунтування* використання методу в задачах аналізу та синтезу САУ.

Добре спроектована САУ повинна підтримувати малі відхилення змінних, які регулюються, відносно знань, які потрібні, а метод малих збурень базується на припущенні про меншості зміни змінних, який дозволяє замінити всі нелінійні залежності наближеними лінійними.

Коротко розглянемо суть методу і приклади лінеаризації.

Дано:

$$1) F_i(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \bar{u}, \dot{\bar{u}}, \dots) = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

Первісні (загальні) рівняння об'єкту;

$$2) F_{iT}(\bar{x}_T, \dot{\bar{x}}_T, \bar{u}_T, \dot{\bar{u}}_T, \dots) = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

Рівняння об'єкту для режиму, який потрібен (опорного).

Розв'язок:

1) Введемо нові змінні, їх називають “збуреннями” (це джерело плутанини!):

$$\begin{cases} \Delta x_i(t) = x_i(t) - x_{iT}(t), & i = \overline{1, n}, \\ \Delta u_i(t) = u_i(t) - u_{iT}(t). \end{cases}$$

2) Замінімо  $\bar{x}(t)$  і  $\bar{u}(t)$  в початкових рівняннях на  $x_T + \Delta \bar{x}$ ,  $u_T + \Delta \bar{u}$ , виконаємо алгебраїчні перетворення.

3) Всі нелінійні залежності типу  $\varphi(\bar{x}, \bar{u}, \dots)$  розкладаємо в ступеневі (багатомірні) ряди відносно  $\varphi(\bar{x}_T, \bar{u}_T)$  по ступеням  $\Delta \bar{x}, \Delta \bar{u}$  і обмежуємося доданками порядку не вище першого, наприклад :

$$x_1 \cdot x_2 = (x_{1T} + \Delta x_1) \cdot (x_{2T} + \Delta x_2) = x_{1T} \cdot x_{2T} + x_{1T} \cdot \Delta x_2 + x_{2T} \cdot \Delta x_1 + \underbrace{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2}_{\approx 0}$$

$$\sin(x_{1T}) = \cos(x_1) \cdot \Delta x_1 - \underbrace{\frac{1}{2} \sin(x_1) \cdot \Delta x_1^2 + \frac{1}{3} \cos(x_1) \cdot \Delta x_1^3 \dots}_{\approx 0}$$

$$\frac{\Delta x}{x_T} \leq 1; \quad \left( \frac{\Delta x}{x_T} \right)^2 - \text{мала величина вищого порядку.}$$

4) Після підстановки і відкидання доданків менше першого порядку меншості, з початкових рівнянь віднімаються відповідні рівняння для опорного режиму, в кінці отримаємо систему лінійних диференціальних рівнянь відносно змінних  $\Delta x_i, \Delta u_i, i = \overline{1, n}$ , які за *термінологією Ляпунова* називаються рівняннями першого наближення.

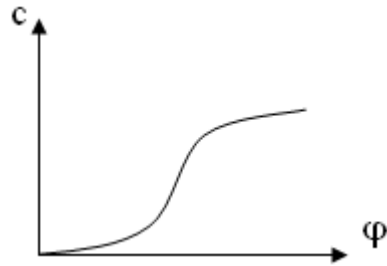
Коефіцієнти цих рівнянь – певні функції від параметрів і змінних опорного режиму. Вони можуть бути *постійними (стаціонарна система)* і *змінними (нестационарна система)*.

Лінійна частина прирощеної функції – це диференціал. Тому, практично, лінеаризація зводиться до диференціювання початкових рівнянь.

Розглянемо приклад лінеаризації, вважаючи, що  $U_{зб.}$  – змінна управління.

Початкові рівняння:

$$\begin{cases} E_{вх.} = i_{я} \cdot R_{я} + c(\dot{\varphi}) \cdot \dot{\varphi}, \\ M_{дв.} = k \cdot i_{я} \cdot i_{зб.}, \\ U_{зб.} = i_{зб.} \cdot R_{зб.}, \\ I_n \cdot \ddot{\varphi} = M_{дв.} - M_{нагр.}, \\ M_{нагр.} \leq M_{дв.} \Rightarrow M_{нагр.} \approx 0. \end{cases}$$



де  $c(\dot{\varphi})$  – нелінійна залежність коефіцієнту, що залежить від конструкції двигуна.

Перетворимо ці рівняння, виключимо проміжні змінні:

$$I_n \cdot \ddot{\varphi} = k \cdot \frac{U_{зб.}}{R_{зб.}} \cdot \left( \frac{E_{вх.}}{R_{я}} - \frac{c(\dot{\varphi})}{R_{я}} \cdot \dot{\varphi} \right);$$

$$I_n \cdot \ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{k \cdot \overbrace{c(\dot{\varphi})}^{нелін.}}{R_{зб.} \cdot R_{я}} \cdot \dot{\varphi} \cdot U_{зб.}}_{нелін.} = \frac{k}{R_{зб.} \cdot R_{я}} \cdot \underbrace{U_{зб.} \cdot E_{вх.}}_{нелін.}$$



Лінеаризуємо це рівняння – диференціюємо по  $\varphi$ ,  $E_{\text{вх}}$ ,  $U_{\text{зб.}}$  і при всіх змінних без знака диференціала  $\Delta$  ставимо індекс  $T$ -опорного руху.

$$d(a \cdot x \cdot y \cdot z) = a \cdot (\Delta x \cdot y \cdot z + \Delta y \cdot x \cdot z + \Delta z \cdot x \cdot y)$$

$$\begin{aligned} I_n \cdot \Delta \ddot{\varphi} + \frac{k}{R_{\text{зб.}} \cdot R_{\text{я}}} \cdot \left( \frac{\partial c(\dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}} \cdot U_{\text{зб.}T} \cdot \dot{\varphi}_T \cdot \Delta \dot{\varphi} + c(\dot{\varphi}) \cdot U_{\text{зб.}T} \cdot \Delta \dot{\varphi} + c(\dot{\varphi}) \cdot \dot{\varphi}_T \cdot \Delta U_{\text{зб.}} \right) = \\ = \frac{k \cdot U_{\text{зб.}T}}{R_{\text{зб.}} \cdot R_{\text{я}}} \cdot \Delta E_{\text{вх.}} + \frac{k \cdot E_{\text{вх.}T}}{R_{\text{зб.}} \cdot R_{\text{я}}} \cdot \Delta U_{\text{зб.}}. \end{aligned}$$

Групуємо, нормуємо:

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\varphi} + A_1 \cdot \Delta \dot{\varphi} &= k_1 \cdot \Delta E_{\text{вх.}} + k_2 \cdot \Delta U_{\text{зб.}}, \\ \text{де} \quad A_1 &= \frac{k}{I_n \cdot R_{\text{зб.}} \cdot R_{\text{я}}} \cdot \left( \frac{\partial c(\dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}} \cdot U_{\text{зб.}T} \cdot \dot{\varphi}_T + c(\dot{\varphi}) \cdot U_{\text{зб.}T} \right); \\ k_1 &= \frac{k \cdot U_{\text{зб.}T}}{I_n \cdot R_{\text{зб.}} \cdot R_{\text{я}}}; \quad k_2 = \frac{k \cdot E_{\text{вх.}T}}{I_n \cdot R_{\text{зб.}} \cdot R_{\text{я}}} - \frac{k \cdot c(\dot{\varphi}) \cdot \dot{\varphi}_T}{I_n \cdot R_{\text{зб.}} \cdot R_{\text{я}}}. \end{aligned}$$

Приведемо до форми Коші, для чого введемо стандартні позначення:

$$\begin{cases} x_1 = \Delta \varphi; \\ x_2 = \Delta \dot{\varphi}. \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = \Delta E_{\text{вх.}}; \\ u_2 = \Delta U_{\text{зб.}}. \end{cases} \quad \begin{cases} b_{21} = k_1; \\ b_{22} = k_2. \end{cases} \quad a_{22} = -A_1.$$

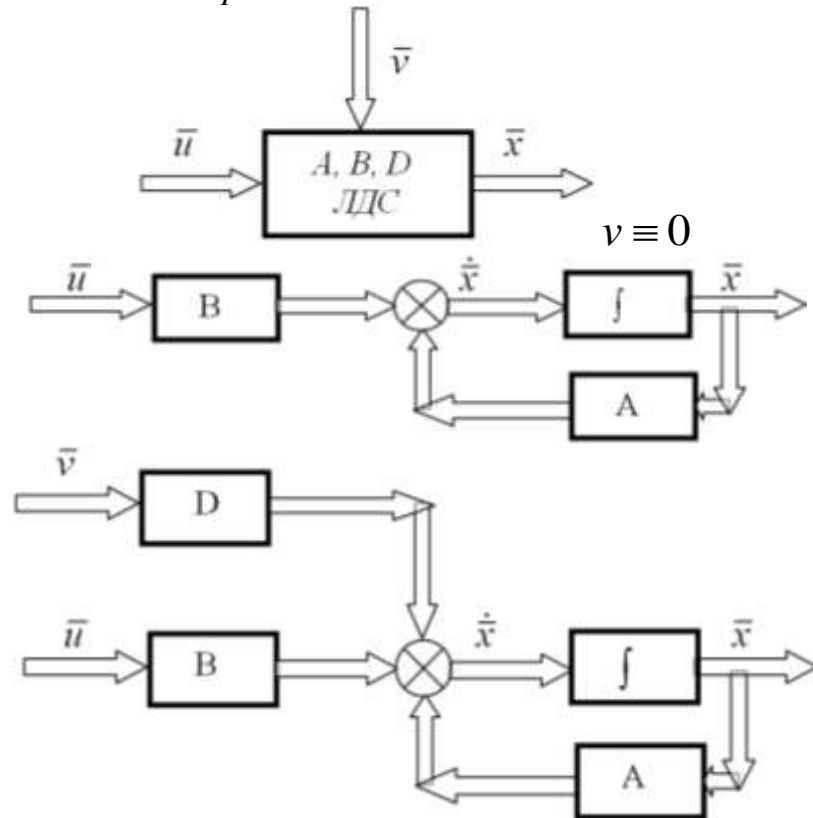
$$\text{Тоді:} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{22} \cdot x_2 + b_{21} \cdot u_1 + b_{22} \cdot u_2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x} + B \cdot \vec{u}$$

Аналогічно, можливо лінеаризувати будь-який об'єкт і завжди звести лінеаризовані рівняння до канонічної форми:

$$\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x} + B \cdot \vec{u} + D \cdot \vec{v},$$

де  $\vec{x}$  – вектор стану;  $\vec{u}$  – вектор управління;  $\vec{v}$  – вектор збурення;  
 $A$ ,  $B$ ,  $D$  – відповідні матриці;  $n$  – кількість змінних стану;  
 $m$  – кількість змінних управління;  $k$  – кількість змінних збурень.

Блок-схемне представлення лінійної динамічної системи :



Контрольні запитання:

1. Дайте визначення поняття “система автоматичного керування”.
2. В чому полягає процес функціонування системи автоматичного керування?
3. Поясніть основні терміни “система”, ”об’єкт”, ”регулятор” і інш.
4. Наведіть приклади класифікації систем автоматичного керування.

## 2 АНАЛІЗ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ ТА МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЛАНОК САУ

### 2.1 Аналіз лінійних динамічних систем (ЛДС)

#### 2.1.1 Перетворення Лапласа і його застосування для аналізу та синтезу САУ

В свій час множення за допомогою логарифмів звели до додавання:

$$\begin{array}{ccc} \text{“} \times \text{”} & \xrightarrow{\log} & \text{“} + \text{”} \\ \text{множення} & & \text{додавання} \end{array}$$

Перетворення Лапласа дозволяє замінити ці операції на ділення та множення відповідно. Хевісайд використовував аналогічне перетворення для розв’язку диференціальних рівнянь без чіткого обґрунтування. Пізніше Лаплас дав математичний фундамент для цього перетворення.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} \rightarrow p \cdot X, \\ \frac{d^2 X}{dt^2} \rightarrow p^2 \cdot X. \end{array} \right. \quad \text{оператор диференціювання Хевісайда}$$

Перетворенням Лапласа називають співвідношення

$$X(s) = \int_0^{\infty} X(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt,$$

яке ставить функції  $X(t)$  дійсної змінної у відповідність функцію  $X(s)$  комплексної змінної  $s$ , де  $s = \sigma + j \cdot \omega$ . При цьому  $X(t)$  називають оригіналом, а  $X(s)$  – зображенням або зображенням по Лапласу.

Те, що  $X(t)$  має своїм зображенням  $X(s)$ , або оригіналом  $X(s)$  є  $X(t)$ , записується так:

$$X(t) \stackrel{.}{=} X(s) \text{ або } X(s) \stackrel{.}{=} X(t).$$

Іноді також користуються символічним записом:

$$X(s) = L\{X(t)\},$$

де  $L$  – оператор Лапласа.

Передбачається, що функція  $X(t)$ , яка підлягає перетворенню Лапласа, має такі властивості:

- 1)  $X(t)$  визначена і кусково-диференційована на всій додатній числовій піввісі  $[0, \infty]$ ;
- 2)  $X(t) = 0$  при  $t < 0$ ;
- 3) існують такі додатні числа  $M$  і  $c$ , що  $|X(t)| \leq M \cdot e^{c \cdot t}$  при  $0 \leq t < \infty$  (росте не швидше, ніж експонента).

Функції, які мають три вказані властивості, називаються *функціями-оригіналами*.

Співвідношення

$$X(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \int_{\sigma - j \cdot \omega}^{\sigma + j \cdot \omega} X(s) \cdot e^{s \cdot t} \cdot ds,$$

яке визначає за відомим зображенням його оригінал (в точках неперервності останнього), називають *оберненим перетворенням Лапласа*.

Символічно обернене перетворення Лапласа можна записати так:

$$X(t) = L^{-1}\{X(s)\},$$

де символ  $L^{-1}$  – обернений оператор Лапласа.

Для *стаціонарних систем* ( $a_i = \text{const}$ ) перетворення Лапласа і Хевісайда співпадають.

### 2.1.2 Інтерпретації перетворення Лапласа

На основі перетворення Лапласа побудований ефективний та ефектний математичний апарат для розв'язку важливих прикладних та теоретичних задач.

Розглянемо одну з найбільш наочних інтерпретацій перетворення Лапласа.

Задача:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Що краще: 5 грн. сьогодні, чи 10 грн. через 5 років ?} \\ \text{Як порівнювати економічні результати, отримані в} \\ \text{різні моменти часу ?} \end{array} \right.$$

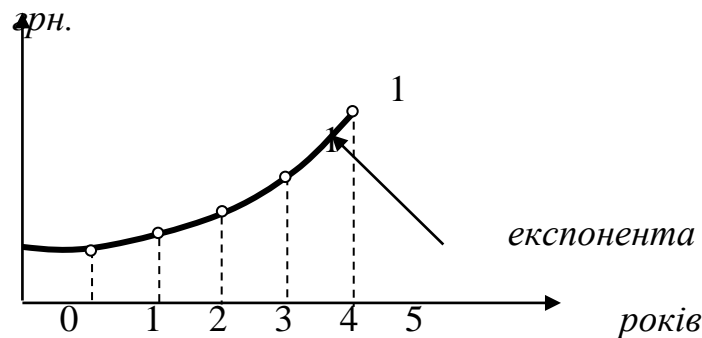
{ Або більш загальна постановка:  
 Як привести до одного часового горизонту різні варіанти  
 потоків прибутків і витрат ?

Чи знаєте Ви:

{ Чому дорівнюють нормовані коефіцієнти окупності  
 капіталовкладень ?  
 Чому дорівнює позиковий відсоток в банку ?

Віддамо гроші в банк і подивимось, що відбудеться.

Задамо  $\lambda$  (норма відсотку) = 20% і визначимо через 5 років яким стане вклад 5 грн. в банку.

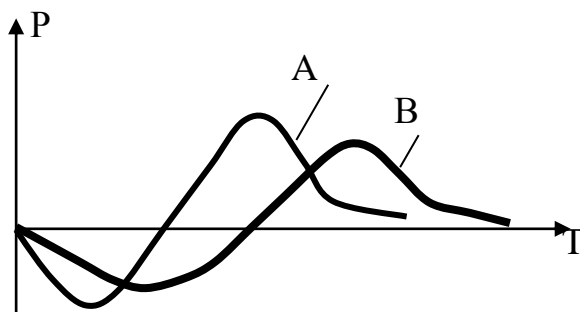


Отже, при  $\lambda=20\%$  і часовому горизонті – 5 років:

5 грн. (  $t=0$  )    10 грн. (  $t=5$  років )

Переважніше 12.45 грн.

Узагальнимо цю задачу: порівняємо два проекти А і В, які потрібні на початку затрат, а потім дають віддачу.



$P$  – потік платежів  
 (інтенсивність, швидкість)  
 приходу (відтоку грошей)  
 $\lambda$  – норма відсотку.

Кожну точку помножимо на експоненту і ці ординати додамо.

Приведені до деякого моменту часу  $T$  сумарні витрати-прибутки будуть виражатися формулою:

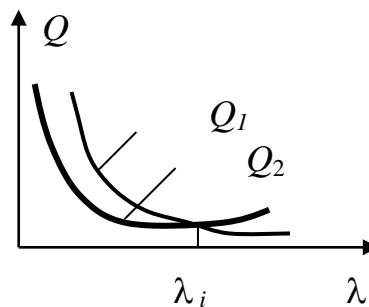
$$\begin{cases} Q_1(\lambda) = \int_0^T P_1(t) \cdot e^{\lambda \cdot T} \cdot dt \\ Q_2(\lambda) = \int_0^T P_2(t) \cdot e^{\lambda \cdot T} \cdot dt \end{cases}$$

приведений (дисконтований) сумарний прибуток.

Вибір слід зробити після порівняння:

$$Q_1(\lambda) < \text{або} > Q_2(\lambda).$$

При можливих значеннях  $\lambda$  - норми відсотку, нормованого коефіцієнту окупності



Вищеописана операція давно відома в бухгалтерсько-банківській справі та іменується дисконтуванням.

Але порівняємо формули перетворення Лапласа і дисконтування – вони структурно еквівалентні:

$$\lambda \leftrightarrow s ; \quad P(t) \leftrightarrow x(t).$$

В економіці розглядається кінцевий період часу (інтегрування) (див. А. Холл. Досвід методології для системотехніки).

### 2.1.3 Властивості перетворення Лапласа

1) Властивість лінійності:

$$L\{\alpha \cdot X_1(t) + \beta \cdot X_2(t)\} = \alpha \cdot L\{X_1(t)\} + \beta \cdot L\{X_2(t)\}.$$

2) Диференціювання оригіналу:

Якщо похідна  $\dot{X}(t)$  є функцією-оригіналом, то

$$L\left\{\dot{X}(t)\right\} = s \cdot X(s) - X(0),$$

де  $X(s) = L\{X(t)\}$ ;  $X(0) = 0$ , далі розглядаємо при нульових початкових умовах.

Якщо  $n$ -на похідна  $X^{(n)}(t)$  є функцією-оригіналом і початкові умови нульові:

$$L\{X^{(n)}(t)\} = s^n \cdot X(s).$$

Таким чином, при нульових початкових умовах диференціювання оригіналу відповідає множенню зображення на  $s$ .

### 3) Інтегрування оригіналу:

Інтегрування оригіналу зводиться до ділення зображення на  $s$

$$L\left\{\int_0^t X(t) \cdot dt\right\} = \frac{X(s)}{s}.$$

### 4) Теорема запізнення:

Для будь-якого додатного числа  $\tau$

$$L\{X(t - \tau)\} = e^{-s \cdot \tau} \cdot L\{X(t)\} = e^{-s \cdot \tau} \cdot X(s).$$

### 5) Теорема про згортку (теорема множення зображень):

Якщо  $X_1(t)$  і  $X_2(t)$  – оригінали, а  $X_1(s)$  і  $X_2(s)$  – їх зображення, то

$$X_1(s) \cdot X_2(s) = \int_0^t X_1(\tau) \cdot X_2(t - \tau) \cdot d\tau = \int_0^t X_2(\tau) \cdot X_1(t - \tau) \cdot d\tau.$$

Інтеграл правої частини рівності називають згорткою функції  $X_1(t)$  і  $X_2(t)$  і позначають  $X_1(t) * X_2(t)$ :

$$X_1(t) * X_2(t) = \int_0^t X_1(\tau) \cdot X_2(t - \tau) \cdot d\tau = \int_0^t X_2(\tau) \cdot X_1(t - \tau) \cdot d\tau.$$

### 6) Теорема про граничні значення (самостійно!):

Якщо  $X(t)$  – оригінал, а  $X(s)$  – його зображення, то  $X(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$  і при існуванні границі  $X(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t)$ , то  $X(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$ .

7) Теорема розкладання (самостійно!):

Якщо функція  $X(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ , то приводиться залежність  $X(t)$  від  $X(s)$ .

#### 2.1.4 Застосування перетворення Лапласа для розв'язання диференціальних рівнянь. Передаточні функції

Канонічна форма запису диференціальних рівнянь для одномірної системи  $n$ -го порядку:

$$\begin{aligned} a_n \cdot \frac{d^n X}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} X}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dX}{dt} + a_0 \cdot X = \\ = b_m \cdot \frac{d^m U}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} U}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{dU}{dt} + b_0 \cdot U + \\ + d_k \cdot \frac{d^k V}{dt^k} + d_{k-1} \cdot \frac{d^{k-1} V}{dt^{k-1}} + \dots + d_1 \cdot \frac{dV}{dt} + d_0 \cdot V. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Використовуючи оператор Хевісайда:

$$\frac{d}{dt} = p; \quad \frac{d^i}{dt^i} = p^i.$$

рівняння (2.1) перепишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} \underbrace{(a_n \cdot p^n + \dots + a_1 \cdot p + a_0)}_{Q(p)} \cdot X = \underbrace{(b_m \cdot p^m + \dots + b_1 \cdot p + b_0)}_{R_1(p)} \cdot U + \\ + \underbrace{(d_k \cdot p^k + \dots + d_1 \cdot p + d_0)}_{R_2(p)} \cdot V. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тоді рівняння (2.1) набуде такого виду:



$$Q(p) \cdot X = R_1(p) \cdot U + R_2(p) \cdot V, \quad (2.3)$$

де  $Q(p)$  – диференційний оператор при вихідній величині називають власним оператором;

$R_1(p)$  і  $R_2(p)$  – диференційні оператори при вхідних величинах – оператори впливу.

Відношення оператора впливу до власного оператора називають передаточною функцією або передаточною функцією в операторній формі.

Передаточна функція  $W_1$  по вхідній величині  $U$ :

$$W_1(p) = \frac{R_1(p)}{Q(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + \dots + b_1 \cdot p + b_0}{a_n \cdot p^n + \dots + a_1 \cdot p + a_0}. \quad (2.4)$$

Передаточна функція  $W_2(p)$  по вхідній величині  $V$ :

$$W_2(p) = \frac{R_2(p)}{Q(p)} = \frac{d_k \cdot p^k + \dots + d_1 \cdot p + d_0}{a_n \cdot p^n + \dots + a_1 \cdot p + a_0}. \quad (2.5)$$

Використовуючи передаточні функції, рівняння (2.1) запишемо у вигляді:

$$X = W_1(p) \cdot U + W_2(p) \cdot V. \quad (2.6)$$

Рівняння (2.3) і (2.6) називають рівняннями в символічній або операторній формі запису.

Одночасно з передаточною функцією в операторній формі широко використовують передаточну функцію в формі зображень Лапласа.

*Передаточною функцією або передаточною функцією в формі зображень Лапласа* називають відношення зображення вихідної величини до зображення вхідної величини при нульових початкових умовах.

Якщо система має декілька входів, то при визначенні передаточної функції відносно якої-небудь вхідної величини інші величини вважають рівними нулю.

$$W_1(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0}. \quad (2.7)$$

$$W_2(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{d_k \cdot s^k + \dots + d_1 \cdot s + d_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0}, \quad (2.8)$$

Передаточну функцію в формі зображень Лапласа можна отримати з передаточної функції в операторній формі, якщо в останній зробити підстановку  $p=s$ .

В загальному випадку це виходить з того, що диференціюванню оригінала (символічне множення оригінала на  $p$ ) при нульових початкових умовах відповідає множенню зображення на комплексне число  $s$ .

Схожість між передаточною функцією в формі зображень Лапласа і в операторній формі чисто зовнішня. Вона має місце тільки у випадку стаціонарних систем.

Використовуючи передаточні функції (2.7), (2.8) в зображеннях Лапласа можна записати :

$$X(s) = W_1(s) \cdot U(s) + W_2(s) \cdot V(s). \quad (2.9)$$

Рівняння (2.9), як і рівняння (2.6), адекватне рівнянню (2.1) тільки при нульових початкових умовах.

### 2.1.5 Передаточні функції багатомірних САУ

Дано:  $\dot{\bar{X}} = A \cdot \bar{X} + B \cdot \bar{U}$ .

Необхідно отримати: - передаточну функцію одновірної САУ;  
- передаточну матрицю багатомірної САУ.

Розв'язання:

Виконаємо перетворення Лапласа:

$$s \cdot \bar{X}(s) = A \cdot \bar{X}(s) + B \cdot \bar{U}(s),$$

$$(I \cdot s - A) \cdot \bar{X}(s) = B \cdot \bar{U}(s).$$

Вирішимо формально:

$$\bar{X}(s) = \underbrace{(I \cdot s - A)^{-1} \cdot B \cdot \bar{U}(s)}_{W''(s)},$$

де  $W''(s)$  – передаточна матриця.

$$\bar{X}(s) = W''(s) \cdot \bar{U}(s).$$

У скалярному вигляді:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}^u(s) & \dots & W_{1m}^u(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{n1}^u(s) & \dots & W_{nm}^u(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix},$$

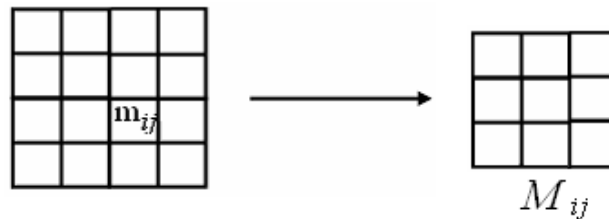
де  $W_{ij}^u(s)$  – елементи матриці  $(I \cdot s - A)^{-1} \cdot B$ .

Як відомо з курсу вищої математики, обернена матриця деякої матриці  $M(s)$

$$M^{-1}(s) = \frac{1}{\det(M(s))} \cdot \begin{bmatrix} \det(M_{11}) & \dots & \det(M_{1m}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \det(M_{n1}) & \dots & \det(M_{nm}) \end{bmatrix}^T,$$

де  $T$  – знак транспонування;

$M_{ij}$  – алгебраїчне доповнення до елемента  $m_{ij}$ .



Елементи передаточної матриці  $W^u(s)$  – дробово-раціональні функції від  $s$ , вони називаються передаточними функціями для  $i$ -ої змінної вектора стану по  $j$ -му управляючому впливу, тобто

$$W_{ij}^u(s) = \frac{X_i(s)}{U_j(s)} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \text{ДС} \end{array}$$

інші впливи, крім  $U_j$ , дорівнюють нулю.

$$X_1(s) = W_{11}^u(s) \cdot U_1(s) + \dots + W_{1m}^u(s) \cdot U_m(s).$$

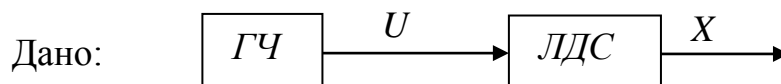
Для лінійних систем справедливий *принцип суперпозиції*.

## 2.2 Частотні характеристики

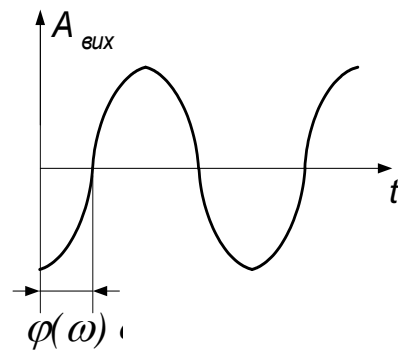
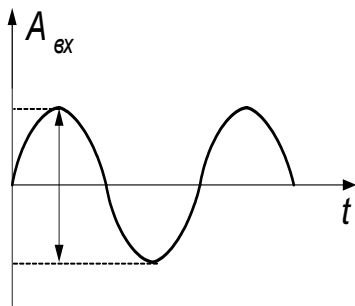
### 2.2.1 Експериментальне та аналітичне отримання ЧХ

ЧХ (частотні характеристики) – залежність амплітуди і фази від частоти.

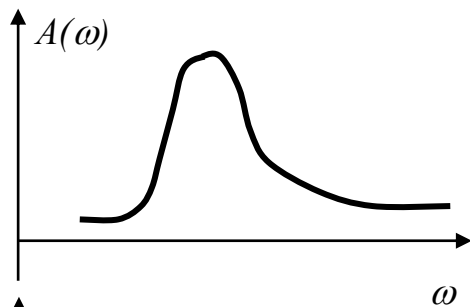
ЧХ – стандартний інструмент оцінки якості не тільки САУ, але й акустичних, радіотехнічних та інших систем.



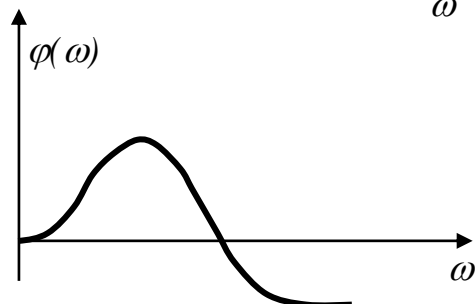
де ГЧ – генератор частоти.



Виміряємо  $A_{вих}$ ,  $\varphi_{вих}$  і побудуємо графіки.

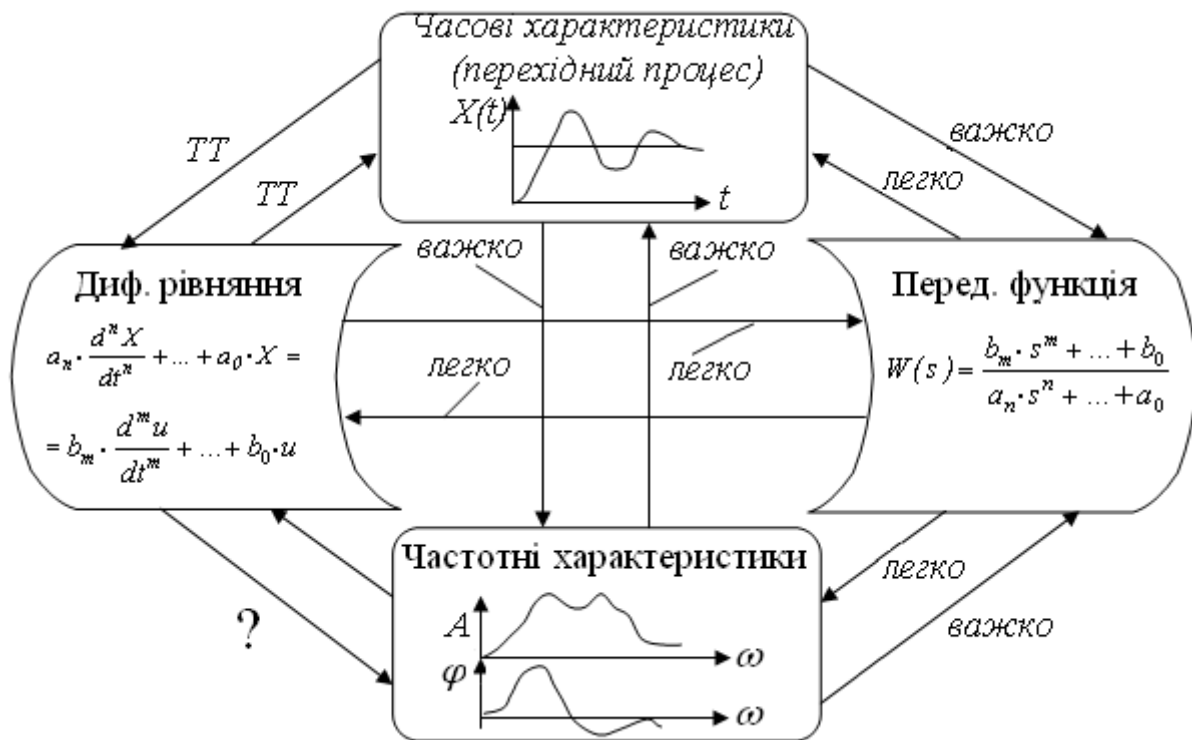


АЧХ – амплітудна характеристика завжди додатня.



ФЧХ – фазова характеристика може бути додатньою і від'ємною.

## 2.2.2 Аналітичне отримання ЧХ



де ТТ – дуже важко визначити.

Всі описи формально рівноцінні – несуть одну і ту ж інформацію. Вибір того або іншого засобу опису лінійної динамічної системи (ЛДС) залежить від умов розв’язку задачі, традицій тощо.

Частотні характеристики можна отримати експериментально і аналітично, якщо є опис у вигляді передаточної функції. Процедура отримання ЧХ по передаточної функції дуже проста.

Дано: Передаточна функція

$$W(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_0}.$$

Потрібно визначити:  $A(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$  - ?

Розв’язок:

1) Замість  $s$  підставляємо  $j\omega$ :

$$s \rightarrow j\omega.$$

Отримаємо:

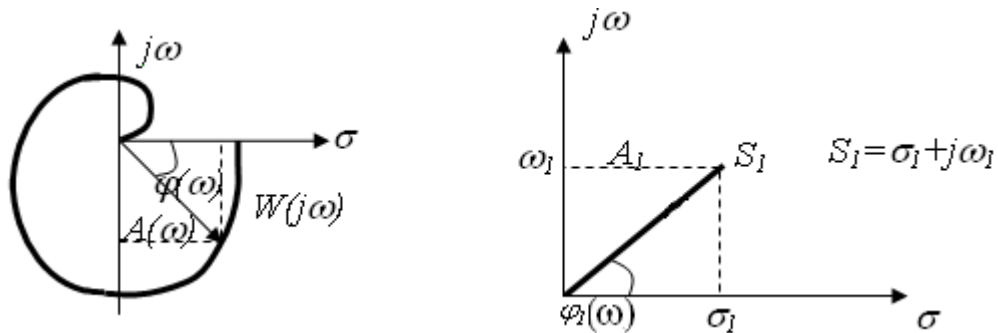
$$W(s) \rightarrow W(j\omega).$$

$W(j\omega)$  – називають частотною передаточною функцією;

$\omega$  – називають частотною змінною.

2)  $A(\omega) = |W(j\omega)|$  називають амплітудно-частотною функцією, її графік – амплітудною частотною характеристикою (АЧХ).

Аргумент  $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$  називають *фазовою частотною функцією*, її графік – *фазовою частотною характеристикою (ФЧХ)*.



Комплексне число можна записати через амплітуду  $A_1$  і фазу  $\varphi_1$ :

$$A_1 = \sqrt{\sigma_1^2 + \omega_1^2}; \quad \varphi_1 = \arctg \frac{\omega_1}{\sigma_1},$$

$s_1 = A_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_1}$  – тригонометрична форма.

Як знайти модуль:

$$\frac{\sigma_1 + j\omega_1}{\sigma_2 + j\omega_2} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \omega_1^2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \omega_2^2}};$$

$$s_1 = A_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_1}; \quad s_2 = A_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_2}; \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{A_1}{A_2} e^{j \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Всі передаточні функції дробово-раціональні вирази.

### 2.2.3 Приклади отримання ЧХ

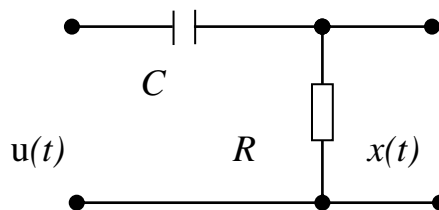
Дано:

$$W(s) = \frac{T \cdot s}{T \cdot s + 1};$$

$$T = R * C$$

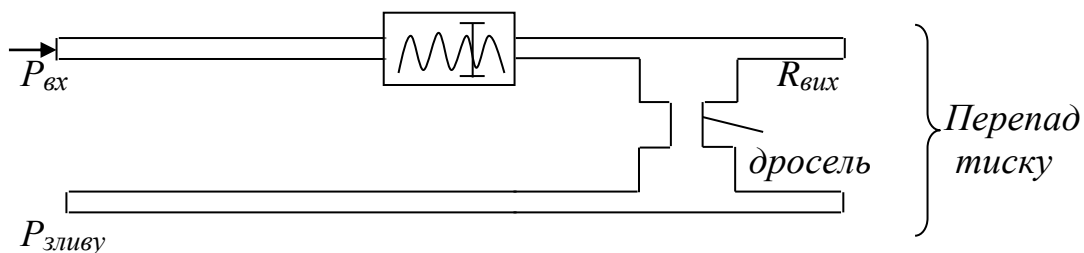
секунди    МОм    мкФ

(доведіть, що  $T$  вимірюється в сек.)



Зовсім різні по фізичному змісту пристрої часто мають однакові передаточні функції. Розглянемо гідравлічну систему :

*гідравлічна ємність*



Аналітичне отримання ЧХ :

$$s \rightarrow j\omega$$

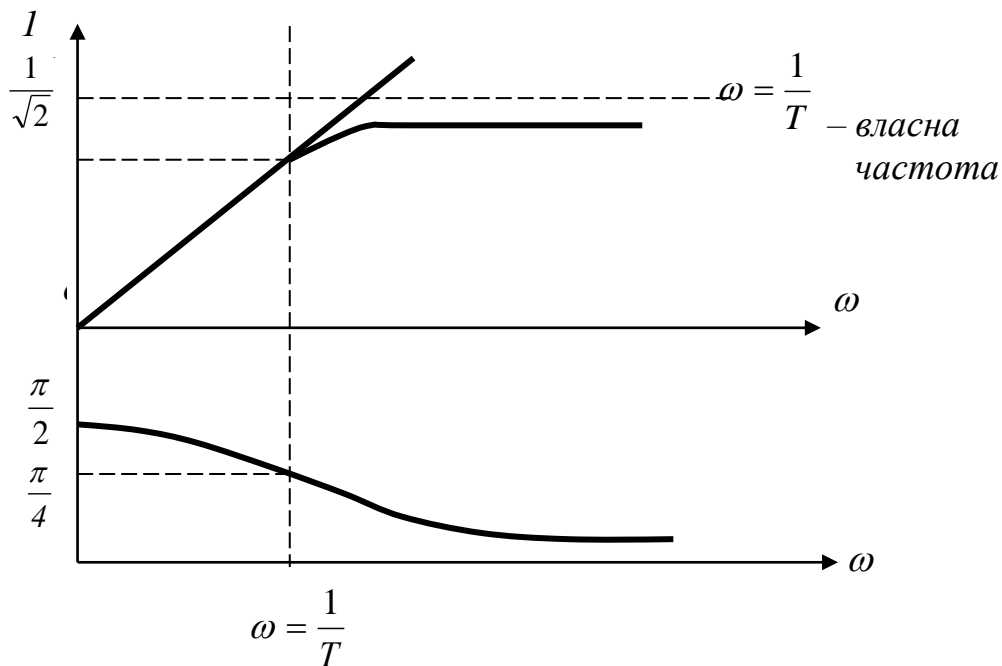
$$W(j\omega) = \frac{T \cdot j\omega}{T \cdot j\omega + 1} = \frac{(T\omega) \cdot j}{1 + (T\omega) \cdot j},$$

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{0^2 + T^2 \cdot \omega^2}}{\sqrt{1^2 + T^2 \cdot \omega^2}} = \frac{T \cdot \omega}{\sqrt{1 + T^2 \cdot \omega^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{T \cdot \omega}{0} - \arctg \frac{T \cdot \omega}{1} = \frac{\pi}{2} - \arctg(T \cdot \omega).$$

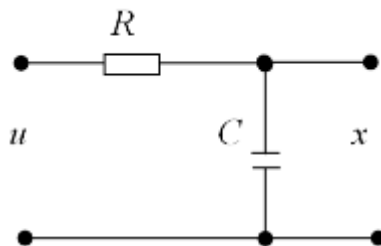
$$T^2 \omega^2 \ll 1$$

$$T^2 \omega^2 \gg 1$$

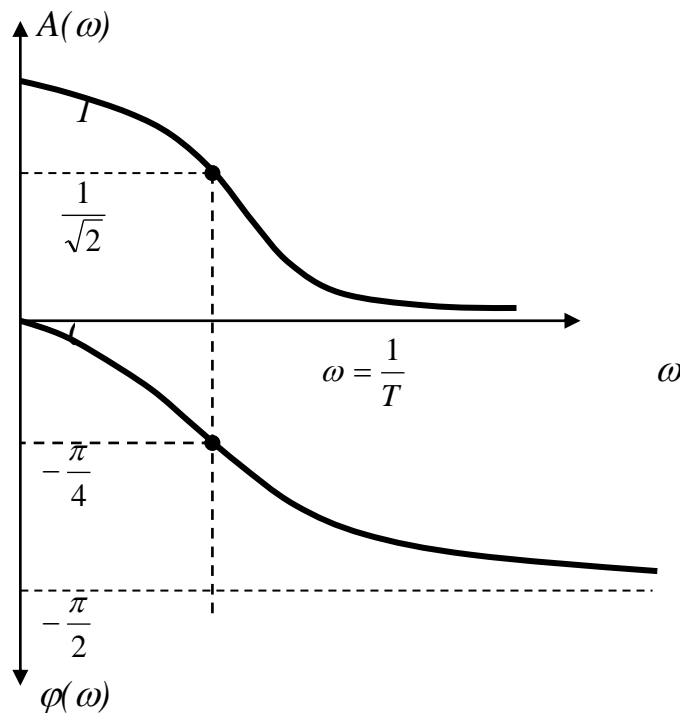


Отримаємо частотні характеристики, якщо

$$W(s) = \frac{1}{T \cdot s + 1}$$



$$W(j\omega) = \frac{1}{(T \cdot \omega) j + 1}; \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \cdot \omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{0}{1} - \arctg(T \cdot \omega) = -\arctg(T \cdot \omega).$$



Зазвичай будують  
наближені ЧХ

по характеристичним

$$\omega = 0 ; \omega = \infty$$

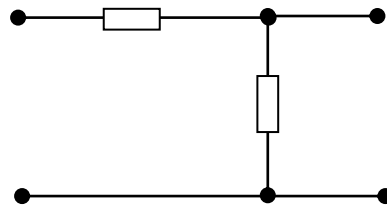
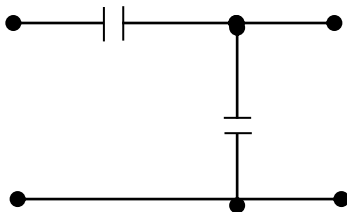
$$\omega = \frac{1}{T};$$

$$A\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

### Завдання для самостійної проробки

Знайти передаточні функції і побудувати частотні характеристики слідуючих ланцюгів :



### 2.2.4 Виведення аналітичного виразу для ЧХ

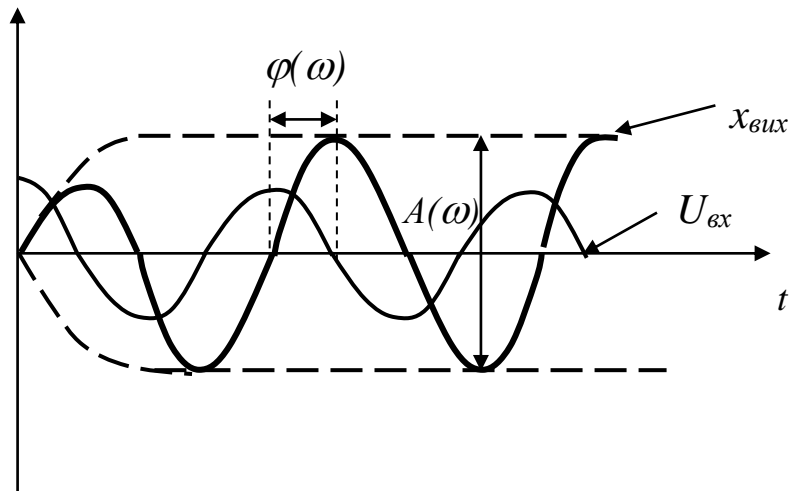
Отже, ми вже знаємо, що ЧХ можна отримати експериментально і аналітично з передаточної функції підстановкою  $s = j\omega$ . Давайте перевіримо, що ця формальна процедура дозволяє отримати ЧХ.

?

{ Дайте словесне визначення експериментальної процедури  
отримання для деякого конкретного значення  $\omega$  одної точки  
ЧХ.

Відповідь: подати на вхід ЛДС сигнал постійної амплітуди і частоти  $U_{\text{вх.}}$ , почекати коли закінчиться перехідний процес і виміряти  $A(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$ .





Переформулюємо це визначення на мову диференціальних рівнянь: отримаємо загальне рішення неоднорідного диференціального рівняння, яке описує ЛДС з правою частиною і розглянемо його рішення при  $t \rightarrow \infty$ .

**Дано:** ЛДС задана диференціальним рівнянням в канонічному вигляді:

$$a_n \cdot \frac{d^n X}{dt^n} + \dots + a_1 \cdot \frac{dX}{dt} + a_0 \cdot X = b_m \cdot \frac{d^m U}{dt^m} + \dots + b_1 \cdot \frac{dU}{dt} + b_0 \cdot U$$

або 
$$W(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_0}.$$

На вхід ЛДС подається гармонійний вплив:

$$U = U_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

**Знайти** вигляд рішення  $X(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Обмеження:** 1)  $n \geq m$ ;

2) ЛДС стійка.

**Повторення:**

З теорії лінійних диференціальних рівнянь відомо, що:

1) рішення однорідного диференціального рівняння:

$$a_n \cdot \frac{d^n X}{dt^n} + \dots + a_0 \cdot X = 0,$$

$$a_n \cdot s^n + \dots + a_0 = 0$$

має вигляд:  $X_{\text{власне}}(t) = c_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + \dots + c_n \cdot e^{s_n \cdot t},$

де  $s_1, \dots, s_n$  – корені характеристичного рівняння.

Якщо корені  $s_1, \dots, s_n$  мають від'ємні дійсні частини, то

$$X_{\text{власне}}(t) \rightarrow 0 \text{ – система стійка.}$$

при  $t \rightarrow \infty$

2) загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:  $X(t) = X_{\text{власне}}(t) + X_{\text{вимушене}}(t)$ ,

для стійкої системи:  $X(t) = X_{\text{вимушене}}(t)$ .

З теорії диференціальних рівнянь відомо, що окремі рішення шукаються в тій же формі, що і вхідний сигнал:

$$U = U_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

### Розв'язок:

1) Використаємо для представлення  $U(t)$  формулу Ейлера:

$$U(t) = U_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t) = U_1(t) + U_2(t) = U_{\max} \cdot \underbrace{\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}}_{\cos \omega t}$$

2) Використаємо принцип суперпозиції, справедливий для лінійних систем:

$$X_{\text{вим}}(t) = \underbrace{X_{1B}(t)}_{\text{реакція на } U_1(t)} + \underbrace{X_{2B}(t)}_{\text{реакція на } U_2(t)}$$

3) Згідно теорії диференціальних рівнянь:

$$X_{1B}(t) = A_1 \cdot U_1(t);$$

$$X_{2B}(t) = A_2 \cdot U_2(t),$$

де  $A_1, A_2$  – коефіцієнти, які підлягають визначенню.

4) Підставимо в перше диференціальне рівняння вираз для

$$X_{1B}(t) = A_1 \cdot \frac{U_{\max}}{2} \cdot e^{j\omega \cdot t}.$$

Врахуємо, що  $\frac{d(e^{j\omega \cdot t})}{dt} = (j\omega)e^{j\omega \cdot t}, \dots, \frac{d^n(e^{j\omega \cdot t})}{dt^n} = (j\omega)^n e^{j\omega \cdot t};$

З урахуванням цього:

$$A_1 \cdot \frac{U_{\max}}{2} \cdot e^{j\omega \cdot t} \cdot (a_n \cdot (j\omega)^n + \dots + a_0) = \frac{U_{\max}}{2} \cdot e^{j\omega \cdot t} \cdot (b_m \cdot (j\omega)^m + \dots + b_0).$$

$$\text{Звідси: } A_1 = \frac{b_m \cdot (j\omega)^m + \dots + b_0}{a_n \cdot (j\omega)^n + \dots + a_0}, \quad A_1 = W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)},$$

$$\begin{aligned} & A(\omega) = \text{mod}(W(j\omega)); \\ \text{за визначенням: } & \varphi(\omega) = \arg(W(j\omega)). \end{aligned}$$

Аналогічно отримаємо рішення для  $U_2(t)$ :

$$A_2 = W(-j\omega) = A(\omega) \cdot e^{-j \cdot \varphi(\omega)}.$$

А тепер запишемо вимушене рівняння:

$$\begin{aligned} X_{\text{вум}}(t) &= X_{1B}(t) + X_{2B}(t) = A_1 \cdot \frac{U_{\text{max}}}{2} \cdot e^{j\omega t} + A_2 \cdot \frac{U_{\text{max}}}{2} \cdot e^{-j\omega t} = \\ &= A(\omega) \cdot \frac{U_{\text{max}}}{2} \cdot (e^{j\omega t} \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)} + e^{-j\omega t} \cdot e^{-j \cdot \varphi(\omega)}) = \\ &= U_{\text{max}} \cdot A(\omega) \cdot \underbrace{\left( \frac{e^{j \cdot (\omega t + \varphi(\omega))} + e^{-j \cdot (\omega t + \varphi(\omega))}}{2} \right)}_{\cos(\omega t + \varphi(\omega))}. \end{aligned}$$

$$X_{\text{вум}}(t) = U_{\text{max}} \cdot A(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi(\omega)).$$

Дійсно, вихід – гармонійне коливання з амплітудою  $A(\omega) = \text{mod}(W(j\omega))$  і фазою  $\varphi(\omega) = \arg(W(j\omega))$  відносно вхідного сигналу.

## 2.2.5 Логарифмічні частотні характеристики

При використанні логарифмічних масштабів частотні характеристики набувають простого стандартного виду і набагато зрозумілішого, ніж при використанні натуральних масштабів.

$$W(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \cdot \text{Im}(\omega); \quad W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)}.$$

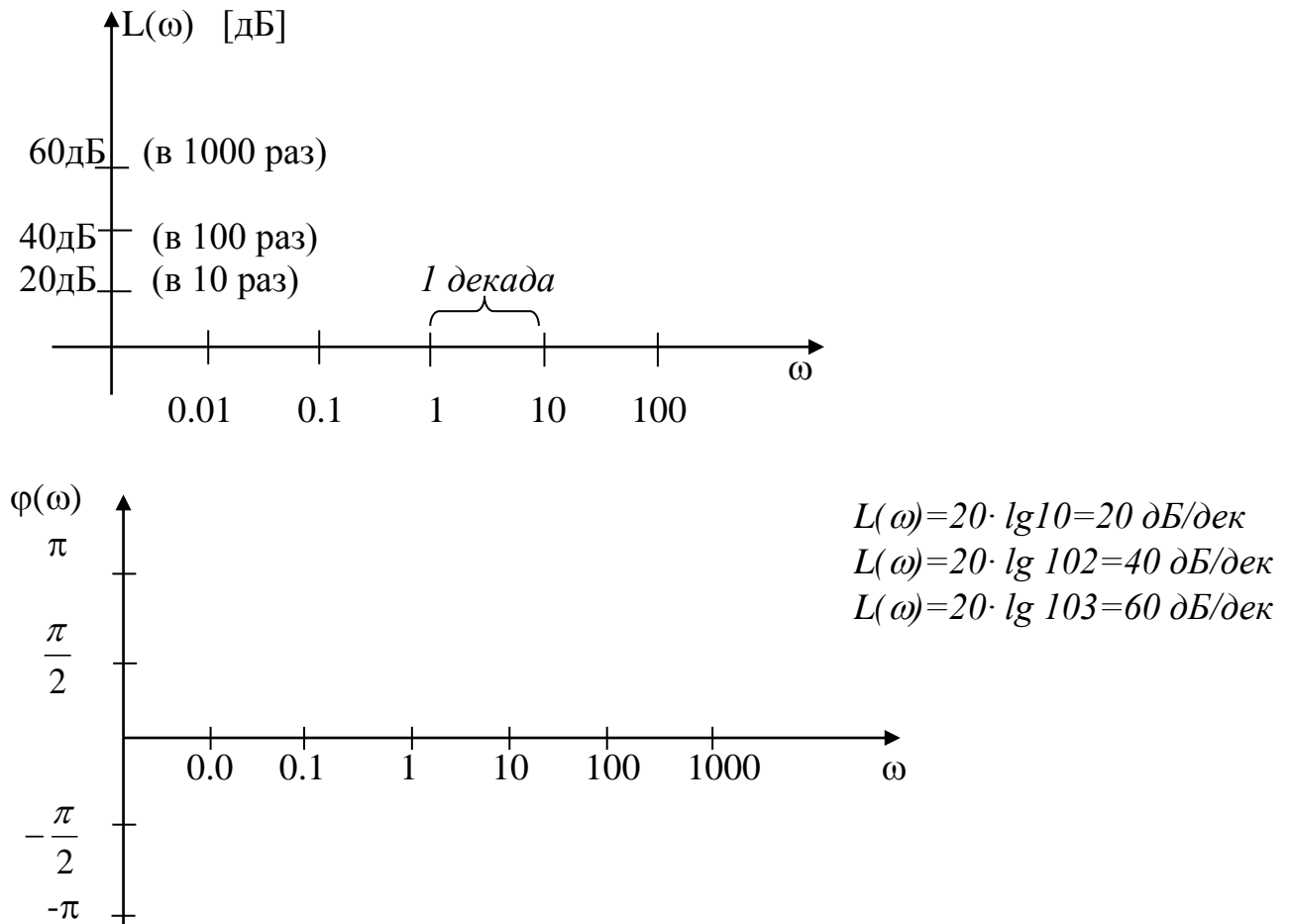
Прологарифмуємо  $W(j\omega)$ :

$$\ln W(j\omega) = \ln(A(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)}) = \ln A(\omega) + j \cdot \varphi(\omega) -$$

Однак, прийнято брати  $lg$  і множити на 20 (за традицією з акустики), тому

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \cdot lg A(\omega) - \text{ЛАЧХ (логарифмічна АЧХ);} \\ \varphi(\omega) &- \text{ЛФЧХ (логарифмічна ФЧХ).} \end{aligned}$$

Для ЛАЧХ і ЛФЧХ використовуються наступні шкали і одиниці вимірювання:



При побудові ЛФЧХ величина  $\varphi$  відкладається в натуральному (нелогарифмічному) масштабі.

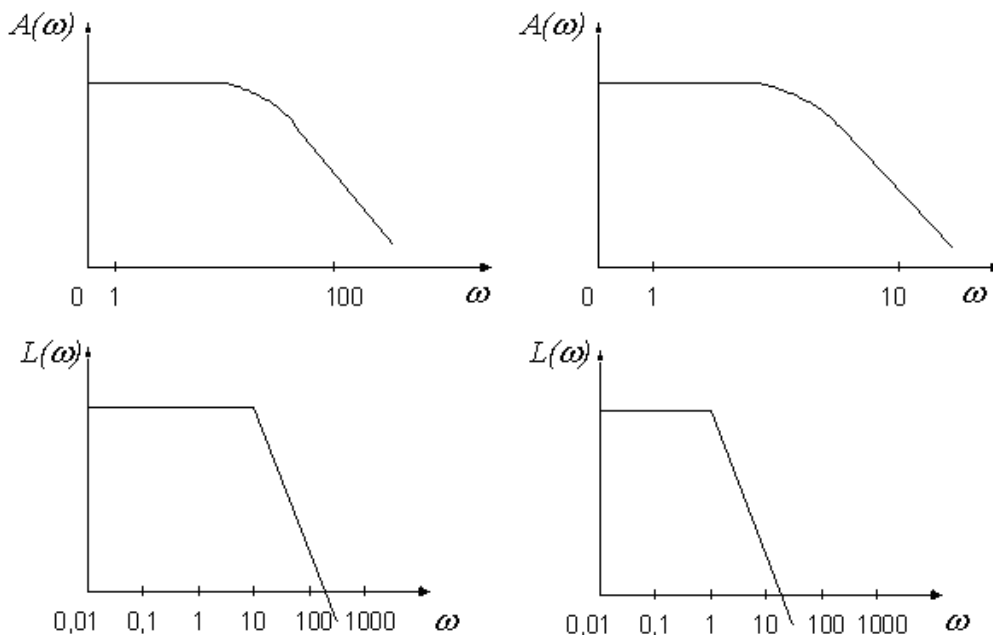
Історично склалося так, що одиницею для  $L(\omega)$  вибрано 1 дБ, вимірювання частоти задається в октавах або декадах, зміна  $\omega$  в 4, 10 раз відповідно.

Декадою називають інтервал, на якому частота змінюється в 10 раз.

Вісь ординат при будівництві ЛАЧХ проводять крізь довільну точку, не через точку  $\omega=0$ , звичайно за початок відліку беруть  $\omega_{min}$ .

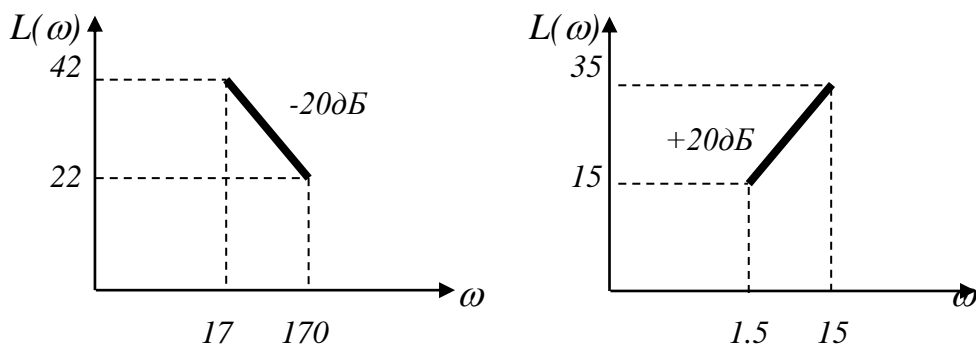
Нахил  $L(\omega)$  вимірюється в децибелах на декаду. Наприклад, нахил 20 дБ/дек означає, що при зміні частоти в 10 раз, амплітуда змінюється в 10 разів.

Логарифмічні графіки можуть бути наближені прямими.



### Питання:

- ?
- 20 дБ – це підсилення чи послаблення в 10 разів ?
  - А 60 дБ - ? (1000 разів)
  - А 10 дБ - ? ( $20 \lg 10^{1/2} = 10$ ; підсилення в  $\sqrt{10}$  )
  - А 5 дБ - ? ( $20 \lg 10^{1/4} = 5$ ; підсилення в  $\sqrt[4]{10}$  )
  - А 1 дБ - ? ( $20 \lg 10^{1/20} = 1$ ; підсилення в  $\sqrt[20]{10}$  )



### 2.2.6 Приклад отримання ЛАЧХ

$$W(s) = \frac{K}{T \cdot s + 1} \quad (\text{аперіодична ланка});$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j \cdot T \cdot \omega}; \quad A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \cdot \omega^2}};$$

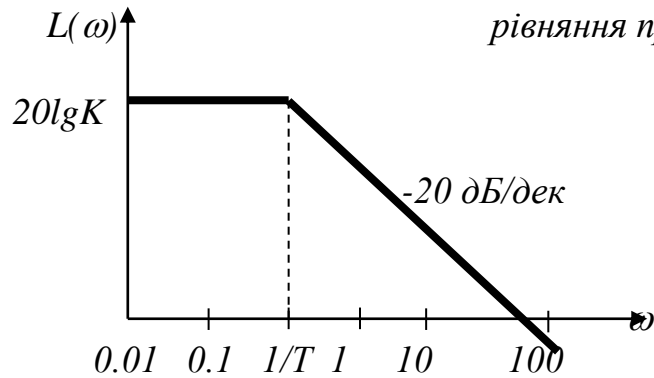
$$L(\omega) = 20 \cdot \lg A(\omega) = 20 \cdot \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \cdot \omega^2}.$$

Дослідження  $L(\omega)$  при малих і великих частотах,  $\omega_c = \frac{1}{T}$ ;

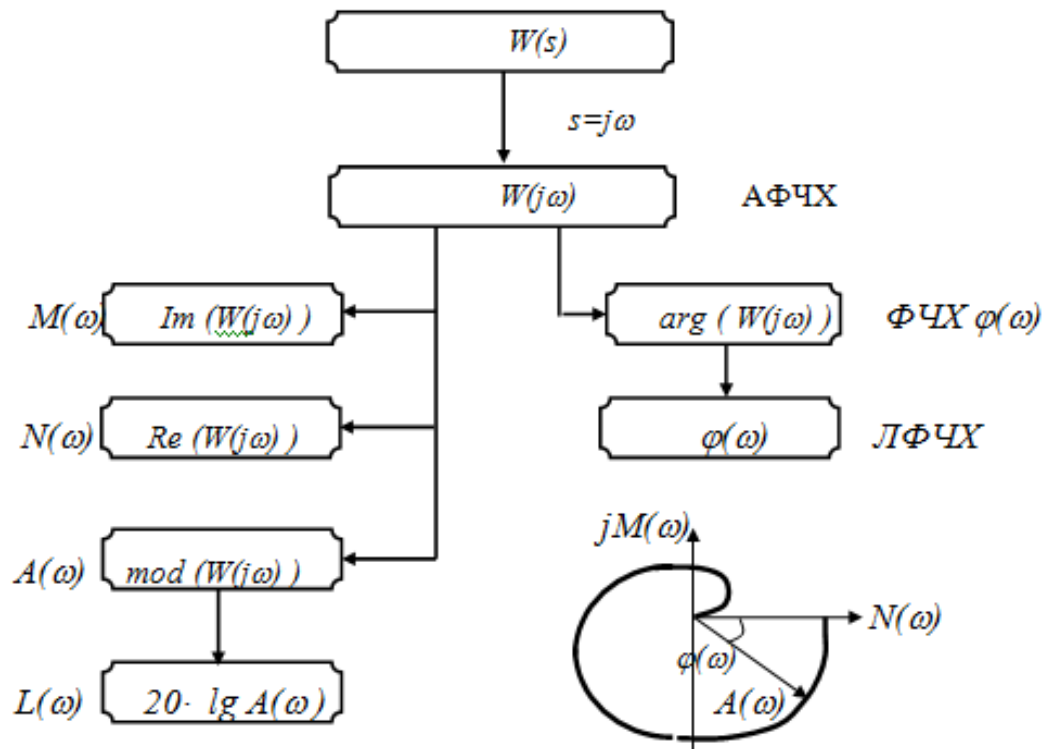
$$1) \omega < \frac{1}{T}; \quad \omega^2 \cdot T^2 < 1; \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg K$$

$$2) \omega > \frac{1}{T}; \quad \omega^2 \cdot T^2 > 1; \quad L(\omega) = \underbrace{20 \cdot \lg K}_{const} - \underbrace{20 \lg T}_{const} - 20 \lg \omega -$$

*рівняння прямої з нахилом -20 дБ/дек.*



## 2.2.7 Класифікація частотних характеристик

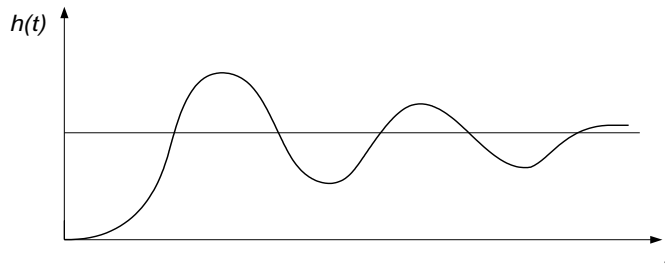


## 2.3 Часові характеристики

### 2.3.1 Вагова та перехідна функції

Важливими характеристиками САУ є перехідні функції – часові характеристики.

Перехідна функція  $h(t)$  є функцією, яка описує реакцію системи на одиничний  $1(t)$  вплив при нульових початкових умовах.

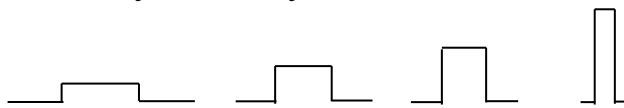


Аналітично одиничний ступінчастий вплив описується одиничною функцією:

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Перехідною або ваговою функцією  $w(t)$  (функцією ваги) системи називають функцію, яка описує реакцію системи на одиничний імпульсний вплив при нульових початкових умовах.

Фізично одиничний імпульс можна уявити як дуже вузький імпульс, який обмежує одиничну площину :



Математично він описується дельта-функцією  $\delta(t)$  (узагальненою функцією).

Похідна від  $1(t)$  рівна  $\delta(t)$ :

$$\dot{1}(t) = \delta(t).$$

(з теорії узагальнених функцій)

Знайдемо зображення за Лапласом від  $\delta(t)$  та її похідних:

$$L\{\delta(t)\} = 1; \quad L\{\dot{\delta}(t)\} = s; \quad L\left\{\delta^{(m)}(t)\right\} = s^m. \quad (2.10)$$

Диференціальне рівняння в зображеннях за Лапласом має вигляд:

$$(a_n \cdot s^n + \dots + a_0) \cdot X(s) = (b_m \cdot s^m + \dots + b_0) \cdot U(s), \quad (2.11)$$

або

$$X(s) = W(s) \cdot U(s). \quad (2.12)$$

Легко перевірити, використовуючи формули (2.10), що рівняння (2.12) справедливе і в тих випадках, коли  $U=I(t)$  або  $U=\delta(t)$ .

У відповідності з визначенням вагової функції при  $U=\delta(t)$  змінна  $X(t)=w(t)$ .

І так як  $L\{\delta(t)\}=1$ , то рівняння (3) можна записати:

$$L\{w(t)\} = W(s) \cdot 1, \quad (2.13)$$

$$w(t) = L^{-1}\{W(s)\}. \quad (2.14)$$

Встановимо зв'язок між  $w(t)$  і  $h(t)$ . Так як  $L\{1(t)\} = \frac{1}{s}$ , то рівняння (2.12) при  $u=I(t)$  набуде вигляду:

$$L\{h(t)\} = W(s) \cdot \frac{1}{s}. \quad (2.15)$$

Порівнявши рівняння (3.6) і (3.4), не важко помітити, що

$$s \cdot L\{h(t)\} = L\{w(t)\}$$



$$\bullet$$

$$\dot{h}(t) = w(t).$$

Вагова і перехідна функції, як і передаточна функція, є вичерпними характеристиками системи (ланки) при нульових початкових умовах. За ними можна однозначно визначити вихідну величину при довільному вхідному впливу. Дійсно, виходячи з рівняння (2.12), за допомогою теореми про згортку можемо записати:

$$X(t) = \int_0^t w(t-\tau) \cdot U(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t w(\tau) \cdot U(t-\tau) \cdot d\tau.$$

Ця формула вірна тільки при нульових початкових умовах.



### 2.3.2 Часові характеристики багатомірних САУ. Перехідна функція стану

Ми отримаємо часові залежності вхід-вихід для ЛДС з одним входом і одним виходом:



Рисунок 3.1 – Часові залежності «вхід-вихід» для ЛДС

Для ЛДС, які представлені в формі Коші – як одномірних, так і звичайно багатомірних – використовується трохи інший підхід до отримання часових характеристик.

*Повторення:*

Нехай дана одномірна система першого порядку:

$$\dot{x} = ax + bu.$$

Приймаємо  $u=0$  (замкнута система). Відомо, що рішення рівняння:

$$\dot{x} - ax = 0$$

має вигляд:

$$x(t) = e^{a \cdot (t-t_0)} \cdot x(t_0),$$

де,  $x(t_0)$  – початкова умова,  
тобто :

$$x(t) = f(t, t_0) \cdot x(t_0).$$

Згадаємо розклад в ряд для експоненти:

$$e^{a \cdot (t-t_0)} = 1 + \frac{a \cdot (t-t_0)}{1!} + \frac{a^2 \cdot (t-t_0)^2}{2!} + \dots$$

Можете перевірити (самостійно по підручнику!), що для багатомірних САУ має місце аналогічний результат:

$$\bar{X}(t) = \underbrace{F(t, t_0)}_{\text{матриця}} \cdot \bar{X}(t_0),$$

$$F(t, t_0) = \underbrace{e^{A \cdot (t-t_0)}}_{\text{матрична експонента}} = I + \frac{A \cdot T}{1!} + \frac{A^2 \cdot T^2}{2!} + \frac{A^3 \cdot T^3}{3!} + \dots,$$

де  $t-t_0 = T$ ;  $F(t, t_0)$  або  $F(T)$  – перехідна функція стану.

$F(T)$  – міст до імпульсних і цифрових САУ. У другій частині курсу ми розглянемо часові характеристики САУ більш детально, а зараз доцільно відмітити, що в типовому представленні імпульсна САУ:

$$\underbrace{\bar{X}[k \cdot T]}_{\text{поточний стан}} = F(T) \cdot \underbrace{\bar{X}[(k-1) \cdot T]}_{\text{попередній стан}}$$

В якості  $F(T)$  використовуємо більше або менше число складових розкладів.

$$F(T) = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \dots$$

## 2.4 Математичні моделі елементарних ланок САУ

### 2.4.1 Елементарні ланки та їх характеристики

Все різноманіття лінійних систем можна звести до системи більш простих елементів.

Кожна ЛДС може бути представлена у вигляді з'єднання кінцевого типу елементарних ланок.

$$W(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_0},$$

де знаменник та чисельник – поліноми.

Основна теорема алгебри: алгебраїчне рівняння  $n$ -ого степеня має  $n$ -коренів.

За теоремою Безу припустимо, що знайшли всі корені рівняння від  $s_n$  до  $s_0$ , тоді розкладемо поліном на співмножники:

$$(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot (s - s_3) \cdot \dots \cdot (s - s_n).$$

Всі коефіцієнти  $a_n, \dots, a_0$  – дійсні числа, так як вони звичайно являють собою  $R$ ,  $C$ , момент інерції, коефіцієнт пропорційності, тобто завжди представляють дійсні величини.

$(s - s_1) \cdot (s^2 + a_1 \cdot s + a_0)$  – поліном з дійсними коефіцієнтами можна розкласти на поліноми з дійсними коефіцієнтами із степенем не вище другого.

Елементарна (типова) ланка – це ланка, передаточна функція якої має певні особливості

$$m \leq 2, \quad n \leq 2.$$

Поліном з комплексними коефіцієнтами зустрічається при обробці голограм, зображень, сейсмограм, в методах просторових фільтрацій.

Таблиця 1 – Класифікація елементарних ланок

№	Ланка	W(S)	диф. Рівняння
1	Пропорційна (підсилювальна)	$K$	$X = K \cdot U$
2	Диференціююча	$T \cdot s$	$X = T \cdot s \cdot U$
3	Інтегруюча	$\frac{1}{T \cdot s}$	$T \cdot s \cdot X = U$
4	Форсуюча	$K \cdot (T \cdot s + 1)$	$X = K \cdot (T \cdot s + 1) \cdot U$
5	Аперіодична	$\frac{K}{T \cdot s + 1}$	$(T \cdot s + 1) \cdot X = K \cdot U$
6	Коливальна $0 < \xi < 1$	$\frac{K}{T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1}$	$(T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1) \cdot X = K \cdot U$
7	Консервативна $\xi = 0$	$\frac{K}{T^2 \cdot s^2 + 1}$	$(T^2 \cdot s^2 + 1) \cdot X = K \cdot U$
8	Аперіодична 2-го порядку $\xi \geq 1$	$\frac{K}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}$ (2 аперіодичних ланки 1-го порядку)	$(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1) \cdot X = K \cdot U$
9	Форсуюча 2-го порядку	$K \cdot (T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1)$	$X = K \cdot (T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1) \cdot U$
10	Чистого запізнення	$e^{-s \cdot \tau}$	$X = \left( 1 - s \cdot \tau + \frac{s^2 \cdot \tau^2}{2!} - \dots + \frac{s^n \cdot \tau^n}{n!} \right) \cdot U$

1) Пропорційна ланка (підсилювальна).

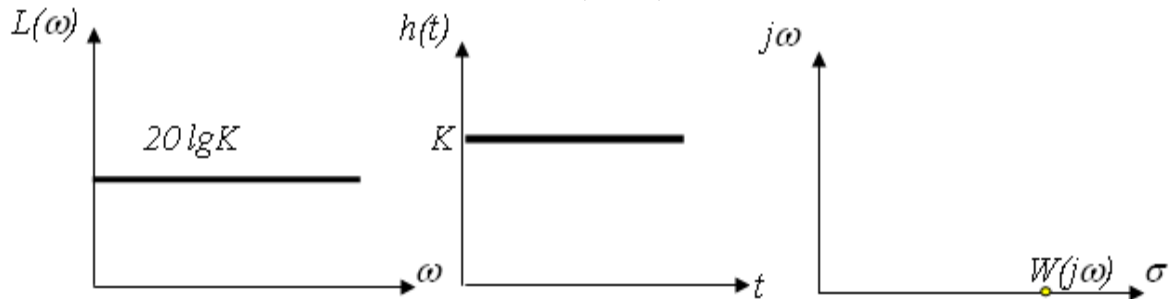
$$W(s) = \frac{b_0}{a_0} = K$$

$$X = K \cdot U$$

$$W(j\omega) = K; \quad A(\omega) = K; \quad \varphi(\omega) = 0; \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg K$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{W(s) \cdot \frac{1}{s}\right\} = K \cdot 1(t)$$

$$\omega(t) = L^{-1}\{W(s)\} = K \cdot \delta(t)$$



## 2) Диференціююча ланка.

$$W(s) = T \cdot s$$

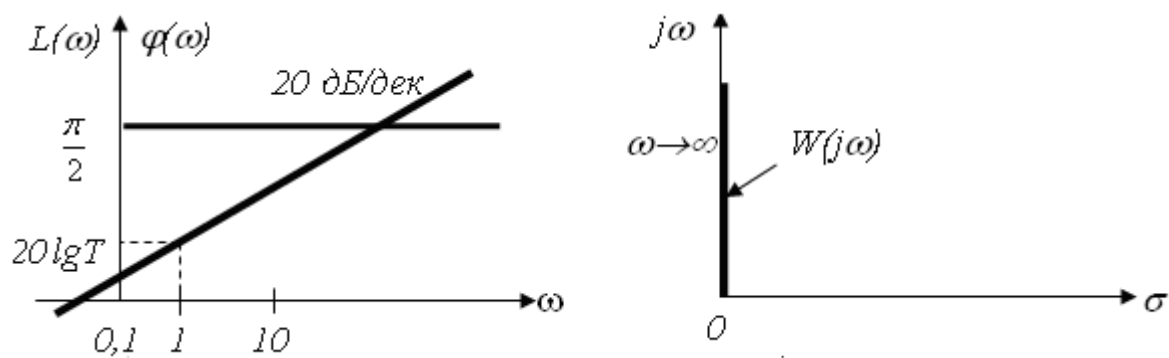
$$X = T \cdot s \cdot U$$

$$W(j\omega) = j\omega \cdot T = \omega \cdot T \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}; \quad A(\omega) = \omega \cdot T; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg(\omega \cdot T) = 20 \cdot \lg T + 20 \cdot \lg \omega$$

$$h(t) = \delta(t)$$

$$\omega(t) = \dot{\delta}(t)$$



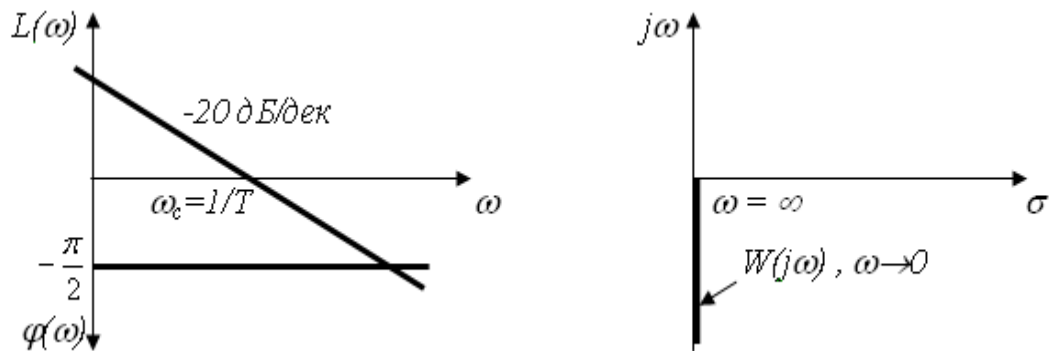
## 3) Інтегруюча ланка.

$$W(s) = \frac{1}{T \cdot s}$$

$$T \cdot s \cdot X = U$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega \cdot T} = \frac{1}{\omega \cdot T} \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}}; \quad A(\omega) = \frac{1}{\omega \cdot T}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{1}{\omega \cdot T} = -20 \lg(\omega \cdot T) = -20 \cdot \lg T - 20 \cdot \lg \omega$$



#### 4) Форсуюча ланка.

$$W(s) = K \cdot (T \cdot s + 1)$$

$$X = K \cdot (T \cdot s + 1) \cdot U$$

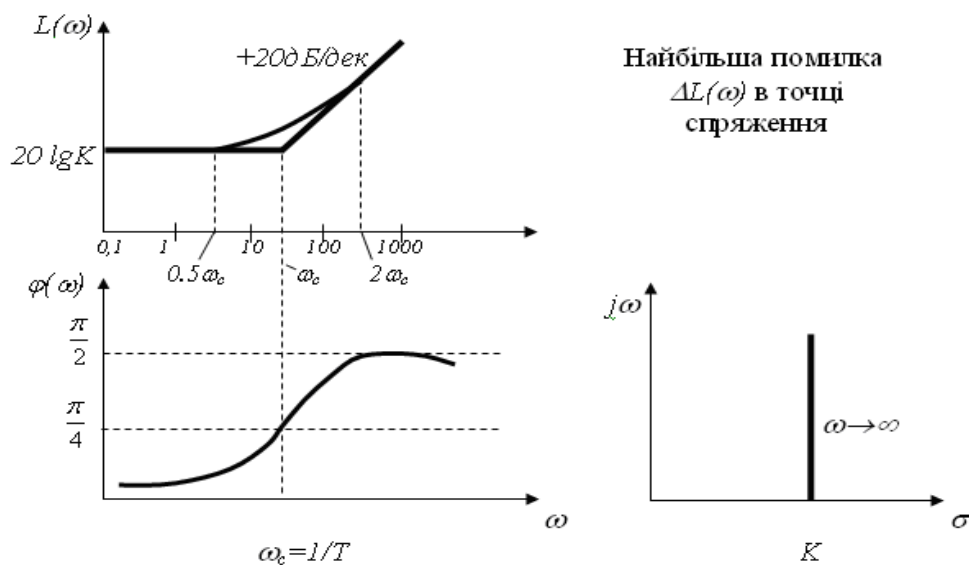
$$W(j\omega) = K \cdot (1 + j\omega \cdot T) = K + K \cdot j\omega \cdot T$$

$$A(\omega) = \sqrt{K^2 + K^2 \cdot \omega^2 \cdot T^2} = K \cdot \sqrt{1 + \omega^2 \cdot T^2}; \quad \varphi(\omega) = \arctg(\omega \cdot T)$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg K + 20 \cdot \lg \sqrt{1 + \omega^2 \cdot T^2}$$

$$\omega \ll \omega_c = \frac{1}{T}; \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg K$$

$$\omega \gg \omega_c = \frac{1}{T}; \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg K + 20 \cdot \lg(\omega \cdot T)$$



5) Аперіодична ланка.

$$W(s) = \frac{K}{T \cdot s + 1}$$

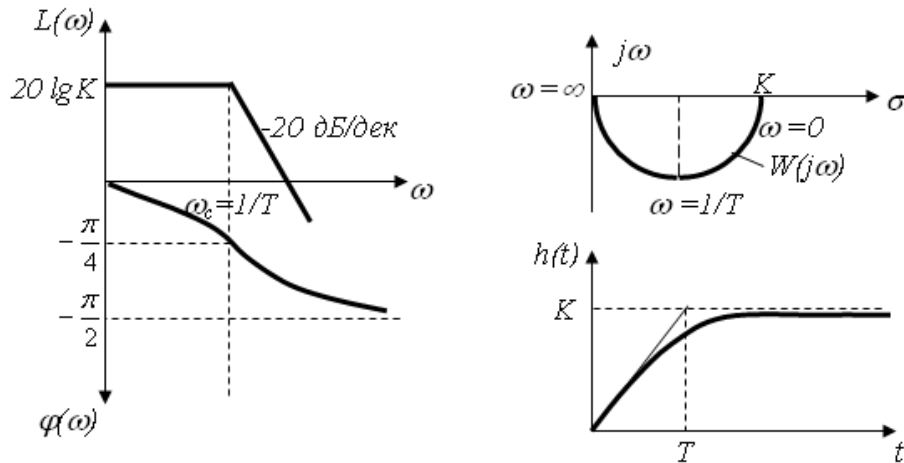
$$(T \cdot s + 1) \cdot X = K \cdot U$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega \cdot T + 1}; \quad A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot T^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg(\omega \cdot T)$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg \sqrt{1 + \omega^2 \cdot T^2}$$

$$\omega \ll \omega_c = \frac{1}{T}; \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg K$$

$$\omega \gg \omega_c = \frac{1}{T}; \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg(\omega \cdot T)$$



6) Коливальна ланка ( $0 < \xi < 1$ ),  $\xi$  – коефіцієнт демпфування.

$$W(s) = \frac{K}{T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1}$$

$$(T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1) \cdot X = K \cdot U$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{-T^2 \cdot \omega^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot j\omega + 1} = \frac{K}{(1 - T^2 \cdot \omega^2) + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot j\omega}$$

$$W(j\omega) = N(\omega) + j \cdot M(\omega)$$

$$N(\omega) = \frac{K \cdot (1 - T^2 \cdot \omega^2)}{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot T^2 \cdot \omega^2}$$

$$M(\omega) = \frac{-2 \cdot K \cdot \xi \cdot T \cdot \omega}{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot T^2 \cdot \omega^2}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot T^2 \cdot \omega^2}}$$

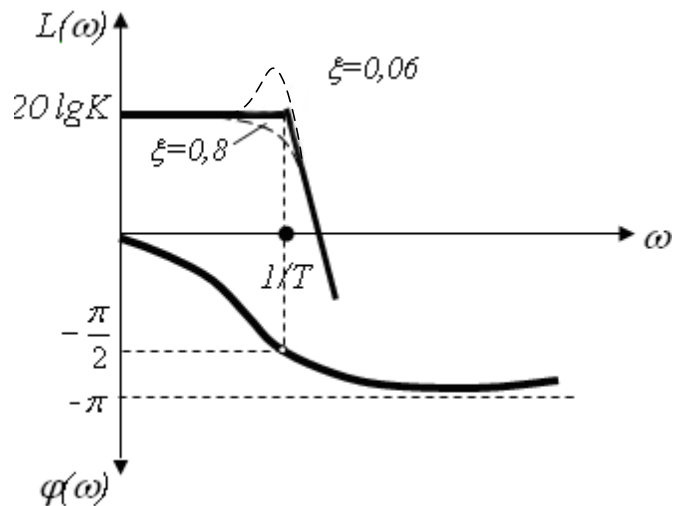
$$L(\omega) = 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg \sqrt{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot T^2 \cdot \omega^2}$$

$$\omega \ll \omega_c = \frac{1}{T}; \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg K$$

$$\omega \gg \omega_c = \frac{1}{T}; \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg K - 20 \lg(T \cdot \omega) - 20 \cdot \lg \sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1} =$$

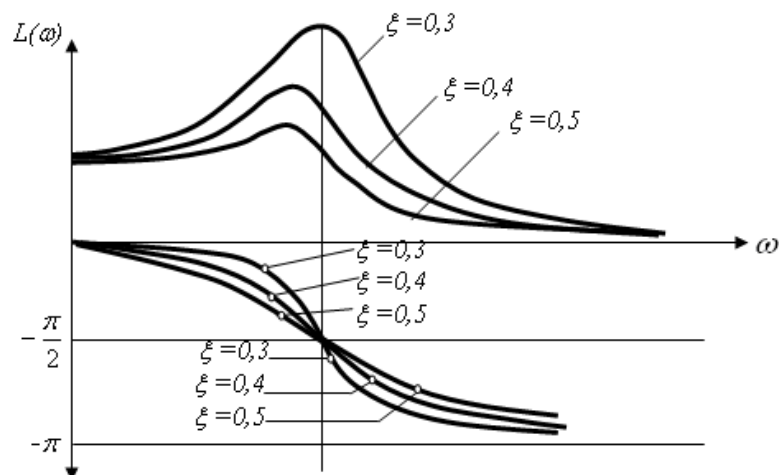
$$= 20 \cdot \lg K - 40 \lg(T \cdot \omega)$$

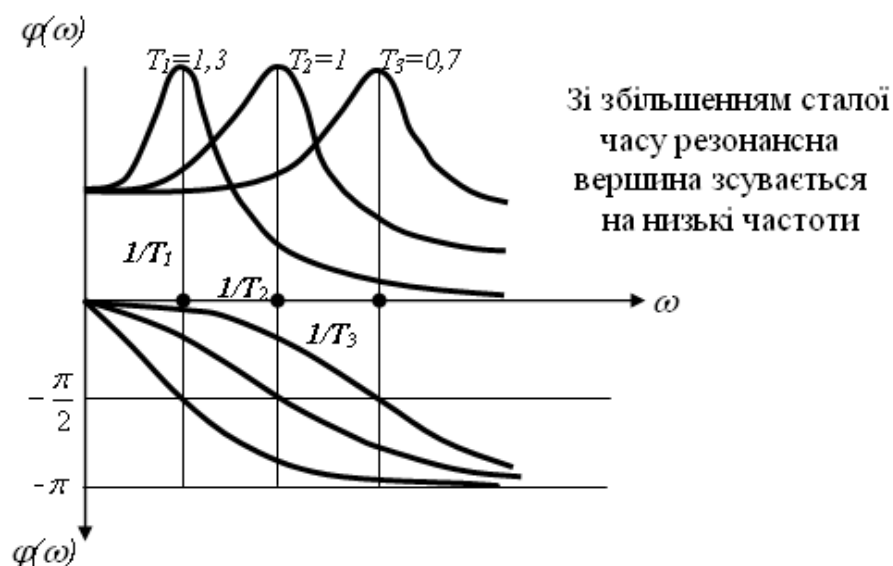
$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot T \cdot \omega}{1 - T^2 \cdot \omega^2}\right), & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T}, \\ -\pi - \arctg\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot T \cdot \omega}{1 - T^2 \cdot \omega^2}\right), & \text{при } \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$



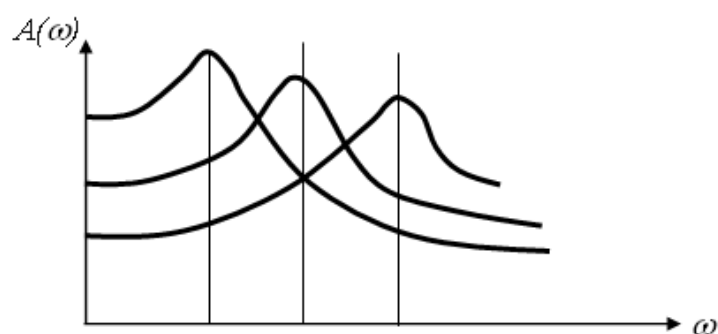
Слід мати на увазі, що асимптотична ЛАЧХ при малих значеннях коефіцієнта демпфування дуже сильно відрізняється від точної ЛАЧХ.

Розглянемо як впливає варіація параметрів  $\xi$  і  $T$  на частотні характеристики коливальної ланки.

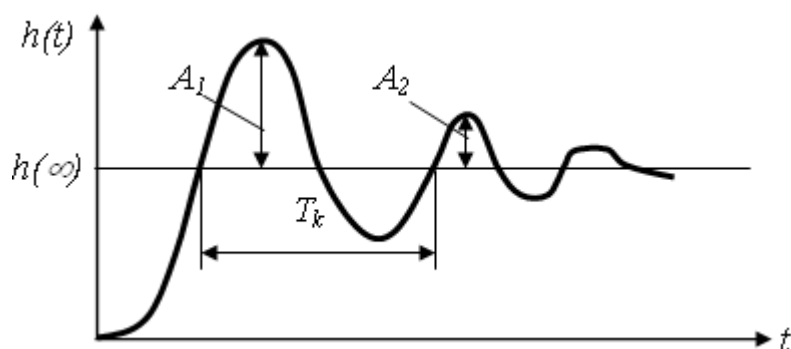




У реальних ланках не можна незалежно змінювати параметри  $\xi$  і  $T$ . Через розширення полоси частот падає коефіцієнт підсилення.



Перехідна функція  $h(t)$  має вигляд:



де  $T_k$  – період коливань;

$A_1, A_2$  – амплітуди двох сусідніх коливань відносно значення, яке встановилося.



7) Консервативна ланка ( $\xi = 0$ ).

$$W(s) = \frac{K}{T^2 \cdot s^2 + 1}$$

$$(T^2 \cdot s^2 + 1) \cdot X = K \cdot U$$

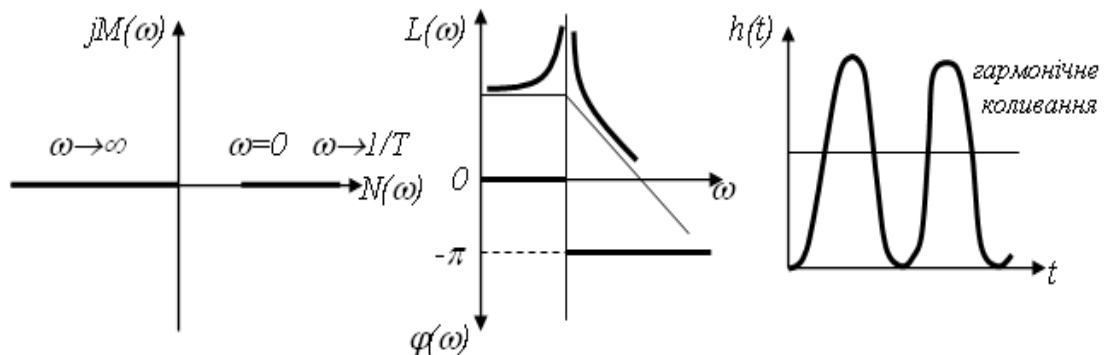
$$W(j\omega) = \frac{K}{1 - T^2 \cdot \omega^2}; \quad A(\omega) = \frac{K}{1 - T^2 \cdot \omega^2}$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg(1 - T^2 \cdot \omega^2)$$

$$\omega \ll \omega_c = \frac{1}{T}; \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg K$$

$$\omega \gg \omega_c = \frac{1}{T}; \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg K - 40 \lg(T \cdot \omega)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T}, \\ -\pi, & \text{при } \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$



8) Аперіодична ланка другого порядку ( $\xi \geq 1$ ).

Передаточну функцію при  $\xi \geq 1$  можна перетворити до виду:

$$W(s) = \frac{K}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}$$

$$(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1) \cdot X = K \cdot U$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{(T_1 \cdot j\omega + 1) \cdot (T_2 \cdot j\omega + 1)}; \quad A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T_1^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot \sqrt{T_2^2 \cdot \omega^2 + 1}}$$

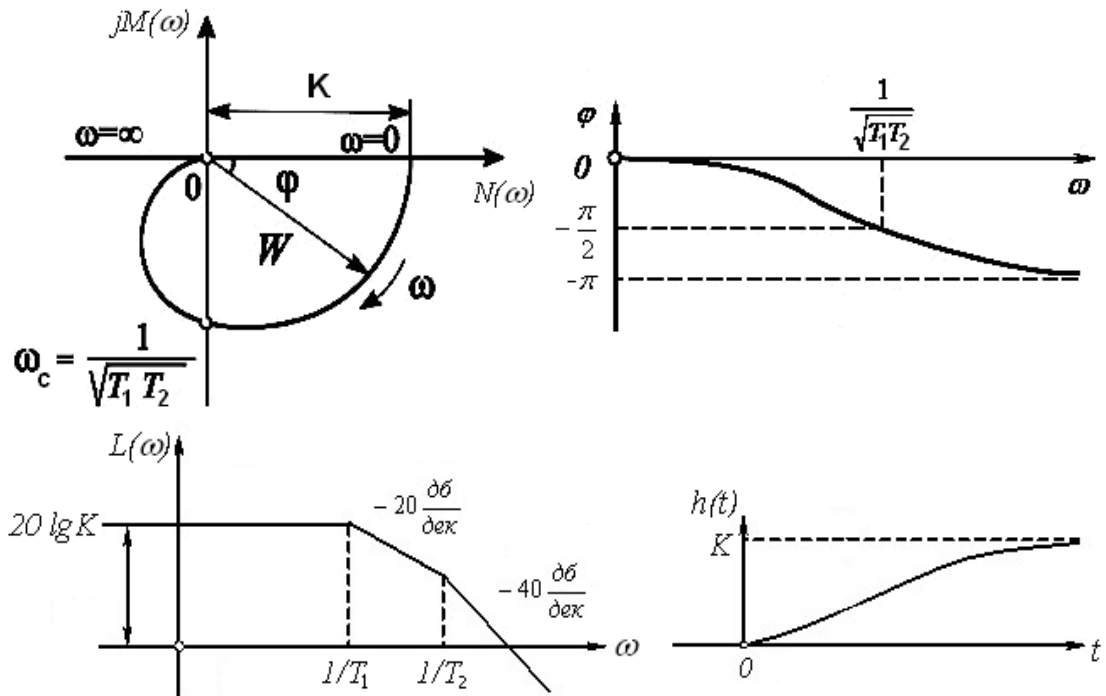
$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg(T_1 \cdot \omega) - \arctg(T_2 \cdot \omega) & \text{нпу } \omega \leq \frac{1}{T}, \\ -\pi - \arctg(T_1 \cdot \omega) - \arctg(T_2 \cdot \omega) & \text{нпу } \omega > \frac{1}{T}. \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg \sqrt{T_1^2 \cdot \omega^2 + 1} - 20 \cdot \lg \sqrt{T_2^2 \cdot \omega^2 + 1}$$

$$\omega \ll \omega_{c1} = \frac{1}{T_1}; \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg K$$

$$\omega_{c1} \ll \omega \ll \omega_{c2}; \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg(T_1 \cdot \omega)$$

$$\omega \gg \omega_{c2} = \frac{1}{T_2}; \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg(T_1 \cdot \omega) - 20 \cdot \lg(T_2 \cdot \omega)$$



Аперіодичну ланку другого порядку можна уявити як послідовне з'єднання двох аперіодичних ланок першого порядку. Воно не відноситься до числа елементарних ланок.

#### 9) Форсуюча ланка другого порядку

$$W(s) = K \cdot (T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1)$$

$$X = K \cdot (T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1) \cdot U$$

$$0 < \xi < 1$$

$$W(j\omega) = K \cdot (1 - T^2 \cdot \omega^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot j\omega); \quad A(\omega) = K \cdot \sqrt{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot T^2 \cdot \omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot T \cdot \omega}{1 - T^2 \cdot \omega^2}\right)$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg K + 20 \cdot \lg \sqrt{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot T^2 \cdot \omega^2}$$

$$\omega \ll \omega_c = \frac{1}{T}; \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg K$$

$$\omega \gg \omega_c = \frac{1}{T}; \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg K + 20 \lg(T \cdot \omega) + 20 \cdot \lg \sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1} =$$

$$= 20 \cdot \lg K + 40 \lg(T \cdot \omega)$$

### 2.4.2 Немінімально-фазові ланки

Ланку називають мінімально-фазовою, якщо всі нулі і полюси цієї передаточної функції мають від'ємні або рівні нулю дійсні частини.

Ланку називають немінімально-фазовою, якщо хоча б один нуль або полюс її передаточної функції має позитивну дійсну частину.

Нулями передаточної функції  $W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$ , де  $R(s)$  і  $Q(s)$  – поліноми

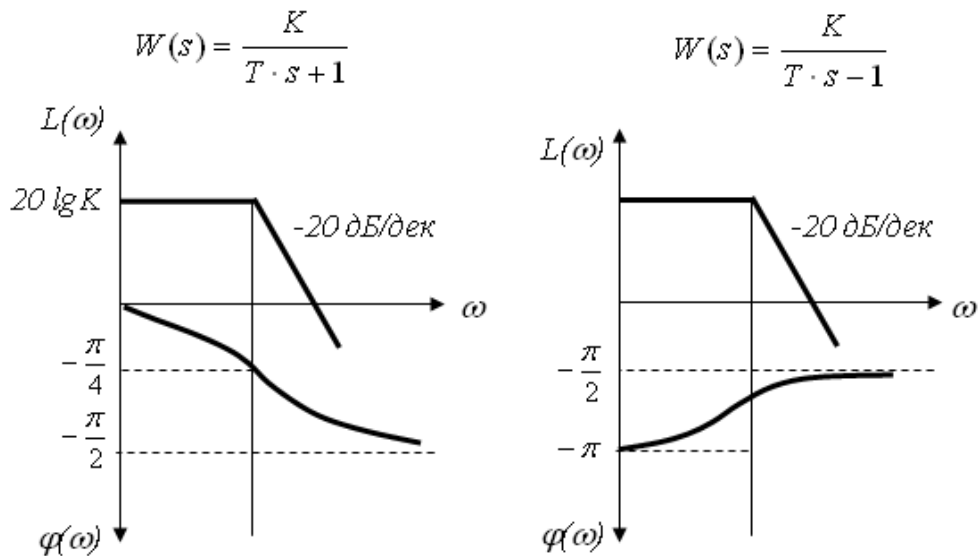
від  $s$ , називають корені рівняння  $R(s)=0$ , тобто такі значення  $s$ , при яких передаточна функція обертається в нуль, а полюсами – корені рівняння  $Q(s)=0$ , тобто такі значення  $s$ , при яких передаточна функція обертається в нескінченність.

Всі розглянуті вище елементарні ланки відносять до мінімально-фазових. Прикладами немінімально-фазових елементарних ланок є ланки з передаточними функціями

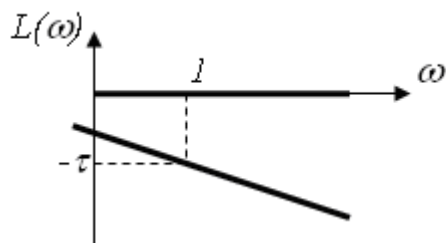
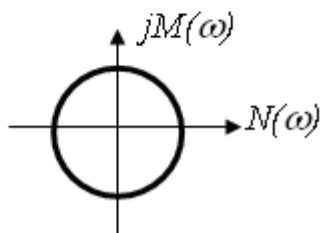
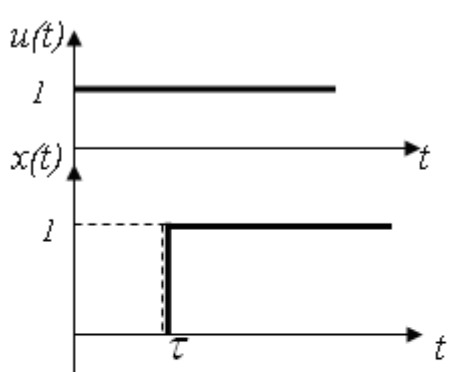
$$W(s) = \frac{K}{T \cdot s - 1}; \quad W(s) = K \cdot (T \cdot s - 1);$$

$$W(s) = \frac{K}{(T^2 \cdot s^2 - 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1)}.$$

Для немінімально-фазової ланки характерно, що у неї зсув фази по модулю більший, ніж у мінімально-фазової ланки, яка має однакову з немінімально-фазовою ланкою АЧХ.



До немінімально-фазових ланок відносять також ланку чистої затримки (хвилевід, трубопровід, довгі лінії) з передаточною функцією



$$W(s) = e^{-\tau \cdot s}$$

$$h(t) = 1(t - \tau) \quad \omega(t) = \delta(t - \tau)$$

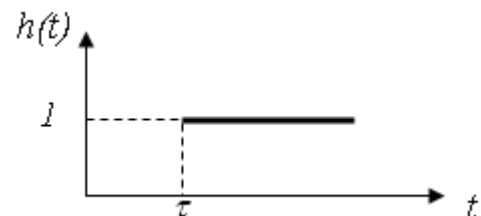
$$W(s) = L\{\omega(t)\} = e^{-s \cdot \tau}$$

$$W(j\omega) = e^{-j\omega \cdot \tau} = \cos(\omega \cdot \tau) - j \sin(\omega \cdot \tau)$$

$$N(\omega) = \cos(\omega \cdot \tau); \quad M(\omega) = -\sin(\omega \cdot \tau)$$

$$A(\omega) = 1; \quad \varphi(\omega) = -\omega \tau$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg 1 = 0$$



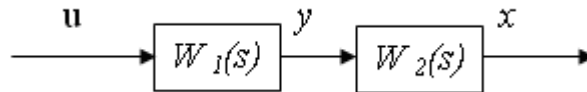
Застосувавши розклад в ряд для експоненти, диференціальне рівняння прийме вигляд

$$X = \left( 1 - s \cdot \tau + \frac{s^2 \cdot \tau^2}{2!} - \frac{s^3 \cdot \tau^3}{3!} + \dots + \frac{s^n \cdot \tau^n}{n!} \right) \cdot U.$$

### 2.4.3 З'єднання ланок. Структурні схеми

Розглянемо з'єднання ланок та їх структурні схеми:

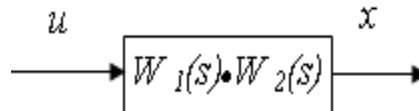
#### 1) Послідовне з'єднання ланок.



$$X(s) = W_2(s) \cdot Y(s), \quad Y(s) = W_1(s) \cdot U(s)$$

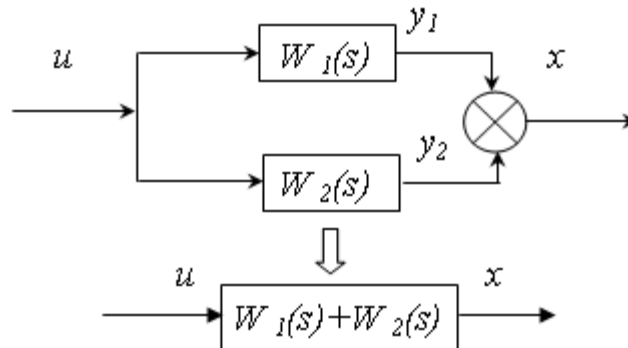
$$X(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot U(s),$$

тобто з'єднання 2-х ланок можна представити єдиною ланкою:



ЛАЧХ з'єднання 2-х ланок дорівнює сумі ЛАЧХ ланок.

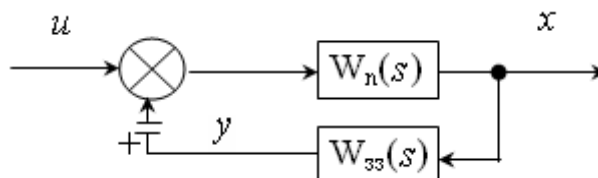
#### 2) Паралельне з'єднання ланок.



$$Y_1(s) = W_1(s) \cdot U(s), \quad Y_2(s) = W_2(s) \cdot U(s)$$

$$X(s) = Y_1(s) + Y_2(s), \quad X(s) = (W_1(s) + W_2(s)) \cdot U(s).$$

#### 3) Ланка, охоплена зворотним зв'язком (33).



$$X(s) = W_n(s) \cdot (U(s) \pm Y(s))$$

$$Y(s) = W_{33}(s) \cdot X(s)$$

$$X(s) = W_n(s) \cdot U(s) \pm W_n(s) \cdot W_{33}(s) \cdot X(s)$$

$$X(s) \cdot (1 \mp W_n(s) \cdot W_{33}(s)) = W_n(s) \cdot U(s)$$

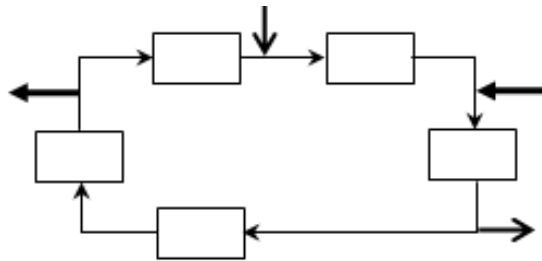
$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{W_n(s)}{1 \mp W_n(s) \cdot W_{33}(s)}$$

“ - ” для додатнього ЗЗ

“ + ” для від’ємних ЗЗ

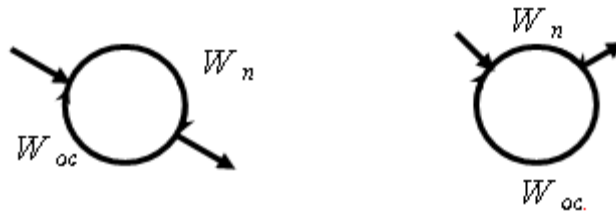
$$W_{\text{замкн.}}(s) = \frac{W_n(s)}{1 \mp W_{\text{розімкн.}}(s)}$$

Розглянемо замкнуте коло ланок:

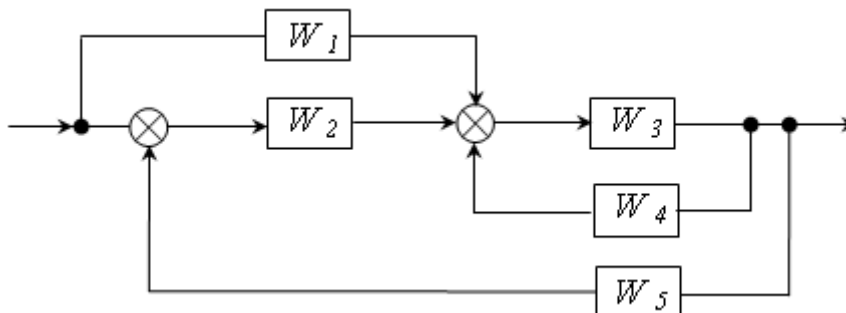


Часто нас цікавлять передаточні функції для одного і того ж контуру, але для різних входів і виходів.

Уявимо замкнене коло ланок у вигляді орієнтованого графа:



#### 2.4.4 Структурні схеми та їх еквівалентні перетворення

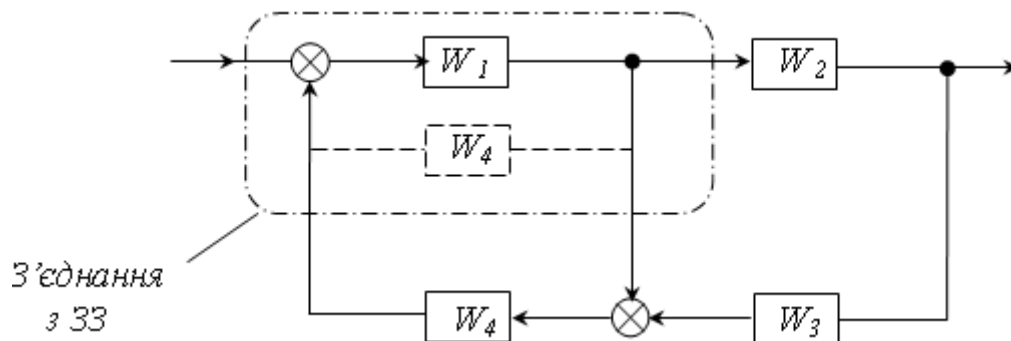


В ЛДС допускається тільки сумування та гілкування, інші операції неможливі. Для отримання передаточної функції довільного з'єднання ланок необхідно за допомогою еквівалентних перетворень привести структурну схему до відомих з'єднань:

- послідовного;
- паралельного;
- зі зворотним зв'язком.

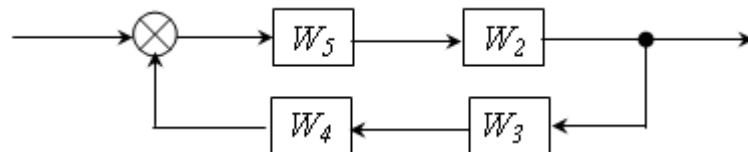
#### 2.4.5 Правила переносу суматора і точки гілкувань крізь блок

##### 1) Перенос вузла суматора по ходу сигналу.



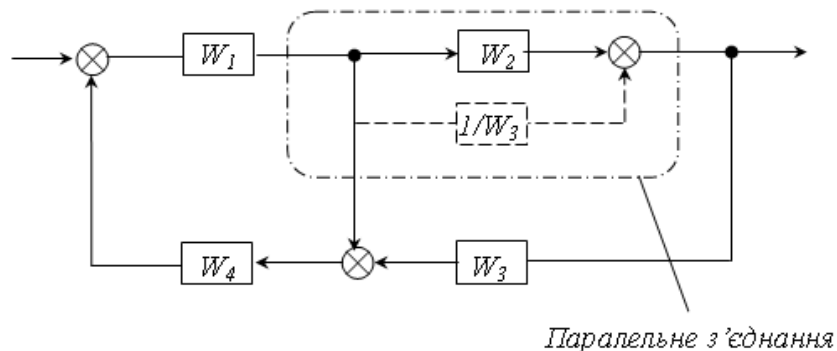
Дослідимо принцип суперпозиції для ЛДС

$$(A+B)+C=(A+C)+B.$$



$$W_5 = \frac{W_1}{1 - W_1 \cdot W_4}.$$

##### 2) Перенос суматора проти ходу сигналу.



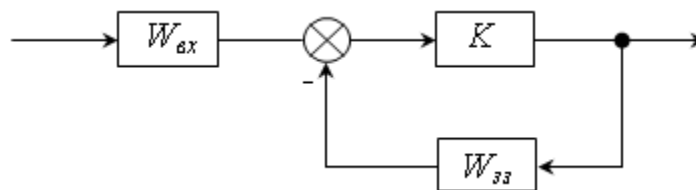
$$W_5 = W_2 + \frac{1}{W_3}.$$

Незалежно від способу перетворення передаточна функція системи буде однаковою.

#### 2.4.6 Зворотні зв'язки. Класифікація, практичне застосування

Розглянемо окремі випадки ЗЗ:

##### 1) Операційний підсилювач (ОП):

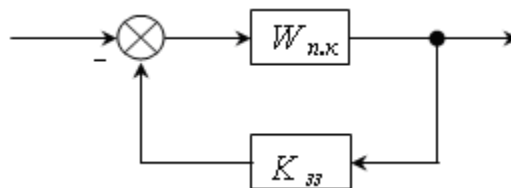


Особливість ОП:  $K \gg 1$  ( $K$  – коефіцієнт підсилення).  
 Для МН-7:  $K = 300000$ ;  $K = 5 - 10$  млн.  
 Зворотний зв'язок від'ємний.

$$W_{\text{замкн.}}(s) = \frac{K}{1 + K \cdot W_{\text{зз}}(s)} \cdot W_{\text{вх}}(s).$$

Так як  $K \gg 1$ , відкидаємо 1  $\Rightarrow W_{\text{замкн.}}(s) = \frac{W_{\text{вх}}(s)}{W_{\text{зз}}(s)}.$

##### 2) Глибокий зворотний зв'язок.



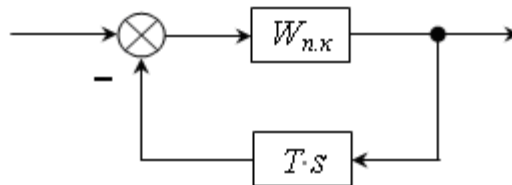
$$K_{\text{зз}} \gg 1; W_{\text{замкн.}}(s) = \frac{W_{\text{н.к.}}(s)}{1 + K_{\text{зз}} \cdot W_{\text{н.к.}}(s)}.$$

Так як  $K \gg 1$ , то відкидаємо 1  $\Rightarrow W_{\text{замкн.}}(s) = \frac{1}{K_{\text{зз}}}.$



Цей прийом застосовується в підсилювачах потужності. За рахунок глибокого ЗЗ компенсується дрейф, нелінійності прямого кола. Небажані властивості прямого кола не відтворюються в системі. До таких пристроїв відноситься емітерний повторювач.

### 3) Гнучкий зворотний зв'язок.



$$W_{\text{замкн.}}(s) = \frac{W_{\text{н.к.}}(s)}{1 + W_{\text{н.к.}}(s) \cdot T \cdot s}$$

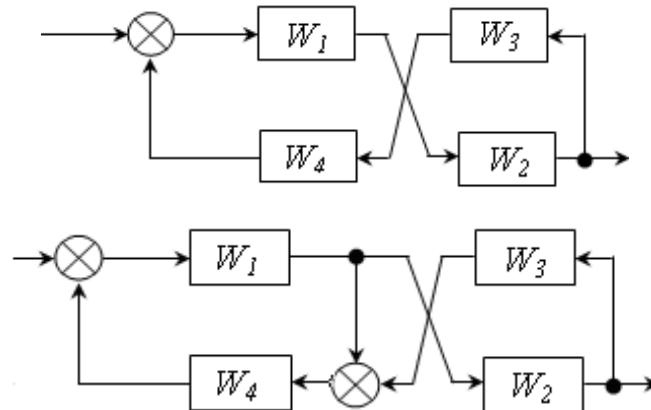
В стані, який встановився  $t \rightarrow \infty$ , що відповідає області  $S \rightarrow 0$ , тоді

$$W_{\text{замкн.}}(s)_{S \rightarrow 0} = W_{\text{н.к.}}(s).$$

Коефіцієнт ЗЗ залежить від частоти сигналу. При малих частотах ЗЗ відсутній, а на великих частотах ЗЗ існує. Застосовується в електроприводах.

### ***Завдання для самостійного розв'язку***

Виконати еквівалентне перетворення наступних схем:



*Контрольні питання:*

1. Наведіть принцип перетворення Лапласа.
2. Довести теорему розкладання.

3. Довести теорему про згортку.
4. Довести теорему про граничні значення.
5. Навести приклад інтерпретації перетворення Лапласа.
6. Навести властивості перетворення Лапласа.
7. Реальні ситуації, коли САУ повинна відпрацьовувати деякий програмний сигнал.
8. Запишіть систему неоднорідних лінійних різницьових рівнянь у матрично-векторному виді.
9. Запишіть перехідну функцію стану для еквівалентного різницьового рівняння з ненульовою правою частиною.
10. Опишіть усталені режими для типових тестових входних сигналах.

## 3 АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ТА ОЦІНКА ЯКОСТІ РЕГУЛЮВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ САУ

### 3.1 Проблема стійкості та її сучасні прояви

Поняття стійкості відносно : завжди мається на увазі клас обурень; стійкості зовсім не існує.

Пам'ятайте про це.

**Стійкість** до - початкових відхилень;  
- випадкових обурень;  
- відмов частин системи.

Які види стійкості Ви можете ще запропонувати?

- птахостійкість (для літаків);
- “foolpruf ” (дуростійкість);
- стійкість до відмов окремих елементів;
- стійкість до помилок проектування (схованих до певного часу), виробника, експлуатації.

В сучасних САУ та обчислювальних системах ненадійність на 50% обумовлена помилками, які допущені в проекті.

Як же отримати відмовостійкість? Один з магістральних шляхів сьогодні – диверсифікація. В основі диверсифікації лежить проблема розбиття системи на частини – проблема декомпозиції.

Велика і мала наука кружляє навколо розбиття за функціональними ознаками – “колеса, двигун, ресори”, “датчики, приводи, підсилювач”, в той час як сучасні технології уже дозволяють конструювати системи зовсім за іншими принципами: розбити систему на підсистеми, кожна з яких може виконувати всі функції цілої системи, але різноманітними засобами з різноманітним рівнем якості.

Ці декомпозиції можна пояснити простими прикладами.

Уявіть собі: автомобіль під'їхав до лісу, розділився на чотири маленьких автомобільчика, які, проїхавши по лісним стежкам, потім знову зібралися в один автомобіль. Фантастика!? – такий автомобіль представили японці на виставці в 1990 році.

І ще про автомобілі. Уявіть собі автомобіль, в нього відламалось колесо, але він швидко трансформувався в мотоцикл, знову щось вийшло з ладу... і в кінці, Ви спокійно прибуваєте в пункт призначення на велосипеді, зібраному з останків автомобіля. Поки що таке траплялося тільки в мультфільмах.

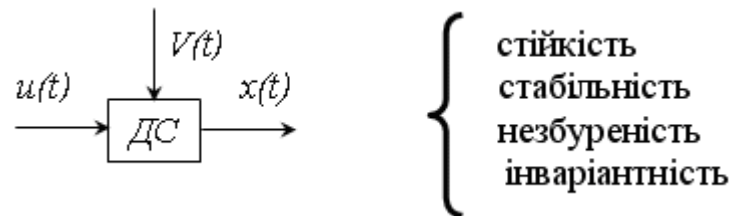
При традиційному резервуванні, наприклад, дублюванні – просто одна і та ж помилка проектування, програмування повторюється двічі – і “вискакує” одночасно в обох підсистемах !!!

При неідентичному резервуванні передбачається, що можливі помилки неідентичні і взаємокомпенсуються.

Особливість диверсифікації як методу проектування на відміну від відомих раніше “творчих конкурсів” – “не перемагає найсильніший”, а реалізується в паралельних пристроях розробки, яка задовольняє технічне завдання.

Матеріальна основа для диверсифікації – різке зменшення питомої вартості обчислювальної техніки.

Може бути поки що незвичне вирішення проблеми відмовостійкості великих відповідальних САУ. До цього ми повернемося в наступному семестрі. А зараз займемося класичною стійкістю.

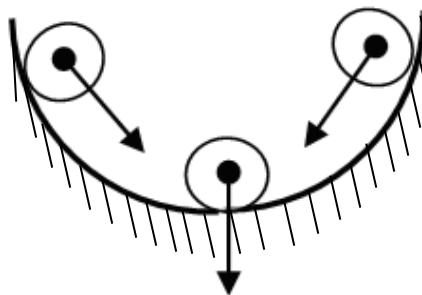


*Стійкість* – збереження незмінними необхідних значень змінних, не дивлячись на зовнішні впливи, на початкові відхилення.

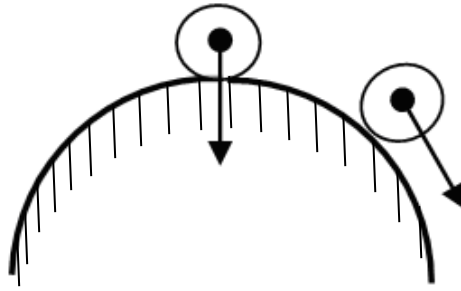
В 1892 році з'явилася праця А.М. Ляпунова “Загальна задача про стійкість руху”.

### 3.2 Класифікація типів стійкості

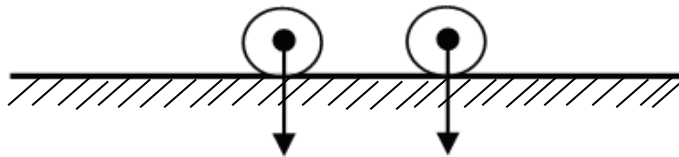
Стійка система, стійка рівновага.



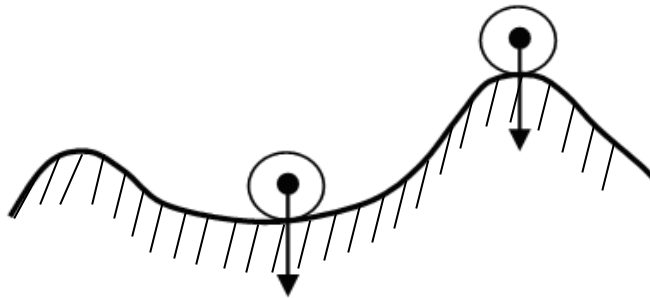
Нестійка система, нестійка рівновага.



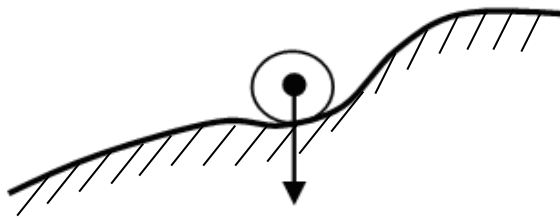
Нейтральна стійкість, нейтральна рівновага.



Обмежена стійкість.



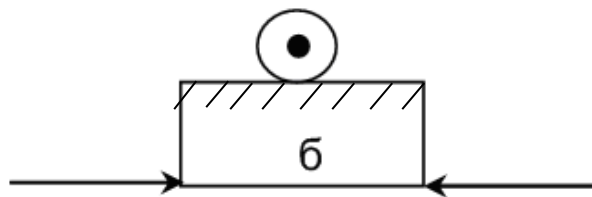
Напівстійкість.



Стійкість Ляпунов класифікував за величиною області стійкості:

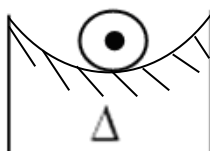
- стійкість “в малому”,
- стійкість “в великому”,
- стійкість “в цілому”.

1. Стійкість “в малому”.



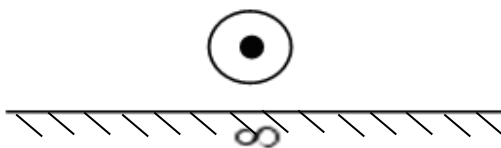
$\delta$  - нескінченно мала величина

2. Стійкість “в великому”.



$\Delta$ - кінцева величина

3. Стійкість “в цілому”.



### 3.3 Збурений і незбурений рух

А.М. Ляпунов запропонував розглядати стійкість тільки по відношенню до відхилення початкових умов.

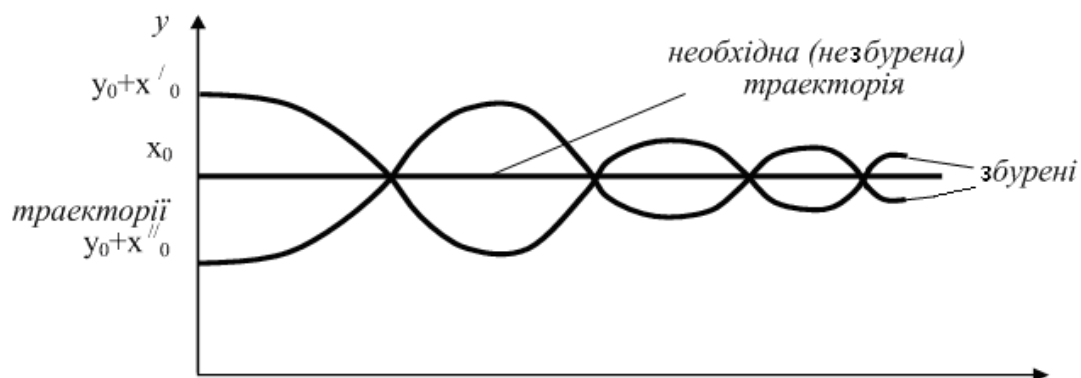


Рисунок 3.1 – Графіки збуреного та незбуреного рухів

Деякий дійсно визначений рух системи, який підлягає дослідженню будемо називати незбуреним (необхідним, опорним, номінальним).

До появи праць А.М. Ляпунова по стійкості, в цій області був ідейний тупий кут – не вдавалося чітко визначити стійкість.

А.М. Ляпунов отримав конструктивні результати, обмежившись розглядом стійкості тільки по відношенню до початкових збурень.

Отже, будемо розглядати поведінку системи при варіаціях початкових умов, а ці варіації будемо вважати малими, що дасть нам право використовувати замість початкових рівнянь лінеаризовані рівняння руху (рівняння першого наближення).

Вибір незбуреного руху проводиться з практичних міркувань.

Визначення стійкості за Ляпуновим має наступне формулювання.

Незбурений рух назвемо стійким по відношенню до змінних  $x_i(t)$ .

$$\underbrace{x_i(t)}_{\text{відхилення (збурення) від незбуреної траєкторії}} = \underbrace{y_i(t) - y_{iT}(t)}_{\text{зміна опорної (необуреної) траєкторії}}$$

Якщо при будь-якому довільно заданому додатному числі  $\xi$  можна задати інше додатне число  $\delta(\xi)$  так, що при будь-яких збуреннях  $x_i(0)$ , які задовольняють умову

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(0) \leq \delta \quad (3.1)$$

слідую для всіх  $t > 0$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t) \leq \xi. \quad (3.2)$$

Визначення Ляпунова має наступну наочну інтерпретацію:

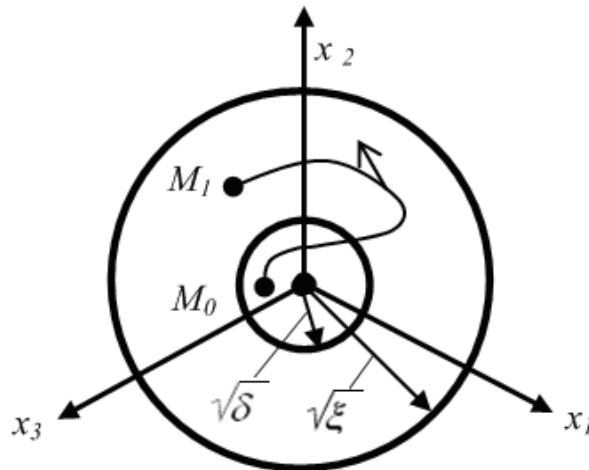


Рисунок 3.2 – Наочна інтерпретація визначення Ляпунова

$$i = 3$$

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

При незбуреному русу  $x_i = 0$  відповідає нерухома точка – початок координат.

Виберемо радіус сфери  $\xi$  довільно малим. Якщо незбурений рух стійкий, то для цієї сфери повинна знайтись інша сфера  $\delta$ , яка володіє наступною властивістю: відображаючи точку  $M$ , почавши свій рух з будь-якої точки  $M_0$ , яка лежить усередині або на поверхні сфери  $\delta$ , при своєму подальшому русі залишається завжди всередині сфери  $\xi$ .

### 3.4 Теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням (про стійкість лінеаризованих систем)

Лінійну замкнену систему в векторно-матричному вигляді можемо представити як

$$\dot{\bar{X}} = A \cdot \bar{X}. \quad (3.3)$$

Згадаємо, як знаходиться розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь. Виконаємо перетворення Лапласа

$$s \cdot \bar{X}(s) = A \cdot \bar{X}(s),$$

$$(I \cdot s - A) \cdot \bar{X}(s) = 0. \quad (3.4)$$

Позначимо

$$I \cdot s - A = M(s),$$



тоді побачимо, що  $M(s) \cdot \bar{X}(s) = 0$  – це в згорнутому вигляді система алгебраїчних рівнянь без правої частини

$$\begin{bmatrix} m_{11}(s) & \cdots & m_{1n}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1}(s) & \cdots & m_{nn}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} m_{11}(s) \cdot x_1 + \dots + m_{1n}(s) \cdot x_n = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ m_{n1}(s) \cdot x_1 + \dots + m_{nn}(s) \cdot x_n = 0. \end{cases}$$

Відомо, що така система однорідних алгебраїчних рівнянь має нетривіальний розв'язок

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (3.5)$$

якщо  $\Delta = 0$ .

З цієї умови існування розв'язання системи рівнянь (4) слідує, що

$$\det(I \cdot s - A) = 0 \quad (3.6)$$

Розкривши визначник, отримаємо алгебраїчне рівняння  $n$ -ого степеня відносно змінної  $s$  – характеристичного рівняння

$$\det(I \cdot s - A) = a_n \cdot S^n + \dots + a_1 \cdot S + a_0 = 0. \quad (3.7)$$

Відомо, що розв'язання системи диференціальних рівнянь записується через корені характеристичного рівняння наступним чином

$$x_i(t) = c_1 \cdot e^{-s_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-s_2 \cdot t} + \dots, \quad (3.8)$$

де  $s_i$  – корені характеристичного рівняння,  $i = \overline{1, n}$ .

Сформулюємо теореми.

### **Теорема 1.**

Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння

( $s_i = \sigma_i + j \cdot \omega_i$ ) від'ємні,

то незбурений рух асимптотично стійкий.

### **Теорема 2.**

Якщо серед коренів характеристичного рівняння  $s_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  буде хоча б один, у якого  $\sigma_i \geq 0$ ,  
то незбурений рух нестійкий.

Розглянемо умови стійкості лінійних систем.

Переформулюємо результати А.М. Ляпунова в більш сучасному вигляді:

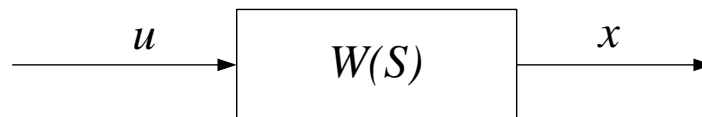


Рисунок 3.3 – Структурна схема динамічної одновимірної системи

Використовуючи перетворення Лапласа, рівняння динаміки для лінійної однорідної системи запишемо в наступному вигляді

$$(a_n \cdot s^n + \dots + a_0) \cdot X(s) = (b_m \cdot s^m + \dots + b_0) \cdot U(s). \quad (3.9)$$

Характеристичне рівняння

$$a_n \cdot s^n + \dots + a_0 = 0. \quad (3.10)$$

Аналогічно може бути отримане характеристичне рівняння для багатомірної системи (як це було показано при розгляді стійкості за першим наближенням):

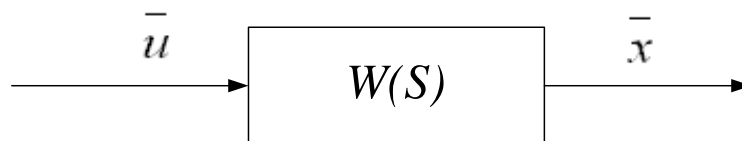


Рисунок 3.4 – Отримання результату для багатомірної системи

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{u}, \\ s \cdot \bar{X}(s) &= A \cdot \bar{X}(s) + B \cdot \bar{U}(s), \\ (I \cdot s - A) \cdot \bar{X}(s) &= B \cdot \bar{U}(s). \end{aligned}$$

У відповідності з визначенням стійкості за теоремою Ляпунова (під стійкістю розуміється стійкість вільного руху) розглядаємо рух правої частини

$$(I \cdot s - A) \cdot \bar{X}(s) = 0.$$

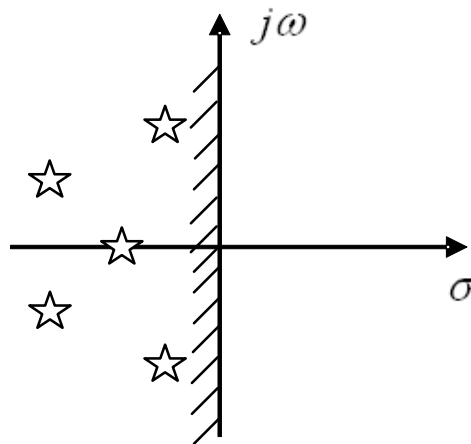
Для нетривіального розв'язання

$$\det(I \cdot s - A) = 0,$$

що дає нам характеристичне рівняння.

Таким чином, методи аналізу стійкості однорідної та багатомірної системи єдині.

Необхідною і достатньою умовою стійкості ЛДС є від'ємність дійсних частин всіх коренів характеристичного рівняння системи  $(s_i = \sigma_i + j \cdot \omega_i)$ ,  $\sigma_i \leq 0$ , тобто всі корні характеристичного рівняння повинні бути "лівими".



Проблема стійкості ЛДС еквівалентна відокремленню коренів полінома.

### 3.5 Алгебраїчні критерії стійкості

Вірні обидва твердження: "Якщо корені *ліві* – система стійка",  
"Якщо система стійка – корені *ліві*"

#### 3.5.1 Необхідні умови стійкості

За теоремою Безу:

$$a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0 = 0. \quad (3.11)$$

Також можна виразити за допомогою коренів:

$$(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot \dots \cdot (s - s_n) = 0, \quad (3.12)$$

де  $s_1, \dots, s_n$  – корені характеристичного рівняння.

Можна записати :

$$\begin{cases} a_n = f_n(s_1, \dots, s_n), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_0 = f_0(s_1, \dots, s_n). \end{cases} \quad (3.13)$$

Існує взаємооднозначна відповідність між коренями і коефіцієнтами. Можна довести наступне твердження:

Якщо всі корені мають від'ємні дійсні частини (уявні корені тільки спряжені),

то коефіцієнти  $a_n, \dots, a_0 > 0$ , тобто  $\forall i, i = \overline{1, n}, a_i > 0$ .

Англійський математик Е. Раус в 1877 році і німецький математик А. Гурвиць в 1895 році винайшли спосіб, не знаходячи корені, опрацювати необхідні і достатні умови ЛДС.

Критерії Рауса і Гурвиця можна опрацювати самостійно (Воронов А.А., ТАУ, Ч. 1. – М.: Высшая школа, 1986. – С. 128-137).

### 3.5.2 Критерій Рауса

Раус запропонував критерій стійкості САУ у вигляді алгоритму за яким заповнюється спеціальна таблиця, в якій записуються коефіцієнти характеристичного полінома. Правила для побудови таблиці такі:

- в першому рядку записуються коефіцієнти рівняння з парними індексами в порядку їх спадання;
- у другому рядку — з непарними;
- інші елементи таблиці визначаються за формулою

$$C_{i, k} = C_{i-2, k+1} - r_i \cdot C_{i-1, k+1},$$

$$\text{де } r_i = \frac{C_{i-2, 1}}{C_{i-1, 1}}, \quad i \geq 3,$$

$i$  — номер рядка,

$k$  — номер стовпця.

Число рядків таблиці Рауса на одиницю більше порядку характеристичного рівняння.

Для того, щоб САУ була стійкою необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти першого стовпця таблиці Рауса були додатними. Якщо умова не виконується, то система нестійка.

До переваг методу відноситься проста реалізація на ЕОМ, а також простота аналізу для систем невеликого (до третього) порядку.

До недоліків можна віднести ненаглядність методу, оскільки по ньому складно судити про ступінь стійкості, про її запас

Таблиця 3.1 – Таблиця Рауса

$r_i$	$k \Rightarrow$ $i$ $\Downarrow$	1	2	3
	1	$C_{11} = a_n$	$C_{12} = a_{n-2}$	$C_{13} = a_{n-4}$
	2	$C_{21} = a_{n-1}$	$C_{22} = a_{n-3}$	$C_{23} = a_{n-5}$
$r_3 = \frac{C_{1,1}}{C_{2,1}}$	3	$C_{31} = C_{12} - r_3 \cdot C_{22}$	$C_{32} = C_{13} - r_3 \cdot C_{23}$	$C_{33} = C_{14} - r_3 \cdot C_{24}$
$r_4 = \frac{C_{2,1}}{C_{3,1}}$	4	$C_{41} = C_{22} - r_4 \cdot C_{32}$	$C_{42} = C_{23} - r_4 \cdot C_{33}$	$C_{43} = C_{24} - r_4 \cdot C_{34}$
	$n + 1$	...	...	...

.

Приклад: використовуючи критерій Рауса, визначити чи стійка ЛДС, якщо характеристичне рівняння має вигляд

$$0,005 \cdot s^6 + 0,1 \cdot s^5 + 2,5 \cdot s^4 + 20 \cdot s^3 + 50 \cdot s^2 + 60 \cdot s + 150 = 0.$$

$$a_6 \cdot s^6 + a_5 \cdot s^5 + a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s^1 + a_0 \cdot s^0 = 0, \text{ де } n = 6 - \text{порядок системи.}$$

Значення	Номер рядка	Номер стовпця			
		1	2	3	4
—	1	$C_{11} = a_6 = 0,005$	$C_{12} = a_4 = 2,5$	$C_{13} = a_2 = 50$	$C_{14} = a_0 = 150$
—	2	$C_{21} = a_5 = 0,1$	$C_{22} = a_3 = 20$	$C_{23} = a_1 = 60$	$C_{24} = 0$
$r_3 = \frac{0,005}{0,1} = 0,05$	3	$C_{31} = 2,5 - 0,05 \cdot 20 = 1,5$	$C_{32} = 50 - 0,05 \cdot 60 = 47$	$C_{33} = 150 - 0,05 \cdot 0 = 150$	$C_{34} = 0$
$r_4 = \frac{0,1}{1,5} = 0,067$	4	$C_{41} = 20 - 0,067 \cdot 47 = 16,85$	$C_{42} = 60 - 0,067 \cdot 150 = 49,95$	$C_{43} = 0 - 0,067 \cdot 0 = 0$	$C_{44} = 0$
$r_5 = \frac{1,5}{16,85} = 0,089$	5	$C_{51} = 47 - 0,089 \cdot 49,95 = 42,55$	$C_{52} = 150 - 0,089 \cdot 0 = 150$	$C_{53} = 0 - 0,089 \cdot 0 = 0$	$C_{54} = 0$
$r_6 = \frac{16,85}{42,55} = 0,396$	6	$C_{61} = 49,95 - 0,396 \cdot 150 = -9,45$	$C_{62} = 0 - 0,396 \cdot 0 = 0$	$C_{63} = 0 - 0,396 \cdot 0 = 0$	$C_{64} = 0$
$r_7 = \frac{42,55}{-9,45} = -4,503$	7 <sup>n+1</sup>	$C_{71} = 150 - (-4,503) \cdot 0 = 150$	$C_{72} = 0 - (-4,503) \cdot 0 = 0$	$C_{73} = 0 - (-4,503) \cdot 0 = 0$	$C_{74} = 0$

Оскільки  $C_{61} = -9,45$ , тобто не всі коефіцієнти першого стовпця таблиці Рауса додатні, то така система буде нестійка.

### 3.5.3 Критерій Гурвиця

Дано: характеристичне рівняння ЛДС

$$a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0 = 0$$

Необхідно визначити: чи стійка дана ЛДС ?

Розв'язання:

1) Складається головний визначник Гурвиця за правилом: коефіцієнти розміщуємо по головній діагоналі, починаючи з  $a_{n-1}$ . Останній стовпець має один ненульовий коефіцієнт.

Визначник порядку  $n$  має вигляд:

↑

спад.

●

зрост.

↓

$n$

$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	...	$0$	$0$
$a_n$	$a_{n-2}$	...	$0$	$0$
$0$	$a_{n-1}$	...	$a_0$	$0$
...	$a_n$	...	$a_1$	$0$
$0$	$0$	...	$a_2$	$a_0$

}

n

2) Послідовно виділяємо (викреслюємо стрічки і стовпці) визначники Гурвиця:


$\Delta 1 = a_{n-1}$   
 $\Delta 2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$   
 ... ..  
 $\Delta n = \dots$

Система **необхідно і достатньо стійка**, якщо для всіх  $\forall i, \Delta i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Всі  $n$  визначників Гурвиця тільки додатні.

Приклад: використовуючи критерій Гурвиця, визначити чи стійка ЛДС, якщо характеристичне рівняння має вигляд

$$s^4 + 3 \cdot s^3 + 2 \cdot s^2 + s + 2 = 0.$$

$a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = 0$ , де  $n = 4$  – порядок системи.

3	1	0	0
1	2	2	0
0	3	1	0
0	1	2	2

$$\Delta 1 = 3 > 0, \quad \Delta 2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5 > 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta 3 &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 3) - (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = 3 \cdot (-4) - 1 \cdot 1 = -12 - 1 = -13 < 0. \end{aligned}$$

Система нестійка, оскільки  $\Delta 3 = -13 < 0$ .

### **Завдання для самостійного рішення**

Перевірити чи стійка ЛДС, якщо :

- 1)  $-5s^5 - 4s^4 - 3s^3 - 2s^2 - s - 20 = 0$
- 2)  $7s^7 + 6s^6 + 4s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s = 0$

### **3.6 Частотні критерії стійкості**

#### ***Неформалізована постановка задачі***

?

Навіщо власне необхідні частотні характеристики ?  
Щоб зрозуміти це, спробуйте відповісти на питання :

?

”Якою інформацією про реальний об’єкт володіє інженер, досліджуючи САУ на стійкість ?”

Згадаєте, як космонавти пригали і бігали всередині космічної станції “Салют”, щоб отримати характеристики її пружних коливань.

Частотні характеристики зручні тим, що використовують безпосередньо експериментальні данні.

!

Вам необхідно знайти критерії стійкості, в яких би використовувались в якості початкових даних частотні характеристики.



### Постановка учбової проблеми

Давайте уявимо, що частотні критерії невідкриті, і Вам потрібно в короткий термін знайти їх, використовуючи раніше отримані знання, які ми вже знаємо і застосовуємо.

1) Сформулюйте необхідну і достатню умову стійкості ЛДС.

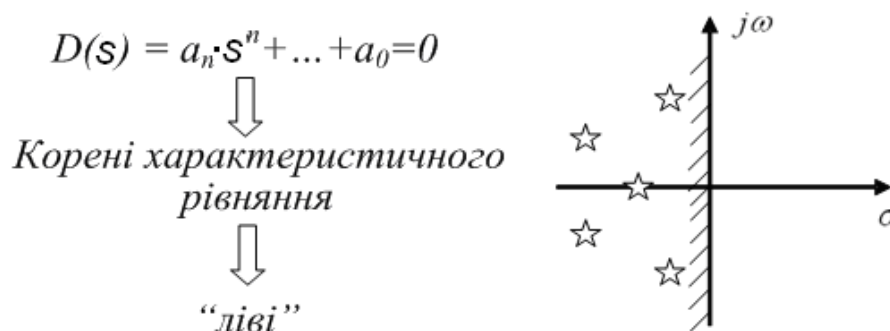


Рисунок 3.5 – Необхідна і достатня умова стійкості ЛДС

2) Згадайте, що таке характеристичне рівняння замкненої САУ? Як воно зв'язане з передаточною функцією?

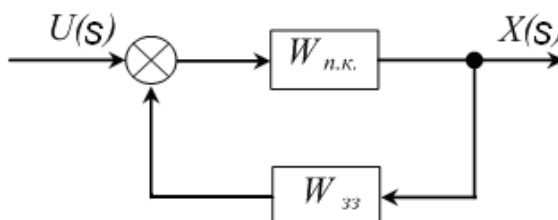


Рисунок 3.6 – Структурна схема замкненої системи

$$W_{\text{замкн.}}(s) = \frac{W_{\text{н.к.}}(s)}{1 + W_{\text{зз}}(s) \cdot W_{\text{н.к.}}(s)} = \frac{R(s)}{D(s)} \quad \text{— після алгебраїчних перетворень.}$$

$D(s) = 0$  – характеристичне рівняння замкненої САУ.

### Завдання для самостійного рішення

Доведіть, що  $D(S) = R(S) + Q(S)$ , де  $R(S)$  і  $Q(S)$  – чисельник і знаменник передаточної функції розімкненої системи :  $W_{\text{розімк}} = \frac{R(S)}{Q(S)}$ .

3) Як зв'язані частотні характеристики  $A(\omega)$  і  $\varphi(\omega)$  з передаточною функцією  $W(S)$  ?

$$A(\omega) = \text{mod}(W(j\omega))$$

$$\varphi(\omega) = \arg(W(j\omega))$$

В чому полягає формальний прийом отримання ЧХ по передаточній функції ? Підставити в  $W(S)$  :  $S=j\omega$ .

### 3.6.1 Принцип аргументу

Давайте розглянемо більш вузьке формулювання учбової проблеми. Як відображається на частотних характеристиках те, що :

- а) всі  $n$  корені – ліві;
- б) існує  $l$  правих коренів ?

**Дано:** характеристичний поліном

$$D(s) = a_n \cdot s^n + \dots + a_0.$$

**Необхідно знайти:** зв'язок між коренями і ЧХ.

**Розв'язання:**

Давайте виразимо  $D(s)$  за допомогою коренів (за теоремою Безу):

$$D(s) = (s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot \dots \cdot (s - s_n).$$

А тепер, використаємо знання № 3 (підставляємо  $s = j\omega$ ):

$$D(j\omega) = (j\omega - s_1) \cdot (j\omega - s_2) \cdot \dots \cdot (j\omega - s_n).$$

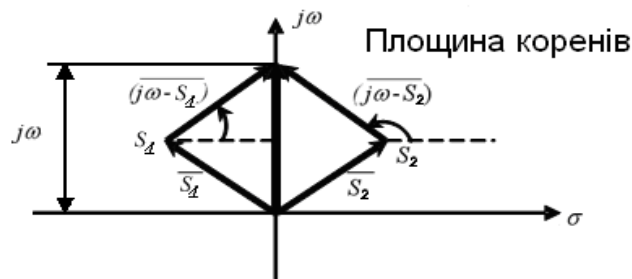


Рисунок 3.7 – Площина коренів

Корінь  $s_i$  можна уявити вектором  $\overline{s_i}$ . Кожен вектор характеризується модулем і фазовим кутом.

$$\text{Arg } D(j\omega) = \text{Arg}(\overline{j\omega - s_1}) + \text{Arg}(\overline{j\omega - s_2}) + \dots + \text{Arg}(\overline{j\omega - s_n}).$$

Домовимося вважати обертання проти годинникової стрілки додатним. Тоді при зміні  $\omega$  від  $-\infty$  до  $+\infty$  кожен елементарний вектор  $(\overline{j\omega - s_i})$  повернеться на кут  $\pi$ , якщо його початок, тобто корінь  $s_i$ , розташований зліва від уявної вісі та на кут  $-\pi$ , якщо корінь розташований справа від уявної вісі.

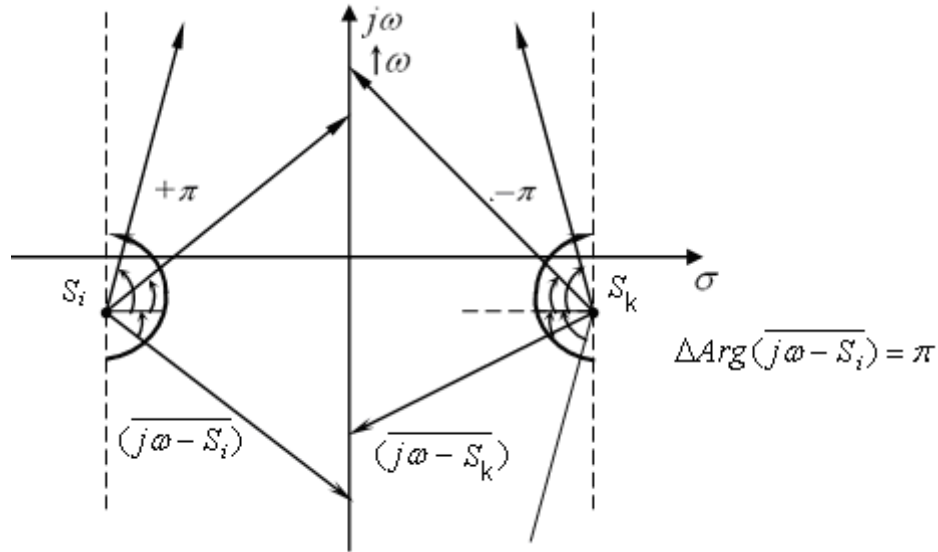


Рисунок 3.8 – Результат зміни  $\omega$  від  $-\infty$  до  $+\infty$

Чому дорівнює приріст аргумента вектора  $D(j\omega)$  при умові, що корені ліві?

$$\Delta \text{Arg } D(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \pi \cdot n ,$$

де  $s_i$  – ліві.

Нехай порядок системи  $n$ , число правих коренів  $l$ , тоді число лівих коренів  $n - l$ . Для цього загального випадку

$$\Delta \text{Arg } D(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = (n - l) \cdot \pi - l \cdot \pi = \pi \cdot (n - 2 \cdot l) .$$

Годограф вектора  $D(j\omega)$  при зміні  $\omega$  від 0 до  $\infty$  дозволяє визначати наявність або відсутність правих коренів. Частотні критерії як і алгебраїчні являють собою часткові рішення загальної проблеми – відокремлення коренів характеристичного рівняння.

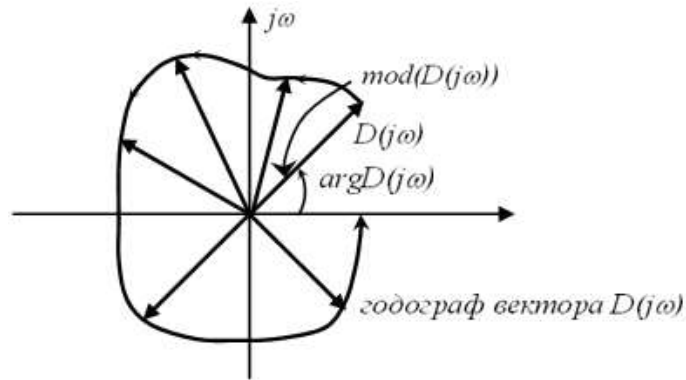


Рисунок 3.9 – Годограф вектора  $D(j\omega)$

### 3.6.2 Частотний критерій стійкості Михайлова

Цей критерій стійкості, сформульований в 1938 році радянським вченим А.В. Михайловим, є по суті геометричною інтерпретацією принципу аргумента.

**Дано:** характеристичний поліном

$$D(s) = a_n \cdot s^n + \dots + a_0.$$

**Необхідно:** перевірити дану САУ на стійкість.

**Розв'язання:**

1) Робимо підстановку:  $s \rightarrow j\omega$

$$D(j\omega) = a_n \cdot (j\omega)^n + \dots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0.$$

2) Виділяємо дійсну та уявну частини полінома  $D(j\omega)$ :

$$D(j\omega) = N(\omega) + j \cdot M(\omega),$$

де  $N(\omega)$  – дійсна функція Михайлова;

$M(\omega)$  – уявна функція Михайлова.

3) Складаємо таблицю:

$\omega$	$N(\omega)$	$M(\omega)$
0	$a_0$	0
1	0,7	0,1
5	2,3	-2
...	...	...
$\infty$	...	...

4) За таблицею будемо годограф вектора  $D(j\omega)$  – годограф Михайлова.

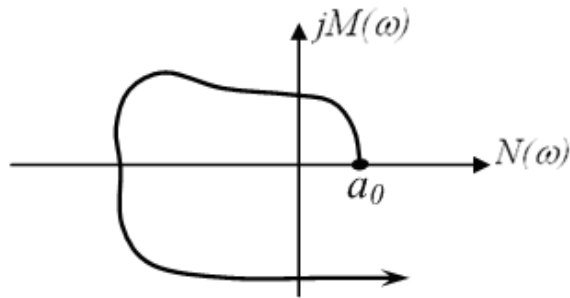


Рисунок 3.10 – Годограф Михайлова

$$\omega = \Delta \text{Arg} D(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \pi \cdot n ,$$

$$\omega = \Delta \text{Arg} D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot n .$$

Будемо розглядати зміну частоти від 0 до  $\infty$ , тому що АФЧХ симетрична, а також достатньо побудувати половину АФЧХ, а на практиці АФЧХ може бути знята для додатних частот.

Сформулюємо критерій стійкості Михайлова.

Для того, щоб САУ була стійкою необхідно і достатньо, щоб годограф Михайлова при зміні частоти від 0 до  $\infty$ , починаючись на дійсній додатній піввісі при  $\omega = 0$ , послідовно обходив проти годинникової стрілки, ніде не обертаючись в нуль, послідовно  $n$  квадрантів координатної площини, де  $n$  – порядок системи.

Годограф Михайлова для стійких систем має звичайну плавну спіралеподібну форму, при чому кінець її наближається до нескінченності в тому квадранті координатної площини, номер якого дорівнює порядку системи. На рисунку можна побачити типові годографи Михайлова для стійких систем відповідно 1,...,5 порядку.

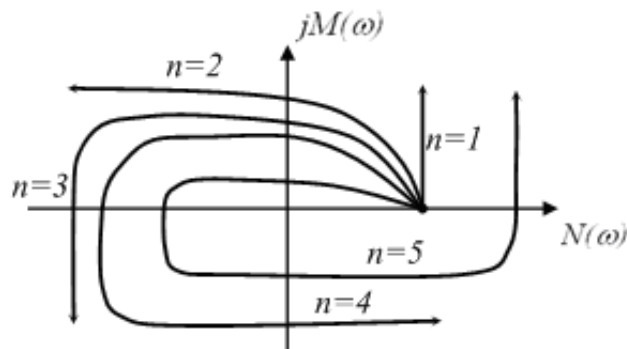
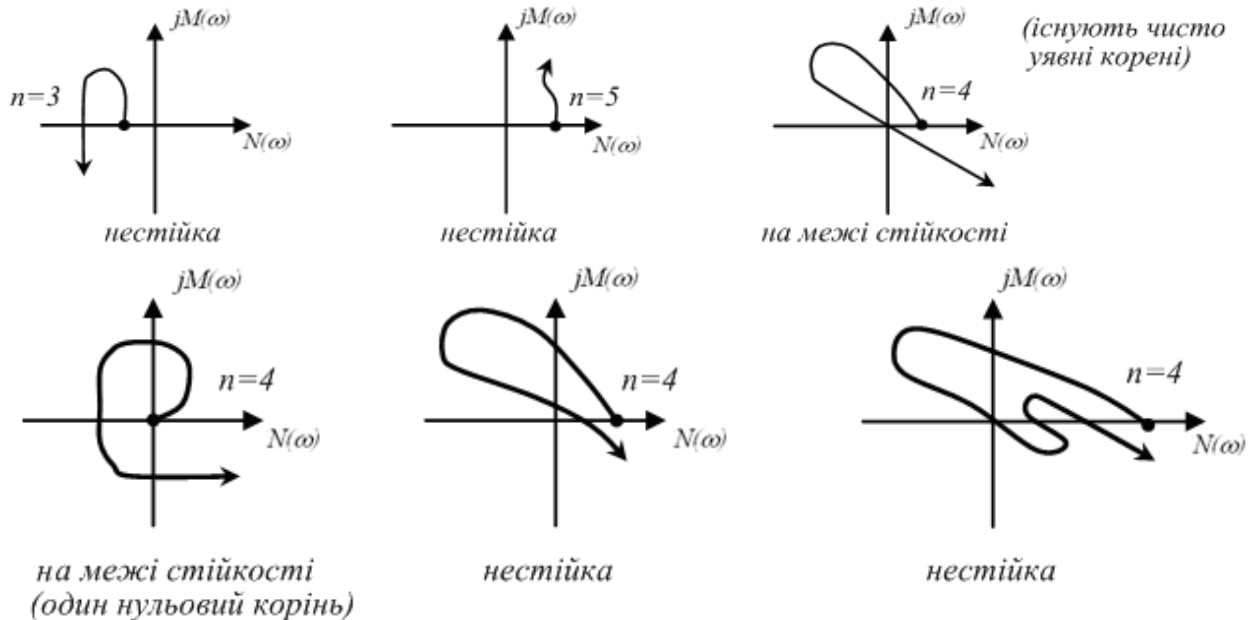


Рисунок 3.11 – Типові годографи Михайлова для стійких систем

Ознакою нестійкості системи є порушення кількості і послідовності пройдених годографом Михайлова квадрантів координатної площини.

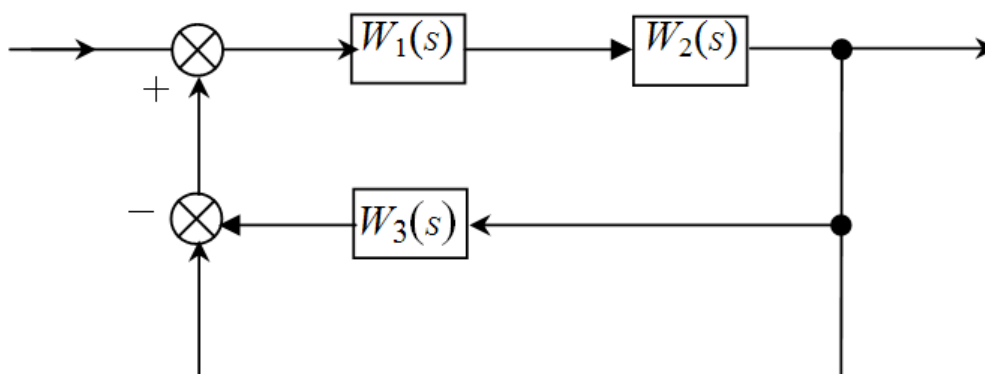
? Яким системам (стійким чи нестійким) відповідають приведені нижче годографи Михайлова ?



**Самостійно !!!** Наслідок критерія Михайлова. (Воронов А.А., ТАУ, ч.І, 1986, стор. 143-145).

### **Завдання для самостійного виконання**

Виконати структурні перетворення схеми і знайти передаточну функцію системи.

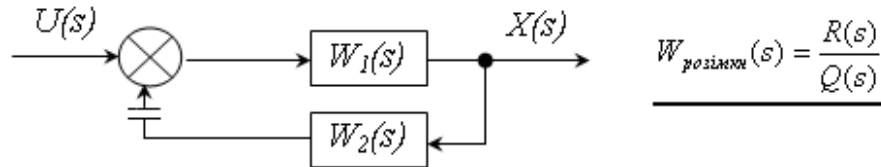


### **3.6.3 Частотний критерій стійкості Найквіста**

Цей критерій запропонований в 1932 році американським вченим Г. Найквістом. Критерій дозволяє аналізувати стійкість замкненої системи

по виду АФЧХ розімкненої системи в багатьох випадках отриманої експериментально.

**Дано:**



**Необхідно визначити:** чи стійка замкнена САУ ?

**Розв'язання:**

$$W_{\text{розімкн}}(s) = W_1(s) \cdot W_2(s),$$

$$W_{\text{замкн.}}(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_{\text{розімкн.}}(s)};$$

$Q(s)$  – характеристичний поліном розімкненої системи;

$D(s)$  – характеристичний поліном замкненої системи;

$K(s) = 1 + W_{\text{розімкн.}}(s) = 0$  – рівняння, еквівалентне характеристичному рівнянню замкненої САУ.

$$K(s) = 1 + W_{\text{розімкн.}}(s) = 1 + \frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{Q(s) + R(s)}{Q(s)} = \frac{D(s)}{Q(s)}. \quad (3.14)$$

Оскільки в реальних системах степінь полінома  $R(s)$  не вище степені полінома  $Q(s)$ , тобто  $m \leq n$ , то степінь поліномів  $D(s)$  і  $Q(s)$  однакова і рівна  $n$ .

Підставимо у вираз  $s \rightarrow j\omega$

$$K(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{Q(j\omega)}.$$

Розглянемо випадок, який найбільш часто зустрічається, коли розімкнена САУ стійка, тобто всі корені “ліві”.

При зміні частоти  $\omega$  від  $-\infty$  до  $+\infty$  зміна кута повороту  $K(j\omega)$  на основі принципу аргументу має вигляд

$$\Delta \text{Arg } K(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \Delta \text{Arg } D(j\omega) - \Delta \text{Arg } Q(j\omega) = n \cdot \pi - n \cdot \pi = 0.$$

Це означає, що для стійкої замкненої системи необхідно, щоб АФЧХ  $K(j\omega)$  не охоплювала початок координат, а АФЧХ  $W_{\text{розімкн}}(j\omega)$  не охоплювала точку  $(-1; j \cdot 0)$ .

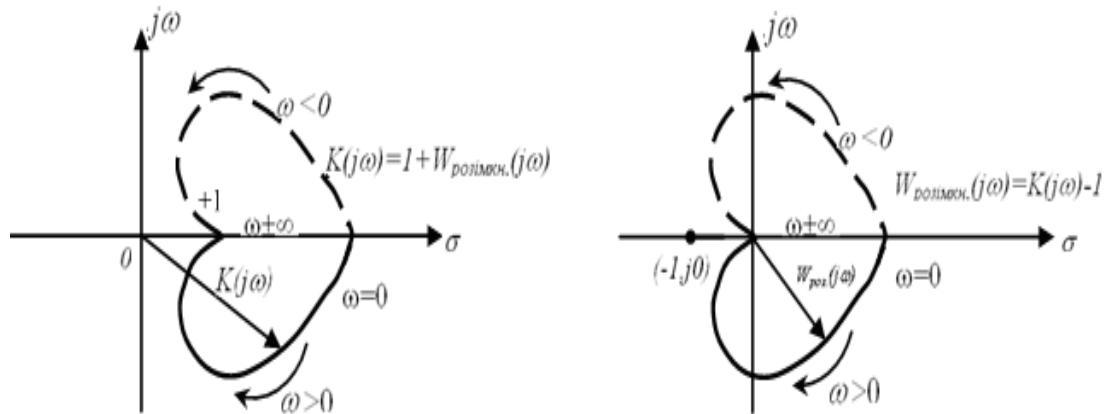


Рисунок 3.12 – Годографи  $K(j\omega)$  та  $W_{\text{розімкн}}(j\omega)$

Таким чином, отримаємо наступне формулювання критерію Найквіста.

Якщо розімкнена САУ стійка, то замкнена САУ буде стійка, якщо АФЧХ розімкненої системи  $W_{\text{розімкн}}(j\omega)$  не охоплює точку  $(-1; j \cdot 0)$ .

### 3.7 Запас стійкості по амплітуді та фазі

В реальних САУ всі параметри мають деяке допустиме розкидання. Зазвичай необхідно, щоб САУ була стійкою при допустимому розкиданні параметрів. Для цієї мети використовується поняття запасів стійкості САУ, які вводяться на основі частотного критерію Найквіста.

Запаси стійкості характеризують віддалення частотного годографа розімкненої системи  $W_{\text{розімкн}}(j \cdot \omega)$  від критичної точки з координатами  $(-1; j \cdot 0)$ .

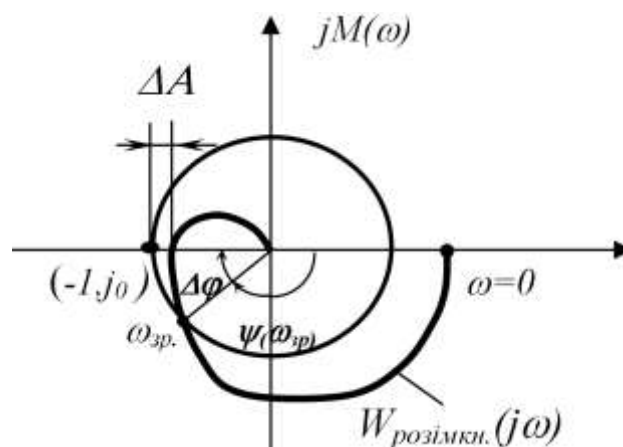


Рисунок 3.13 – Визначення запасів стійкості по амплітуді та фазі



Частота перетину годографа  $W_{\text{розімкн}}(j \cdot \omega)$  і одиничного кола називається частотою зрізу  $\omega_{зр}$ . На частоті зрізу

$$|W_{\text{розімкн}}(j\omega)| = 1.$$

Запас стійкості по фазі визначають як величину кута

$$\Delta\varphi = \pi \cdot |\psi(\omega_{зр})|.$$

Запас стійкості по амплітуді визначають як величину відрізка вісі абсцис  $\Delta A$ , який знаходиться між критичною точкою  $(-1; j \cdot 0)$  і АФЧХ розімкненої САУ  $W_{\text{розімкн}}(j \cdot \omega)$ .

Зі зростанням коефіцієнту підсилення розімкненої системи модуль амплітудно-фазової характеристики також зростає і при деякому значенні коефіцієнта підсилення  $K = K_{кр}$ , який називається критичним коефіцієнтом підсилення, АФЧХ пройде крізь точку  $(-1; j \cdot 0)$ , тобто система буде на межі стійкості. При  $K > K_{кр}$  система буде нестійкою.

Однак, зустрічаються системи (з внутрішніми зворотними зв'язками), в яких втрата стійкості може статися не тільки при збільшенні коефіцієнта підсилення, але й при його зменшенні. Цим випадкам можуть відповідати так звані дзьобоподібні АФЧХ.

У цих випадках запас стійкості по амплітуді визначається величинами двох відрізків  $\Delta A$  вісі абсцис, які знаходяться між критичною точкою  $(-1; j \cdot 0)$  і АФЧХ.

Щоб система мала необхідний запас стійкості при заданих величинах  $\Delta A$  і  $\Delta\varphi$ , біля критичної точки  $(-1; j \cdot 0)$  викреслюється деяка заборонена область у вигляді сектора, обмеженого величинами  $\pm \Delta A$  і  $\pm \Delta\varphi$ , в яку АФЧХ  $W_{\text{розімкн}}(j \cdot \omega)$  не повинна входити.

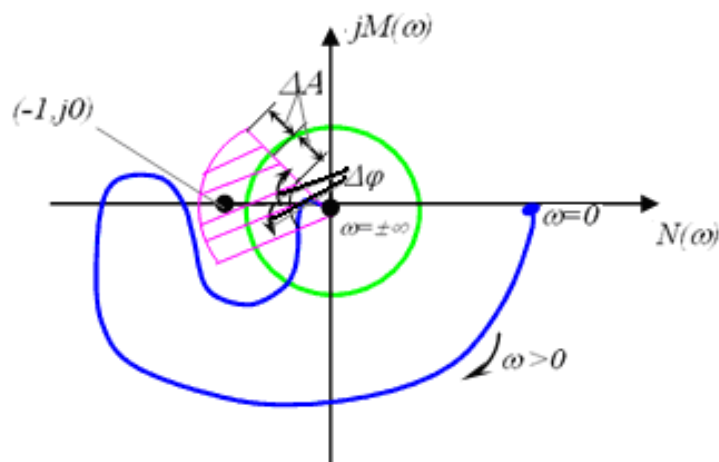
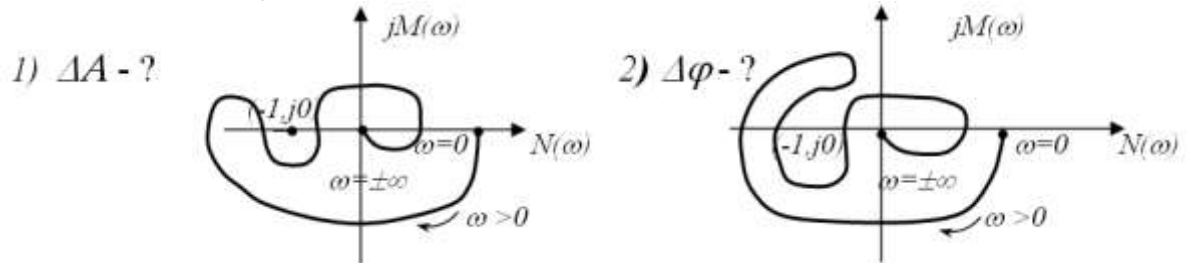


Рисунок 3.14 – Визначення запасів стійкості для випадку дзьобоподібного годографа

### Завдання для самостійного рішення

Описати формально запаси стійкості по амплітуді і фазі, Якщо  $W_{розімкн.}(j\omega)$  має слідуючий вигляд :



### 3.8 Аналіз стійкості САУ по частотним характеристикам

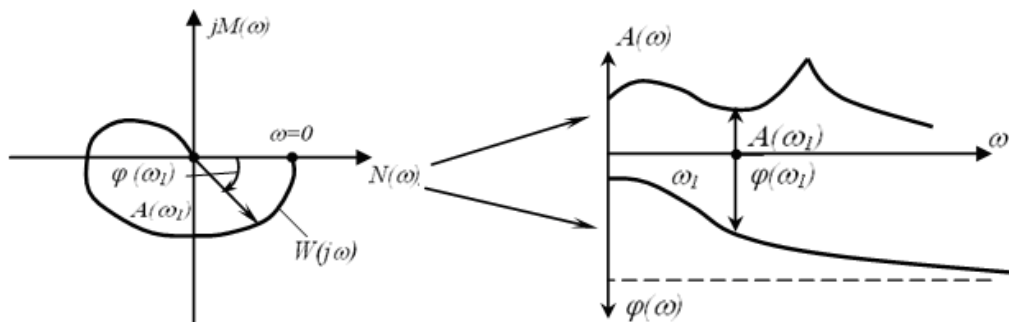


Рисунок 3.15 – Аналіз стійкості за ЛЧХ

Для аналізу стійкості зручно використовувати ЛЧХ. Це обумовлено тим, що побудова ЛЧХ розімкнених систем значно простіша за побудову годографа АФЧХ. Стійкість зв'язана з кількістю переходів АФЧХ  $W(j\omega)$  відрізка  $(-\infty; -1)$  від'ємної дійсної піввісі.

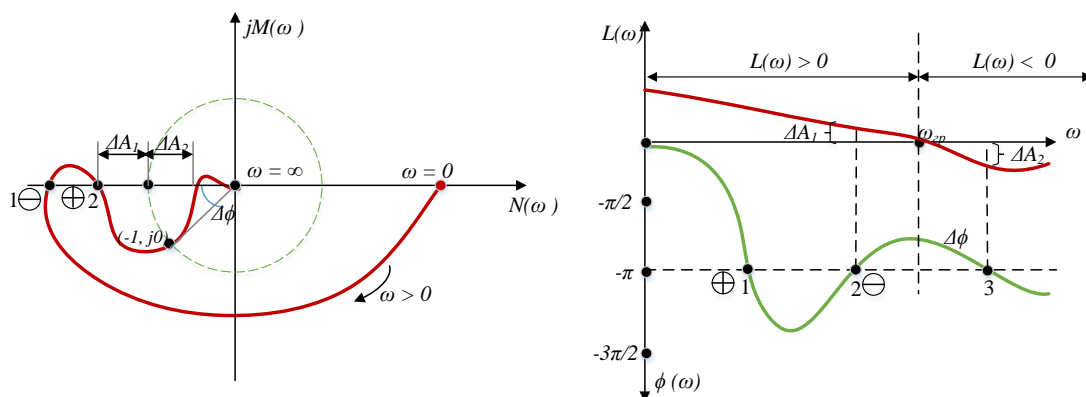


Рисунок 3.16 – Аналіз стійкості за ЛЧХ

Коли  $W(j\omega)$  перетинає від'ємну дійсну піввісь, ЛФЧХ перетинає одну з ліній  $\pm \pi \cdot (2 \cdot i + 1)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Переходи через ці лінії безпечні з точки зору стійкості, якщо вони відбуваються справа від точки  $(-1; j \cdot 0)$ , тобто якщо  $|W(j\omega)| < 1 \Rightarrow L(\omega) < 0$ .

Додатному переходу (зверху вниз) через відрізок  $(-\infty; -1)$  АФЧХ відповідає перетин ЛФЧХ при  $L(\omega) > 0$  прямих  $\pm \pi \cdot (2 \cdot i + 1)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  знизу вгору (точка 2), а від'ємному переходу – зверху вниз (точка 1).

Критерій стійкості Найквіста стосовно до ЛЧХ може бути сформульований наступним чином.

Якщо розімкнена САУ стійка (всі корені ліві), то замкнена САУ необхідно і достатньо стійка, якщо різниця між кількістю додатних і від'ємних переходів ЛФЧХ прямих  $-\pi$  при  $L(\omega) > 0$  дорівнює 0.

### 3.9 Побудова областей стійкості в площині параметрів системи. Метод D-розбиття

Параметри САУ можуть в процесі функціонування системи змінюватись. (Чому? – старіння, дрейф, специфіка; зміна зовнішнього середовища – температура, тиск тощо). Тому побудова областей стійкості САУ в просторі її параметрів, представляє велику цінність.

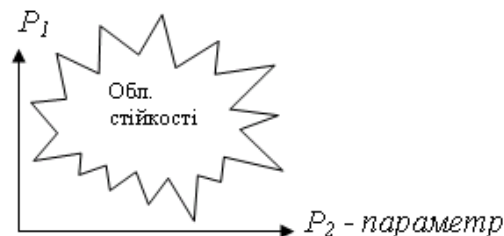


Рисунок 3.17 – Область стійкості за параметрами  $P_1$  та  $P_2$

Сьогодні таку задачу вирішують на ЕОМ, безпосередньо визначаючи стійкість САУ при різноманітних варіаціях параметрів.

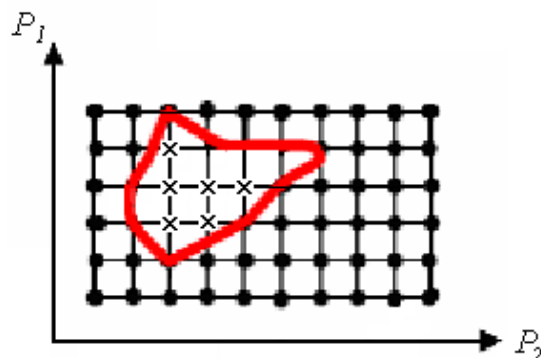


Рисунок 3.18 – Сітка параметрів для визначення області стійкості

Сітка параметрів:   ●- САУ нестійка;  
                               × – САУ стійка.

У підручниках описаний докомп'ютерний, але дуже елегантний метод побудови областей стійкості – метод D-розбиття, який був запропонований Ю.М. Неймарком.

У зв'язку з домінуванням прямих комп'ютерних методів, значення методу D-розбиття дещо знизилось.

**Метод D-розбиття.** Розглянемо основи методу, з яким більш детально рекомендується ознайомитися по підручнику Воронова (частина 1, стор. 155-167) самостійно.

Розглянемо характеристичне рівняння

$$D(s) = s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0 = 0, \quad (a_n = 1). \quad (3.15)$$

Уявимо собі  $n$ -мірний простір, по координатним вісям якого відкладені коефіцієнти рівняння (3.12). Цей простір називають простором коефіцієнтів.

Рівняння (3.12) має  $n$  коренів, розміщення яких на комплексній площині коренів  $s$ , залежить від чисельних значень коефіцієнтів  $a_i$ .

Якщо змінювати коефіцієнти  $a_i$  рівняння (3.12), то його корені в силу їх неперервної залежності від коефіцієнтів будуть переміщуватись в комплексній площині коренів, описуючи кореневі годографи.

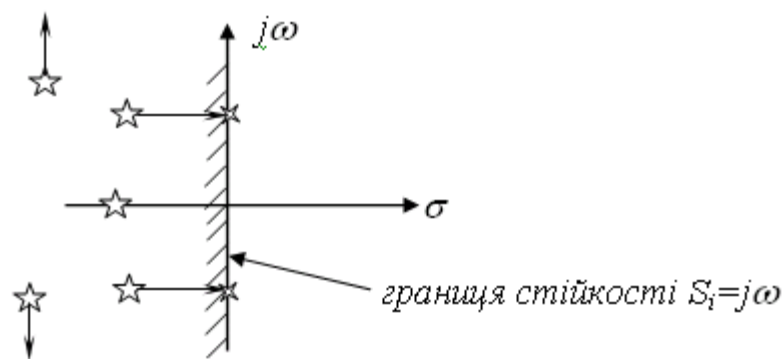


Рисунок 3.19 – Кореневий годограф

Підставимо в рівняння (3.15) вираз  $s_i = j\omega$ :

$$D(j\omega) = (j\omega)^n + \dots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0 = 0. \quad (3.16)$$

Це рівняння є початковим для побудови меж стійкості в області параметрів. Якщо проводиться розбиття по одному параметру  $\nu$ , то межа D-розбиття визначається рівнянням

$$D(j\omega) = K(j\omega) + \nu \cdot N(j\omega) = 0.$$

Якщо проводиться D-розбиття по двом параметрам  $\nu$  та  $\mu$ , то

$$D(j\omega) = \nu \cdot N(j\omega) + \mu \cdot M(j\omega) + L(j\omega) = 0.$$

### 3.10 Аналіз стійкості систем з запізненням

Потрібно розрізняти часові (а) та інерційні (б) запізнення. Для випадку (а) постійна часу  $T = \frac{1}{\omega}$ , а  $W = \frac{1}{T \cdot s + 1}$ .



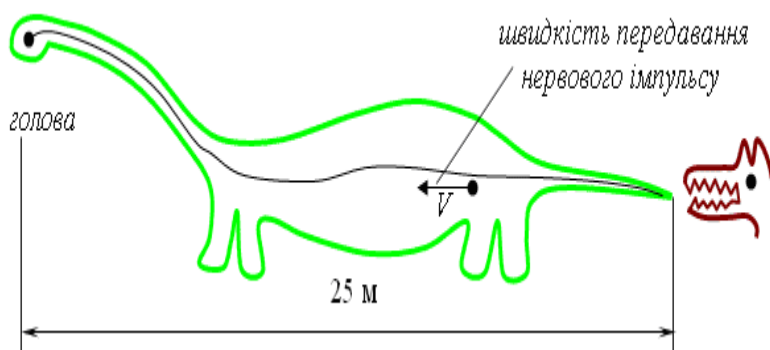
Рисунок 3.20 – Часові та інерційні запізнення

Згадаємо в яких реальних системах зустрічається запізнення.

1. Місяцехід.

За той час ( $\approx 2$ -3сек), доки зображення дороги дійде до пункту управління, і оператор подасть сигнал, місяцехід зміститься на  $\Delta S \approx 1$ м.

2. Бронтозавр.



Бронтозавр розпізнав, що його хтось вкусив за хвіст через  $t = \frac{25 \text{ м}}{5 \text{ м/с}} = 5 \text{ с}$ , і тільки через цей час – 5 секунд – зреагував.

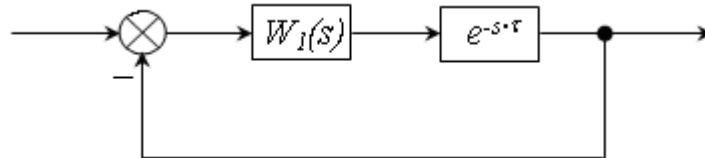
Чи не тому вони вимерли?

### 3. Підприємство, економіка.

На вході сировина, а на виході телевізор, автомобіль – із запізненням на 10-50 днів.

Розглянемо типову структурну схему САУ з запізненням. Може існувати два її варіанти.

#### 1. Ланка запізнення в прямому колі.

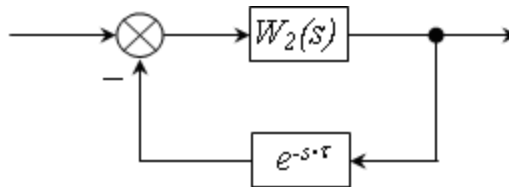


$$W_{\tau \text{ розімкн}}(s) = W_1(s) \cdot e^{-s \cdot \tau} = \frac{R(s)}{Q(s)} \cdot e^{-s \cdot \tau},$$

де  $W_1(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$  – передаточна функція розімкненої САУ без урахування запізнення.

$$W_{\tau \text{ замкн}}(s) = \frac{W_{\tau \text{ розімкн}}(s)}{1 + W_1(s) \cdot e^{-s \cdot \tau}} = \frac{W_{\tau \text{ розімкн}}(s)}{1 + W_{\tau \text{ розімкн}}(s)} = \frac{R(s) \cdot e^{-s \cdot \tau}}{Q(s) + R(s) \cdot e^{-s \cdot \tau}} = \frac{R_{\tau}(s)}{D_{\tau}(s)}. \quad (3.17)$$

#### 2. Ланка запізнення в колі ЗЗ.



$$W_{\tau \text{ замкн}}(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s) \cdot e^{-s \cdot \tau}} = \frac{R(s)}{Q(s) + R(s) \cdot e^{-s \cdot \tau}} = \frac{R(s)}{D_{\tau}(s)}. \quad (3.18)$$

Видно, що незалежно від місця включення ланки, яка запізнюється, характеристичне рівняння системи із запізнення має вигляд

$$D_{\tau}(s) = Q(s) + R(s) \cdot e^{-s \cdot \tau} = 0. \quad (3.19)$$

Це характеристичне рівняння має нескінченну множину коренів, оскільки

$$e^{-s \cdot \tau} = 1 - s \cdot \tau + \frac{s^2 \cdot \tau^2}{2!} - \frac{s^3 \cdot \tau^3}{3!} + \dots + \frac{s^n \cdot \tau^n}{n!}.$$

Для того, щоб ЛДС з постійним запізненням була стійкою, необхідно і достатньо, щоб усі корені рівняння (6) були лівими. Знаходження коренів рівняння (6) складне, тому для дослідження стійкості систем з запізненням використовують критерії стійкості. Найбільш зручно використовувати критерій Найквіста. Вперше цю задачу розв'язав радянський вчений Я.З. Ципкін.

Частотну передаточну функцію  $W_{\tau \text{розімк}}(j\omega)$  розімкненої системи з запізненням знаходять, підставляючи  $s = j\omega$  в  $W_{\tau \text{розімк}}(s)$ .

$$W_{\tau \text{розімк}}(j\omega) = |W_{\tau \text{розімк}}(j\omega)| \cdot e^{-j\omega \cdot \tau} = A(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)} \cdot e^{-j\omega \cdot \tau} = A(\omega) \cdot e^{j \cdot (\varphi(\omega) - \omega \cdot \tau)}.$$

З цього випливає, що АФЧХ САУ з запізненням відрізняється від АФЧХ цієї ж системи при  $\tau = 0$  тим, що для відповідної частоти зсув по фазі більше на  $\omega\tau$ .

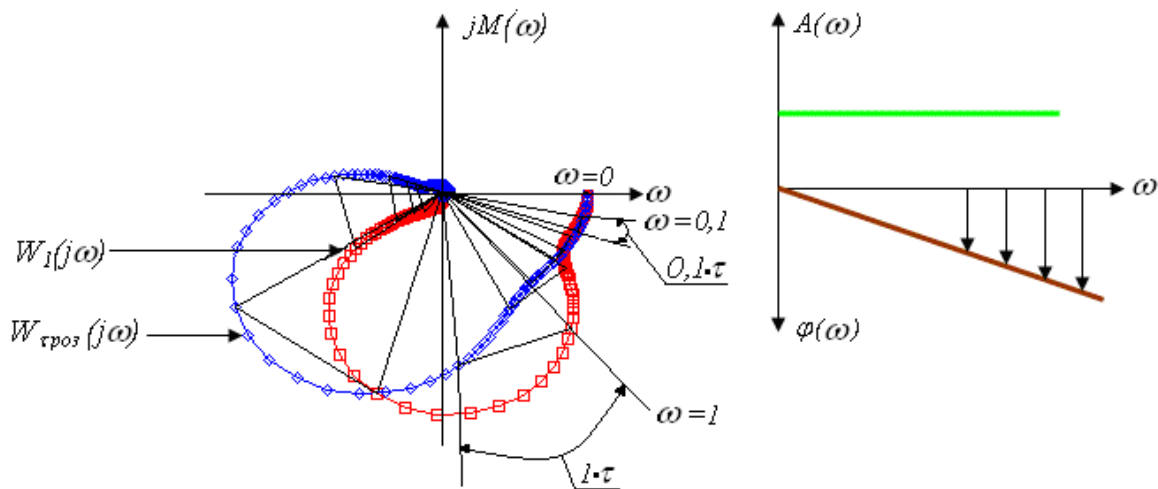
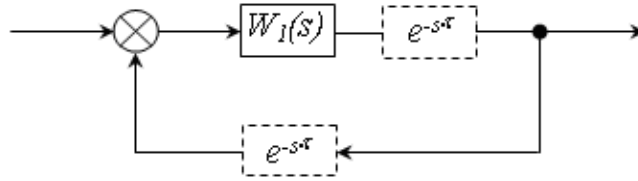


Рисунок 3.21 – Побудова АФЧХ з запізненням

### 3.11 Задача про граничне запізнення

**Дано:** деяка структура замкненої САУ з заданими передаточними функціями, яка містить в собі ланку запізнення.



**Знайти:**  $\tau_{кр.}$  – граничне запізнення, при якому система знаходиться на межі стійкості.

### Розв'язання:

Час запізнення  $\tau_{кр.}$  і відповідне йому значення частоти  $\omega_{кр.}$ , при яких  $W_{\tau\text{ роз}}(j\omega)$  проходить через точку  $(-1; j \cdot 0)$ , називають критичним.

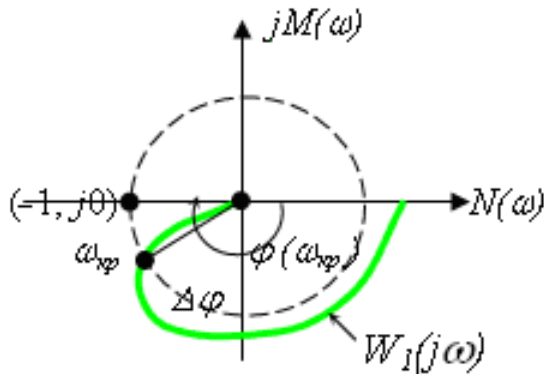


Рисунок 3.22 – Визначення граничного запізнення

$$W_{\tau\text{ роз}}(j\omega_{кр.}) = |W_{\tau\text{ роз}}(j\omega_{кр.})| \cdot e^{-j\omega_{кр.} \cdot \tau_{кр.}} = A(\omega_{кр.}) \cdot e^{j(\varphi(\omega_{кр.}) - \omega_{кр.} \cdot \tau_{кр.})} = -1 + 0 \cdot j$$

$$A(\omega_{кр.}) = |W_{\tau\text{ роз}}(j\omega_{кр.})| = 1 - \text{з цього виразу знаходимо } \omega_{кр.}$$

$$\varphi(\omega_{кр.}) - \omega_{кр.} \cdot \tau_{кр.} = -\pi \cdot (2 \cdot i + 1), \text{ де } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

З останнього виразу знаходимо  $\tau_{кр.}$ :

$$\tau_{кр.} = \frac{\varphi(\omega_{кр.}) + \pi \cdot (2 \cdot i + 1)}{\omega_{кр.}} = \frac{\Delta\varphi}{\omega_{кр.}}.$$

Визначати  $\tau_{кр.}$  достатньо легко графічно.



### 3.12 Оцінка якості регулювання САУ за часовими характеристиками

У стійкій системі перехідний процес затухає. Однак, для практики не байдужий характер затухання перехідного процесу.

Так, наприклад, якщо перехідний процес затухає повільно, і система довго

входить у новий режим, який встановлюється, то вона володіє недостатньою швидкістю, і, відповідно, її застосування буде обмеженим. Тому стійкість є необхідною, але не достатньою умовою працездатності САУ.

Достатньою умовою є якість процесів регулювання, яка оцінюється якістю перехідних процесів і помилками в режимах, які встановилися.

У різноманітні реальних вхідних сигналів оцінка якості САУ проводиться відносно стандартних вхідних сигналів (тест-сигналів).

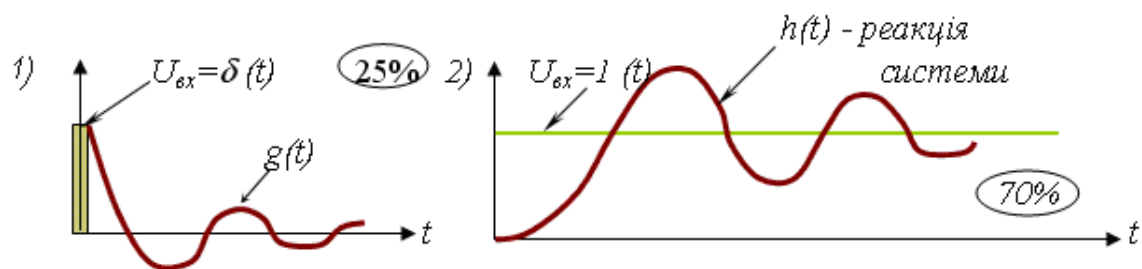


Рисунок 3.23 – Реакція системи на одиничний імпульсний та одиничний ступінчастий впливи

Такі види перехідних процесів складають  $\approx 95\%$ .

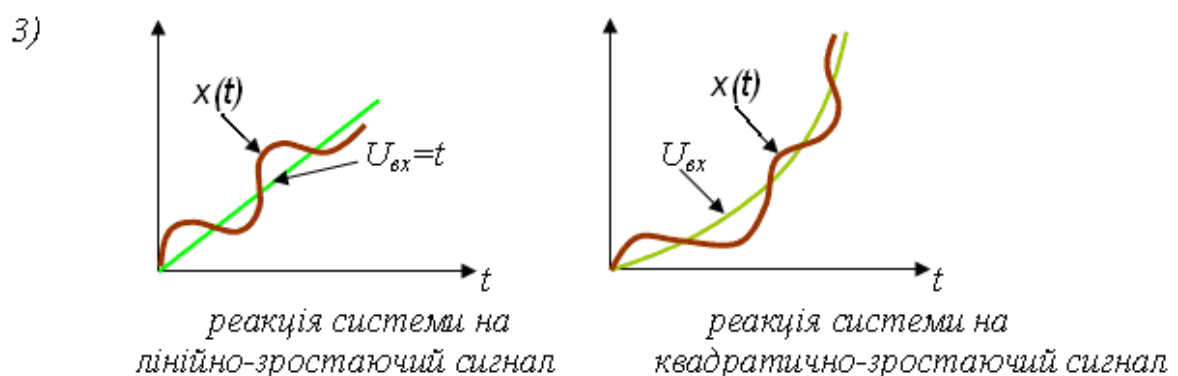


Рисунок 3.24 – Реакція системи на лінійно-зростаючий та квадратично-зростаючий сигнали

Частіше САУ оцінюється за одиничними скачками –  $70\%$ . Розглянемо реакцію системи на одиничний скачок.

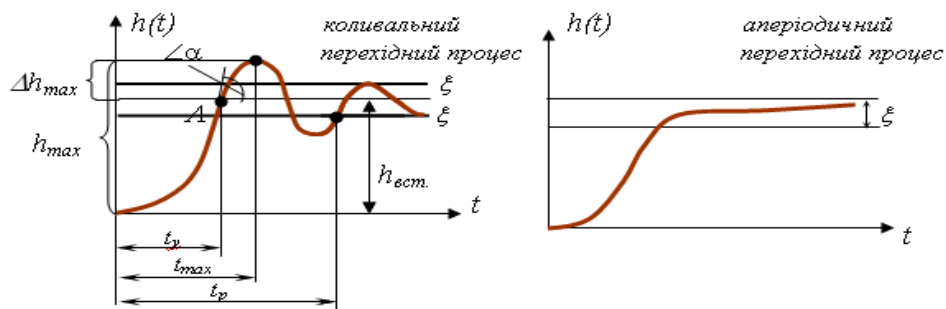


Рисунок 3.25 – Коливальний та аперіодичний перехідні процеси

Показники якості, які визначаються безпосередньо за кривою перехідного процесу, називають прямими оцінками якості.

Основні показники якості перехідного процесу:

- час регулювання  $t_p$ ;
- перерегулювання  $\Delta h_{\max}$ ;
- власна частота коливань;
- кількість коливань;
- максимальна швидкість і максимальне прискорення величини, яка регулюється.

Час регулювання  $t_p$  визначається тривалістю перехідного процесу. Теоретично перехідний процес триває нескінченно довго, але практично вважають, що він закінчується, як тільки відхилення регулюємої величини від нового його значення, яке встановилося, не будуть перевищувати допустимих меж  $\xi$ . Звичайно приймають  $\xi = (3-5)\%$  від  $h_{\text{вст}}$ .

Часом регулювання характеризують швидкодію системи. Однак, іноді швидкодію характеризують також часом  $t_y$  досягнення перехідною функцією перший раз нового встановленого значення, або часом  $t_{\max}$  досягнення максимального значення  $h_{\max}$ .

Перерегулювання  $\Delta h_{\max}$ , або викидання, являє собою максимальне відхилення регулюємої величини від нового встановленого значення. Звичайно, перший максимум є найбільшим.

Відносне перерегулювання розраховують за формулою

$$\sigma = \frac{\Delta h_{\max}}{h_{\text{вст}}} \cdot 100\% = \frac{h_{\max} - h_{\text{вст.}}}{h_{\text{вст.}}} \cdot 100\% \quad (3.20)$$

Час регулювання і перерегулювання – основні показники перехідного процесу, які тісно пов'язані між собою.

Перерегулювання з'являється внаслідок того, що система до необхідного встановленого стану підходить з певною швидкістю, яка

графічно відображається тангенсом кута нахилу дотичної в точці  $A$ , що показано на рисунку вище. Чим більша ця швидкість, тим більше перерегулювання. Якщо зменшити перерегулювання, тобто швидкість, це призведе до збільшення часу регулювання.

### 3.12.1 Непрямі оцінки якості перехідних процесів

Всебічну оцінку якості перехідного процесу проводять за графіком перехідної функції, розрахунок і побудова якого є доволі важкими задачами.

У зв'язку з цим виникає питання: чи потрібно знати всі деталі перехідного процесу?

Непрямими оцінками називають деякі числа, які характеризують окремі сторони перехідного процесу. Перевага побічних оцінок в тому, що вони дозволяють в деякій мірі судити про вплив параметрів системи на її динамічні властивості.

Існує декілька непрямих оцінок якості перехідного процесу:

- оцінка по частотним характеристикам;
- інтегральні оцінки;
- кореневі методи і т.д.

Найбільш часто використовується інтегральна оцінка якості перехідного процесу. Найпростішою інтегральною оцінкою є

$$I_0 = \int_0^{\infty} \xi(t) \cdot dt, \quad (3.21)$$

де  $\xi(t) = x_T(t) - x(t)$  – помилка системи,

$x(t)$  – дійсний стан системи;

$x_T(t)$  – необхідний стан системи.

Однак, ця оцінка може бути застосована тільки для перехідних процесів без перерегулювання, коли помилка не змінює свій знак.

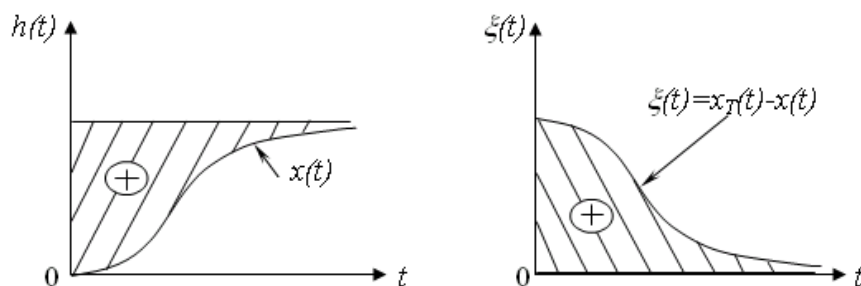


Рисунок 3.26 – Визначення помилки системи

Інтеграл визначає заштриховану площину, яку називають площиною регулювання.

При коливальному характері перехідного процесу застосовують інтегральну оцінку

$$I_1 = \int_0^{\infty} |\xi(t)| \cdot dt \quad (3.22)$$

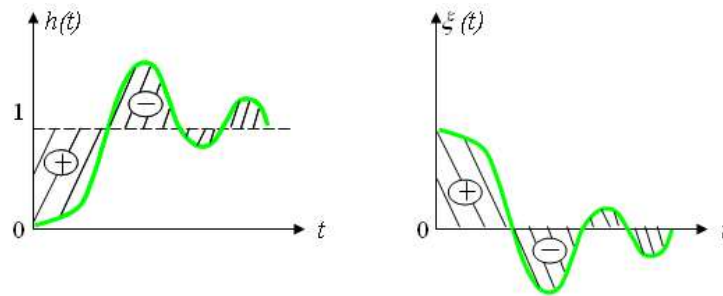


Рисунок 3.27 – Площина регулювання для інтегральної оцінки

Для оцінки як коливальних, так і монотонних перехідних процесів часто застосовується квадратична інтегральна оцінка, яка не залежить від знаку помилки, а значить і від характеру кривої перехідного процесу.

$$I_2 = \int_0^{\infty} \xi^2(t) \cdot dt, \quad (3.23)$$

Заштриховану площину називають квадратичною площиною регулювання.

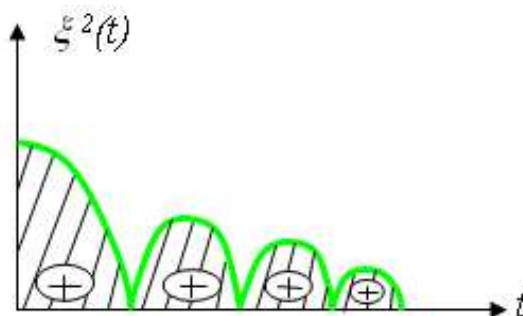


Рисунок 3.28 – Квадратична площа регулювання

Величина інтеграла  $I_2$  тим менша, чим ближче перехідний процес до ідеальної ступінчатої зміни регулюємої величини. Інтегральна оцінка якості не завжди дає “кращий” ПП (перехідний процес).

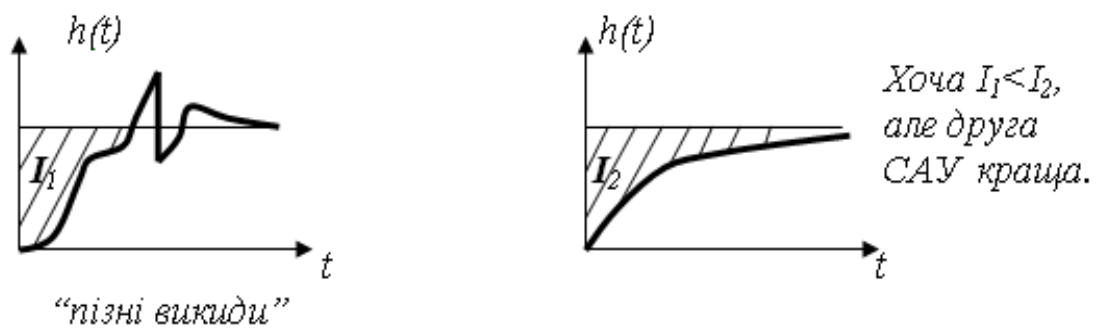


Рисунок 3.29 – Порівняння двох процесів за інтегральною оцінкою

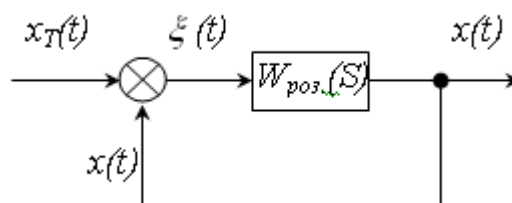
Не існує єдиновірного (який би підходив на всі випадки), критерія якості, крім марксизма-ленінізму.

### 3.12.2 Оцінка якості САУ в усталених режимах

У цьому розділі ми повинні отримати формули для визначення помилок у режимі, що встановився.

#### 3.12.2.1 Передаточна функція по помилці

Дано:



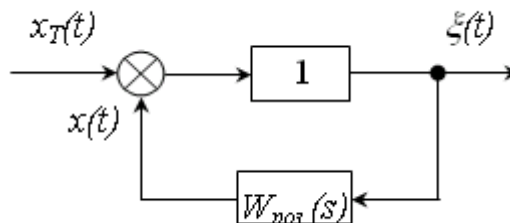
де  $x(t)$  – дійсний стан;  $x_T(t)$  – необхідний стан системи;  $\xi(t)$  – помилка.

Будемо розглядати слідкуючу систему, тобто  $\xi(t) = x_T(t) - x(t)$ .

Необхідно знайти: передаточну функцію по помилці.

$$W_{\xi}^{x_T}(s) = \frac{\xi(s)}{x_T(s)} = ?$$

Розв'язання:



У підручниках дана задача розв'язується наступним чином (дивись структурну схему, подану при постановці задачі).

$$\xi(t) = x_T(t) - x(t).$$

Виконаємо перетворення Лапласа:

$$\begin{aligned}\xi(s) &= x_T(s) - x(s); \\ x(s) &= W_{замкн.}(s) \cdot x_T(s); \\ W_{замкн.}(s) &= \frac{W_{роз.}(s)}{1 + W_{роз.}(s)}.\end{aligned}$$

Тоді:

$$\begin{aligned}\xi(s) &= x_T(s) - \frac{W_{роз.}(s)}{1 + W_{роз.}(s)} \cdot x_T(s) = \left(1 - \frac{W_{роз.}(s)}{1 + W_{роз.}(s)}\right) \cdot x_T(s); \\ \xi(s) &= \frac{1}{1 + W_{роз.}(s)} \cdot x_T(s); \\ W_{\xi}^{x_T}(s) &= \frac{\xi(s)}{x_T(s)} = \frac{1}{1 + W_{роз.}(s)} \quad - \text{передаточна функція по помилці}\end{aligned}\tag{3.24}$$

### 3.12.2.2 Усталені режими. Усталені помилки

ТАУ розглядає автоматичні системи в інформаційному плані, тобто з точки зору передавання і перетворення сигналів. Тому виникає запитання: з якою точністю передаються ці сигнали? Взагалі, нас буде цікавити точність відтворення впливу, який задається, а саме: з якою точністю виконується основна умова

$$x(t) = x_T(t).$$

Помилка системи за впливом, який задається  $\xi(t) = x_T(t) - x(t)$ .

При існуванні перехідних процесів поточне значення помилки  $\xi(t)$  різко змінюється, і не може служити мірою точності автоматичних систем.

Тому, домовились точність САУ оцінювати величиною помилки, яка встановилася, що має місце в стійкій системі після завершення перехідного процесу.

Показником якості САУ в режимі, який встановився, вибирається величина похибки, яка встановилася:

$$\xi(t) = x_T(t) - x(t), \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

(на практиці вказують  $t$  в залежності від об'єкта).

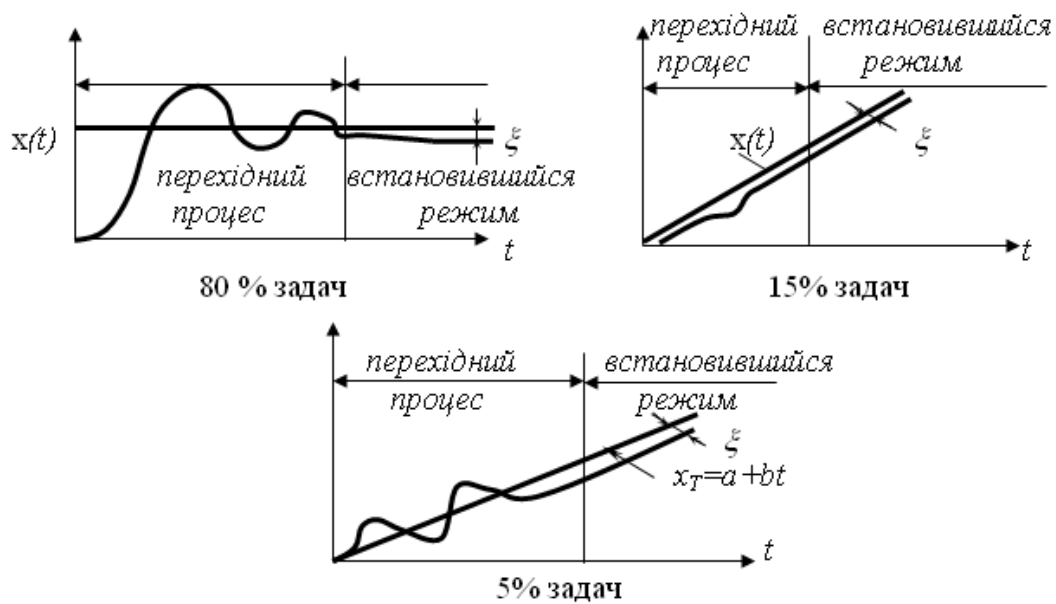


Рисунок 3.30 – Порівняльна оцінка застосування тестових вхідних сигналів

### 3.12.2.3 Отримання формул для помилок в усталених режимах

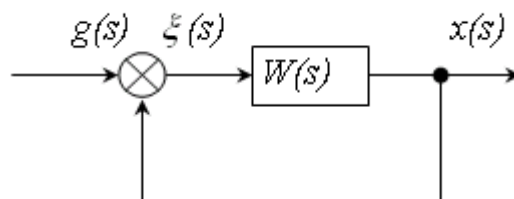
Дано: передаточна функція по помилці:

$$W_{g\xi}(s) = \frac{1}{1 + W_{\text{роз.}}(s)} = \frac{\xi(s)}{g(s)}, \quad (3.25)$$

де  $g(s)$  – вхідний вплив.

Примітка:

для кратості та згідно з підручником Воронова прийнято  $x_T(\cdot) = g(\cdot)$ .



Розв'язання:

Отримаємо з (3.25)

$$\xi(s) = W_{g\xi}(s) \cdot g(s).$$

Розкладемо  $W_{g\xi}(s)$  в ряд за степенями  $s$  навколо точки  $s = 0$ .

Навіщо ми це робимо: з властивостей перетворення Лапласа відомо, що значення виходу, яке встановилося, може бути отримане при  $s \rightarrow \infty$ .

Отже,

$$\xi(s) = \left( c_0 + c_1 \cdot s + \frac{1}{2!} \cdot c_2 \cdot s^2 + \frac{1}{3!} \cdot c_3 \cdot s^3 + \dots + \frac{1}{m!} \cdot c_m \cdot s^m \right) \cdot g(s). \quad (3.26)$$

Згідно визначення, коефіцієнти ряду Тейлора (коефіцієнти помилок) дорівнюють

$$\begin{aligned} c_0 &= W_{g\xi}(s) \Big|_{s=0}; & c_1 &= \frac{dW_{g\xi}(s)}{ds} \Big|_{s=0}; \\ c_2 &= \frac{d^2 W_{g\xi}(s)}{ds^2} \Big|_{s=0}; & c_m &= \frac{d^m W_{g\xi}(s)}{ds^m} \Big|_{s=0}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Виконаємо обернене перетворення Лапласа для ряду (7.7):

$$\xi(t) = c_0 \cdot g(t) + c_1 \cdot \frac{dg(t)}{dt} + \frac{1}{2!} \cdot c_2 \cdot \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots \quad (3.28)$$

Отже, формули (3.27) для коефіцієнтів  $c_m$  і ряд (3.28) дозволяють визначити вираз для помилки, яка встановилася, при будь-яких  $g(t)$ .

- 1) Наприклад, нехай  $g(t) = \text{const} = k_1$ , тоді  $\frac{dg(t)}{dt} = 0$ , і

$$\xi(t) = c_0 \cdot g(t) = W_{g\xi}(s) \Big|_{s=0} \cdot k_1.$$

- 2) Нехай  $g(t) = k_1 + k_2 \cdot t$ , тоді  $\frac{dg(t)}{dt} = k_2$ , і

$$\xi(t) = c_0 \cdot g(t) + c_1 \frac{dg(t)}{dt} = W_{g\xi}(s) \Big|_{s=0} \cdot (k_1 + k_2 t) + \frac{dW_{g\xi}(s)}{ds} \Big|_{s=0} \cdot k_2.$$

#### 3.12.2.4 Астатизм

Коли говорять САУ володіє астатизмом  $\left\{ \begin{matrix} 1 - \varepsilon o \\ 2 - \varepsilon o \\ 3 - \varepsilon o \\ \dots \\ i - \varepsilon o \end{matrix} \right\}$  порядку?



САУ з астатизмом першого порядку має значення

$$c_0 = W_{g\xi}(s)|_{s=0} = 0$$

і, таким чином, при постійному впливі  $g(t) = \text{const}$  помилка, яка встановилася, дорівнює нулю.

САУ з астатизмом другого порядку має значення

$$c_0 = W_{g\xi}(s)|_{s=0} = 0;$$
$$c_1 = \left. \frac{dW_{g\xi}(s)}{ds} \right|_{s=0} = 0,$$

Помилка, яка встановилася у промисловому регуляторі, буде дорівнювати нулю і при  $g(t) = k_1 + k_2 \cdot t$ .

### 3.13 Промислові регулятори

Ця тема сьогодні має більше історичне значення. Раніше, до появи дешевих мікросхем, спеціалізованих і універсальних ЕОМ, важко було реалізувати складні закони управління. Для не дуже важких об'єктів управління були створені стандартні електронні блоки, які приймали сигнал помилки  $x(t)$ , підсилювали, перетворювали його і подавали на виконавчий елемент (нагрівач, електропривід тощо) управляючий сигнал. Можливі закони управління в цих промислових регуляторах обмежувались наступним набором:

$U = k_1 \cdot x$  – П-регулятор – пропорційний регулятор.

$U = k_1 \cdot x + k_2 \cdot \frac{dx}{dt}$  – ПД-регулятор – пропорційно-диференціюючий регулятор.

$U = k_1 \cdot x + k_3 \cdot \int_0^t x \cdot dt$  – ПІ – регулятор – пропорційно-інтегруючий регулятор.

$U = k_1 \cdot x + k_2 \cdot \frac{dx}{dt} + k_3 \cdot \int_0^t x \cdot dt$  – ПІД – регулятор.

В останньому випадку вихідний сигнал пропорційний помилці і похідній від помилки, а також інтегралу від помилки. Інтеграл від помилки

забезпечує астатизм САУ, похідна забезпечує демпфування – зменшення коливальності.

Контрольні питання:

1. Наведіть побічні оцінки якості перехідного процесу.
2. Що таке тест-сигнал?
3. Яке значення має САУ з астатизмом першого порядку?
4. Яке значення має САУ з астатизмом другого порядку?
5. Дайте визначення передаточній функції по помилці.
6. Опишіть процедуру отримання формул для помилок в режимах, які встановилися
7. Що таке показник якості САУ?

## 4 СИНТЕЗ НЕПЕРЕРВНИХ САУ

### 4.1 Огляд і порівняльний аналіз методів синтезу

Визначення і постановка задачі синтезу САУ. Подамо специфікацію задачі синтезу.

Дано: математична модель об'єкта.

Вимоги до системи: – якість регулювання, тобто точність,

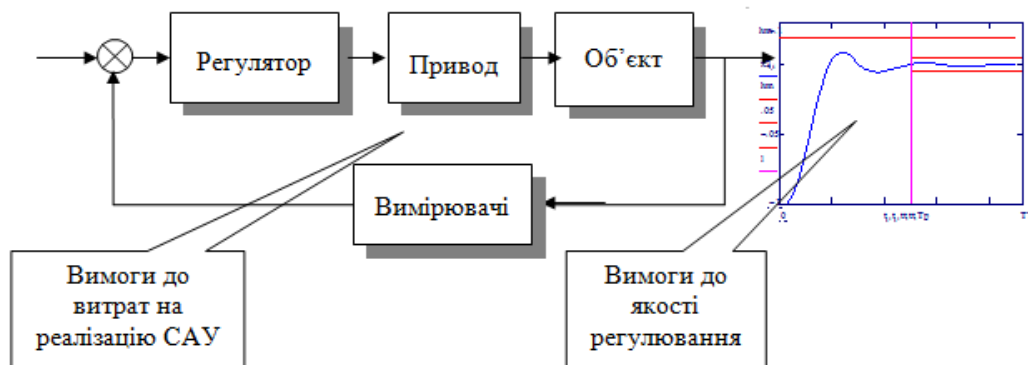
– швидкодія,

– інше.

Техніко-економічні характеристики: вага, енергоспоживання, надійність, вартість та інше.

Знайти: математичну модель регулятора, потрібні характеристики реалізуючи вимірювачів та виконавчих елементів (сенсорів та актуаторів) так, щоб задовольнити всі вимоги системи.

Під терміном “реалізуючий” мається на увазі пристрій, який можна виготовити або замовити. Подивимось на схему типової САУ:



Задача синтезу – для заданого об'єкта визначити математичну модель (рівняння регулятора) та підібрати приводи та вимірювачі так, щоб задовольнити вимогам до якості регулювання і витрат на реалізацію (вага, енергоспоживання, вартість системи, вартість експлуатації).

Сьогодні типова задача синтезу змінилася – характеристики приводів та вимірювачів відомі – вони просто вибираються з широкої гами високоякісних стандартних пристроїв. Не є проблемою реалізація регулятора – це теж стандартна плата з мікроконтролером та інтерфейсами. Треба тільки синтезувати алгоритм (закон) управління. Програма, що реалізує алгоритм створюється автоматизованою системою проектування.

Але в типових задачах синтезу САУ характеристики об'єкта не є повністю відомими. Причина цього – усі “зручні” об'єкти вже автоматизовані, zostалися не дуже “зручні”. Як можемо бачити з цієї схеми, центром проектування сучасної САУ є саме синтез регулятора.



Рисунок 4.1 – Структурна схема САУ

Розглянемо ще один аспект синтезу САУ – оптимізацію. Деякі вимоги задаються у виді обмежень:  $V < V_{dopust}$ ;  $V_j = 0$ . А деякі у вигляді:  $K \rightarrow \min$  або  $K \rightarrow \max$ .

Такі обмеження називаються критеріями, цільовими функціями – вони є функціями параметрів САУ. За рахунок вибору параметрів САУ необхідно мінімізувати (або максимізувати) ці критерії, при умові, що усі обмеження задовольняються.

Зауваження. Там, де це узгоджено із здоровим глуздом, можна використовувати нечіткі обмеження – це полегшує розв’язання оптимізаційної задачі. Наприклад, для підсистеми стабілізації висоти головки зчитування з компакт диска обмеження  $0 < h$  – (висота головки над диском) – повинно бути дуже чітким, бо при  $0 \leq h$  можливе торкання головки до диску з пошкодженням поверхні диску. Для підсистеми позиціонування головки над заданим треком обмеження  $-dop < \Delta d < dop$  можна зробити нечітким – при його незначному порушенні просто погіршиться якість зчитування, але катастрофи не буде.

Оптимізаційні задачі синтезу та оптимальні САУ ми будемо розглядати детально у другій частині курсу.

Підведемо підсумки розгляду задачі синтезу і подамо її стисле формулювання.

Дано:

1) об’єкт + вимірювачі + виконавчі пристрої = незмінна частина САУ (диф. рівняння, передаточні функції)

2) вимоги: – обмеження;  
– критерії і цілі оптимізації.

Потрібно: отримати алгоритм або рівняння, або передаточну функцію регулятора, що може бути реалізований доступними технічними засобами і задовольняє усім вимогам.

## 4.2 Класифікація критеріїв оптимізації САУ

Термін *критерій* настільки широко вживається, що фактично втратив смисл (сенси). Ми визначаємо критерій як числову міру для визначення відношення переваги або ранжування альтернативних варіантів САУ.

Слід пам'ятати одне важливе обмеження критеріальних мір. Розглянемо його на прикладі: для САУ1 критерій  $=K_1 = 10$ , для САУ2, відповідно  $K_2 = 20$ , ціль оптимізації  $K \rightarrow \max$ . Можна стверджувати, що САУ2 краще САУ1, але в загальному випадку не можна говорити, що САУ2 вдвічі краща САУ1 ( $\frac{K_2}{K_1} = 2$ ).

Критерій є функцією або функціоналом від параметрів САУ. В цьому аспекті критерії поділяють на локальні та інтегральні:

Локальний критерій:  $G(X(t_k))$  – функція координати об'єкта управління взятої в певний момент часу. Наприклад, помилка влучання (попадання) для ракети.

Інтегральний критерій:  $\int F(X(t), t)dt$  – інтеграл (або сума для дискретних систем) від координати об'єкта. Наприклад, усім відома інтегральна квадратична помилка в перехідному процесі.

Розглянемо типові критерії, що використовуються для синтезу САУ.

Локальні критерії (за традицією їх позначають  $G_0$ ).

Тривалість перехідного процесу:

$$G1_0 = T_p.$$

Викид (максимальне перерегулювання):

$$G2_0 = \max(X(t) - X_{\text{задане}}) = h_m.$$

Усталена помилка (після закінчення перехідного процесу):

$$G3_0 = (X(T_p) - X_{\text{задане}}).$$

Максимальне прискорення:

$$G4_0 = \max \left[ \frac{d^2}{dt^2} X(t) - \frac{d^2}{dt^2} X_{\text{задане}} \right] = U_m.$$

Цей критерій застосовується для САУ об'єктами, що не допускають великих навантажень.

Розглянемо інтегральні критерії.

Інтегральна квадратична похибка дуже часто використовується в наукових працях і підручниках. Головна причина такої популярності в тому, що похідна від підінтегрального виразу – лінійна функція змінної, що регулюється.

Більш реалістичним є критерій – інтеграл від зваженого модуля помилки. Але він не дає аналітичних розв'язань оптимізаційних задач. Запишемо вирази для цих критеріїв.

$$\Delta X(t) = X(t) - X_{\text{задане}}, \quad I_{k1} = \int_0^{tk} \Delta X(t)^2 \cdot dt, \quad I_{k2} = \int_0^{tk} |\Delta X(t)| \cdot t \cdot dt.$$

Щоб зрозуміти різницю між критеріями, побудуємо типові графіки для підінтегральних виразів:

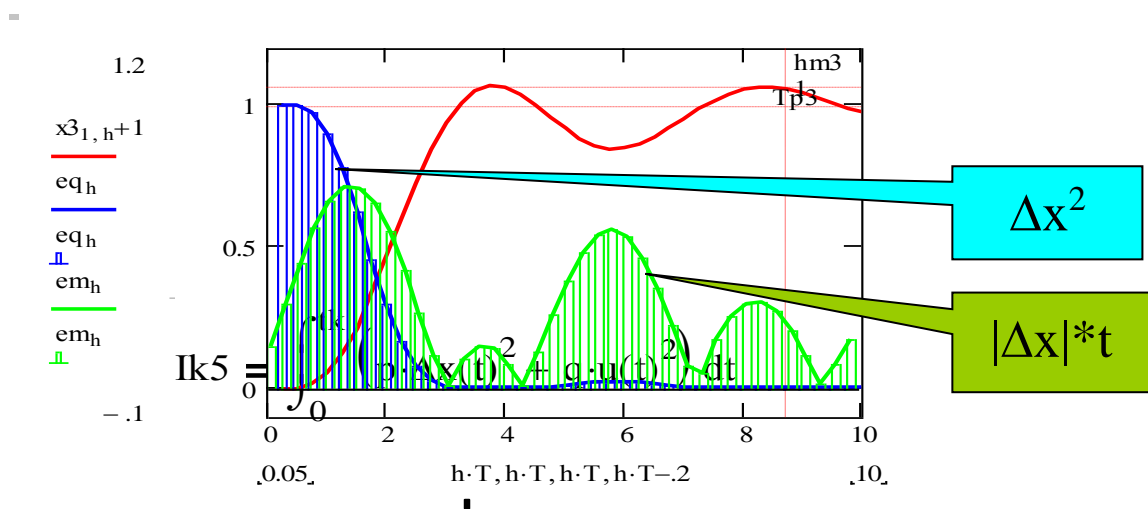


Рисунок 4.2 – Типові графіки для підінтегральних виразів

Як видно з графіка, в критерії зваженого модуля помилки (англійський термін для таких критеріїв – “функція штрафу”) більша вага дається пізнім помилкам – саме такі помилки є небажаними для САУ. Бачимо також, що процес задовільний по одному критерію є незадовільним по іншому.

На практиці також використовуються такі інтегральні критерії:

$$I_{k3} = \int_0^{tk} U(t)^2 dt ; \quad I_{k4} = \int_0^{tk} |U(t)| \cdot t \cdot dt.$$

Критерій  $I_{k3}$  є оцінкою енергії витраченої на управління. Розглянемо електродвигун як виконавчий елемент. Потужність його буде

$$W = I \cdot U = \frac{U^2}{R_{\text{я}}},$$

де  $U$  – напруга,

$R_{\text{я}}$  – опір обмотки якоря.

Тобто, якщо  $U$  є управлінням, то критерій  $I_{k3}$  – інтеграл від потужності є роботою витраченою на управління.

Критерій  $I_{k4}$  є оцінкою розходу робочого тіла витраченого на управління.

Часто використовують узагальнений квадратичний критерій – суму критеріїв з відповідними ваговими коефіцієнтами. Широко використовується такий узагальнений інтегральний критерій оптимальності САУ:

$$I_{k5} = \int_0^{t_k} (q \cdot \Delta x(t)^2 + r \cdot U(t)^2) \cdot dt.$$

де  $q$  і  $r$  – вагові коефіцієнти, що вибираються “експертними методами”, тобто чисто суб’єктивно.

### 4.3 Класифікація методів синтезу САУ

Методи синтезу САУ залежать від того:

1) яку структуру закону управління ми задаємо – лінійний / нелінійний, неперервний / дискретний / релейний, які вхідні дані ми використовуємо для управління – тільки те, що безпосередньо вимірюється, чи абстрактний вектор стану.

2) для якого об’єкту синтезується САУ – лінійного/нелінійного, неперервного/дискретного, стаціонарного/нестаціонарного.

Методи оптимізації класифікуються на:

- приблизні і точні;
- аналітичні і пошукові.

Для неперервних лінійних систем управління найбільш відомі такі методи синтезу:

1. Метод логарифмічних амплітудно-частотних характеристик.
2. Метод кореневих годографів.
3. Управління по вектору стану. Метод стандартних коефіцієнтів.
4. Оптимізаційні методи синтезу.
5. Пошукові методи синтезу.

Проаналізуємо недоліки і переваги цих методів.

Розглянемо *метод логарифмічних амплітудно-частотних характеристик*

Приблизний, майже не потребує складних обчислень. Ідея методу – знайти логарифмічну частотну характеристику (ЛАЧХ) регулятора як

різницю між бажаною ЛАЧХ і ЛАЧХ незмінної частини САУ. Бажана ЛАЧХ будується так, щоб частота зрізу відповідала потрібній швидкодії, а ділянка характеристики навколо частоти зрізу мала нахил і довжину 1-2 декади. Метод був дуже поширений в СРСР – *„Простий метод для простих систем”*.

Розглянемо *метод корневих годографів*.

Графоаналітичний метод. Дозволяє вести як приблизні, так і точні розрахунки перехідних процесів та їх характеристик. Ідея методу – побудова траєкторій коренів характеристичного рівняння (годографів) в функції вибраного параметру (звичайно – загального коефіцієнта підсилення  $k_o$ ). Тоді для певного значення параметру на годографі можна побачити розташування коренів замкненої системи. Спеціаліст одразу за коренями може оцінити показники якості перехідного процесу. Точний розрахунок перехідного процесу виконувався графо-аналітично за допомогою спеціальної логарифмічної лінійки. Побудова самого кореневого годографа (як і побудова ЛАЧХ) може виконуватись практично без обчислень. Метод був дуже поширений в США – *„Простий метод для складних систем”*.

Розглянемо *метод стандартних коефіцієнтів*.

Починаючи з 1970 року – базовий метод синтезу у всьому світі. Прийшов цей метод одночасно з поширенням комп’ютерів – засобів синтезу та аналізу, і мікроконтролерів – засобів реалізації регуляторів. Точний метод синтезу і розрахунку параметрів регуляторів. Для аналізу і синтезу диференціальне рівняння замкненої САУ приводиться до форми Коші (системи із  $N$ -диф. рівнянь першого порядку, де  $N$  – порядок системи). Набір змінних форми Коші – вектор стану –  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ .

Ідея методу – перехідний процес однозначно визначається коренями характеристичного рівняння замкненої системи, а корені однознач визначаються коефіцієнтами характеристичного рівняння. При управлінні по вектору стану  $\dot{u} = K \cdot \bar{x}$  можна дати усім коефіцієнтам потрібні значення. Потрібні значення коефіцієнтів характеристичного рівняння (стандартні коефіцієнти) знаходяться раз і назавжди і подаються в спеціальних таблицях. Існують різні набори стандартних коефіцієнтів – для систем оптимальних за швидкодією, розходом енергії, перерегулюванням та іншим.

Єдина проблема – знайти ці коефіцієнти, для цього використовують методи варіаційного числення, динамічного програмування та ін. Головний недолік методу – звичайно неможливо виміряти усі складові вектору стану – тому використовують спостерігачі.

*„Складний, орієнтований на ЦОМ, метод для складних систем”*.

Розглянемо *оптимізаційні методи синтезу*.



Задача синтезу САУ (знайти функцію управління у вигляді  $u(t)$ , або  $u(x)$  – це управління в програмній і координатній формі відповідно) є варіаційною задачею. Для синтезу оптимального управління використовуються класичне варіаційне числення, метод принципу максимуму, метод динамічного програмування та ін. Ідея варіаційного числення – знаходження функції, що дає екстремум функціоналу (функції від функції). Це розширення ідеї знаходження екстремуму звичайної функції (похідна функції рівна нулю  $\rightarrow$  варіація функціоналу рівна нулю). Зростання обчислювальної потужності МП та МК дозволило навіть вбудовувати ці складні методи в мікроконтролери. Оптимальне управління знаходиться в реальному часі згідно поточним значенням параметрів об'єкта і поставленим задачам. Так, зокрема, працюють системи термінального управління.

Розглянемо пошукові методи синтезу.

Суть цієї групи методів в тому, що параметри регулятора знаходяться методом послідовних наближень, методом випадкового пошуку. Фактично над звичайною САУ ставлять ще одну САУ, задача якої так регулювати параметри першої, щоб залишались постійними критерії якості. Це так звані САУ з самонастроюванням. Сьогодні це не просто популярний, а навіть занадто популярний науковий напрямок. Сюди відносяться так звані методи „колективної поведінки” – „торги”, „аукціони”, „методи відкритого управління” – це методи з солідним теоретичним і практичним базисом, також методи „нечіткої логіки”, „нейронних мереж”, „генетичних алгоритмів”, де інформаційного шуму більше, ніж результатів. Теорія управління взяла ці методи з біології та економіки, де вони є природними і працюють стихійно. На жаль, поведінка таких систем занадто складна і непередбачувана (згадаємо випадки патологічної поведінки живих істот, популяцій, біржові паніки). Але це один з головних напрямків розвитку науки. Існує ще багато інших методів, наприклад – метод фазової площини – переважно для релейних САУ, метод зворотних частотних характеристик, ін.

Сьогодні задача синтезу переноситься в мікроконтролер і там періодично, певними методами виконується на базі поточної ідентифікації параметрів об'єкта управління. Проектувальник повинен вибрати критерії, структуру і загальну логіку поведінки системи управління.

#### **4.4 Синтез управління по вектору стану**

Будемо розглядати задачу синтезу на прикладі типової системи 3-го порядку:



Рисунок 4.3 – Приклад типової системи 3-го порядку

Далі буде досить довге обґрунтування і викладення методу. Тому, подамо стисло послідовність кроків синтезу регулятора для нашого прикладу:

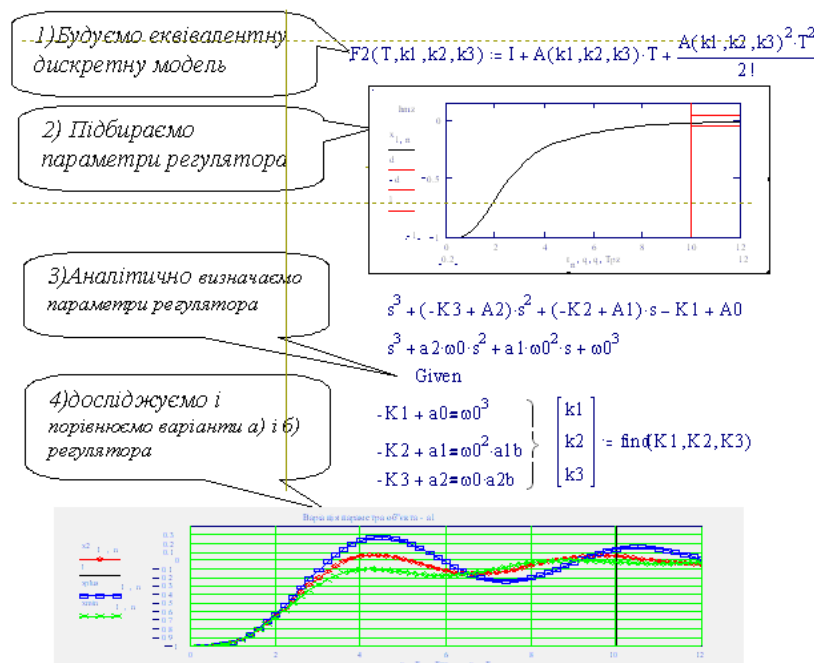


Рисунок 4.4 – Послідовність кроків синтезу регулятора для нашого прикладу

З цієї послідовності власне до синтезу відноситься пункт 3.

Спочатку слід записали еталонне характеристичне рівняння, що дає бажаний перехідний процес. Далі записати характеристичне рівняння замкненої САУ в загальному вигляді.

Прирівняли вирази для коефіцієнтів характеристичного рівняння потрібним для них значенням. Отримали систему рівнянь для визначення параметрів регулятора  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ . Оце і весь синтез. А тепер розглянемо це детальніше.

Пригадаємо, що однорідне диференціальне рівняння  $n$ -ого степеня:

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(t) + \dots + a_1 \cdot \frac{d}{dt} x(t) + a_0 \cdot x(t) = 0$$

має розв'язання:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{s_1 t} + C_2 \cdot e^{s_2 t} + \dots + C_n \cdot e^{s_n t}.$$

$$\frac{d^4}{dt^4} x + ab_3 \cdot \frac{d^3}{dt^3} x + ab_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} x + ab_1 \cdot \frac{d}{dt} x + 1 \cdot x = 0 \Rightarrow s^4 + ab_3 \cdot s^3 + ab_2 \cdot s^2 + ab_1 \cdot s + 1$$

де  $s_1, s_2, s_n$  – корені характеристичного рівняння  $s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0 = 0$ ;

$C_1, C_2, C_n$  – постійні, що визначаються з граничних умов.

*Перехідний процес однозначно визначається коренями характеристичного рівняння.* Із курсу алгебри відомо, що коефіцієнти алгебраїчного рівняння однозначно визначаються коренями цього рівняння. Тому, можна стверджувати, що коефіцієнти характеристичного рівняння визначають перехідний процес. На цьому базується *ідея методу стандартних коефіцієнтів*.

Відібрати *перехідні процеси оптимальні по різним критеріям*, для цих перехідних процесів визначити *коефіцієнти характеристичних рівнянь* замкненої (керованої) системи, що відповідають цим перехідним процесам, створити таблиці *стандартних коефіцієнтів* для систем різних порядків – 2, 3, 5, 6, 7-го.

Процес синтезу буде складатись з таких кроків:

- виходячи з вимог до системи, вибрати еталонний перехідний процес (ПП);
- взяти стандартні коефіцієнти, що відповідають цьому ПП;
- виходячи з потрібної швидкодії, обчислити потрібні значення коефіцієнтів характеристичного рівняння;
- обчислити параметри регулятора, що забезпечують ці значення коефіцієнтів характеристичного рівняння

Розглянемо задачу синтезу методом стандартних коефіцієнтів (СК) згідно цієї послідовності і форми Вишнеградського для диференціального рівняння.

Множину потрібних еталонних процесів можна скоротити, якщо збирати до одного класу процеси, що відрізняються тільки масштабом часу. Усі такі процеси певним перетворенням можна звести до одного й того ж еталонного процесу у безрозмірному часі. Це робиться так, як наведено нижче.

Дано диференціальне рівняння САУ в нормованому відносно складової з вищою похідною виді (для прикладу беремо 4-го степеня):

$$\frac{d^4}{dt^4} x(t) + a_3 \cdot \frac{d^3}{dt^3} x(t) + a_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t) + a_1 \cdot \frac{d}{dt} x(t) + a_0 \cdot x(t) = 0.$$

Введемо параметр “власна частота”:

$$\omega_0 = \sqrt[4]{a_0} \quad \text{звідки} \quad a_0 = \omega_0^4.$$

Введемо нові – безрозмірні коефіцієнти:

$$a_3 = \omega_0 \cdot ab_3; \quad a_2 = \omega_0^2 \cdot ab_2; \quad a_1 = \omega_0^3 \cdot ab_1; \quad a_0 = \omega_0^4 \cdot ab_0 = \omega_0^4.$$

Визначимо через них розмірні коефіцієнти:

$$ab_3 = \frac{a_3}{\omega_0}; \quad ab_2 = \frac{a_2}{\omega_0^2}; \quad ab_1 = \frac{a_1}{\omega_0^3}; \quad ab_0 = \frac{a_0}{\omega_0^4} = 1.$$

Підставимо їх у диф. рівняння:

$$\frac{d^4}{dt^4} x(t) + ab_3 \cdot \omega_0 \cdot \frac{d^3}{dt^3} x(t) + ab_2 \cdot \omega_0^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t) + ab_1 \cdot \omega_0^3 \cdot \frac{d}{dt} x(t) + \omega_0^4 \cdot x(t) = 0.$$

Введемо безрозмірний час і замінимо розмірні похідні безрозмірними:

$$\tau = t \cdot \omega_0; \quad t = \frac{\tau}{\omega_0}; \quad \frac{d}{dt} x = \omega_0 \cdot \frac{d}{d\tau} x; \quad \frac{d^2}{dt^2} x = \omega_0^2 \cdot \frac{d^2}{d\tau^2} x \quad \text{і т.д.}$$

Підставимо їх у диф. рівняння:

$$\omega_0^4 \cdot \frac{d^4}{d\tau^4} x(\tau) + ab_3 \cdot \omega_0 \cdot \omega_0^3 \cdot \frac{d^3}{d\tau^3} x(\tau) + ab_2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \frac{d^2}{d\tau^2} x(\tau) + ab_1 \cdot \omega_0^3 \cdot \omega_0 \cdot \frac{d}{d\tau} x(\tau) + \omega_0^4 \cdot x(\tau) = 0.$$

Отримуємо диф. рівняння у безрозмірному часі.

$$\frac{d^4}{d\tau^4} x(\tau) + ab_3 \cdot \frac{d^3}{d\tau^3} x(\tau) + ab_2 \cdot \frac{d^2}{d\tau^2} x(\tau) + ab_1 \cdot \frac{d}{d\tau} x(\tau) + x(\tau) = 0.$$

Це і є форма Вишнєградського для подання диференційного рівняння. Її особливість – перший і останній коефіцієнти дорівнюють “1”.

Вишнеградський отримав цю форму займаючись (більше 100 років тому) задачею синтезу регулятора. Крім цього Вишнеградський був (недовго) міністром фінансів (успішним) і біржовим гравцем (не дуже, чому й прийшлося піти з посади міністра).

Графіки такого сімейства процесів мають вигляд:

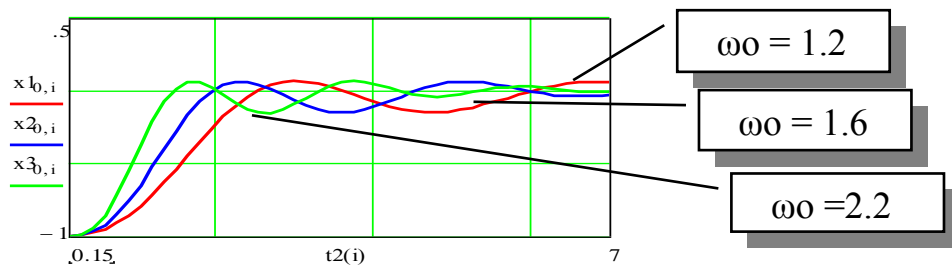


Рисунок 4.5 – Сімейство перехідних процесів при різних  $\omega_0$

Розглянемо приклад еталонних процесів і відповідні стандартні коефіцієнти.

На цьому графіку подано перехідні процеси (для систем 2, 3, 4, 5, 6 порядків) і стандартні коефіцієнти для випадку кратного розподілення коренів – без перерегулювання.

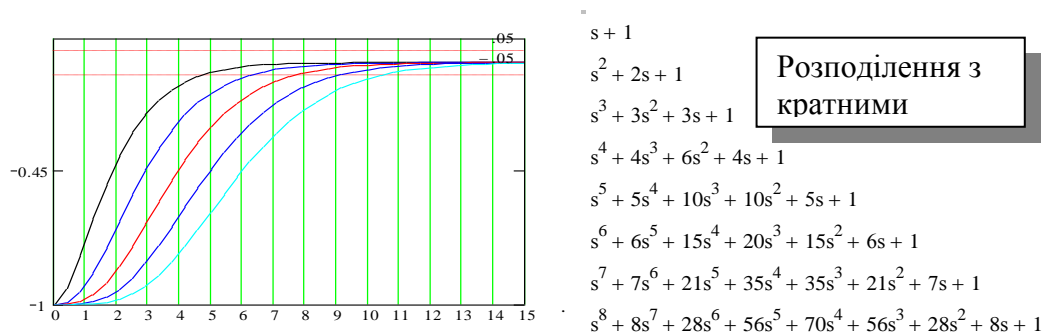


Рисунок 4.6 – Перехідні процеси і стандартні коефіцієнти

Усі корені дійсні і однакові:

$$s_i = -1, \quad i = 1 \dots n.$$

Такі процеси вибирають для випадків, коли потрібний викид  $h_m = 0$  і бажано мінімізувати навантаження на об'єкт. Недолік процесів з кратними коренями – відносно високі тривалості перехідних процесів (ПП). Використовуються також інші еталонні процеси.

Порядок розв'язання задачі синтезу управління по вектору стану.

Ми розглянули загальну постановку задачі синтезу, оптимальності, еталонні ПП. Тепер можемо подати задачу синтезу у вигляді певної послідовності кроків, можна сказати, – алгоритму синтезу.

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = A \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{u},$$

де, наприклад:

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 - a_1 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Дано:

а) дифрівняння системи у канонічній формі Коші;

б) вимоги до якості регулювання: тривалість ПП –  $T_p \leq T_{pz}$ ,  
викид –  $h_m \leq h_{mz}$  та інші.

2. Управління шукаємо у вигляді:  $\bar{u} = K \cdot \bar{x}$ ,

де  $K$  – матриця (вектор для одноканального управління)

$$\bar{u} = K \cdot \bar{x} \quad \text{де, наприклад:}$$

в загальному випадку

$K$  – матриця

$$K := \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}; \quad \bar{u} := K^T \cdot \bar{x} \quad \text{тобто} \quad u \rightarrow (k_1 \cdot x \quad k_2 \cdot x \quad k_3 \cdot x)$$

3. Знайти. Задача синтезу зводиться до знаходження усіх елементів  $K$ , таких, що САУ задовольняє поставленим вимогам –  $K$ ?

Тепер запишемо, власне, послідовність кроків синтезу:

1. Підставляємо вираз для управління в диф. рівняння об'єкта:

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = A \cdot \bar{x} + B \cdot K \cdot \bar{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \bar{x} = (A + B \cdot K) \cdot \bar{x}.$$

2. Виконуємо перетворення Лапласа для цього рівняння і маємо:

$$L\left\{\frac{d}{dt} \bar{x}\right\} = L\left\{(A + B \cdot K) \cdot \bar{x}\right\} \Rightarrow s \cdot \bar{X}(s) = (A + B \cdot K) \cdot \bar{X}(s) \Rightarrow [I \cdot s - (A + B \cdot K)] \cdot \bar{X}(s) = 0.$$

Дивимось на останнє рівняння і бачимо, що:

а)  $\bar{X}(s)=0$  – це дає так зване тривіальне розв’язання  $x(t) \equiv 0$  і нас не цікавить;

б)  $\det[I \cdot s - (A + B \cdot K)] = 0$  – це дає нам рівняння для визначення  $K$ .

Детермінант від цього матрично-векторного виразу дає нам систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь. Як відомо з курсу алгебри, ця система має нетривіальне розв’язання тільки якщо детермінант матриці коефіцієнтів дорівнює нулю (можна це трактувати так – коли перенесемо якусь змінну у праву частину – формально отримаємо систему з  $n$  рівнянь для  $(n-1)$  змінних. Щоб така система мала несуперечливе розв’язання, одне рівняння повинно бути “зайвим” – лінійною комбінацією інших. Відомо, що детермінант такої системи дорівнює нулю.

3. Розкриваємо детермінант і отримуємо характеристичне рівняння замкненої САУ. Для системи 3-го порядку:

$$I \cdot s - (A + B \cdot K^T) \rightarrow \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ a_0 - k_1 & a_1 - k_2 & s + a_2 - k_3 \end{bmatrix}$$

$$|I \cdot s - (A + B \cdot K^T)| \rightarrow s^3 + s^2 \cdot a_2 - s^2 \cdot k_3 + s \cdot a_1 - s \cdot k_2 + a_0 - k_1$$

Збираємо коефіцієнти при однакових степенях і отримуємо характеристичне рівняння замкненої САУ, коефіцієнти якого  $A_i$  залежать від параметрів об’єкта та невідомих поки параметрів регулятора:

$$s^3 + (a_2 - k_3) \cdot s^2 + (a_1 - k_2) \cdot s + (a_0 - k_1)$$

$$s^n + A_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + A_1 \cdot s + A_0 \quad \text{наприклад: } s^3 + A_2 \cdot s^2 + A_1 \cdot s + A_0$$

$$A_2 = a_2 - k_3$$

$$A_1 = a_1 - k_2$$

$$A_0 = a_0 - k_1$$

4. Вибираємо еталонний ПП, беремо (з таблиці, або документа) значення стандартних коефіцієнтів, безрозмірної тривалості ПП, викиду.

5. Обчислюємо потрібну власну частоту і потім, згідно залежності записуємо вирази для потрібних значень коефіцієнтів:

$$\tau_p = T_{pz} \cdot \omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\tau_p}{T_{pz}}.$$

6. Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях у характеристичному рівнянні замкненої САУ і “безрозмірному” еталонному характеристичному рівнянні. Так отримуємо систему рівнянь для визначення невідомих параметрів регулятора:

$$\left. \begin{aligned} A_{n-1}(A, K) &= A b_{n-1} \cdot \omega_0 \\ A_1(A, K) &= A b_1 \cdot \omega_0^{n-1} \\ A_0(A, K) &= 1 \cdot \omega_0^n \end{aligned} \right\}$$

Для прикладу – системи 3-го порядку це розв’язання майже очевидне:

$$\left. \begin{aligned} \text{given } a_2 - k_3 &= A b_2 \cdot \omega_0 \\ a_1 - k_2 &= A b_1 \cdot \omega_0^2 \\ a_0 - k_1 &= 1 \cdot \omega_0^3 \end{aligned} \right\} \text{ find } (k_3, k_2, k_1) \rightarrow \begin{bmatrix} a_2 - 3 \cdot \omega_0 \\ a_1 - 2 \cdot \omega_0^2 \\ a_0 - \omega_0^3 \end{bmatrix}$$

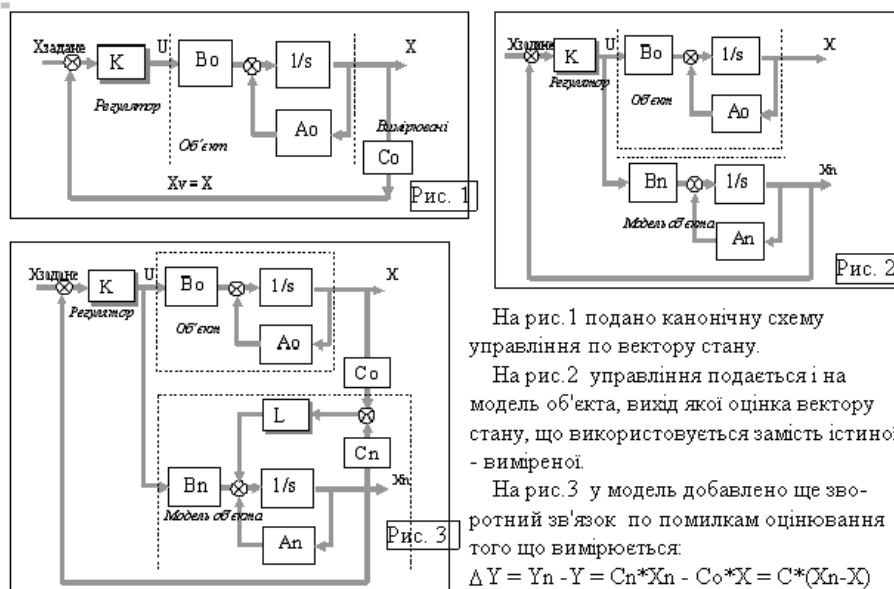
Задача синтезу регулятора по вектору стану має одну й ту ж структуру для лінійних динамічних систем довільного степеню. Задача зводиться до розв’язання системи алгебраїчних (звичайно нелінійних) рівнянь.

#### 4.5 Синтез управління по вектору стану при неповній його вимірюваності

Спостерігач (інші назви: динамічний компенсатор, асимптотичний ідентифікатор та ін.) використовує безпосередньо вимірювані компоненти  $Y$  вектора стану  $X$  та вектор управління  $u$  і дає оцінку  $X_n$  усього вектора стану (але може оцінювати тільки окремі компоненти вектору стану).

Розглянемо структурну схему САУ зі спостерігачем. Як же все таки (у 1950-70 роки) прогресивне людство прийшло до ідеї спостерігача? Далі подано три структурних схеми – три кроки до остаточної робочої схеми.

На цих схемах:  $X$  – вектор стану;  $X_n$  – оцінка вектора стану;  $Y$  – вектор вимірювань;  $U$  – вектор управління.



На рис. 1 подано канонічну схему управління по вектору стану.

На рис. 2 управління подається і на модель об'єкта, вихід якої оцінка вектору стану, що використовується замість істинної - виміреної.

На рис. 3 у модель додано ще зворотний зв'язок по помилкам оцінювання того що вимірюється:

$$\Delta Y = Y_n - Y = C_n \cdot X_n - C_0 \cdot X = C \cdot (X_n - X)$$

Рисунок 4.7 – Структурна схема САУ зі спостерігачем



Розглянемо стисло історію та логіку цих трьох кроків.

Перший крок (1940-1950 р.р.). САУ приводиться до стандартного, незалежного від розмірності матрично-векторного виду:  $\frac{d}{dt}\bar{x} = A \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{u}$ ;

задається вид управління:  $\bar{u} = K \cdot \bar{x}$  по вектору стану.

Синтез управління (визначення  $K$ ) стандартизується, як і сама САУ, її легко реалізувати на базі ЦОМ.

*Проблема* – тільки деякі компоненти вектору стану (математичної абстракції) звичайно вимірюються. Як отримати повний вектор стану?

Другий крок (1950-1960 р.р.). Інтенсивно використовуються аналогові засоби моделювання динамічних систем. Якщо зробити ТОЧНУ модель динаміки об'єкта і подавати на цю модель теж саме управління, що і на об'єкт, то вихід моделі, де ми усе можемо вимірювати, необхідний нам вектор стану.

*Проблема* – на модель треба подавати і збурення, а вони звичайно не вимірюються, модель повинна бути абсолютно точною. Інакше вихід моделі постійно буде розходитись з виходом об'єкта.

Третій крок (1960-1970 р.р.). ЦОМ за масою і габаритами ще поступається аналоговим ОМ, але починається ера мікропроцесорів. Ідею моделі об'єкта, як засобу оцінки вектору стану, можна зробити придатною для практики, якщо ввести зворотний зв'язок – "штраф" –  $L$  за відхилення оцінки того, що вимірюється, від того, що реально виміряно.

*Проблема №1* – модель об'єкта повинна бути досить точною – частково розв'язується ідентифікацією параметрів моделі (це теж може виконати спостерігач).

*Проблема №2* – спостерігача придумала не одна людина. Над цим працювало багато вчених. Але першим виклав це у зручному для інженерів виді американський вчений Люенбергер у роботі "Введення в теорію спостерігачів". Він і ввів термін "observer". У теорії спостерігачів є паралельний науковий напрямок – фільтри Вінера-Калмана.

Фільтр Калмана структурно ідентичний спостерігачу. Це теж модель об'єкта із зворотним зв'язком по помилці виміряного вектору стану і його помилки. Фільтр вводиться у тих випадках, коли вектор стану вимірюється з випадковими помилками (шумами). Для управління використовується оцінка вектору стану. Ця оцінка коректується пропорційно "помилці" оцінювання, але коефіцієнт "штрафу"  $K$  (замість  $L$ ) тим менше, чим більше рівень шумів.

*Постановка задачі синтезу САУ зі спостерігачем стану*

Запишемо канонічне означення в задачі синтезу САУ із спостерігачем, вектору стану.

Дано:

об'єкт  $\frac{d}{dt} \bar{x} = A \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{u}$  та вимірювачі  $\bar{y} = C \cdot \bar{x}$

спостерігач = модель об'єкта  $\frac{d}{dt} \hat{x}_n = A \cdot \hat{x}_n + B \cdot \bar{u} + L \cdot (\hat{y}_n - \bar{y})$ .

та модель вимірювачів  $\hat{y}_n = C \cdot \hat{x}_n$  ;

регулятор  $\bar{u} = K \cdot \hat{x}_n$ .

Зверніть увагу – для управління використовується оцінка вектору стану. Вимоги до якості регулювання задаються як вимоги до параметрів перехідних процесів (ПП) у основному контурі і контурі спостерігача, наприклад:  $T_{pp}$ ,  $h_{mp}$ ,  $T_{pn}$ ,  $h_{mn}$  – тривалості ПП і викиди для цих контурів відповідно. Звичайно тривалість ПП у спостерігача повинна бути

$$T_{pn} = (0.1 - 0.25) \cdot T_{pp}.$$

На другому етапі вибираються або знаходяться, як розв'язання оптимізаційної задачі, *потрібні значення коефіцієнтів* характеристичних рівнянь контуру регулятора і спостерігача. Потім коефіцієнти характеристичних рівнянь контуру регулятора і спостерігача прирівнюються до їх потрібних значень – так отримуємо по  $N$  рівнянь для кожного контуру, до цих рівнянь додаються інші умови – так отримуємо систему нелінійних рівнянь, з яких знаходимо параметри регулятора – матрицю  $K$  та параметри спостерігача – матрицю  $L$ . Перекладемо слова на мову математики.

$$\left. \begin{aligned} (1): \frac{d}{dt} \bar{x} &= A \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{u} \Rightarrow \bar{u} = K \cdot \hat{x}_n \Rightarrow \frac{d}{dt} \bar{x} = A \cdot \bar{x} + B \cdot K \cdot \hat{x}_n \\ (2): \frac{d}{dt} \hat{x}_n &= A \cdot \hat{x}_n + B \cdot \bar{u} + L \cdot (\hat{y}_n - \bar{y}) \Rightarrow \bar{u} = K \cdot \hat{x}_n \Rightarrow \frac{d}{dt} \hat{x}_n = (A + B \cdot K) \cdot \hat{x}_n + L \cdot C \cdot (\hat{x}_n - \bar{x}) \end{aligned} \right\}$$

$$\bar{y} = C \cdot \bar{x} \qquad \hat{y}_n = C \cdot \hat{x}_n.$$

Для синтезу і аналізу стійкості нам потрібні характеристичні рівняння САУ без спостерігача і спостерігача, як слідкуючої системи. Нагадаємо процедуру: беремо відповідну однорідну (зовнішні входи рівні нулю) систему диф. рівнянь і виконуємо перетворення Лапласа. Потім, виходячи з умови отримання нетривіальних розв'язків прирівнюємо детермінант відповідної матриці до нуля. Розкриваємо його і отримуємо алгебраїчне рівняння степеню  $N$  відносно змінної  $s$ .

Навіщо воно нам? Якщо всі параметри САУ відомі, ми зможемо знайти корені цього рівняння – визначити стійкість САУ, побудувати перехідний процес.

При синтезі, навпаки, задаємо значення коефіцієнтів, що забезпечують потрібний ПП і знаходимо параметри регулятора.

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = A \cdot \bar{x} + B \cdot K \cdot \bar{x} \xrightarrow{L \left\{ \frac{d}{dt} \bar{x} \right\}} s \cdot \bar{X}(s) = (A + B \cdot K) \cdot \bar{X}(s) \rightarrow [I \cdot s - (A + B \cdot K)] \cdot \bar{X}(s) = 0$$

отримуємо характеристичне рівняння основного контуру:  $\det [I \cdot s - (A + B \cdot K)] = 0$

$$\frac{d}{dt} \hat{x}_n = A \cdot \hat{x}_n + L \cdot C \cdot \hat{x}_n \xrightarrow{L \left\{ \frac{d}{dt} \hat{x}_n \right\}} s \cdot \hat{X}_n(s) = (A + L \cdot C) \cdot \hat{X}_n(s) \rightarrow [I \cdot s - (A + L \cdot C)] \cdot \hat{X}_n(s) = 0$$

отримуємо характеристичне рівняння спостерігача:  $\det [I \cdot s - (A + L \cdot C)] = 0$

**Зауваження.** З рівняння спостерігача виключено складові  $B \cdot \bar{u}$  та  $-L \cdot C \cdot \bar{x}$  – для контуру спостерігача це зовнішні входи, а стійкість ми визначаємо для власного руху.

$$\frac{d}{dt} \hat{x}_n = (A + B \cdot K) \cdot \hat{x}_n + L \cdot C \cdot \left( \hat{x}_n - \bar{x} \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \hat{x}_n = A \cdot \hat{x}_n + L \cdot C \cdot \hat{x}_n.$$

#### 4.6 Виведення властивостей САУ зі спостерігачем стану

Замість змінних  $\bar{x}$  – координата та  $\hat{x}_n$  – її оцінка спостерігачем, введемо змінну  $\Delta \bar{x}$  – помилка оцінювання. Виконаємо алгебраїчні перетворення:

$$\hat{x}_n = \bar{x} + \Delta \bar{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \bar{x} = A \cdot \bar{x} + B \cdot K \cdot \hat{x}_n \Rightarrow \frac{d}{dt} \bar{x} = (A + B \cdot K) \cdot \bar{x} + B \cdot K \cdot \Delta \bar{x}$$

$$\hat{x}_n - \bar{x} = \Delta \bar{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \hat{x}_n = (A + B \cdot K) \cdot \hat{x}_n + L \cdot C \cdot \left( \hat{x}_n - \bar{x} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{x}_n = \frac{d}{dt} \bar{x} + \frac{d}{dt} \Delta \bar{x} = (A + B \cdot K) \cdot \hat{x}_n + L \cdot C \cdot \Delta \bar{x}$$

$$\frac{d}{dt} \Delta \bar{x} = (A + L \cdot C) \cdot \Delta \bar{x}$$

Зрозуміло все, але прокоментуємо.

Виключили  $\hat{x}_n$  з (1) – отримали (5); виключили з (2) – отримали (6). З рівняння (6) відняли (5) – отримали (7). Тепер об'єднаємо рівняння (5) і (7) в одне матрично-векторне диф. рівняння.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{x} &= (A + B \cdot K) \cdot \bar{x} + B \cdot K \cdot \Delta \bar{x} \\ \frac{d}{dt} \Delta \bar{x} &= 0 \cdot \bar{x} + (A + L \cdot C) \cdot \Delta \bar{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \bar{x} \\ \frac{d}{dt} \Delta \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + B \cdot K) & B \cdot K \\ 0 & (A + L \cdot C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \Delta \bar{x} \end{bmatrix}$$

Отримали таку систему диференціальних рівнянь порядку  $2 \cdot N$ . (0 – це матриця з нулів)

$$\frac{d}{dt} \bar{r} = M \cdot \bar{r} \quad \text{де} \quad \bar{r} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \Delta \bar{x} \end{pmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} (A + B \cdot K) & B \cdot K \\ 0 & (A + L \cdot C) \end{bmatrix}.$$

Проаналізуємо її. Запишемо характеристичне рівняння системи:

$$\begin{aligned} \det [I \cdot s - M] &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} I \cdot s - (A + B \cdot K) & B \cdot K \\ 0 & I \cdot s - (A + L \cdot C) \end{bmatrix} &= 0 \\ \det [I \cdot s - (A + B \cdot K)] \cdot \det [I \cdot s - (A + L \cdot C)] &= 0 \end{aligned}$$

Бачимо, що характеристичне рівняння розпадається (згідно з властивостями блочних матриць) на два окремих рівняння, одне з яких характеристичне рівняння САУ без спостерігача, друге – характеристичне рівняння спостерігача. Це означає, що параметри регулятора  $K$  та параметри спостерігача  $L$  можна розраховувати незалежно.

#### 4.7 Стійкість САУ із спостерігачем стану

Чи можна зробити спостерігача стійким? Бачимо, що корені спостерігача визначаються характеристичним рівнянням:

$$\det [I \cdot s - (A + L \cdot C)] = 0.$$

В це рівняння входить матриця параметрів спостерігача  $L$ . При умові спостерігальності вибором  $L$  можна зробити спостерігача стійким.

##### *Властивості спостерігача стану*

Отримані результати є фактичним доказом таких властивостей спостерігача стану:

1) в усталеному стані помилка оцінювання  $\Delta \bar{x}$  дорівнює нулю (прирівнюємо похідну до нуля і бачимо  $\Delta \bar{x}$  повинно бути рівним нулю).

2) спостерігач стану не змінює корені основного контуру, а тільки додає свої.

3) задачу синтезу САУ із спостерігачем можна розділити на дві незалежні – синтез основного контуру і синтез контуру спостерігача.

Розглянемо поняття *керувальності* та *спостерігальності* були введені Калманом. Ці поняття важливі для аналізу багатомірних систем високого порядку.

Неформально ситуації а) керувальності та б) спостерігальності можна визначити так, розглядається багатомірна система:

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = A \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{u}$$

а) в системі немає ізольованих підсистем, куди не досягає дія управління (для цього вектор управління  $\bar{u}$  повинен мати певну розмірність, матриця  $B$  – не дуже багато нулів);

б) в системі немає ізольованих підсистем, в яких не встановлено хоч один вимірювач, тобто немає інформаційно ізольованих підсистем.

Формально це визначається так:

Керувальність („управляемость”): ранг прямокутної матриці, що складена з таких матриць  $Q = (B \ A \cdot B \ A^2 \cdot B \dots A^{N-1} \cdot B)$  повинен бути рівним  $N$ -порядку системи.

Спостерігальність („наблюдаемость”): ранг прямокутної матриці, що складена з таких матриць  $D = (C^T \ A^T \cdot C^T \ (A^T)^2 \cdot C^T \dots (A^T)^{N-1} \cdot C^T)$  повинен бути рівним  $N$ .

#### Контрольні питання:

1. Наведіть властивості спостерігача стану.
2. Що таке керувальність та спостерігальність?
3. Чому відповідні параметри спостерігача Люенбергера і фільтра Калмана мають означення  $K$  та  $L$ ?
4. Наведіть канонічну схему управління по вектору стану.
5. Дайте характеристику фільтра Калмана.
6. Що таке форма Вишнерадського?
7. Наведіть постановку задачі синтезу.

## 5 МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ АНАЛІЗУ, СИНТЕЗУ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ

### 5.1 Імпульсні САУ. Приклади імпульсних САУ

Спробуйте відповісти, виходячи з Вашого запасу знань, на наступні запитання:

- 1.Що таке імпульсні системи (ІС) ?
- 2.Вони "гірше" чи "краще" неперервних ?
- 3.Чи знаєте Ви сучасні технічні системи, де використовуються імпульсні САУ ?

Імпульсною САУ називається САУ, яка має хоча б один імпульсний елемент: вимірювач, підсилювач, привід і сам регулятор.

До імпульсних систем відноситься в частковості вся САУ з ЦОМ. В імпульсних САУ де-які параметри змінюються скачками. Чи потрібні імпульсні САУ, може це САУ 2-го сорту в порівнянні з безперервними? Які САУ багатші по можливостям - імпульсні чи безперервні?

*Приклади імпульсних САУ:*

- 1) Система управління потужним електроприводом (тіристорами, напівпровідниками).

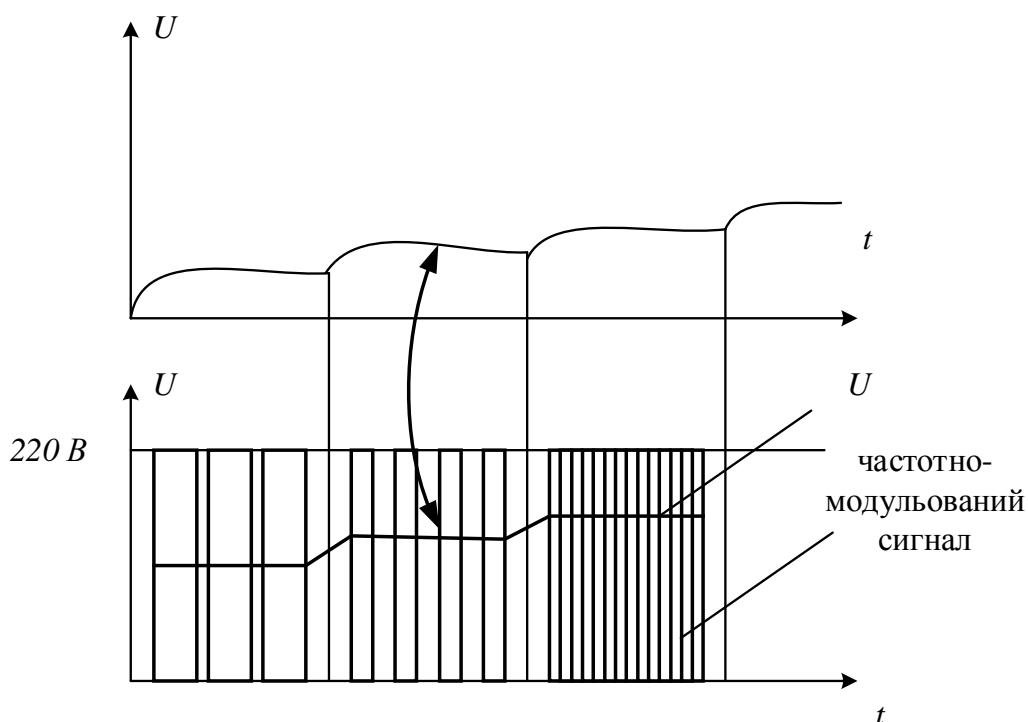


Рисунок 5.1 – Частотно-імпульсна модуляція в системі управління електроприводом

Для напівпровідникових елементів вигідна робота в режимі насичення, фактично в режимі "включено-виключено". Втрати в цьому випадку мінімальні. Тому системні регулювання потужних електроприводів роблять імпульсними.

## 2) САУ з ЦОМ.

ЦОМ - імпульсний елемент в силу принципів функціонування. Вхідні сигнали сприймаються, а вихідні видаються дискретно, хоча частота квантування по часу може бути дуже великою. В ЦОМ сигнали квантовані не тільки по часу, але й по рівню. Оскільки розрядність дискретного представлення чисел в ЕОМ як правило велика, то в більшості прикладних задач квантуванням по рівню нехтують. Однак, це не завжди допустимо (накопичення похибок округлення).

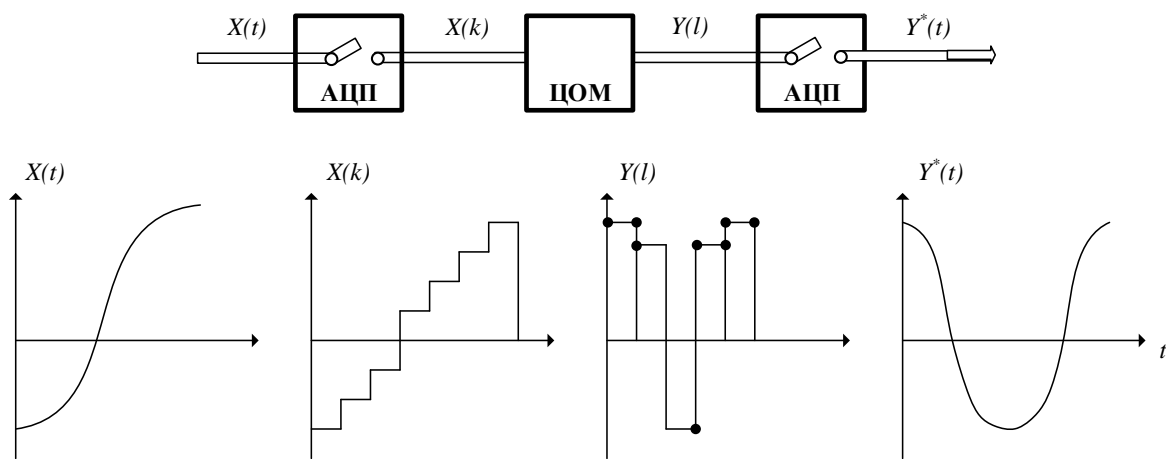


Рисунок 5.2 – ЕОМ як елемент САУ

На рис. 5.2 позначено:  $k$ - номер кроку квантування вхідного сигналу;  $l$ - номер кроку квантування вихідного сигналу. Слід відзначити що параметри квантування по рівню і по часу для входу і виходу ЦОМ не обов'язково повинні бути однаковими.

3) *Радіолокаційні лазерні системи* (для них також є звичайним режим "поширення - отримання" імпульсів)

## 4) *Органи зору роботів*

Навіть зорова система людини працює в імпульсному режимі сканування. Якщо приклеїти мікродзеркало на око, то можливо зафіксувати стрибки.

5) *Цифровий запис звуку і зображень та їх послідовна обробка* - фільтрація, кодування.

{Подивіться в літературі опис названих вище та інших імпульсних систем.}

## 5.2 Класифікація ІСАУ

Процес перетворення неперервних сигналів в дискретні або квантовані сигнали називають *квантуванням*.

Розрізняють 3 способи квантування неперервних сигналів:

- за рівнем;
- за часом;
- змішане (за рівнем і за часом).

В залежності від використаного типу квантування неперервного сигналу *дискретні системи* поділяються на:

- релейні (квантування за рівнем);
- імпульсні (квантування за часом);
- цифрові (змішане квантування).

Відносно задач синтезу та аналізу ІСАУ можуть бути поділені на:

- лінійні;
- нелінійні.

*Нелінійні ІСАУ* підрозділяються на :

а) системи з лінійною неперервною частиною та нелінійним імпульсним елементом (ІЕ);

б) системи з нелінійною неперервною частиною та з лінійним ІЕ;

в) системи з нелінійною неперервною частиною та ІЕ.

В залежності від виду використаної в системі модуляції (процес квантування неперервного сигналу в ІС) або від типу ІЕ імпульсні системи поділяються на 4 класи:

1. Амплітудно-імпульсні (АІМ);
2. Широтно-імпульсні (ШІМ);
3. Фазо-імпульсні (ФІМ);
4. Частотно-імпульсні (ЧІМ).

*АІМ*: амплітуда  $A$  вихідної послідовності імпульсів змінюється у відповідності зі змінами вхідного сигналу. Тривалість  $\tau$  і період повторення  $T$  імпульсів постійні.

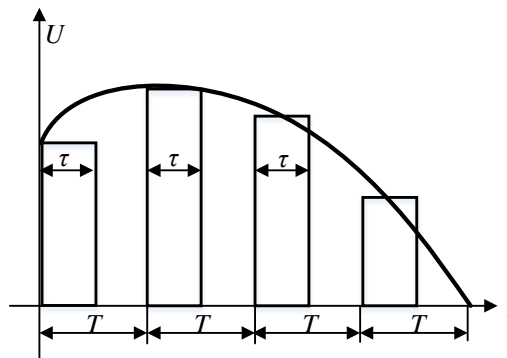


Рисунок 5.3 – АІМ



ШИМ:  $\tau$  змінюється у відповідності зі змінами вхідного сигналу, а  $A$  і  $T$  – *const.*

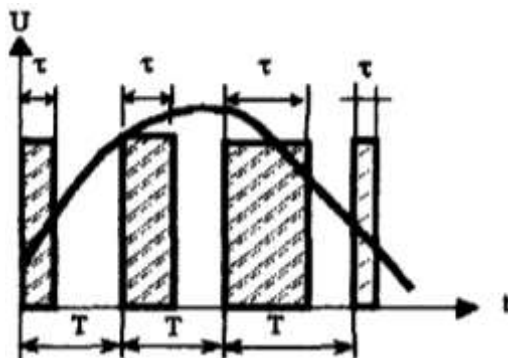
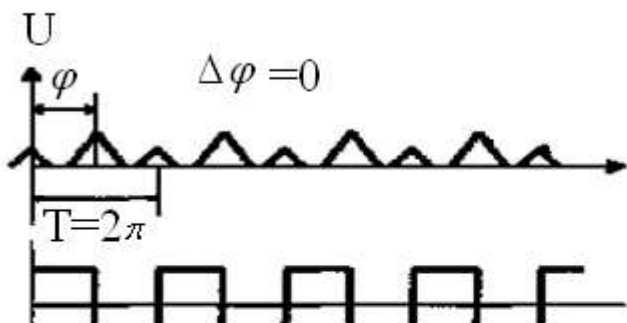
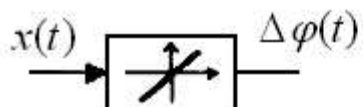


Рисунок 5.4 – ШИМ

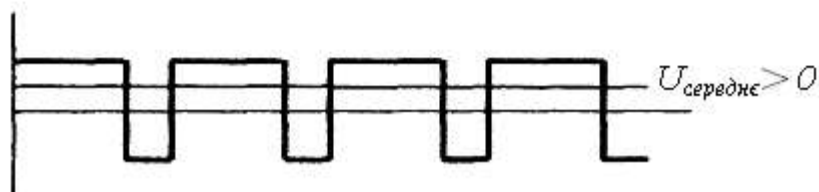
Розглянемо приклад перетворення сигналів в ФІМ.



Робочий імпульс, щонесе інформацію про величину сигналу.



Опорний імпульс  $\setminus t$ .



$U_{\text{середнє}} = 0$

$$\Delta\varphi(t) = k_2 \cdot x(t)$$

$$U_{\text{середнє}} = k_1 \cdot \Delta\varphi(t) = k_1 \cdot k_2 \cdot x(t).$$

При  $\Phi M$  змінюється фаза деякого імпульсу відносно опорного. Часто опорні імпульси мають постійну частоту. Імпульсна послідовність в ідеальному випадку повинна нести всю необхідну інформацію, що міститься в неперервному сигналі. Але при квантуванні за часом імпульсним елементом виділяються дискретні значення вхідного неперервного сигналу, що приводить до втрати частини інформації, вміщеної у вхідному сигналі. Цілком очевидно, що чим рідше квантується неперервний сигнал, тим важче відновити його форму після перетворення в ІЕ. Тому вибір частоти переривання ІЕ повинен відбуватися в залежності від форми вхідного сигналу, а дискретність квантування не повинна приводити до втрат інформації при проходженні неперервного сигналу через ІЕ.

Умови для вибору частоти переривання ІЕ визначаються на основі теореми Котельникова-Шеннона.

### ***Теорема Котельникова-Шеннона***

Неперервний сигнал  $x(t)$  з обмеженим частотним спектром в межах від 0 до  $F_c$  повністю визначається послідовністю своїх дискретних значень, що виникають через інтервал переривання  $T \leq \frac{1}{2F_c}$  (або частоту переривання –

$$f \geq \frac{1}{T} = 2F_c).$$

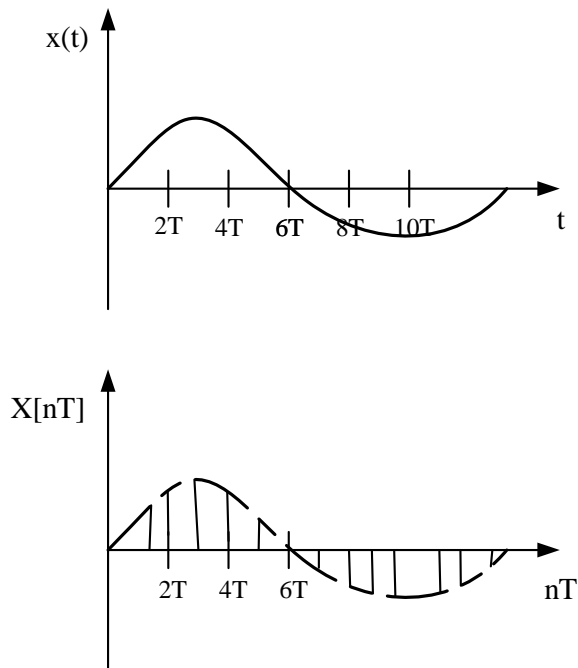
Суть теореми полягає в тому, що неперервний сигнал може бути відновлений після квантування в ІЕ без спотворення, якщо частота квантування в 2 рази або більше перевищує граничну частоту в спектрі неперервного сигналу.

### **5.3 Динаміка ІСАУ. Поняття про решітчасті функції та різницеві рівняння**

Якщо неперервний сигнал може бути представлений неперервною функцією часу, то сигнал на виході ІЕ може бути представлений тільки частиною значень неперервної функції. Ці значення розділені періодом квантування, а в середині періодів всі проміжні значення тільки нульові. Тому дискретно представлені сигнали зручніше описувати функціями дискретної, а не неперервної змінної. Функцію, отриману в результаті заміни неперервної змінної дискретною незалежною змінною і визначену в дискретні моменти часу  $nT, (n+1)T, \dots$  називають *решітчастою функцією*.

На відміну від неперервної функції  $x(t)$  решітчасту функцію позначають як  $x[nT]$ . Неперервна функція  $x(t)$  є огибаючою для своєї решітчастої функції  $x[nT]$ , але оскільки через дискретні точки решітчастої функції можна провести безліч огибаючих, то не існує зворотної однозначної відповідності між решітчастою функцією та її неперервною функцією. Ця

обставина не дозволяє вважати решітчасту функцію повним аналогом неперервної функції.



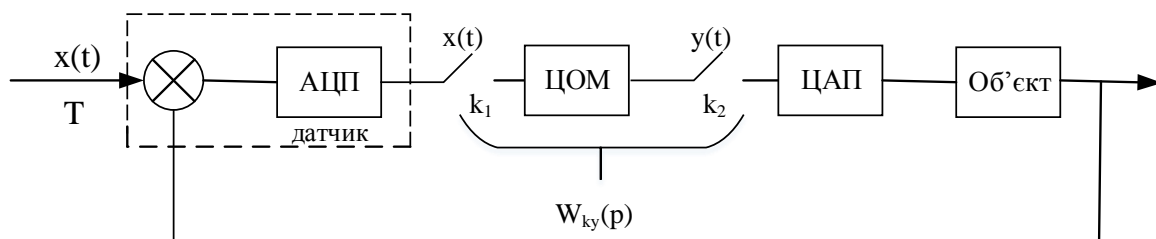
Поняття решітчастої функції лежить в основі спеціалізованого апарату опису дискретних систем і дозволяє здійснювати перехід до дискретного аналогу диференціальних рівнянь – *різницевих рівнянь*.

#### 5.4 Приклад використання ЦОМ в якості регулятора. Редукція до неперервної САУ

Коли з'являються нові можливості, новий клас систем, то звичайно намагаються застосувати ці можливості в рамках старих систем, синтезувати нові системи старими методами, звести (редуціювати) до старих освоєних систем.

Згадайте перші автомобілі – карети з мотором; перші електродвигуни – пристрої типу парової машини із соленоїдом замість циліндра.

В методологічному аспекті даний приклад відноситься саме до такого класу підходів.



Розглянемо принципи реалізації неперервного регулятора за допомогою імпульсного пристрою ЦОМ.

Припустимо, що для неперервної системи вирішена задача синтезу і отримана передаточна функція регулятора:

$$W_{ky}(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_0} = \frac{Y(s)}{X(s)}.$$

При умові, що частота квантування  $\frac{1}{T}$  в багато разів більше власних частот лінійної частини, дана функція може бути реалізована за допомогою ЦОМ. З урахуванням припущення про незначимість  $T$  можливо похідні замінити кінцевими різницями, тобто:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x[k \cdot T] - x[(k-1) \cdot T]}{T} = \Delta x[k], \\ \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{x[k \cdot T] - 2 \cdot x[(k-1) \cdot T] + x[(k-2) \cdot T]}{T^2} = \Delta^2 x[k], \\ \frac{d^3 x}{dt^3} = \frac{x[k \cdot T] - 3 \cdot x[(k-1) \cdot T] + 3 \cdot x[(k-2) \cdot T] - x[(k-3) \cdot T]}{T^3} = \Delta^3 x[k]. \end{cases}$$

Запишемо диференційне рівняння, яке відповідає  $W_p$ , використавши обернене перетворення Лапласа:

$$a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_0 \cdot x(t).$$

Замінімо похідні кінцевими різницями і врахуємо зв'язок останніх з дискретними значеннями решітчастої функції:

$$\begin{aligned} A_n \cdot y[k-n] + A_{n-1} \cdot y[k-n+1] + \dots + A_0 \cdot y[k] = \\ B_m \cdot x[k-m] + B_{m-1} \cdot x[k-m+1] + \dots + B_0 \cdot x[k]. \end{aligned}$$

Розв'яжемо знайдене рівняння відносно поточного виходу та отримаємо алгоритм роботи управляючої ЦОМ.

$$y[k] = \frac{1}{A_0} \cdot [(B_m \cdot x[k-m] + \dots + B_0 \cdot x[k]) - (A_n \cdot y[k-n] + \dots + A_1 \cdot y[k-1])].$$

Таким чином, для реалізації  $W_{ky}$  необхідно зберігати в пам'яті  $m$  попередніх значень входу та  $n$  попередніх значень виходу.

Отже, ми розглянули приклад використання ЦОМ в якості регулятора, зробивши припущення про те, що внаслідок малості кроку квантування за часом  $T$ , неперервні частини САУ “не помічають” дискретності роботи регулятора. Теоретичним фундаментом для цього підходу є теорема Котельникова-Шеннона:

Якщо неперервна частина САУ має обмежений зверху спектр (частотна характеристика), то існує кінцева частота квантування, при якій не відбувається втрат інформації в ЦОМ.

*Чи обмежена область застосування ІСАУ тільки такою, заснованою на теоремі Котельникова-Шеннона, заміною неперервних систем?*

З досвіду управління складними нелінійними об'єктами відомо, що можливо так підібрати період і величину імпульсних впливів (так узгодити їх з динамікою об'єкта), що САУ буде нормально функціонувати. Однак при цьому виявляється, що ІСАУ в цьому випадку можуть мати властивості (як “добрі” так і “погані”), які не виводяться з властивостей неперервних САУ.

*Наприклад, нехай виміряні значення виходу ІСАУ мають вигляд:*

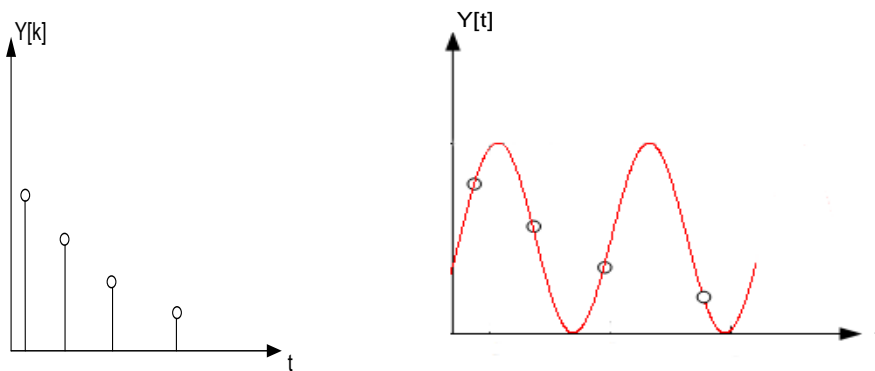


Рисунок 5.2 – Виміряні значення виходу ІСАУ

**Чи стійка САУ?** Цей приклад показує, що проблема стійкості ІСАУ має свої особливості в порівнянні з проблемою стійкості неперервних САУ.

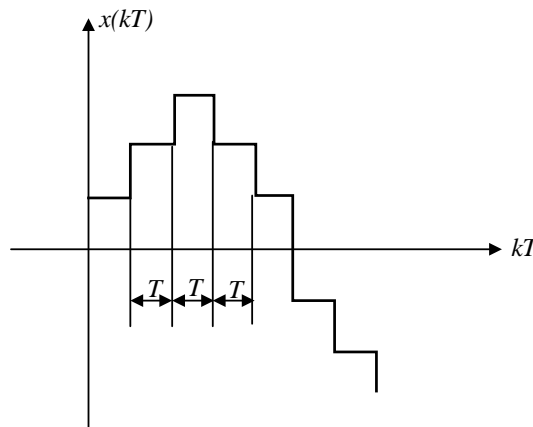
Таким чином, для вирішення задач аналізу і синтезу ІСАУ необхідний власний математичний апарат, бажано подібний до вже засвоєного математичного апарату неперервних САУ.

## 5.5 Z – перетворення

Виконаємо перетворення Лапласа:

$$x(t) \xrightarrow{L} \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt = X(s).$$

Виведемо дискретне перетворення Лапласа для ступінчатої функції.



$$L\{x[k \cdot T]\} = \int_0^{\infty} x(k \cdot T) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt = \sum_{k=0}^{\infty} x[k \cdot T] \cdot e^{-s \cdot k \cdot T} \cdot T.$$

Отже, ми розбили інтеграл на інтервали  $T$ , на яких функція  $x(t)$  стала, і замінили інтеграл сумою.

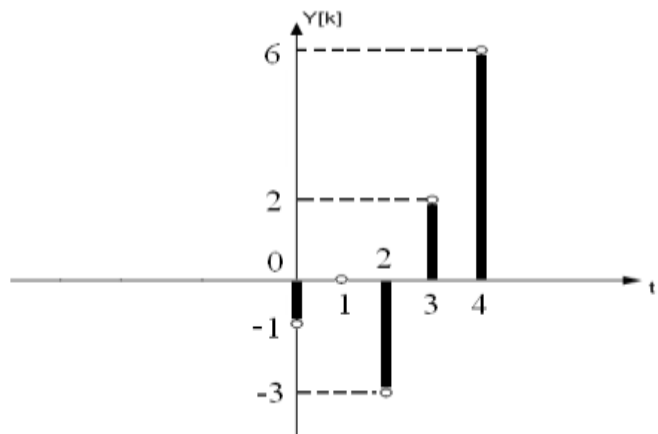
Z-перетворення визначається наступним чином:

$$x(k \cdot T) \xrightarrow{Z} \sum_{k=0}^{\infty} x[k \cdot T] \cdot z^{-k} = X(z).$$

Якщо вважати  $e^{s \cdot T} = z$ , то  $z$ -перетворення з точністю до  $T$  співпадає з дискретним перетворенням Лапласа.

Приклад:

$$\begin{aligned} x[0] &= -1 \\ x[1] &= 0 \\ x[2] &= -3 \\ x[3] &= 2 \\ x[4] &= 6 \end{aligned}$$



Отримаємо степеневий ряд для деякої змінної  $Z$ .

$$X(z) = z^0 \cdot (-1) + z^{-1} \cdot (0) + z^{-2} \cdot (-3) + z^{-3} \cdot (2) + z^{-4} \cdot (6) + \dots$$

### 5.5.1 Властивості $Z$ – перетворення

#### 1) Лінійність:

а)  $Z\{\alpha \cdot x[k \cdot T]\} = \alpha \cdot X(z)$ .

б)  $Z\{x_1[k \cdot T] + x_2[k \cdot T]\} = X_1(z) + X_2(z)$ .

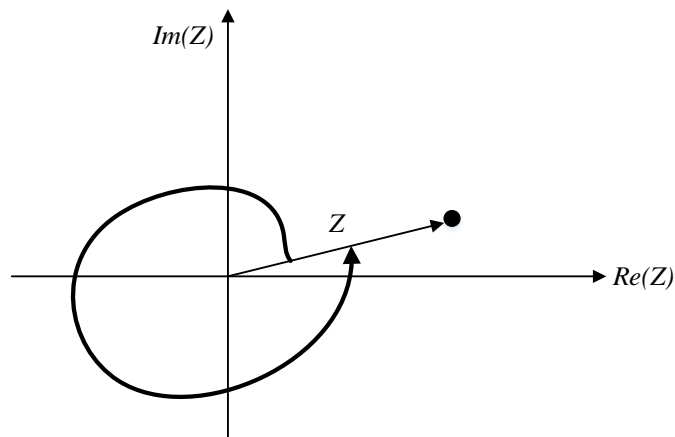
#### 2) Зміщення:

а) оригінала в області аргумента:

$$Z\{x[(k \pm n) \cdot T]\} = z^{\pm n} \cdot X(z), \text{ якщо } \sum_{j=0}^{n-1} x(j \cdot T) \cdot z^{-j} = 0.$$

б) незалежної змінної в області зображення: зсув аргументу  $z$  в зображенні на ціле число періодів в комплексній області відповідає множенню  $z$  на  $e^{nT}$ , де  $n$  – ціле число. При множенні  $z$  на  $e^{\pm nT}$  необхідно помножити оригінал  $x[kT]$  на  $e^{\pm n \cdot k \cdot T}$ , тобто:

$$Z\{e^{\pm n \cdot k \cdot T} \cdot x[k \cdot T]\} = X(e^{\pm nT} \cdot z).$$



#### 3) Диференціювання зображення:

Множення решітчастої функції  $x[kT]$  на  $kT$  відповідає диференціюванню її з зображення  $X(z)$ , результат якого повинен бути помножений на  $-Tz$ , тобто:

$$Z\{k \cdot T \cdot x[k \cdot T]\} = -T \cdot z \cdot \frac{dX(z)}{dz}.$$

#### 4) Обернене $Z$ -перетворення:

$$x[k \cdot T] = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \oint X(z) \cdot z^{k-1} \cdot dz.$$

де  $z$  – комплексна змінна.

Дуже важливі для практики деякі наслідки властивостей  $z$ -перетворення. В чисто імпульсних системах немає сенсу говорити про інтеграл і похідну, але їх роль виконує сума і різниця значень імпульсної функції.

5) Z-перетворення від різниці:

$$Z\{x[k] - x[(k-1)]\} = X(z) - X(z) \cdot z^{-1} = \frac{z-1}{z} \cdot X(z) - \text{це аналог } s \cdot X(s).$$

$$\frac{x[k \cdot T] - x[(k-1) \cdot T]}{T} = \frac{dx}{dt}.$$

6) Z-перетворення від суми:

$$Z\left\{\sum_{i=0}^k x[i]\right\} = \frac{z}{z-1} \cdot X(z) - \text{це аналог } \frac{X(s)}{s}$$

Знайдемо  $z$ -перетворення від суми всіх відліків, включаючи поточне значення:

$$x[k-k] + x[k-k+1] + \dots + x[k].$$

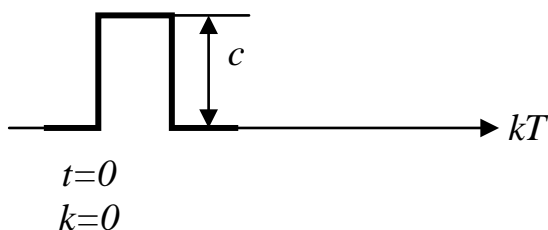
При виконанні  $z$ -перетворення:

$$X(z) \cdot (z^{-k} + z^{-2} + z^{-1} + z^0) = S - \text{сума нескінченно-спадної геометричної прогресії.}$$

### Завдання для самостійної роботи

Знайти  $z$ -перетворення наступних функцій:

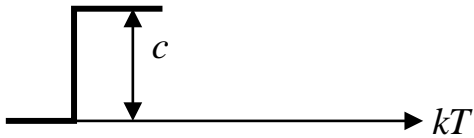
1) одинарний імпульс :





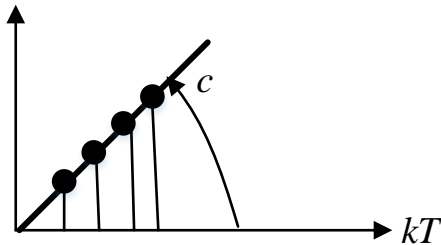
$$x[k \cdot T] = \begin{cases} c, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad X(z) = c.$$

2) ступінчата решітчаста функція:



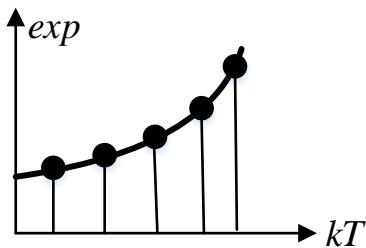
$$x[k \cdot T] = \begin{cases} c, & k \cdot T \geq 0, \\ 0, & k \cdot T < 0. \end{cases} \quad X(z) = \frac{c \cdot z \cdot T}{(z-1)^2}.$$

3) решітчаста функція з постійним нахилом:



$$x[k \cdot T] = c \cdot k \cdot T \quad X(z) = \frac{c \cdot z \cdot T}{(z-1)^2}.$$

4) експоненціальна решітчаста функція:



$$x[k \cdot T] = c \cdot e^{-a \cdot t} = c \cdot e^{-a \cdot k \cdot T} \quad X(z) = \frac{c \cdot z}{z - e^{-a \cdot T}}.$$

( $t=kT$  для дискретного параметра).

### 5.5.2 Застосування Z-перетворення для розв'язання лінійних різницьових рівнянь

Різницеве рівняння для поточних координат  $x$  та  $y$  має вигляд:

$$A_n \cdot y[k-n] + A_{n-1} \cdot y[k-n+1] + \dots + A_0 \cdot y[k] = \\ B_m \cdot x[k-m] + B_{m-1} \cdot x[k-m+1] + \dots + B_0 \cdot x[k].$$

Застосуємо  $z$ -перетворення (коефіцієнти  $A$  та  $B$  вважаємо сталими):

$$A_n \cdot Y(z) \cdot z^{-n} + A_{n-1} \cdot Y(z) \cdot z^{-n+1} + \dots + A_0 \cdot Y(z) = \\ B_m \cdot X(z) \cdot z^{-m} + B_{m-1} \cdot X(z) \cdot z^{-m+1} + \dots + B_0 \cdot X(z).$$

Винесемо за дужки  $Y(z)$  та  $X(z)$  і розв'яжемо отримане рівняння відносно  $Y(z)$ :

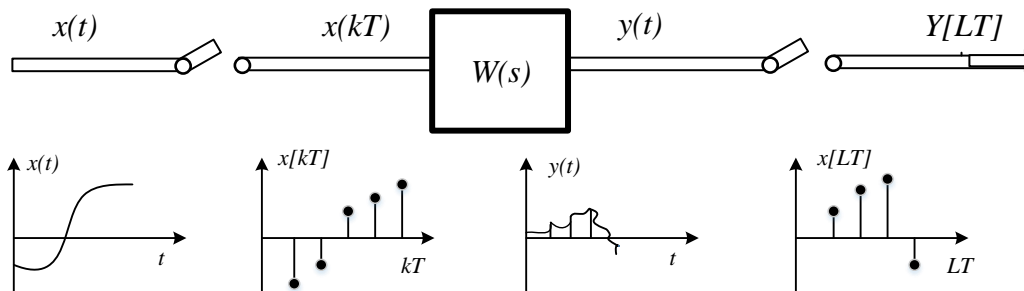
$$Y(z) \cdot \sum_{i=0}^n A_i \cdot z^{-i} = X(z) \cdot \sum_{i=0}^m B_i \cdot z^{-i} . \\ Y(z) = X(z) \cdot \frac{\sum_{i=0}^m B_i \cdot z^{-i}}{\sum_{i=0}^n A_i \cdot z^{-i}} \quad - \text{аналог } Y(s) = X(s) \cdot W(s).$$

Для знаходження початкової решітчастої функції  $y[kT]$  використовується обернене  $z$ -перетворення:

$$y[k \cdot T] = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \oint Y(z) \cdot z^{k-1} \cdot dz .$$

### 5.5.3 Z-передаточні функції розімкнених імпульсних систем

Розглянемо ІС без фіксатора (фіксуєчий елемент – ФЕ):



$Y(z) = W(z) \cdot X(z)$  – якщо б не було ІЕ.

$$X(z) = \sum_{k=0}^w x[k \cdot T] \cdot z^{-k};$$

$$Y(z) = \sum_{L=0}^w y[L \cdot T] \cdot z^{-L};$$

$y(t) = \int_0^w w(t-\tau) \cdot x(\tau) \cdot d\tau$  – інтеграл згортки (зв'язує вихід і вхід системи);

$w(t-\tau)$  – імпульсна перехідна функція для системи з  $W(S)$ .

Для решітчастої функції  $y[LT]$ :

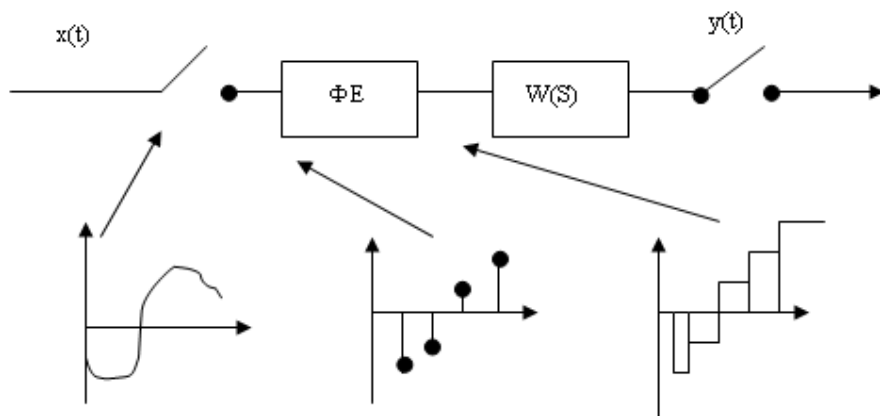
$$t \rightarrow L \cdot T; \quad \tau \rightarrow k \cdot T; \quad d\tau \rightarrow T.$$

$$y[L \cdot T] = \sum_{k=0}^w w[L \cdot T - k \cdot T] \cdot x[k \cdot T] \cdot T.$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^w \underbrace{\sum_{n=0}^w w[n \cdot T] \cdot T \cdot z^{-n}}_{W(z)} \cdot x[k \cdot T] \cdot z^{-k} = W(z) \cdot X(z).$$

#### 5.5.4 Z-передаточна функція імпульсної системи з фіксатором 0-го порядку

На відміну від попереднього випадку, послідовність імпульсів після ІЕ перетворюється фіксуючим елементом (ФЕ) в ступінчастий сигнал:



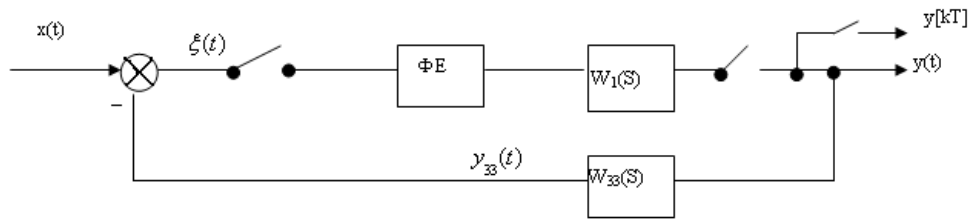
$$Y(z) = \underbrace{\frac{z-1}{z} \cdot z \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}}_{W(z)} \cdot X(z). \quad (\text{Виведіть самостійно!})$$

#### Правила отримання Z-передаточної функції за $W(s)$

Для отримання  $z\{W(s)\}$  необхідно:

- 1) Отримати  $w(t)$ ;
- 2) Отримати  $w(nT)$ ;
- 3) За формулами  $z$ -перетворення для функції  $w(nT)$  знайти  $W(z)$ .

### 5.5.5 Передаточні функції замкнених ІСАУ



Для отримання передаточної функції замкненої ІС використовуємо ту ж методику, що і при виведенні  $W_{замкн}(s)$  неперервних систем.

$$\xi(z) = X(z) - Y_{33}(z);$$

$$\text{без } \Phi E: Y(z) = W_1(z) \cdot \xi(z);$$

$$\text{з } \Phi E: Y(z) = \left[ \frac{z-1}{z} \cdot z \left\{ \frac{W_1(s)}{s} \right\} \right] \cdot \xi(z);$$

$$\text{без } \Phi E: Y_{33}(z) = z \{ W_1(s) \cdot W_{33}(s) \} \cdot \xi(z);$$

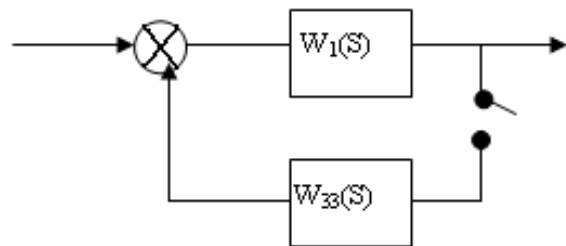
$$\text{з } \Phi E: Y_{33}(z) = \left[ \frac{z-1}{z} \cdot z \left\{ \frac{W_1(s) \cdot W_{33}(s)}{s} \right\} \right] \cdot \xi(z).$$

Використовуючи підстановку отримаємо початкові передаточні функції:

$$\text{без } \Phi E: Y(z) = \frac{W_1(z)}{1 + z \{ W_1(s) \cdot W_{33}(s) \}} \cdot X(z);$$

$$\text{з } \Phi E: Y(z) = \frac{\left[ \frac{z-1}{z} \right] \cdot z \left\{ \frac{W_1(s)}{s} \right\}}{1 + \left[ \frac{z-1}{z} \right] \cdot z \left\{ \frac{W_1(s) \cdot W_{33}(s)}{s} \right\}} \cdot X(z).$$

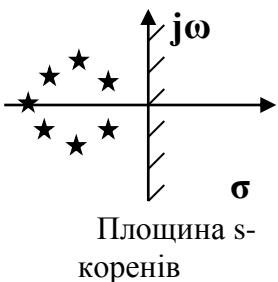
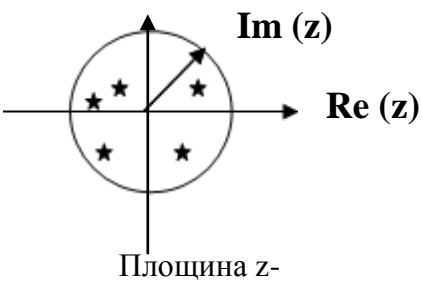
Для іншого положення імпульсного елемента (ключа) будемо мати інші вирази для передаточних функцій:



### 5.6 Стійкість ІСАУ

Розділ будемо розглядати по аналогії з розділом стійкості неперервних САУ.

Неперервні ЛДС		Лінійні ІСАУ	
Дано:			
Диференціальне рівняння:		Однорідне різницеве рівняння:	
$a_n \cdot \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_0 \cdot x = 0 \text{ (I)}$		$A_n \cdot x[k - n] + A_{n-1} \cdot x[k - n + 1] + A_0 \cdot x[k] = 0 \text{ (I)}$	
Стійкість розглядаємо за відношенням до вільного руху (визначення за Ляпуновим).			
Розв'язання шукаємо у вигляді:			
$x = e^{s \cdot t} \text{ (II)}$		$x[k] = z^k \text{ (II)}$	
Підставляємо (II) в (I):			
		$A_0 \cdot z^{k-n} + A_{n-1} \cdot z^{k-n+1} + \dots + A_0 \cdot z^k = 0$ скорочуємо на $z^k$ $A_0 \cdot z^{-n} + A_{n-1} \cdot z^{-n+1} + \dots + A_0 = 0$ та множимо на $z^n$ $A_0 \cdot z^n + A_1 \cdot z^{n-1} + \dots + A_n = 0$	
Отримаємо:			
$s$ -характеристичне рівняння		$z$ -характеристичне рівняння	
$a_n \cdot s^n + \dots + a_0 = 0$		$A_0 \cdot z^n + A_1 \cdot z^{n-1} + \dots + A_n = 0$	
Знаходимо корені:			
$s_1 \dots s_n$		$z_1 \dots z_n$	
Розв'язання отримали у вигляді:			
$x(t) = c_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + \dots + c_n \cdot e^{s_n \cdot t}$		$x[k] = c_1 \cdot z_1^{k-T} + \dots + c_n \cdot z_n^{k-T}$	
Геометричне представлення коренів:			

 <p>Площина s-коренів</p>	 <p>Площина z-коренів</p>
Необхідна та достатня умова стійкості:	
Корені повинні бути “ <u>лівими</u> ”	Корені z-характеристичного рівняння повинні знаходитись <u>в середині одиничного кола</u> (тобто $ z_i  < 1$ ).

В подальшому для уніфікації позначень будемо записувати z-характеристичне рівняння у вигляді:

$$a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Пам'ятайте, що коефіцієнти z-характеристичного рівняння не тотожні s-характеристичному рівнянню неперервної системи, вони пов'язані складними залежностями.

### 5.6.1 Критерії стійкості ІСАУ та метод білінійного перетворення

Таким чином, як і для неперервних лінійних САУ задача аналізу стійкості звелась до визначення місцезнаходження коренів. Також, як і в випадку неперервних систем бажано, не обчислюючи корені, визначати стійкість, тобто мати деякі критерії стійкості.

Для ІСАУ використовуються наступні критерії стійкості:

1) алгебраїчні :

- критерій Шура і Кона;
- іннортні критерії.

2) частотні:

- аналог критерія Михайлова;
- аналог критерія Найквіста.

3) методи зведення z-площини до s-площини:

– метод білінійного перетворення.

Формально метод білінійного перетворення зводиться до виконання наступних операцій:

1) В початковому  $z$ -характеристичному рівнянні:

$$a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

замінімо змінну  $z$  на  $W$  у відповідності з:

$$z = \frac{1+W}{1-W}.$$

Примітка: вочевидь, обернене перетворення має вигляд:

$$W = \frac{z-1}{z+1}.$$

Після алгебраїчних перетворень отримаємо алгебраїчне рівняння  $n$ -го степеня для змінної  $W$ :

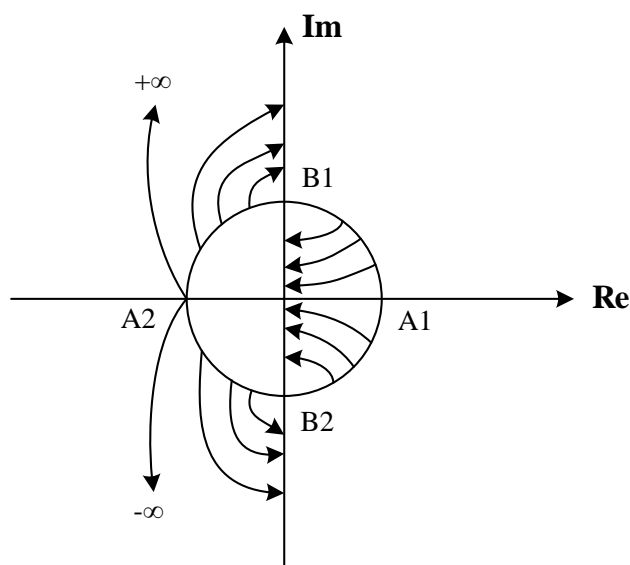
$$b_n \cdot W^n + b_{n-1} \cdot W^{n-1} + \dots + b_0 = 0.$$

2) Якщо корені  $W$ -характеристичного рівняння знаходяться в лівій напівплощині, то система ІСАУ стійка.

Нам відомо, що необхідна та достатня умова стійкості неперервної САУ – ліві корені характеристичного рівняння. Для перевірки цієї умови існує достатня кількість критеріїв стійкості. Тому, для перевірки того, чи є корені  $W$ -характеристичного рівняння лівими, можна використати будь-які критерії стійкості лінійних неперервних САУ.

Розглянемо ідейний сенс білінійного перетворення.

Скажіть, як це перетворення зміщує точки на комплексній площині? Визначте самостійно куди перейдуть точки  $A_1(1; 0j)$ ,  $A_2(-1; 0j)$ ,  $B_1(0; j)$ ,  $B_2(0; -j)$ ,  $O(0; 0)$ .



Неважко перевірити, що точки одиничного кола переходять в точки уявної осі; точки, які лежать всередині кола, – в точки лівої напівплощини; точки, які лежать за межами одиничного кола, – в точки правої напівплощини. Очевидно, що ліві  $W$ -корені при зворотному білінійному перетворенні виявляться всередині одиничного кола.

Практичний приклад:

*Як спіймати лева в Сахарі ? (Л-лев. М- мисливець).*



## 5.6.2 Критерій Шура і Кона

Шур і Кон – німецькі вчені, математики, які займалися ( $\approx 1900$ р.) розглянутими, цікавими тоді тільки вузькому колу математиків, проблемами.

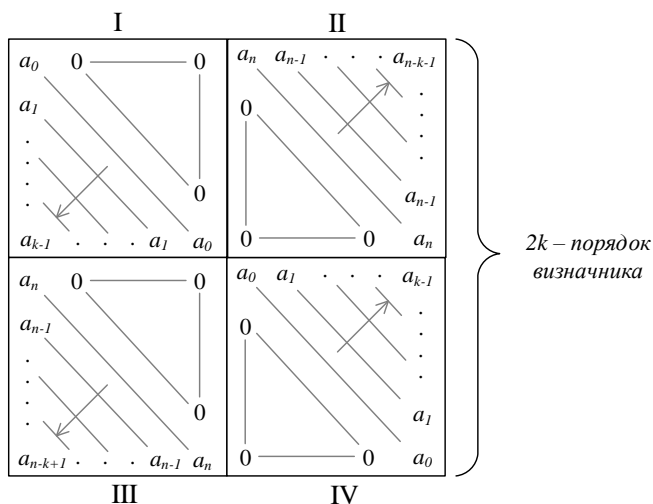
Дано:

Характеристичне рівняння:

$$D(z) = a_n \cdot z^n + \dots + a_1 \cdot z + a_0 = 0.$$

Розв'язок:

1) Будуємо і обчислюємо визначники  $\Delta_k$ , де  $k = \overline{1, n}$ , де  $n$  – порядок системи.





2) Матрицю розбиваємо на 4 блоки. Головну діагональ заповнюємо коефіцієнтами  $a_0$ , малі діагоналі (головні діагоналі в блоках II, III) заповнюємо коефіцієнтами  $a_n$ . Верхні трикутники в блоках I, III та нижні трикутники в блоках II, IV заповнимо нулями. Верхній і нижній трикутники в блоках II, III заповнимо діагоналями коефіцієнтів  $a_{n-1}, \dots, a_{n-k+1}$ , а нижній та верхній трикутники блоків I, IV заповнимо діагоналями коефіцієнтів  $a_1, \dots, a_{k-1}$ .

Побудуємо такі матриці для  $k=1, k=2, k=3$ .

$k=1$

$$\Delta 1 = \begin{array}{|c|c|} \hline a_0 & a_n \\ \hline a_n & a_0 \\ \hline \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|} \hline a_0 & a_n \\ \hline a_n & a_0 \\ \hline \end{array}} \right\} 2k=2$$

$k=2$

$$\Delta 2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ \hline a_1 & a_0 & 0 & a_n \\ \hline a_n & 0 & a_0 & a_1 \\ \hline a_{n-1} & a_n & 0 & a_0 \\ \hline \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ \hline a_1 & a_0 & 0 & a_n \\ \hline a_n & 0 & a_0 & a_1 \\ \hline a_{n-1} & a_n & 0 & a_0 \\ \hline \end{array}} \right\} 2k=4 \quad \Delta 2 > 0$$

$k=3$

$$\Delta 3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a_0 & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ \hline a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ \hline a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_n \\ \hline a_n & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ \hline a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ \hline a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & a_0 \\ \hline \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a_0 & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ \hline a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ \hline a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_n \\ \hline a_n & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ \hline a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ \hline a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & a_0 \\ \hline \end{array}} \right\} 2k=6 \quad \Delta 3 < 0$$

3) Перевіряємо на стійкість.

Необхідна та достатня умова стійкості:

$$\begin{aligned} \Delta k &> 0, \text{ якщо } k - \text{ парне;} \\ \Delta k &< 0, \text{ якщо } k - \text{ не парне.} \end{aligned}$$

### Завдання для самостійної роботи

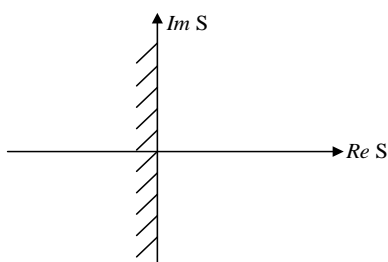
Перевірте на стійкість ІСАУ, використовуючи критерій Шура і Кона, якщо характеристичне рівняння має вигляд:

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

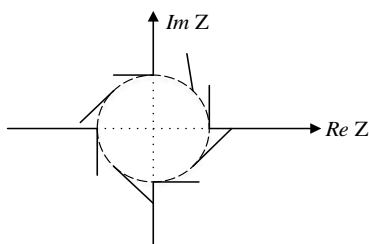
де  $a_3=3$ ;  $a_2=-2$ ;  $a_1=1$ ;  $a_0=5$ .

#### 5.6.3 Іннорні критерії стійкості

Проблема аналізу стійкості для неперервних і дискретних ЛДС зводиться до проблеми окремих коренів. Загальне формулювання умови стійкості: для стійкості САУ необхідно і достатньо, щоб корені відповідного характеристичного рівняння лежали в заданій частині комплексної площини:



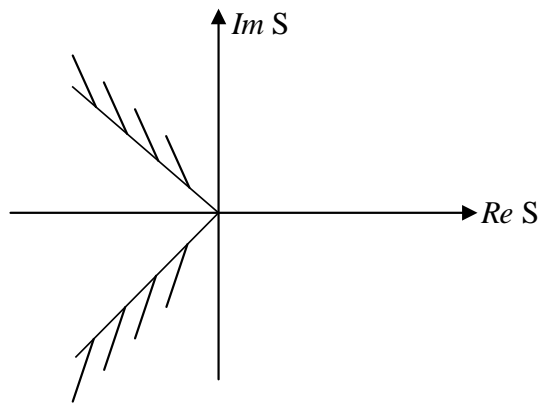
для НСАУ – це ліва напівплощина.



для ІАСУ – це одиничне коло.

Існують ще задачі, в яких ця область має інший вигляд. Наприклад, цифрові фільтри для зображень, так звані двовимірні фільтри. Практичні задачі, які вирішуються такими фільтрами:

- 1) очистка телевізійних та інших зображень від шумових завад;
- 2) відновлення “змазаних” знімків і кадрів.



Двовимірні фільтри обробляють точки на площині, задані двома координатами. Характеристичне рівняння для таких систем має комплексні коефіцієнти. Деякі з таких фільтрів по-суті подібні спостерігачу. Умова стійкості для них може мати вигляд:

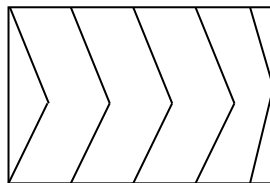
Таким чином, проблема стійкості – це проблема відділення коренів. Чи можливо створити загальні методи для визначення належності коренів довільного алгебраїчного рівняння деякій заданій області? Чи неможливо узагальнити алгебраїчні критерії Гауса-Гурвиця, Шура-Кона?

Можливий шлях цього узагальнення – іннорні методи.

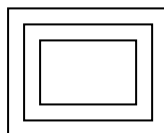
Іннори в теперішньому інженерному вигляді запропоновані відомим американським вченим, професором Каліфорнійського університету в Берклі Е. Джурі в 1960-х роках, який в основному спирався на роботи Ерміта (1840 р.), Гурвиця (1870 р.), Шура і Кона (1910 р.), радянських вчених М.Г. Крейна, М.А. Неймарка (1936 р.), Я.З. Ципкіна (1950-1960 р.р.)

*Іннорами* називають певні квадратні підматриці будь-яких квадратних матриць порядку  $n$ .

*Іннорна матриця* — матриця певної конфігурації, складена з коефіцієнтів характеристичного рівняння  $D(s)$  або  $D(z)$ .



*Іннор* — визначник, отриманий з іннорної матриці викреслюванням крайніх рядків і стовпців:



Розглянемо побудову іннорної матриці на прикладі системи 5-го порядку, тобто  $n=5$ :

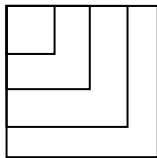
$$D(s) = a_5 \cdot s^5 + a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = 0.$$

Порядок іннорної матриці визначається з формули  $2n-1$ , в даному випадку він дорівнює 9.

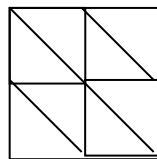
$$I_9 =$$

$+a_5$	0	$-a_3$	0	$+a_1$	0	0	0	0
0	$a_5$	0	$-a_3$	0	$a_1$	0	0	0
0	0	$a_5$	0	$-a_3$	0	$a_1$	0	0
0	0	0	$a_5$	0	$-a_3$	0	$a_1$	0
0	0	0	0	$a_4$	0	$-a_2$	0	$a_0$
0	0	0	$a_4$	0	$-a_2$	0	$a_0$	0
0	0	$a_4$	0	$-a_2$	0	$a_0$	0	0
0	$a_4$	0	$-a_2$	0	$a_0$	0	0	0
$+a_4$	0	$-a_2$	0	$a_0$	0	0	0	0

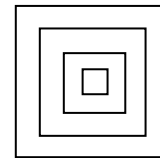
**Порівняйте структуру визначників для критеріїв**



**Гурвиця**



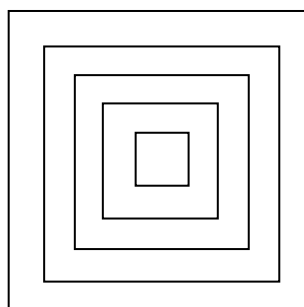
**Шура і Кона**



**Іннорний**

**5.6.3.1 Іннорний критерій стійкості для неперервних САУ**  
Іннорний критерій для неперервних САУ має вигляд:

для будь-яких  $j$  маємо  $\det I_j > 0$ ,  $j = 9, 7, 5, 3, 1$ .



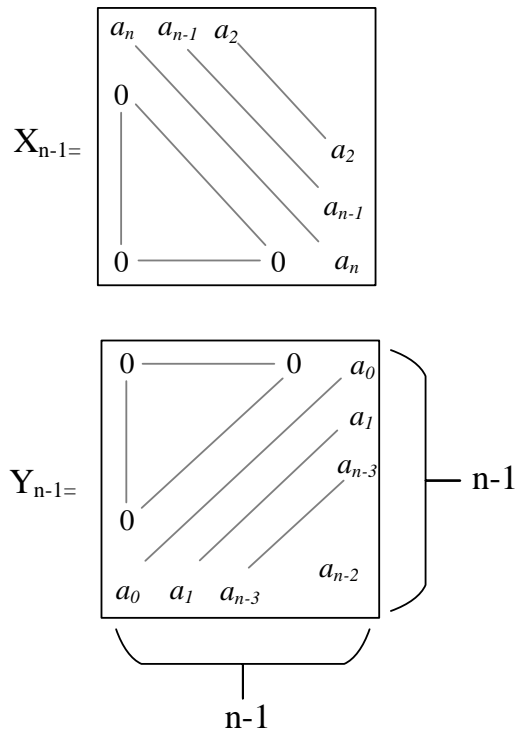
### 5.6.3.2 Іннорний критерій стійкості для ІСАУ

1) Дано:

$$D(z) = a^n \cdot z^n + \dots + a_1 \cdot z + a_0 = 0.$$

2) Підготовчі операції:

- $a_n > 0$  (якщо менше нуля, то помножити (1) на число -1);
- побудувати іннорні матриці  $X_{n-1}$  і  $Y_{n-1}$



3) Перевірка стійкості, яка передбачає виконання одночасно трьох умов:

- $D(1) > 0$ ; ( $z = -1$ ).
- $(-1)^n \cdot D(-1) > 0$ ; ( $z = -1$ ).
- $\det |X_{n-1} + Y_{n-1}| > 0$ .

### Завдання для самостійної роботи

Перевірити на стійкість ІСАУ з використанням інорного критерій, якщо характеристичне рівняння має вигляд:

- $z^7 + 1 = 0$
- $-3z^5 - 4z^4 + 3z^3 - 2z^2 - z - 1 = 0$

## 5.7 Багатовимірні САУ

Сучасні САУ, як правило, багатозв'язні, багатовимірні, оскільки навіть в граничному випадку, коли необхідно управляти єдиною змінною за допомогою єдиного управляючого впливу, оптимальне рівняння потребує врахування похідних, інтегралів від входу та виходу. Використовуючи канонічну формулу Коші для такої системи, ми подаємо її як багатовимірну.

Використовуючи накопиченні знання про неперервні багатовимірні САУ і базові відношення зв'язку неперервних та імпульсних динамічних систем, перейдемо до методів аналізу і синтезу багатовимірних ІСАУ.

Канонічне зображення багатовимірної неперервної САУ:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{X} = A \cdot \bar{X} + B \cdot \bar{U} & \text{рівняння об'єкта} \\ \bar{Y} = C \cdot \bar{X} & \text{рівняння вимірювача} \\ \bar{U} = K \cdot \bar{X} \text{ або } \left( \bar{U} = K \cdot \hat{X} \right) & \text{рівняння регулятора} \end{cases}$$

Для замкненої неперервної САУ:

$$\frac{d}{dt} \bar{X} = (A + BK) \cdot \bar{X}, \text{ або } \frac{d}{dt} \bar{X} = N \cdot \bar{X} \quad \text{де } N = A + BK.$$

Відомо, що розв'язок такої системи наводиться у вигляді:

$$\bar{X}(t_2) = e^{N \cdot (t_2 - t_1)} \cdot \bar{X}(t_1). \quad (5.1)$$

Для матричної експоненти  $e^{N \cdot (t_2 - t_1)}$  відоме розкладання в ряд:

$$e^{N \cdot (t_2 - t_1)} = I + \frac{N \cdot (t_2 - t_1)}{1!} + \frac{N^2 \cdot (t_2 - t_1)^2}{2!} + \dots \quad (5.2)$$

Використаємо (5.1) і (5.2) в якості базової ланки, яка зв'язує неперервні та імпульсні динамічні системи.

Нехай  $t_2 - t_1 = T$  період квантування в ІСАУ, тоді

$$e^{N \cdot T} = I + \frac{N \cdot T}{1!} + \frac{N^2 \cdot T^2}{2!} + \frac{N^3 \cdot T^3}{3!} + \dots = F(T),$$

де  $F(T)$  – перехідна функція стану для ІСАУ з періодом квантування  $T$ .

З урахуванням цього позначення маємо:

$$\bar{X}[k \cdot T] = F(T) \cdot \bar{X}[(k-1) \cdot T] = \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{N^j \cdot T^j}{j!} \right] \cdot \bar{X}[(k-1) \cdot T].$$

Аналогічне рівняння можемо отримати і для розімкненої ІСАУ.  
Для розімкненої системи:

$$\frac{d}{dt} \bar{X} = A \cdot \bar{X} + B \cdot \bar{U}.$$

Залежність виходу в поточний момент  $\bar{X}[k \cdot T]$  від попереднього значення  $\bar{X}[(k-1) \cdot T]$  і зовнішнього (в даному випадку управляючого) впливу  $\bar{U} = 1(t)$  має вигляд (див. теорію лінійних диф. рівнянь):

$$\bar{X}[k \cdot T] = e^{A \cdot T} \cdot \bar{X}[(k-1) \cdot T] + \int_{(k-1) \cdot T}^{k \cdot T} e^{A \cdot (k \cdot T - \tau)} \cdot B \cdot \bar{U}(\tau) \cdot d\tau. \quad (5.3)$$

Якщо  $T$  достатньо мале, так що  $\bar{U}(\tau) \approx \bar{U}[(k-1) \cdot T]$  для  $(k-1) \cdot T < \tau < k \cdot T$ , то:

$$\bar{X}[k \cdot T] = e^{A \cdot T} \cdot \bar{X}[(k-1) \cdot T] + \left( \int_{(k-1) \cdot T}^{k \cdot T} e^{A \cdot (k \cdot T - \tau)} \cdot d\tau \right) \cdot B \cdot \bar{U}[(k-1) \cdot T]. \quad (5.4)$$

Інтеграл в даному виразі може бути представлений наступним чином:

$$\int_{(k-1) \cdot T}^{k \cdot T} e^{A \cdot (k \cdot T - \tau)} \cdot d\tau = \sum_{j=0}^{\infty} A^j \cdot \int_{(k-1) \cdot T}^{k \cdot T} \frac{(k \cdot T - \tau)^j}{j!} \cdot d\tau = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j \cdot T^{j+1}}{(j+1)!}. \quad (5.5)$$

### Завдання для самостійної проробки:

Використовуючи свої знання з курсу вищої математики, зведіть даний визначений інтеграл до табличного вигляду:

$$\int_{(k-1) \cdot T}^{k \cdot T} \frac{(k \cdot T - \tau)^j}{j!} \cdot d\tau = - \frac{(k \cdot T - \tau)^{j+1}}{j!(j+1)} \Big|_{(k-1) \cdot T}^{k \cdot T} = - \left( \frac{(k \cdot T - k \cdot T)^{j+1}}{j!(j+1)} - \frac{(k \cdot T - k \cdot T + T)^{j+1}}{j!(j+1)} \right) = \frac{T^{j+1}}{(j+1)!}$$

Підставляючи (5.5) в (5.4), отримуємо:

$$\bar{X}[k \cdot T] = F(T) \cdot \bar{X}[(k-1) \cdot T] + G(T) \cdot B \cdot U[(k-1) \cdot T] \quad (5.6)$$

де

$$F(T) = e^{A \cdot T} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j \cdot T^j}{j!}, \quad (5.7)$$

$$G(T) = (e^{A \cdot T} - I) \cdot A^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j \cdot T^{j+1}}{(j+1)!}. \quad (5.8)$$

Вираз (5.8) справедливий, якщо  $A$  не вироджена.

Вирази (5.6), (5.7), (5.8) — основа для побудови обчислювальних алгоритмів моделювання і управління.

Зокрема вирази для матриць  $F(T)$  і  $G(T)$  можна обраховувати рекурентно.

$$G(T) = T \cdot \left[ I + \frac{A \cdot T}{2} \cdot \left\{ I + \frac{A \cdot T}{3} \cdot \left[ I + \dots + \frac{A \cdot T}{L-1} \cdot \left( I + \frac{A \cdot T}{L} \right) \right] \dots \right\} \right]. \quad (5.9)$$

$$F(T) = I + A \cdot T \cdot \left[ I + \frac{A \cdot T}{2} \cdot \left[ I + \dots + \frac{A \cdot T}{L-1} \cdot \left( I + \frac{A \cdot T}{L} \right) \right] \dots \right]. \quad (5.10)$$

Тут  $L$  — кількість доданків в апроксимації  $G(T)$  і  $F(T)$ .

Формули (5.9) і (5.10) (наведені для довідки) дозволяють поставити задачу оптимізації кроку квантування.

Якісні міркування по вибору  $T$  формулюються наступним чином.

При використанні малих  $T$  для отримання заданої точності в (5.9) і (5.10) не вимагається брати більше 1-2 доданків.

Загальні витрати обчислювальних ресурсів (пам'яті, швидкодії) на управління і (або) моделювання ІСАУ складаються з витрат на обчислення  $G(T)$  і  $F(T)$  та витрат на обчислення на кожному кроці (наприклад, за формулою 5.6). Перша складова зростає зі зростом  $T$ , друга — спадає. Формально, якщо  $A$ ,  $B$  постійні і відомі абсолютно точно, мінімуму обчислювальних витрат відповідає  $T \rightarrow \infty$  ( $G(T)$ ,  $F(T)$  — обчислюються в цьому випадку тільки один раз, до початку функціонування системи). Для реальних САУ  $A$  і  $B$  — змінні, які відомі приблизно, тому немає сенсу вибирати великі  $T$ , існує  $0 < T_{opt} < \infty$ .

## **Z – характеристичне рівняння багатовимірної ІСАУ**

Неуправляема САУ:

$$\bar{X}[k \cdot T] = (I + A \cdot T) \cdot \bar{X}[(k-1) \cdot T].$$

Застосуємо  $z$ -перетворення для цього рівняння:

$$\bar{X}(z) = (I + A \cdot T) \cdot \bar{X}(z) \cdot z^{-1}.$$

Після алгебраїчних перетворень:



$$\underbrace{(I \cdot z - (I + A \cdot T))}_{\text{матриця}} \cdot \underbrace{\bar{X}(z)}_{\text{вектор}} = 0. \quad (5.11)$$

Рівняння (5.11) – це в згорнутому вигляді система лінійних однорідних рівнянь, яка має нетривіальне ( $\bar{X}(z) \neq 0$ ) розв’язання, якщо:

$$\det[I \cdot z - (I + A \cdot T)] = 0.$$

Після розкриття визначника отримаємо поліном від  $z$  — шукане характеристичне рівняння.

Аналогічно, отримаємо  $z$ -характеристичне рівняння для управляємої САУ:

$$\begin{aligned} \bar{X}[k \cdot T] &= (I + A \cdot T) \cdot \bar{X}[(k-1) \cdot T] + T \cdot B \cdot \bar{U}[(k-1) \cdot T] \\ \bar{U}[(k-1) \cdot T] &= K \cdot \bar{X}[(k-1) \cdot T] \\ \bar{X}[k \cdot T] &= (I + A \cdot T + B \cdot K \cdot T) \cdot \bar{X}[(k-1) \cdot T] \\ \bar{X}(z) &= (I + A \cdot T + B \cdot K \cdot T) \cdot \bar{X}(z) \cdot z^{-1} \\ \underbrace{(I \cdot z - (I + A \cdot T + B \cdot K \cdot T))}_{\text{матриця}} \cdot \underbrace{\bar{X}(z)}_{\text{вектор}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\underline{\det[I \cdot z - (I + A \cdot T + B \cdot K \cdot T)] = 0.}$$

і спостерігача:

$$\frac{d}{dt} \hat{X} = A \cdot \hat{X} + B \cdot \bar{U} + L \cdot C \cdot (\hat{X} - \bar{X}).$$

неперервне рівняння:

$$\frac{d}{dt} \hat{X} = A \cdot \hat{X} + L \cdot C \cdot \hat{X} + \underbrace{B \cdot \bar{U} - L \cdot C \cdot \bar{X}}_{\text{зовнішні впливи для спостереження}}.$$

або однорідне рівняння:

$$\frac{d}{dt} \hat{X} = A \cdot \hat{X} + L \cdot C \cdot \hat{X}.$$

дискретне рівняння:

$$\hat{X}[k \cdot T] = (I + A \cdot T + L \cdot C \cdot T) \cdot \hat{X}[(k-1) \cdot T].$$

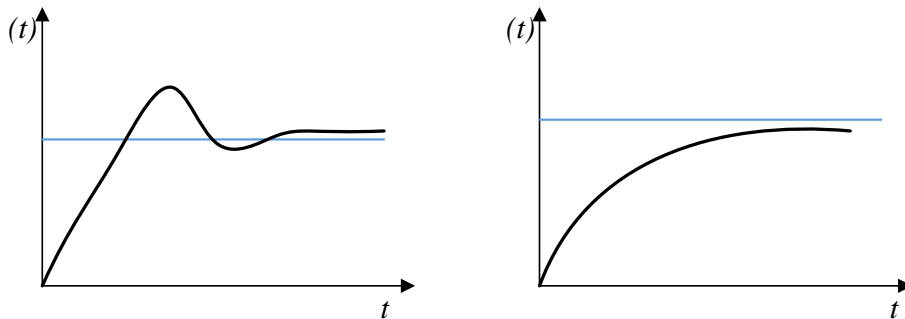
$z$ —характеристичне рівняння:

$$\det [I \cdot z - (I + A \cdot T + L \cdot C \cdot T)] = 0.$$

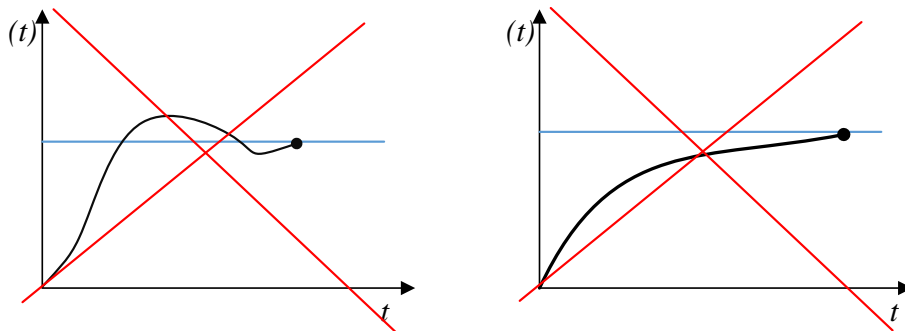
## 5.8 Управління з кінцевим часом встановлення (УКЧВ). Спостерігач з кінцевим часом встановлення (СКЧВ)

Як вже говорилося на початку розділу, ІСАУ не є всього лише ерзац-замінювачем, наближенням до неперервних САУ, в них є властивості, які відсутні в неперервних САУ.

Особливість неперервних лінійних САУ з лінійними законами управління по вектору стану — *асимптотичність* — стан, що встановився (необхідний), досягається за нескінченний час:



Процеси, графіки яких наведені нижче, для них неможливі:



Для ІСАУ можна так підібрати параметри закону управління:

$$\bar{U}[(k-1) \cdot T] = K \cdot \bar{X}[(k-1) \cdot T],$$

що перехідні процеси будуть закінчуватись не більш, ніж за  $n$  кроків квантування ( $n$  – порядок системи).

На жаль, термінологія відстає від технічного прогресу. Регулятори з такими властивостями називають:

– “УКЧВ – регулятор” (управління з кінцевим часом встановлення)

- “СКЧВ – спостерігач” (спостерігач з кінцевим часом встановлення).
- “швидкий регулятор” (не плутайте з швидкодіючим регулятором).
- “швидкий спостерігач” (не плутайте з швидкодіючим спостерігачем).
- “короткий регулятор”.
- “аперіодичний регулятор”.

– до цього класу понять та методів відноситься і ще більш невдалий термін – загальновідомий ШПФ (швидкий перетворювач Фур'є).

Спробуйте підібрати більш вдалі терміни.

Розглянемо проблему КЧВ (кінцевого часу встановлення) чисто феноменологічно, “поекспериментуємо” з математичною моделлю ІСАУ.

Нехай задана довільна імпульсна динамічна система 7 порядку:

$$\bar{X}[k \cdot T] = M \cdot \bar{X}[(k-1) \cdot T].$$

Для послідовності кроків  $k = 0, 1, 2, \dots$  квантування  $T$  будемо випускати в аргументі, тоді можемо записати:

$$\begin{aligned}\bar{X}[1] &= M \cdot \bar{X}[0], \\ \bar{X}[2] &= M \cdot \bar{X}[1], \\ &\dots \\ \bar{X}[7] &= M \cdot \bar{X}[6].\end{aligned}$$

Виключивши проміжні змінні, отримаємо:

$$\bar{X}[7] = M^7 \cdot \bar{X}[0].$$

В загальному вигляді:

$$\bar{X}[n] = M^n \cdot \bar{X}[0].$$

З теорії матриць відомо [Сигорський, Коршунов та ін.], що якщо всі власні числа (тобто корені характеристичного рівняння дорівнюють нулю):

$$\det[I \cdot \lambda - M] = 0, \quad \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0,$$

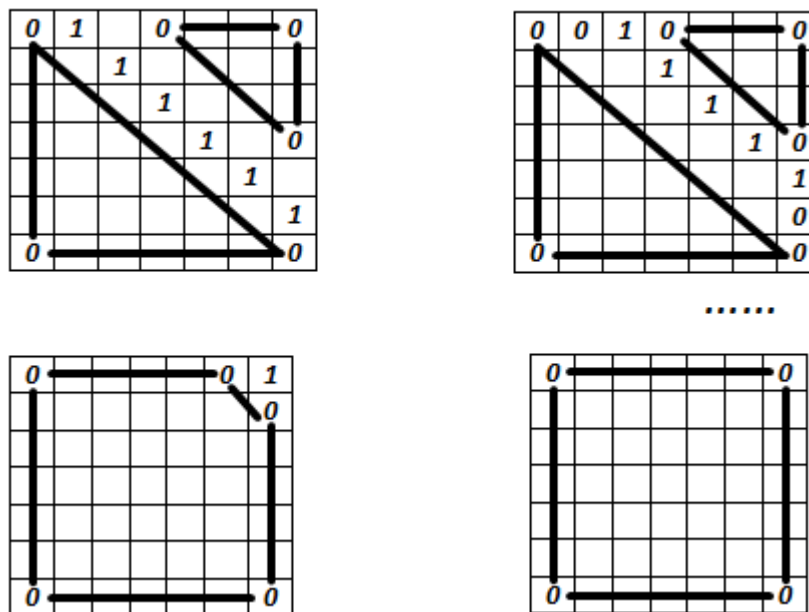
то

$M^n = 0$  — матриця зі всіма нульовими елементами.

Зокрема, матриці виду “з наддіагоналлю з одиниць та іншими нулями” мають нульові власні числа:

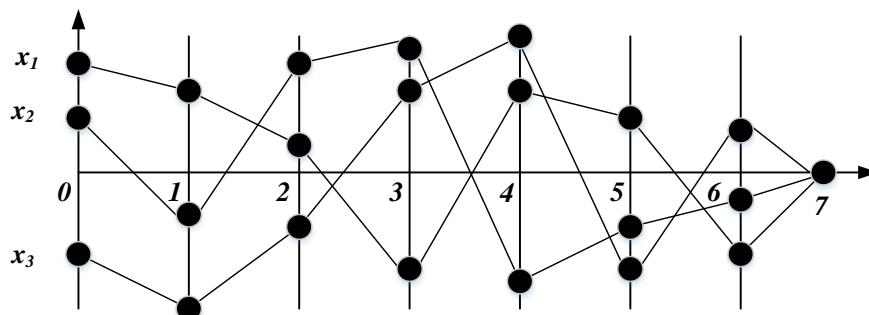
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Спробуйте послідовно помножити таку матрицю саму на себе. Діагональ з одиниць (одиниці взяті для простоти прикладу) буде переміщуватися вправо і на  $n$ -ому кроці “зникне”:



Таким чином, якими  $\bar{b}$  не були компоненти вектора  $\bar{X}[0]$  не пізніше, чим на  $n$ -ому кроці  $\bar{X}(l) = 0 \quad (l \geq n)$ .

Перехідні процеси по компонентам  $\bar{X}$  будуть мати вигляд (показані тільки 3 із 7 компонентів, щоб не загроможувати рисунок):



### 5.8.1 Синтез УКЧВ і СКЧВ

Розглянемо необхідну та достатню умову управління з кінцевим часом встановлення. Z-характеристичне рівняння ІСАУ:

$$\det[I \cdot z - M] = 0,$$

тому необхідна і достатня умова УКЧВ будь-яких  $i$ , де  $i = \overline{1, n}$ :

$$z_i = 0,$$

що можливо, якщо характеристичне рівняння має вигляд:

$$z^n = 0,$$

тобто всі коефіцієнти  $a_{n-1}, \dots, a_0$  дорівнюють нулю.

Формально процедура синтезу УКЧВ буде наступною.

Дано:

$$\bar{X}[k \cdot T] = (I + A \cdot T) \cdot \bar{X}[(k-1) \cdot T] + T \cdot B \cdot \bar{U}[(k-1) \cdot T] \quad (a)$$

$$\bar{U}[(k-1) \cdot T] = K \cdot \bar{X}[(k-1) \cdot T] \quad (b)$$

Визначити:  $K$  — матрицю параметрів регулятора, яка забезпечує УКЧВ.

Подана задача аналогічна розглянутій раніше задачі синтезу управління по вектору стану методом стандартних коефіцієнтів.

Розв'язання:

1) Підставляємо (b) в (a), маємо:

$$\bar{X}[k \cdot T] = (I + A \cdot T + B \cdot K \cdot T) \cdot \bar{X}[(k-1) \cdot T]$$

2) Запишемо z-характеристичне рівняння:

$$\det[I \cdot z - (I + A \cdot T + B \cdot K \cdot T)] = 0.$$

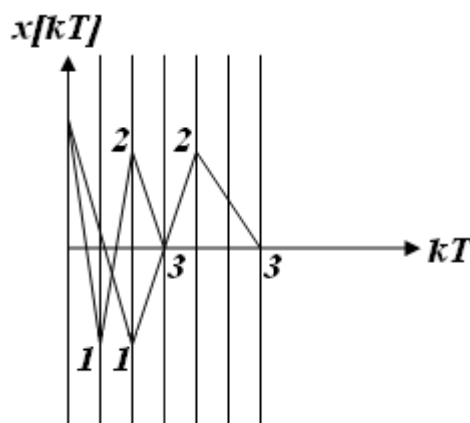
3) Розкриємо визначник:

$$a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0 = 0.$$

4) Прирівняти до нуля всі коефіцієнти (крім  $a_n$ ), отримаємо  $n$  рівнянь для  $n \times m$  невідомих елементів  $k_{ij}$  матриці  $K$ , де  $i = \overline{1, m}$ , а  $j = \overline{1, n}$ :

$$\begin{cases} a_0(a_{\mu s}, b_{\eta l}, k_{ij}) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-1}(a_{\mu s}, b_{\eta l}, k_{ij}) = 0. \end{cases}$$

При синтезі реальної ІСАУ з КЧВ об'єктом вибору є не тільки параметри матриці  $K$  (у випадку системи з одним входом ( $m=1$ ) матриця  $K$  вироджується у вектор), але і період квантування. При зменшенні періоду квантування  $T$  необхідні значення управління зростають. Чому? Це зрозуміло з наступного рисунка:



### 5.8.2 Область застосування УКЧВ і СКЧВ та особливості синтезу

Розрахунок параметрів УКЧВ і СКЧВ в переважній кількості випадків дуже простий, він може виконуватися навіть на кожному окремому такті управління ІСАУ заново. В зв'язку з цим УКЧВ і СКЧВ перспективні в адаптивних (самоналагоджувючихся, самонавчальних, самонастроювальних...) ІСАУ, які змінюють параметри регулятора

(матриці  $K$ ) у відповідності з параметрами об'єкта ( $A, B, C$ ). Однак, “дивні” властивості (а в техніці див не буває, оскільки за все треба платити) КЧВ досягаються фактично скороченням чисельника (знаменника)  $z$ -передаточної функції.

Якщо корені неуправляемого об'єкта  $z_{i \text{ об'єкта}}$  лежать близько від одиничного кола, то така система буде дуже чутливою (“негрубою”) до помилок визначення  $A, B, C$ . Тому застосування КЧВ обмежується класом асимптотично стійких [див. Ізерман] об'єктів управління.

### Контрольні запитання

1. Визначення поняття стійкості по Ляпунову.
2. Необхідна і достатня умови стійкості ЛДС.
3. Формулювання критерія Найквіста.
4. Формулювання критерія Михайлова.
5. Формулювання критерія Гурвиця.
6. Як можна знайти корені лінійного алгебраїчного рівняння  $N$ -ступеню.
7. Що таке “характеристичне рівняння”?
8. Що таке “кореневий годограф”, як можна по кореневому годографу визначити нестійкість САУ?
9. Що таке “запас стійкості по фазі”, “запас стійкості по амплітуді”

## 6 АНАЛІЗ І СИНТЕЗ НЕЛІНІЙНИХ ТА РЕЛЕЙНИХ САУ

Література по темі розділу — другі частини підручників Воронова і Нетушила, а також відповідні розділи нашої електронної книги (релейні САУ).

Ви пам'ятаєте з першої частини курсу, що лінійні системи складають десь 5-10% від усіх САУ, що зустрічаються в практиці інженера. Для лінійних систем є загальні методи аналізу і синтезу.

Сьогодні ми переходимо до вивчення нелінійних систем, що складають 90%. Для нелінійних систем таких загальних методів не існує. Ви можете заперечити - є другий метод Ляпунова аналізу стійкості нелінійних систем. Але цей метод не є вичерпним рецептом і алгоритмом - там треба спочатку винайти або сконструювати функцію Ляпунова. Загальних рутинних методів для нелінійних систем не існує.

Чому ми так пізно починаємо вивчати нелінійні САУ?

1. Тому, що це відповідає програмі курсу.
2. Тому, що це відповідає традиціям ТАУ
3. Тому що ми їх вже давно вивчаємо: перша частина почалась з лінеаризації.

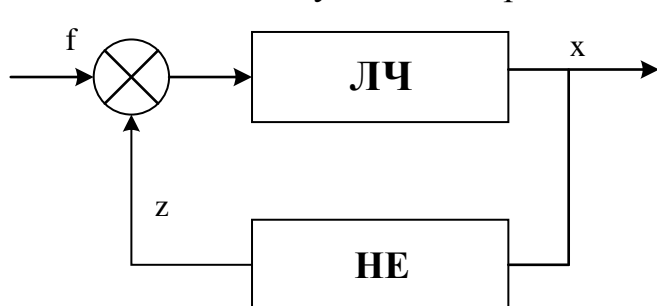
Потім на протязі семестру ми вивчали фактично поведінку нелінійних систем при малих відхиленнях від номінальних режимів.

Тепер переходимо до безпосереднього вивчення нелінійних систем.

### 6.1 Нелінійні системи. Визначення. Класифікація.

#### Характеристики нелінійних систем

До нелінійних систем відносять всі системи, які не можуть бути описані лінійними диференціальними рівняннями. Множина нелінійних систем настільки широка і різноманітна, що практично не можна говорити про єдиний клас нелінійних систем, що протистоїть класу лінійних систем. Розглянемо більш вузький, але широко розповсюджений в практиці управління, клас нелінійних систем, що характеризуються наступними особливостями: систему можна представити у вигляді з'єднання двох



частин – лінійної частини ЛЧ, що описується лінійними звичайними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, і нелінійного елемента НЕ.

Нелінійний елемент є безінерційним, і його вхідна  $X$  і вихідна  $Y$  величини зв'язані між собою

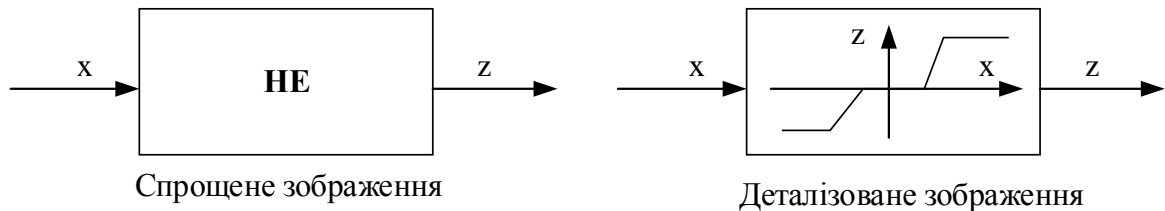


нелінійними алгебраїчними рівняннями. Таким чином, нелінійність систем, що розглядаються, обумовлена нелінійністю статистичної характеристики одного з її елементів.

### *Приклади нелінійних елементів:*

- 1) Двофазний асинхронний двигун;
- 2) Тріод;
- 3) Гідропривід;
- 4) Магнітний підсилювач;
- 5) Аеродинамічні рулі літаючих апаратів.

### *Класифікація нелінійностей*



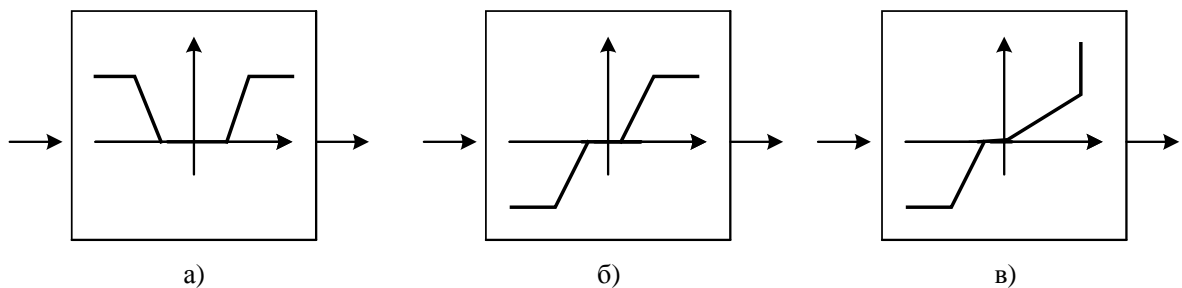
Нелінійності діляться на:

статичні:  $z = f(x)$ ;

динамічні:  $z = f\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots\right)$ .

Статичні нелінійності можна класифікувати по наступним показникам:

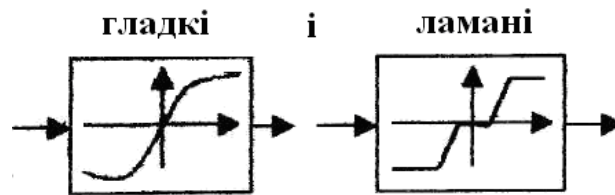
- 1) симетрія:
  - а) чітко симетричні (симетричні відносно осі ординат);
  - б) нечітко симетричні (симетричні відносно початку координат);
  - в) несиметричні;



- 2) гладкість:

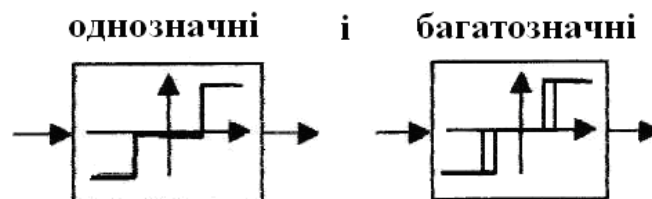
- гладкі;

- ламані (кусочно-лінійні).



3) однозначність:

- однозначні;
- багатозначні.



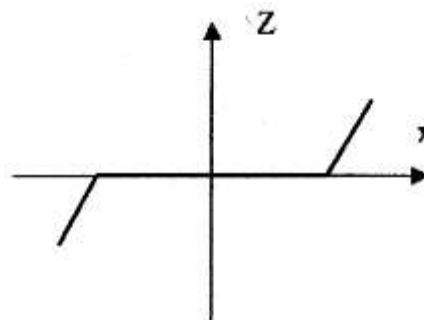
### *Типові нелінійності*

В першій частині для лінійних систем ми розглядали типові елементарні ланки – «алфавіт лінійних систем». Аналогічний «алфавіт» існує і для статичних нелінійностей.

Довільну статичну нелінійність можна скласти з типових.

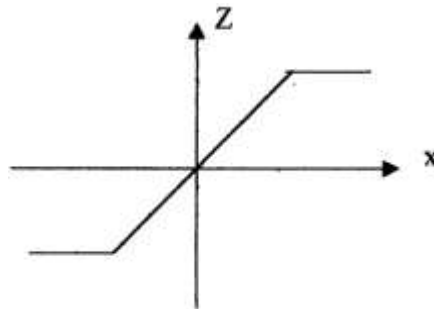
Вибір „типових” нелінійностей базується на практиці – типовими вважаються ті нелінійності, що найчастіше зустрічаються в інженерній практиці. Розглянемо послідовно ці типові нелінійності.

1) "Зона нечутливості".



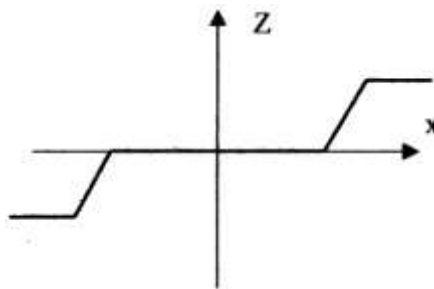
Такими характеристиками володіють деякі схеми електричних, магнітних та гідравлічних підсилювачів в області малих вхідних сигналів.

2) "Обмеження" (або "насичення").



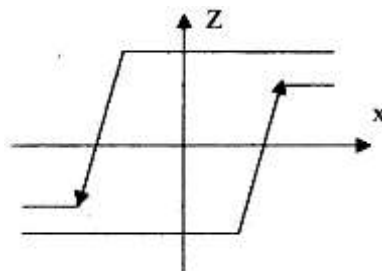
Подібними характеристиками володіють практично всі реальні підсилювачі, обмежені в області великих вхідних сигналів по потужності.

3) "Обмеження з зоною нечутливості".



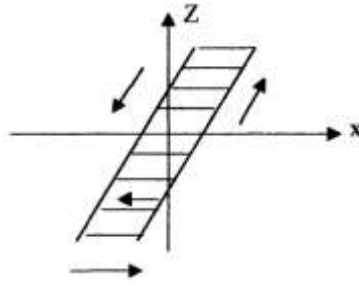
При малих вхідних сигналах ланка поводить себе подібно до ланки типу "зони нечутливості", а при великих – ланки типу "обмеження".

4) "Гістерезис".



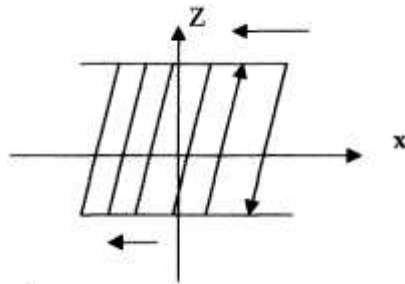
Двохпозиційне, трьохпозиційне реле з гістерезисом.

5) "Люфт".



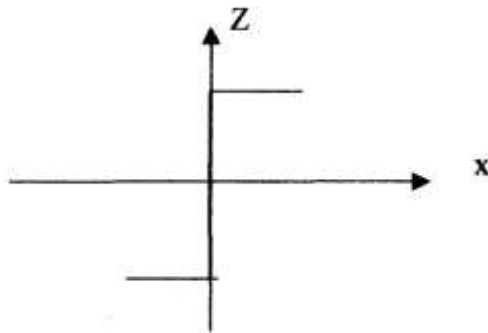
Найбільш часто зустрічаються в механічних системах та пов'язані з наявністю зазорів в системі передачі (кермо автомашини).

6) "Упор".



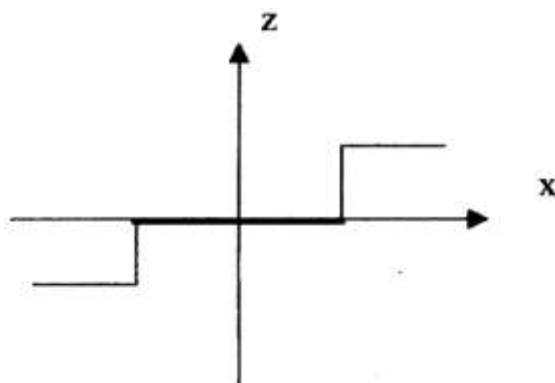
В механічних системах переміщення однієї з частин обмеженої в двох напрямках, при цьому ведуча частина може необмежено переміщуватись.

7) "Релейна характеристика".



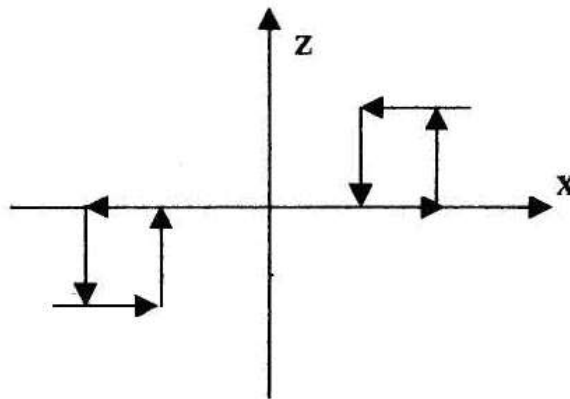
Досконале поляризоване реле.

8) "Релейна зона нечутливості".



Трьохпозиційне реле з зоною нечутливості.

9) "Релейна характеристика з гістерезисом".



Трьохпозиційне реле з зоною нечутливості та з гістерезисом.

## 6.2 З'єднання нелінійних ланок

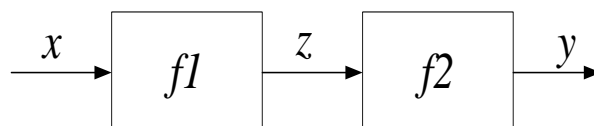
Типові нелінійні ланки і їх нормовані характеристики були введені Л.С. Гольдфарбом в 1947 році. З типовими нелінійними ланками і їх характеристиками можна оперувати подібно тому, як ми це робили з елементарними лінійними ланками.

Згадаємо типові з'єднання для лінійних ланок:

1. Послідовне.
2. Паралельне.
3. Зворотній зв'язок.

Спробуємо отримати вирази для характеристик таких же з'єднань нелінійних ланок.

### 1) Послідовне з'єднання.



$$z = f_1(x); \quad y = f_2(z); \quad \boxed{y = f_2\{f_1(x)\}}.$$

Наприклад:  $f_1 = \cos(x); \quad f_2 = \sin(x);$   
 $y = \sin(\cos(x)).$

Між іншим, якщо для лінійних систем:

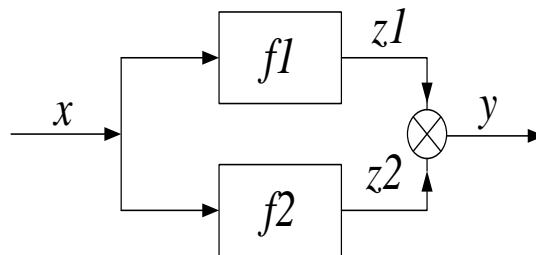
$$W_1(s) \cdot W_2(s) = W_2(s) \cdot W_1(s),$$

то для нелінійних систем:

$$f_1\{f_2(x)\} \neq f_2\{f_1(x)\}.$$

в загальному випадку.

## 2) Паралельне з'єднання.



$$z_1 = f_1(x); \quad z_2 = f_2(x); \quad y = z_1 + z_2;$$

$$\boxed{y = f_1(x) + f_2(x)}.$$

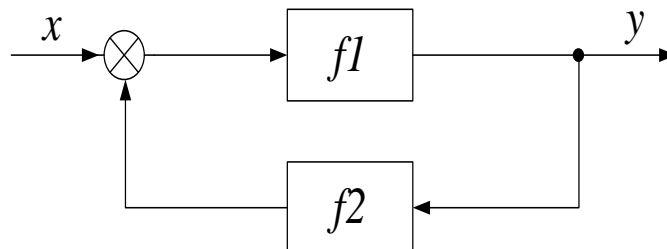
Наприклад:  $f_1 = \cos(x)$ ;  $f_2 = \sin(x)$ ;  
 $y = \cos(x) + \sin(x)$ .

Порівняйте з лінійними системами:

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s).$$

## 3) З'єднання зі зворотнім зв'язком.

Малюємо схему з'єднання зі зворотнім зв'язком (33).

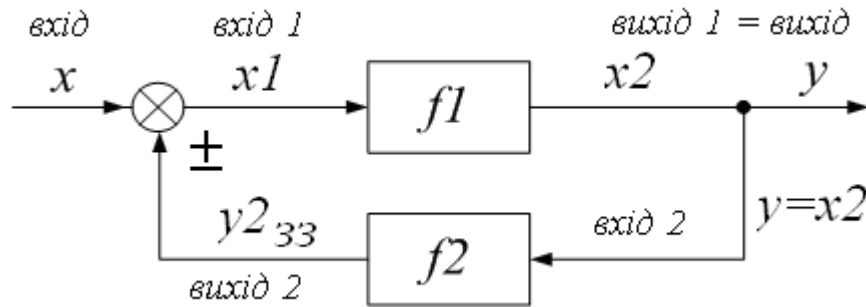


де  $f1, f2$  – нелінійні оператори.

Запишемо передаточну функцію для лінійної системи із 33:

$$W_{33}(s) = \frac{W_1(s)}{1 \mp W_1(s) \cdot W_2(s)}.$$

Задача



Запишемо передаточні функції (рівняння руху):

$$f1 = \frac{y}{x1} \Rightarrow y = x1 \cdot f1. \quad (6.1)$$

$$x1 = x \pm y2_{33}. \quad (6.2)$$

$$f2 = \frac{y2_{33}}{x2} = \frac{y2_{33}}{y} \Rightarrow y2_{33} = y \cdot f2. \quad (6.3)$$

Підставимо (6.2) та (6.3) в (6.1), отримаємо:

$$\begin{cases} y = x1 \cdot f1, \\ x1 = x \pm y2_{33}, \\ y2_{33} = y \cdot f2. \end{cases} \Rightarrow y = (x \pm y2_{33}) \cdot f1 = (x \pm y \cdot f2) \cdot f1. \quad (6.4)$$

Зведемо подібні в (6.4):

$$\begin{aligned} y &= (x \pm y \cdot f2) \cdot f1, \\ y &= x \cdot f1 \pm y \cdot f1 \cdot f2, \\ y \mp y \cdot f1 \cdot f2 &= x \cdot f1, \end{aligned}$$

$$y(1 \mp f1 \cdot f2) = x \cdot f1. \quad (6.5)$$

Тоді з (6.5) за означенням передаточної функції отримаємо передаточну функцію нелінійної системи при з'єднанні зі зворотнім зв'язком:

$$\boxed{f_{33} = \frac{y}{x} = \frac{f1}{1 \mp f1 \cdot f2}} \quad (6.6)$$

"-" :  $x1 = x + y2_{33}$  – додатній 33;

"+" :  $x1 = x - y2_{33}$  – від'ємний 33.

### 6.3 Методи фазового простору

Методи фазового простору – це сукупність кількісних і якісних, аналітичних і графічних методів аналізу і синтезу нелінійних САУ найрізноманітніших типів.

У більшості випадків нелінійна динамічна система (НДС) може бути подана у формі Коші:

$$\boxed{\dot{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x}, \bar{U}, \bar{V}, t)}, \quad (6.7)$$

де  $\bar{x}$  –  $n$ -мірний вектор стану;

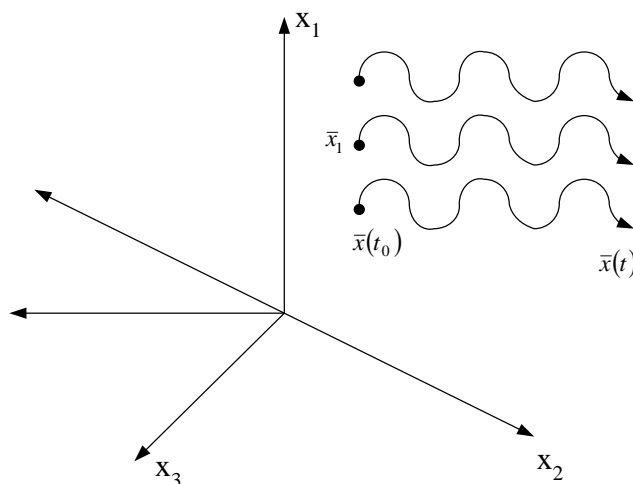
$\bar{U}$  –  $m$ -мірний вектор управління;

$\bar{V}$  –  $p$ -мірний вектор збурень;

$\bar{F}$  –  $n$ -мірний вектор нелінійних функцій.

Обмежимося поки розглядом НДС при  $\bar{U}$  та  $\bar{V}$  заданих функціях часу.

З теорії диференціальних рівнянь відомо, що при заданих початкових умовах  $x(t_0)$  та при заданих  $\bar{U}(t)$ ,  $\bar{V}(t)$  отримаємо деякий єдиний розв'язок рівняння (6.1). Цей розв'язок можна подати деякою траєкторією у просторі змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .



рівнянь (1) час.

Геометричне місце таких точок дає траєкторію процесу у просторі станів.

Якщо  $\bar{U}, \bar{V}$  не залежать від часу, то можна розглядати процеси у фазовому просторі без урахування часу, тільки в аспекті зв'язку між координатами.

Для того, щоб перейти до фазових траєкторій, виключимо із системи



Тоді фазова траєкторія буде описуватись системою із  $(n-1)$  рівнянь:

Зображення процесів у фазовому просторі знайшло найбільш широке розповсюдження для систем 2-го порядку. У цьому випадку фазовий простір зводиться до фазової площини.

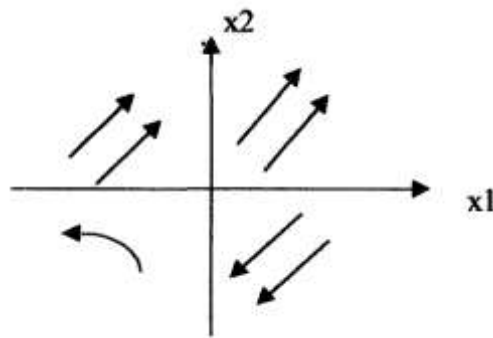
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \psi_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \psi_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad \boxed{\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\psi_2(x_1, x_2)}{\psi_1(x_1, x_2)} = F(x_1, x_2).}$$

### 6.3.1 Властивості фазових траєкторій

1) Фазові траєкторії не перетинаються якщо  $\psi_1$  і  $\psi_2$  однозначні і закінчуються при  $t \rightarrow \infty$  в нескінченності або в особливих точках.

В окремому випадку  $\dot{x}_1 = x_2$  (тобто  $x_1$  – координата,  $x_2$  – швидкість) фазові траєкторії мають наступні властивості.

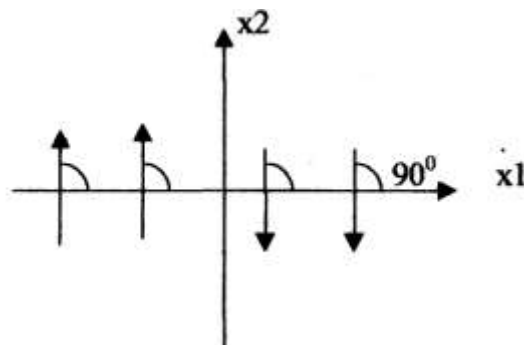
2) В верхній напівплощині фазові траєкторії відхиляються вправо, а в нижній – вліво.



*Доведення*

Точка на фазовій траєкторії, що відповідає миттєвим значенням  $x_1$ ,  $x_2$  — зображуюча. З часом ця точка переміщується по фазовій траєкторії, причому напрямок її переміщення визначається тим, що час зростає, тобто  $dt > 0$ .

Тому у верхній напівплощині, де  $x_2 > 0$  зображуюча точка рухається зліва направо ( $dx_1 > 0$ ), а в нижній — справа наліво  $dx_1 < 0$ .



*Доведення*

Нехай  $x_1$  — досліджувана величина (координата),  $x_2 = \frac{dx_1}{dt}$  — швидкість її зміни в часі. При  $dt \rightarrow \infty$  отримаємо, що  $x_2 \rightarrow 0$ , тобто

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, 0).$$

Наприклад, маємо деяке диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = f\left(\frac{dx_1}{dt}, x_1\right),$$

тоді:

$$f\left(\frac{dx_1}{dt}, x_1\right) = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{dx_1}{dt}\right)}{dt} = \left[x_2 = \frac{dx_1}{dt}\right] = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} = x_2 \cdot \frac{dx_2}{dx_1}.$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f\left(\frac{dx_1}{dt}, x_1\right)}{x_2} = \frac{f(x_2, x_1)}{x_2}.$$

$$x_2 \cdot dx_2 = f(x_2, x_1) \cdot dx_1.$$

При  $x_2 = 0$ , отримаємо:

$$f(x_2, x_1) \cdot dx_1 = 0.$$

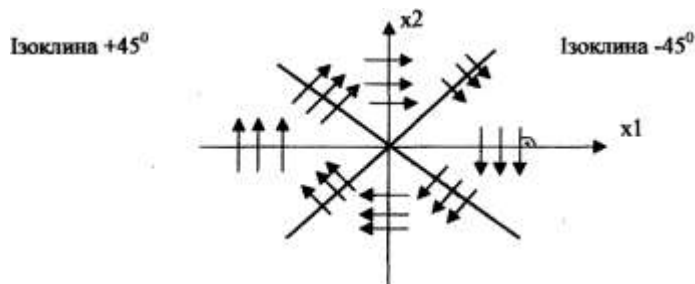
Розглянемо рівняння  $f(x_2, x_1) = 0 \Rightarrow f(0, x_1) = 0$ .

Отже, фазова траєкторія повинна перетинати  $x_1$  (рухаючись по еліптичних траєкторіях) під кутом  $90^\circ$

Серед точок фазової траєкторії виділяють так звані особливі точки (стаціонарні, нерухомі). Особливі точки відповідають положенням рівноваги систем управління, що використовуються, так як в цих точках  $x_1 = const, x_2 = 0$ .

Ізоклиною – називається геометричне місце точок з однаковим кутом нахилу інтегральних кривих ( $\frac{dx_2}{dx_1} = const$ ).

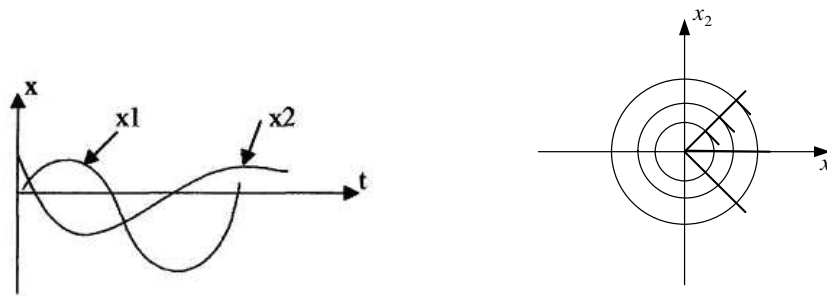
Ізоклини полегшують побудову фазових траєкторій.



Приклад:

$$x_1 = A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

$$x_2 = A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t).$$



### 6.3.2 Класифікація особливих точок

Класифікація особливих точок представлена на рис. 6.1.


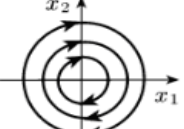
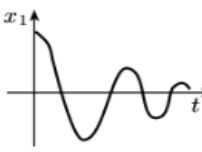
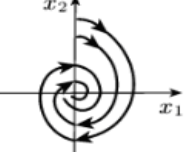
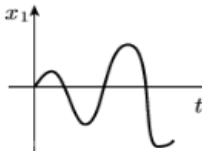
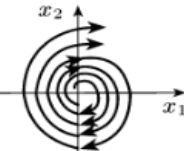
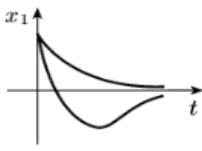
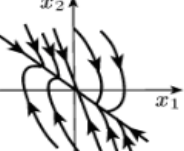
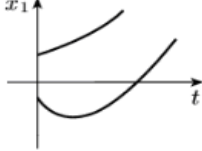
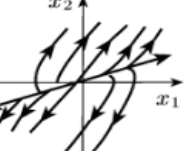


Тип коренів	Крива перехідного процесу	Фазовий портрет	Тип особливої точки
Чисто уявні			Центр
Комплексні з від'ємною дійсною частиною			Стійкий фокус
Комплексні з додатною дійсною частиною			Нестійкий фокус
Дійсні від'ємні			Стійкий вузол
Дійсні додатні			Нестійкий вузол
Дійсні різних знаків			Сідло

Рисунок 6.1 – Класифікація особливих точок

## 6.4 Стійкість нелінійних систем

У першій частині ТАУ ми отримували необхідну і достатню умову стійкості лінійних динамічних систем. Усі корені характеристичного рівняння системи повинні бути „лівими”.

Для імпульсних лінійних систем корені повинні лежати всередині одиничного кола. Для нелінійних САУ таких простих і загальних критеріїв та методів аналізу стійкості немає. Для нелінійних систем існує багато часткових методів. І один загальний – це другий метод Ляпунова. Особливість другого методу – треба кожного разу конструювати функцію Ляпунова. Перейдемо до розгляду цього методу.

### 6.4.1 Другий метод Ляпунова

Дано: динамічна система;  
 $\dot{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x})$ ,  
 $\bar{x}$  -  $n$ -мірний вектор стану;  
 $\bar{F}$  -  $n$ -мірна вектор-функція.

У загальному випадку маємо:

$$\bar{\varphi}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) = 0.$$

Для такої довільної динамічної системи є справедливими дві теореми Ляпунова. Запишемо їх у канонічному формулюванні Ляпунова.

#### Теорема 1

Якщо існує знаковизначена функція  $V(x_1, \dots, x_n)$ , похідна якої по часу

$$W = \frac{dV}{dt}, \text{ в силу диференціальних рівнянь руху є або}$$

знакопостійна функція протилежного з  $V$  знаку, або ж тотожно дорівнює 0,

то незбурений рух є стійким.

Довідка.

**Знакопостійна функція:** функція  $V$  називається знакопостійною на множині, якщо вона приймає недодатні або невід’ємні значення і може дорівнювати нулю не лише в одній точці  $x=0$ . (В першому випадку функція називається від’ємно постійною, в другому – додатньо постійною).

**Знакозмінна функція:** функція  $V$  називається знакозмінною на множині, якщо вона в цій області приймає як від’ємні так і додатні значення.

### Теорема 2.

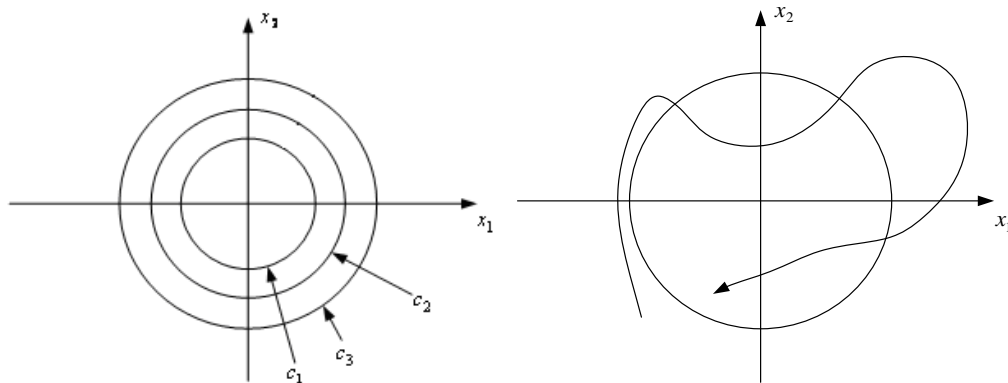
Якщо крім того, функція  $W$  знаковизначена (тобто не має нульових точок  $F(x)=0$ ),

то незбурений рух стійкий асимптотично.

Я думаю, ви зможете за допомогою графіків та схем самостійно дати визначення знакопостійної і знаковизначеної функції.

Зрозуміти зміст функції Ляпунова можна за допомогою раніше розглянутого фазового простору.

Намалюємо фазові траєкторії і лінії постійного рівня функції Ляпунова,  $V(x_1, x_2) = c = \text{const}$ .



$$c_3 > c_2 > c_1$$

Фазові траєкторії перетинають (пронизують) цю поверхню тільки „ззовні”.

„Фізичний зміст” цієї поверхні – рівні узагальненої потенційної енергії: стійкому стану відповідає мінімум потенційної енергії; стійким процесам відповідають такі, в яких потенційна енергія зменшується (не обов’язково монотонно).

*Функцію Ляпунова треба „вгадати”.*

Тільки для лінійних систем її вид відомий:

$$V = \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \cdot x_k \cdot x_l,$$

або в векторно-матричній формі:

$$V = \bar{X}^T \cdot A \cdot \bar{X},$$

де  $A$  –  $n \times n$  матриця шуканих коефіцієнтів функції Ляпунова.

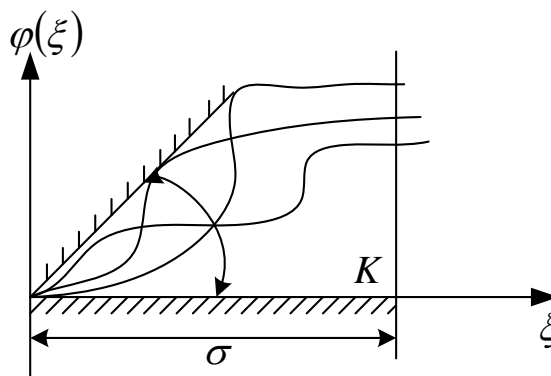
Тоді похідну по часу від функції  $n$ -змінних – в свою чергу, функції часу – ми можемо записати у вигляді суми:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dt}.$$

Для НДС з малими нелінійностями:

$$V = \bar{X}^T \cdot A \cdot \bar{X} + b \int_0^\sigma \varphi(\xi) \cdot d\xi,$$

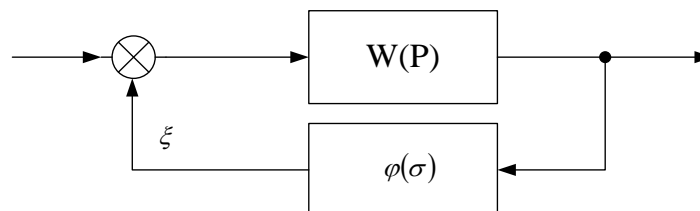
де  $\xi$  – змінна інтегрування,  
 $\varphi(\xi)$  – статична нелінійність класу  $(0, K)$ :



Проводимо дотичну до нелінійності з кутом  $K$ . Нелінійності, які лежать у цьому куті – нелінійності класу  $(0, K)$ .

#### 6.4.2 Абсолютна стійкість. Критерій абсолютної стійкості В. М. Попова

Розглянемо нелінійну САУ, яка складається із лінійної частини і однієї статичної нелінійності (можливо приведеної) наступного вигляду:



- Що таке статична нелінійність?
- Це змінний коефіцієнт зворотнього зв'язку.

Можна розглядати стійкість таких систем для цілих класів нелінійностей. Ці класи можна задати як:

- Нелінійність класу  $(0, K)$ ;
- Нелінійність класу  $(K_1, K_2)$ .

У 1960 році ад'юнкт Московської академії, румунський громадянин В. М. Попов запропонував критерій стійкості таких систем. Цей критерій являє собою конкретизацію 2-го методу Ляпунова і доводиться на основі теорем Ляпунова.

Розглянемо формулювання та інтерпретації критерію Попова.

**Випадок 1: Стійка лінійна частина.**

Для стійкості рівноваги необхідно і достатньо щоб існувало дійсне  $\alpha$ , при якому:

1)  $\boxed{\operatorname{Re} \Pi(j \cdot \omega) > 0}$  (дійсна частина функції Попова), де функція Попова визначається наступним чином:

$$\Pi(j \cdot \omega) = \left[ (1 + j \cdot \alpha \cdot \omega) \cdot W(j \cdot \omega) + \frac{1}{K} \right],$$

так як

$$\boxed{\operatorname{Re} \left[ (1 + j \cdot \alpha \cdot \omega) \cdot W(j \cdot \omega) + \frac{1}{K} \right] > 0}$$

2) нелінійність належить до класу  $(0, K)$ , тобто  $\varphi(\sigma) : (0, K)$ , або.

$$\boxed{0 < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < K}$$

Критерій Попова рідко застосовується в алгебраїчній формі, і часто в геометричній.

**Геометрична інтерпретація критерію Попова**

Введемо  $W^*(j \cdot \omega)$  таку, що

$$\operatorname{Re}[W^*(j \cdot \omega)] = \operatorname{Re}[W(j \cdot \omega)], \quad \operatorname{Im}[W^*(j \cdot \omega)] = \omega \cdot \operatorname{Im}[W(j \cdot \omega)].$$

Нехай:

$$W(j \cdot \omega) = U(\omega) + j \cdot V(\omega).$$

Тоді згідно визначенню:

$$W^*(j \cdot \omega) = \underbrace{U(\omega)}_{U^*(\omega)} + \underbrace{j \cdot \omega \cdot V(\omega)}_{V^*(\omega)}.$$

Виразимо  $\Pi(j\omega)$  через  $W^*(j \cdot \omega)$ :

$$\operatorname{Re} \left[ (1 + j \cdot \alpha \cdot \omega) \cdot W(j \cdot \omega) + \frac{1}{K} \right] = \left( U(\omega) - \alpha \cdot \omega \cdot V(\omega) + \frac{1}{K} \right) > 0,$$



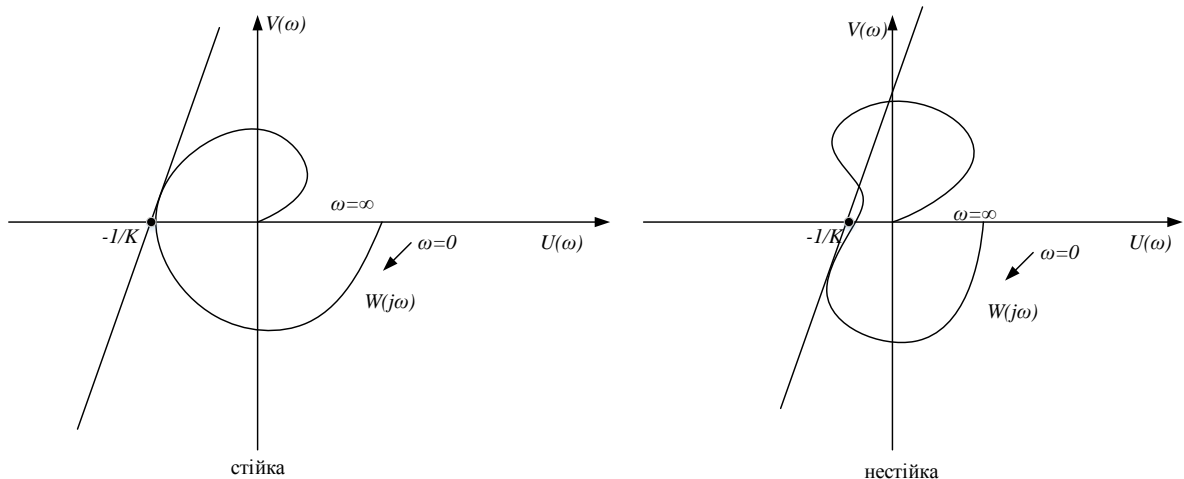
$$\left( U^*(\omega) - \alpha \cdot V^*(\omega) + \frac{1}{K} \right) > 0.$$

Нехай  $U^*(\omega)$ ,  $V^*(\omega)$  – будь-які (не належать  $W^*(j \cdot \omega)$  точки комплексної площини, тоді граничному випадку нерівності  $U^*(\omega) - \alpha \cdot V^*(\omega) + \frac{1}{K} = 0$  відповідає пряма з нахилом  $\alpha$ , що проходить через точку  $\left(-\frac{1}{K}\right)$  на дійсній вісі.

Таким чином, критерій Попова може бути сформульований наступним чином:

НСАУ зі стійкою та цілком керуємою лінійною частиною абсолютно стійка у класі статичних нелінійних характеристик  $(\theta, K)$ , якщо через точку  $\left(-\frac{1}{K}\right)$  на дійсній вісі комплексної площини  $U^*(\omega)$ ,  $V^*(\omega)$  можна провести пряму так, щоб перетворена частотна характеристика  $W^*(j \cdot \omega)$  лежала б праворуч від цієї прямої.

Геометрично розглянутий критерій виглядає так:



## **Випадок 2: Нестійка лінійна частина СРС!**

### Контрольні питання

1. Визначення поняття стійкості по Ляпунову.
2. Необхідна і достатня умови стійкості лінійних динамічних систем.
3. Формулювання критерія Найквіста.

4. Намалюйте, не роздумуючи, АЧХ та ФЧХ елемента запізнення
5. Визначення запасів стійкості по фазі, по амплітуді.
7. Що таке "граничне запізнення" і як його визначити?
8. Намалюйте, не роздумуючи, АФЧХ системи з граничним запізненням
9. Намалюйте на АФЧХ запаси стійкості по фазі і амплітуді.
10. Намалюйте на АЧХ та ФЧХ запаси стійкості по фазі і амплітуді.
11. Наведіть приклади з практики, де має місце запізнення.

## 7 АНАЛІЗ І СИНТЕЗ ТЕРМІНАЛЬНИХ САУ

*Термінальне управління – УКС (управління кінцевим станом).*

*Задачі термінального управління – одне з джерел варіаційного числення, яке традиційно вважається незбагненим для більшості смертних і дається тільки в університетах.*

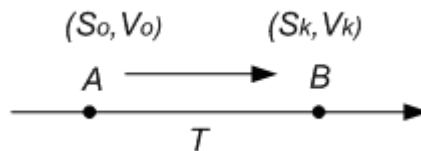
Розглянемо один з можливих підходів до побудови простих систем термінального управління. Основа даного підходу – *управління по вищій похідній*.

Історія виникнення та застосування управління по вищій похідній достатньо драматична. Метод розроблений та застосовувався в реальних системах в СРСР. Монографія по цьому методу не була опублікована, оскільки його „недоліком” була **простота** (як вважали респонденти). Потім цей метод був запатентований в США (Сміт, Метклаф) і застосований в системі управління вертикально злітаючим літаком „Харієр” в Англії, тоді і була вперше опублікована книга А.П. Батенко „Управление конечным состоянием объектов” на Україні.

### 7.1 Класифікація задач термінального управління

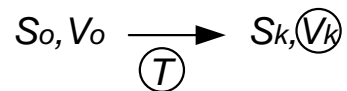
Розглянемо класифікацію на прикладі простої задачі управління рухом матеріальної точки по прямій. Звичайно, класифікація застосовується і для будь-яких багатомірних задач.

Нам потрібно об’єкт з т. А перемістити т. В за Т - час переходу:



1. Задача розгону.

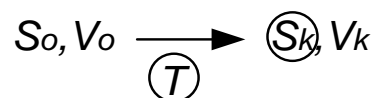
Умовно зображується:



Через час Т потрібно отримати необхідну швидкість. Якщо Т фіксується, то задача розгону замкнена, якщо Т- час не фіксований, то задача розімкнена.

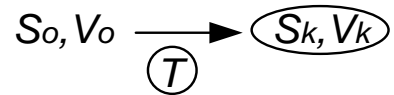
2. Задача приведення.

Контролюється тільки координата.



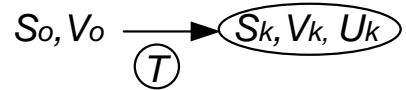
3. Задача зближення.

Зафіксували  $S_k, V_k$ .



4. Задача м'якого зближення.

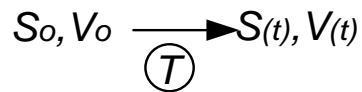
$U_k$  - прискорення.



5. Задача супроводження.

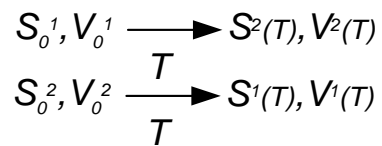
Кінцеві координати змінюються по певному закону.

(Приклад: робот закручує гайку на автомобілі, який рухається по конвеєру, тобто робот супроводжує автомобіль).



6. Задача зустрічі.

Приклад: дворукий робот (рух рук); зближення космічних кораблів, коли обидва активні.



## 7.2 Постановка задачі термінального управління

Будемо розглядати одновірну задачу.

1) Рівняння динаміки об'єкта (рух об'єкта вздовж вісі  $S$ ) розглянемо у вигляді:

$$U = \frac{1}{m} \cdot \left[ \sum_{k=1}^k F_{упр.} - \sum_{l=1}^l F_{збур.} \right], \quad \dot{S} = V$$

(порівняйте з законом Н'ютона:  $m \cdot U = \sum F$ ),

де  $m$  – маса об'єкта;

$\sum F_{упр.}$  – сума проекцій на вісь  $S$  керованих сил, що викликані взаємодією керуючих органів із зовнішнім середовищем і тягою (впливом) двигунного пристрою;

$\sum F_{збур.}$  – сума проекцій на вісь  $S$  некерованих сил, що викликані дією зовнішнього середовища.

2) Припустимо, що виконується необхідна умова керованості:

$$\sum_{k=1}^k F_{\text{упр.}} > \sum_{l=1}^l F_{\text{збур.}}, \text{ для всіх } t=[0, T] \text{ період переходу.}$$

3) В якості керуючого впливу вибираємо вищу похідну. В даному випадку  $U(t)$  – прискорення. В цьому і полягає основна суть запатентованого методу управління по вищій похідній.

4) Управління шукаємо у вигляді полінома від  $t$

$$U_T(t) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \cdot t^i,$$

де  $U_T(t)$  – необхідне управління;

$n$  – кількість граничних умов;

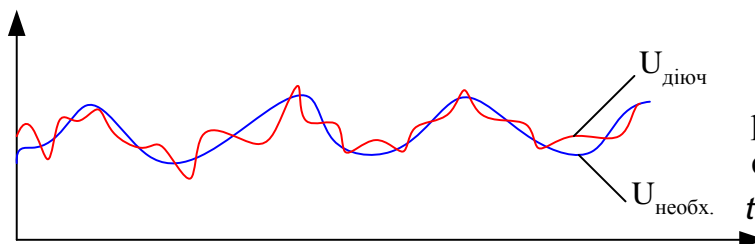
$c_i$  – шуканий коефіцієнт.

Наприклад, для  $n=4 \Rightarrow U_T(t) = c_0 + c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^2 + c_3 \cdot t^3$ .

Кількість доданків в  $U_T(t)$  беремо рівною кількості граничних умов для того, щоб отримати єдиний розв'язок.

1) Припустимо, що керуючий вплив – прискорення, створюється за допомогою достатньо точної і швидкодіючої слідкуючої системи так, що

$$U_T(t) = U_{\text{діюче}}(t)$$



$$U_{\text{діюче}} \neq U_{\text{необх.}}$$

Щоб виконувалась рівність, необхідно, щоб система була слідкуючою.

### 7.3 Розв'язання задачі розгону

Нехай початкова швидкість об'єкту  $V_0$ . Необхідно за час  $T$  розігнати його до швидкості  $V_k$ :

$$S_0, V_0 \xrightarrow{\textcircled{T}} S_k, \textcircled{V_k}$$

(7.1)

1. При одній граничній умові  $n=1$  управління набуде виду:

$$U_T(t) = c_0.$$

2. Інтегруємо рівняння руху:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{V} = U \\ \dot{S} = V \end{array} \right| \begin{array}{l} \dot{V} = c_0 \\ V(t) = V_0 + c_0 \cdot t \end{array} \quad (7.2)$$

Рівняння для  $S$  не знадобиться.

3. Підставляємо  $t=T$

$$V(T) = V_0 + c_0 \cdot T.$$

За означенням,  $V(T) = V_k$  звідки бачимо, що

$$c_0 = \frac{V_k - V_0}{T} \quad (7.3)$$

Це кінцевий результат в першому наближенні. Таким чином, вирішили задачу розгону:

$$U_T = c_0 = \frac{V_k - V_0}{T} \quad (7.4)$$

Постійне прискорення, яке будучи прикладеним до об'єкту, за час  $T$  розгонить його до швидкості  $V_k$ .

Однак такий спосіб управління є програмним ( $U = f(t)$ ) розімкненим по управляючій фазовій координаті  $V$ , він не враховує помилок, які з'являються в процесі. Необхідний обернений зв'язок ( $U = f(x_1, x_2, \dots)$ ). Таким чином, вирішивши проблему термінального управління – ми створили нову проблему – проблему введення зворотнього зв'язку.

4. Введення зворотнього зв'язку.

Будемо вважати поточний фазовий стан об'єкта початковим, тому в (7.4)  $V_0$  замінимо на поточну швидкість  $V(t)$ , а заданий час розгону  $T$  – на залишившийся час  $T - t$ , де  $t$  відліковується з моменту початку розгону. Отримаємо закон управління з оберненим зв'язком:

$$U_T = \frac{V_k - V(t)}{T - t} \quad (7.5)$$

Закон управління з оберненим зв'язком (7.5) володіє особливістю в кінцевій точці  $t=T$ . В кінцевий момент ( $t=T$ ) – помилка кінцевого стану. Управління, необхідні для виправлення помилки, зростають з часом. При

$t \rightarrow T \Rightarrow U_T \rightarrow \infty$ . Таким чином, виникає чергова проблема – *проблема усунення особливості*.

Що ж це виходить – вирішили проблему, а виникла інша, це випадковість чи закономірність?

Давайте познайомимося із загальними закономірностями.

#### 4.1 Методологія рішення проблем (МРП).

Можливі три шляхи позбавлення від проблеми:

1) Ліквідування проблеми – зняття проблемної ситуації шляхом зміни початкового цілеспрямування, тобто зміни початкової мети.

2) Розв'язання проблеми – ліквідування проблемної ситуації шляхом використання однієї з можливих альтернатив впливів.

3) Вирішення проблеми – вибір з набору припустимих альтернатив впливів тієї, яка приводить до оптимального або до бажаного стану.

Рішення проблеми вимагає знання:

- а) набору припустимих альтернатив – рішень;
- б) оцінки наслідків їх прийняття;
- в) класифікації і (або) упорядкування припустимих альтернатив на підмножини не задовільних і задовільних.

При формуванні та рішенні важливих проблем корисно знати їх загальні закономірності, зокрема, закони "методології рішення проблеми" (МРП) Е. Шейля:

1-й закон МРП: будь – який розв'язок проблеми створює ще одну нову, що призводить до лавиноподібного росту кількості проблем і викликає бажання взагалі їх не розв'язувати.

2-й закон МРП: будь – який не розв'язок призводить до того, що розв'язок буде знаходитись спонтанно, тобто стихійно (випадково).

3-й закон МРП: за сумою проблем, як правило, існує одна велика, центральна проблема, а всі інші проблеми є тільки симптомами цієї центральної проблеми.

Наслідок 1. Лише системний підхід дозволяє за окремими проблемами побачити центральну.

Наслідок 2. Виявлення центральної проблеми та пошук її розв'язку – оптимальний шлях в методиці розв'язку проблем.

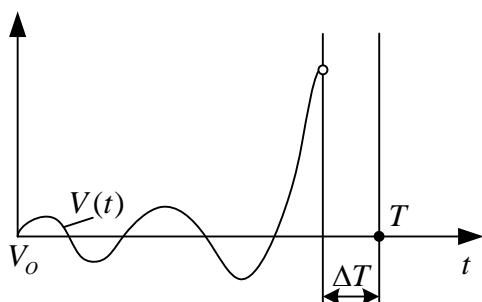
Повернемося до розв'язку проблеми ліквідування особливості.

#### 5. Ліквідація особливості.

*Альтернативи усунення особливості.*

Розглянемо наступні альтернативи усунення особливості:

5.1. Якщо вимоги до точності управління не дуже жорсткі, то можна вважати розгін виконаним, не доходячи до кінцевої точки інтервалу  $[0, T]$  на малу величину  $\Delta T$ . Помилка розгону при цьому буде дорівнювати:

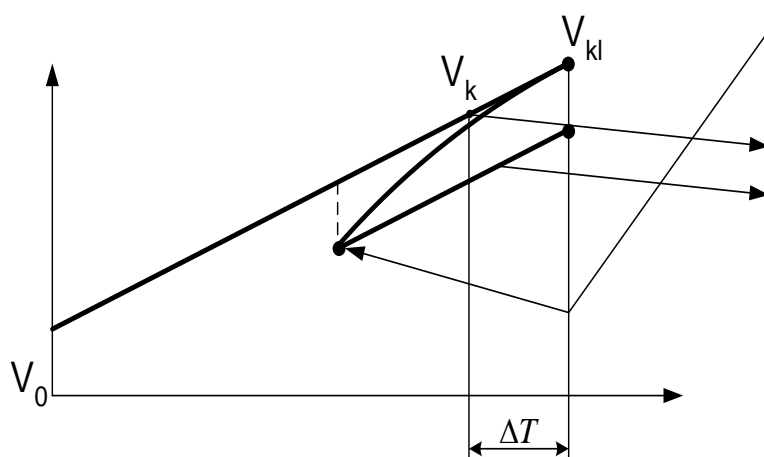


Відключення системи управління, тобто  $U_T(t)=0$  для будь-якого  $t$ , де  $t > (T - \Delta T)$ .

5.2. При другому способі інтервал  $[0, T]$  необхідно розбити на дві нерівних ділянки:  $[0, T_1]$  і  $[T_1, T]$ . На більшій з них  $[0, T_1]$  слід використати закон управління (5) зі зворотнім зв'язком. На заключній, короткій ділянці  $[T_1, T]$  застосовується програмне управління (4). Практично це робиться так. В момент часу  $T_1 = T - \Delta T$  задане прискорення фіксується і в подальшому підтримується незмінним впродовж залишкового часу руху  $\Delta T$ .

$U_T(t) = U_T(T - \Delta T)$ , для будь-якого  $T$ , де  $t > (T - \Delta T)$  – фіксація управління, починаючи з деякого моменту  $(T - \Delta T)$ .

5.3. В третьому способі кінцева фазова точка, яка задається в якості мети управління в законі (5), виноситься за межі ділянки  $[0, T]$  на величину  $\Delta T$  секунд і розташовується на продовженні фазової траєкторії, яка з'єднує точки  $[V_0]$  і  $[V_k]$ . Ця винесена точка  $[V_{kl}]$  відноситься до моменту часу  $T + \Delta T$ . Об'єкт, рухаючись до неї, при  $t = T$  пройде через точку  $[V_k]$ , яка є метою управління.



1. Нехай по якій-небудь причині виникла помилка.
2. Виправлення помилки із 33.
3. Рух об'єкту з прискоренням по програмному режиму.

В четвертому способі кінцева точка  $[V_k]$  не виноситься за межі ділянки  $[0, T]$ , а робиться рухомою і розташовується попереду зображуючої фазової точки об'єкту на часовому інтервалі  $\Delta T$ . Таким чином,



реалізується погоня об'єкту за рухомою фазовою точкою. (Приклад: змагання собак (тікаючий заєць); керування конем без вожжей).

Нехай необхідно перевести об'єкт зі стану  $[V_0]$  в стан  $[V_k]$ . За формулою (10.4) обчислимо задане на ділянці  $[0, T]$  прискорення і використаємо його для обчислення заданої програми руху, тобто поточної швидкості ведучої точки С на ділянці  $(t, t + \Delta T)$ .

$$V_c = V_0 + \frac{V_k - V_0}{T} \cdot (t + \Delta T) \quad (7.6)$$

Закон управління (5) прийме форму:

$$U_T = \frac{V_c - V(t)}{\Delta T} \quad (7.7)$$

$(T - t) \rightarrow \Delta T$  – жорсткість управління.

Підставимо в (7) вираз для  $V_c$  (6), приводимо закон управління (5) до виду:

$$U_T = \underbrace{k_0 + k_1 \cdot t}_{\text{програмні складові}} + \underbrace{k_v \cdot V}_{33} \quad (7.8)$$

Від звичайного закону управління термінальне управління відрізняється наявністю програмних складових

$$k_0 = \underbrace{\frac{V_k - V_0}{T}}_{c_0} + \frac{V_0}{\Delta T} = \frac{V_0}{\Delta T} + c_0;$$

$$k_1 = \frac{V_k - V_0}{T \cdot \Delta T} = \frac{c_0}{\Delta T};$$

$$k_v = -\frac{1}{\Delta T}.$$

(“–“ зворотній від'ємний зв'язок).

Точка, яку ведуть (ведома) повторює рух точки, що веде (ведуча) з запізнюванням по часу на  $\Delta T$  секунд.

Чим менше  $\Delta T$ , тим швидше виходить об'єкт на задану фазову траєкторію ( $\Delta T$  – величина часового інтервалу між точками – жорсткість управління).

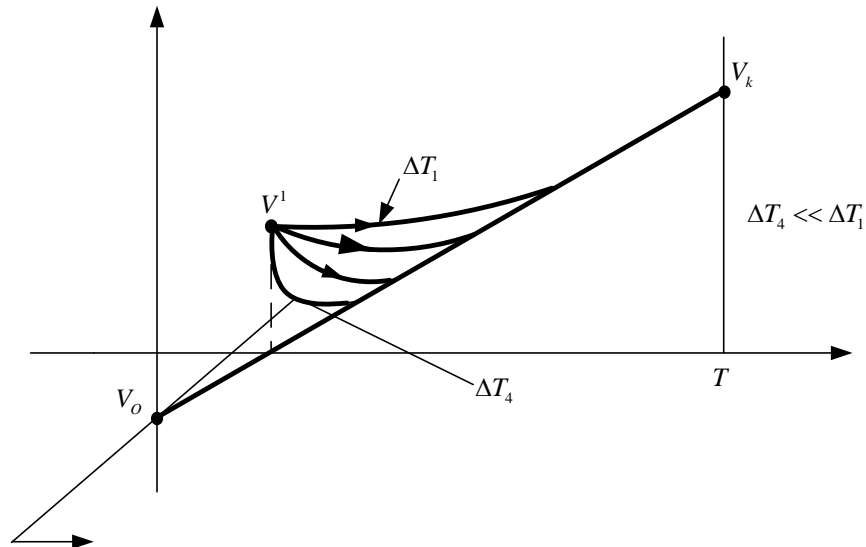


Рисунок 7.1 – Аналіз жорсткості управління

$(V_o; V_k)$  – фазова траєкторія руху об'єкта;

$V^1$  – виникла помилка (відхилення координат від заданої траєкторії); чим менше жорсткість управління  $\Delta T$ , тим швидше повертається об'єкт на задану траєкторію, але при цьому необхідно прикласти більше прискорення;

$\Delta T$  – слід вибирати так, щоб  $|U| \leq U_{\max}$ .

#### 7.4 Розв'язання задачі приведення

*Будемо слідувати порядку роз'язання задачі розгону!*

Задача приведення:

$$S_o, V_o \xrightarrow{\textcircled{T}} \textcircled{S_k}, V_k$$

Необхідно привести об'єкт в точку з координатою  $S_k$  в момент часу  $T$ . На кінцеву швидкість умов не накладається:

1. Кількість граничних умов:

$$n=1 \rightarrow U_T = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot t^i = c_0. \quad (7.9)$$

2. Інтегруємо рівняння руху:

$$\frac{dV}{dt} = U_T = c_o; \quad \frac{dS}{dt} = V;$$

$$\begin{aligned}
 V &= V_0 + c_0 \cdot t; \\
 S &= S_0 + V_0 \cdot t + \frac{c_0 \cdot t^2}{2}
 \end{aligned}
 \tag{7.10}$$

3. Підставляємо  $t = T$

$$\begin{aligned}
 S_k &= S_0 + V_0 \cdot T + \frac{c_0 \cdot T^2}{2} \\
 c_0 &= \frac{2 \cdot (S_k - S_0)}{T^2} - \frac{2 \cdot V_0}{T}
 \end{aligned}
 \tag{7.11}$$

вираз для  $U_T$  (необхідне прискорення).

4. Введення зворотнього зв'язку.

Робимо заміну:

$$\begin{aligned}
 V_o &\rightarrow V; \\
 S_o &\rightarrow S; \\
 T &\rightarrow (T - t) \\
 U_T &= \frac{2 \cdot (S_k - S)}{(T - t)^2} - \frac{2 \cdot V}{T - t}
 \end{aligned}
 \tag{7.12}$$

закон управління з урахуванням зворотнього зв'язку.

5. Ліквідуємо особливість.

Робимо заміну:

$$\begin{aligned}
 V_k &\rightarrow V_c; \\
 S_k &\rightarrow S_c; \\
 (T - t) &\rightarrow \Delta T \\
 U_T &= \frac{2 \cdot (S_c - S)}{\Delta T^2} - \frac{2V}{\Delta T},
 \end{aligned}
 \tag{7.13}$$

де

$$S_c = S_0 + V_0 \cdot (t + \Delta T) + \frac{c_0 \cdot (t + \Delta T)^2}{2}
 \tag{7.14}$$

Після алгебраїчних перетворень отримуємо

$$\begin{aligned}
U_T &= \frac{2 \cdot \left( S_0 + V_0 \cdot (t + \Delta T) + \frac{c_0 \cdot (t + \Delta T)^2}{2} - S \right)}{\Delta T^2} - \frac{2V}{\Delta T} = \frac{2S_0 + 2V_0 \cdot (t + \Delta T) + c_0 \cdot (t + \Delta T)^2}{\Delta T^2} - \frac{2V}{\Delta T} = \\
&= \frac{2S_0}{\Delta T^2} - \frac{2S}{\Delta T^2} - \frac{2V}{\Delta T} + \frac{2V_0 \cdot t + 2V_0 \cdot \Delta T}{\Delta T^2} + \frac{c_0 \cdot t^2 + 2c_0 \cdot t \cdot \Delta T + c_0 \cdot \Delta T^2}{\Delta T^2} = \\
&= \left( c_0 + \frac{2V_0}{\Delta T} + \frac{2S_0}{\Delta T^2} \right) + \left( \frac{2V_0}{\Delta T^2} + \frac{2c_0}{\Delta T} \right) \cdot t + \left( \frac{c_0}{\Delta T^2} \right) \cdot t^2 + \left( \frac{-2}{\Delta T} \right) \cdot V + \left( -\frac{2}{\Delta T^2} \right) \cdot S.
\end{aligned}$$

$$U_T = \underbrace{k_0 + k_1 \cdot t + k_2 \cdot t^2}_{\text{програми складові}} + \underbrace{k_s \cdot S + k_v \cdot V}_{\text{зворотній зв'язок}} \quad (7.15)$$

$$k_0 = c_0 + \frac{2 \cdot V_0}{\Delta T} + \frac{2 \cdot S_0}{\Delta T^2};$$

$$k_1 = \frac{2}{\Delta T} \cdot \left( c_0 + \frac{V_0}{\Delta T} \right);$$

$$k_2 = \frac{1}{\Delta T^2} \cdot c_0;$$

$$k_v = -\frac{2}{\Delta T};$$

$$k_s = -\frac{2}{\Delta T^2}.$$

## 7.5 Розв'язок задачі зближення

В задачі розгону ми навчилися керувати швидкістю об'єкта, а в задачі приведення – координатою. Однак, в техніці часто вимагається, щоб швидкість і координата одночасно прийняли б задані значення. В який момент часу це станеться, іноді не так важливо, іншими словами, час може бути некерованим параметром. Ми домовилися називати САУ, побудовані по такому принципу, *розімкненими по часу*. Можна назвати цілий ряд об'єктів, яким необхідні такі САУ: вертольоти, літаки вертикального взльоту та посадки (ЛВВП), космічні літальні апарати (КЛА), поїзди метрополітену і т.п. Літальні апарати повинні проводити м'яку посадку, отже, при дотику до поверхні їх кінцева швидкість повинна стати нульовою. Поїзди метрополітену повинні гальмувати так, щоб зупинитися точно біля платформи.

Однак, в деяких задачах цього не достатньо. Наприклад, в системі управління повітряним рухом необхідно, щоб літаки прибували в призначену точку повітряного простору (початок взлітно-посадочної полоси) з заданою посадковою швидкістю у визначений час. Одночасний вихід двох об'єктів в призначену точку простору для стиковки або

дозаправки також потребує, щоб керуванню піддавались координата, швидкість, час.

Задача зближення:

$$S_0, V_0 \xrightarrow{\textcircled{T}} \textcircled{S_K, V_K}$$

1) Кількість граничних умов:  $n=2$ .

Закон управління буде мати два невідомих параметра:

$$U_T = c_0 + c_1 \cdot t \quad (7.16)$$

2) Інтегруємо рівняння руху:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dV}{dt} = c_0 + c_1 \cdot t; \\ \frac{dS}{dt} = V; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V(t) = V_0 + c_0 \cdot t + \frac{c_1 \cdot t^2}{2}; \\ S(t) = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{c_0 \cdot t^2}{2} + \frac{c_1 \cdot t^3}{6} \end{array} \right. \quad (7.17)$$

3) Підставляємо  $t=T$  в (2):

$$\left. \begin{array}{l} (I) \quad V_K = V_0 + c_0 \cdot T + \frac{c_1 \cdot T^2}{2}; \\ (II) \quad S_K = S_0 + V_0 \cdot T + \frac{c_0 \cdot T^2}{2} + \frac{c_1 \cdot T^3}{6} \end{array} \right\} \quad (7.18)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (10.17) відносно двох невідомих  $c_0$  і  $c_1$ :

$$(I): V_0 + c_0 \cdot T + \frac{c_1 \cdot T^2}{2} - V_K = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{V_K}{T} - \frac{V_0}{T} - \frac{c_1 \cdot T^2}{2T} = \frac{V_K}{T} - \frac{V_0}{T} - \frac{c_1 \cdot T}{2}.$$

$$(II): S_K = S_0 + V_0 \cdot T + \frac{\left( \frac{V_K}{T} - \frac{V_0}{T} - \frac{c_1 \cdot T}{2} \right) \cdot T^2}{2} + \frac{c_1 T^3}{6};$$

$$S_K = S_0 + V_0 \cdot T + \frac{V_K \cdot T - V_0 \cdot T - \frac{c_1 \cdot T^3}{2}}{2} + \frac{c_1 \cdot T^3}{6};$$

$$S_K = S_0 + V_0 \cdot T + \frac{2V_K \cdot T - 2V_0 \cdot T - c_1 \cdot T^3}{4} + \frac{c_1 \cdot T^3}{6};$$

$$S_K = S_0 + V_0 \cdot T + \frac{V_K \cdot T}{2} - \frac{V_0 \cdot T}{2} - \frac{c_1 \cdot T^3}{4} + \frac{c_1 \cdot T^3}{6};$$

$$S_K = S_0 + V_0 \cdot T + \frac{V_K \cdot T}{2} - \frac{V_0 \cdot T}{2} - \frac{c_1 \cdot T^3}{12};$$

$$c_1 = \frac{12S_0}{T^3} - \frac{12S_K}{T^3} + \frac{12V_0}{T^2} - \frac{6V_0}{T^2} + \frac{6V_K}{T^2};$$

$$c_1 = \frac{12 \cdot (S_0 - S_K)}{T^3} + \frac{6 \cdot (V_0 + V_K)}{T^2};$$

$$c_1 = \frac{12S_0}{T^3} - \frac{12S_K}{T^3} + \frac{6V_0}{T^2} + \frac{6V_K}{T^2}.$$

$$c_0 = \frac{V_K}{T} - \frac{V_0}{T} - \frac{T}{2} \cdot \left( \frac{12 \cdot (S_0 - S_K)}{T^3} + \frac{6 \cdot (V_0 + V_K)}{T^2} \right) =$$

$$= \frac{V_K - V_0}{T} - \frac{6 \cdot (S_0 - S_K)}{T^2} - \frac{3 \cdot (V_0 + V_K)}{T} = \frac{V_K - V_0}{T} - \frac{3V_0 + 3V_K}{T} - \frac{6 \cdot (S_0 - S_K)}{T^2} =$$

$$= \frac{V_K - V_0 - 3V_0 - 3V_K}{T} - \frac{6 \cdot (S_0 - S_K)}{T^2} = \frac{-6 \cdot (S_0 - S_K)}{T^2} - \frac{2V_K + 4V_0}{T},$$

$$c_0 = \frac{6S_K}{T^2} - \frac{6S_0}{T^2} - \frac{2V_K}{T} - \frac{4V_0}{T}.$$

---

Отримали вирази для  $c_0$  і  $c_1$ :

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{6 \cdot S_K}{T^2} - \frac{6 \cdot S_0}{T^2} - \frac{2 \cdot V_K}{T} - \frac{4 \cdot V_0}{T}; \\ c_1 &= \frac{12 \cdot S_0}{T^3} - \frac{12 \cdot S_K}{T^3} + \frac{6 \cdot V_K}{T^2} + \frac{6 \cdot V_0}{T^2} \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

4) Введемо зворотній зв'язок.

Робимо заміну:

$$V_0 \rightarrow V;$$

$$S_0 \rightarrow S;$$

$$T \rightarrow (T - t)$$

Відлік часу при зближенні проводиться з моменту виходу об'єкту з початкової точки. Так, як об'єкт тепер весь час знаходиться в початковій точці, то  $t = 0$  і другий член в формулі для прискорення (1) зникне:

$$U_T = c_0.$$

При цьому закон управління (1) прийме вигляд:

$$U_T = c_0 = \frac{6 \cdot (S_K - S)}{(T - t)^2} - \frac{2 \cdot V_K}{T - t} - \frac{4 \cdot V}{T - t}. \quad (7.20)$$

5) Ліквідування особливості.

Розглянемо метод фазової точки:

Робимо заміну:

$$\begin{aligned} V_K &\rightarrow V_c; \\ S_K &\rightarrow S_c; \\ (T - t) &\rightarrow \Delta T \\ U_T &= \frac{6 \cdot (S_c - S)}{\Delta T^2} - \frac{2 \cdot V_c}{\Delta T} - \frac{4 \cdot V}{\Delta T}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Підставляємо замість  $t \rightarrow (t + \Delta T)$ , отримаємо поточні фазові координати ведучої точки:

$$\left. \begin{aligned} V_c &= V_o + c_0 \cdot (t + \Delta T) + \frac{c_1 \cdot (t + \Delta T)^2}{2}; \\ S_c &= S_o + V_o \cdot (t + \Delta T) + \frac{c_0 \cdot (t + \Delta T)^2}{2} + \frac{c_1 \cdot (t + \Delta T)^3}{6} \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Після деяких дій з підстановками отримаємо:

$$\begin{aligned} U_T &= \frac{6}{\Delta T^2} \cdot \left( S_o + V_o \cdot (t + \Delta T) + \frac{c_0 \cdot (t + \Delta T)^2}{2} + \frac{c_1 \cdot (t + \Delta T)^3}{6} \right) - \frac{6S}{\Delta T^2} - \frac{4V}{\Delta T} - \\ &- \frac{2}{\Delta T} \cdot \left( V_o + c_0 \cdot (t + \Delta T) + \frac{c_1 \cdot (t + \Delta T)^2}{2} \right) = \frac{6S_o}{\Delta T^2} + \frac{6V_o \cdot (t + \Delta T)}{\Delta T^2} + \frac{3c_0 \cdot (t + \Delta T)^2}{\Delta T^2} + \\ &+ \frac{c_1 \cdot (t + \Delta T)^3}{\Delta T^2} - \frac{6S}{\Delta T^2} - \frac{4V}{\Delta T} - \frac{2V_o}{\Delta T} - \frac{2c_0 \cdot (t + \Delta T)}{\Delta T} - \frac{c_1 \cdot (t + \Delta T)^2}{\Delta T} = \frac{-4V}{\Delta T} + \frac{6S_o}{\Delta T^2} - \frac{2V_o}{\Delta T} - \frac{6S}{\Delta T^2} + \\ &+ \frac{6V_o \cdot t}{\Delta T^2} + \frac{6V_o \cdot \Delta T}{\Delta T^2} - \frac{2c_0 \cdot t}{\Delta T} - \frac{2c_0 \cdot \Delta T}{\Delta T} + \frac{3c_0 \cdot t^2}{\Delta T^2} + \frac{6c_0 \cdot t \cdot \Delta T}{\Delta T^2} + \frac{3c_0 \cdot \Delta T^2}{\Delta T^2} - \frac{c_1 t^2}{\Delta T} - \frac{2c_1 t \cdot \Delta T}{\Delta T} - \frac{c_1 \cdot \Delta T^2}{\Delta T} + \\ &+ \frac{c_1 \cdot t^3}{\Delta T^2} + \frac{3t^2 \cdot \Delta T \cdot c_1}{\Delta T^2} + \frac{3t \cdot \Delta T^2 \cdot c_1}{\Delta T^2} + \frac{c_1 \cdot \Delta T^3}{\Delta T^2} = \frac{6S_o}{\Delta T^2} - \frac{2V_o}{\Delta T} + t \cdot \left( \frac{6V_o}{\Delta T^2} - \frac{2c_0}{\Delta T} + \frac{6c_0}{\Delta T} - 2c_1 + 3c_1 \right) + \\ &+ t^2 \cdot \left( \frac{3c_0}{\Delta T^2} - \frac{c_1}{\Delta T} + \frac{3c_1}{\Delta T} \right) + t^3 \cdot \left( \frac{c_1}{\Delta T^2} \right) - \frac{6S}{\Delta T^2} - \frac{4V}{\Delta T} + \frac{6V_o}{\Delta T} - 2c_0 + 3c_0 + \Delta T \cdot c_1 - c_1 \cdot \Delta T = \\ &= \left( \frac{6S_o}{\Delta T^2} + \frac{4V_o}{\Delta T} + c_0 \right) + \left( \frac{6V_o}{\Delta T^2} + \frac{4c_0}{\Delta T} + c_1 \right) \cdot t + \left( \frac{3c_0}{\Delta T^2} + \frac{2c_1}{\Delta T} \right) \cdot t^2 + \left( \frac{c_1}{\Delta T^2} \right) \cdot t^3 + \left( -\frac{6}{\Delta T^2} \right) \cdot S + \left( \frac{-4}{\Delta T} \right) \cdot V. \end{aligned}$$

$$U_T = k_0 + k_1 \cdot t + k_2 \cdot t^2 + k_3 \cdot t^3 + k_s \cdot S + k_v \cdot V, \quad (7.22)$$

де

$$k_0 = \frac{6 \cdot S_0}{\Delta T^2} + \frac{4 \cdot V_0}{\Delta T} + c_0; \quad k_1 = \frac{6 \cdot V_0}{\Delta T^2} + \frac{4 \cdot c_0}{\Delta T} + c_1; \quad k_2 = \frac{3 \cdot c_0}{\Delta T^2} + \frac{2 \cdot c_1}{\Delta T};$$

$$k_3 = \frac{c_1}{\Delta T^2}; \quad k_s = -\frac{6}{\Delta T^2}; \quad k_v = -\frac{4}{\Delta T}.$$

Вибором  $\Delta T$  регулюється „жорсткість” прив’язки керуемого об’єкту до програмної фазової траєкторії.

## 7.6 Структурна схема термінальної САУ (для задачі зближення)

$$U_T = \underbrace{k_0 + k_1 \cdot t + k_2 \cdot t^2 + k_3 \cdot t^3}_{U_{\text{прогр}}} + \underbrace{k_s \cdot S + k_v \cdot V}_{U_{\text{зз}}}$$

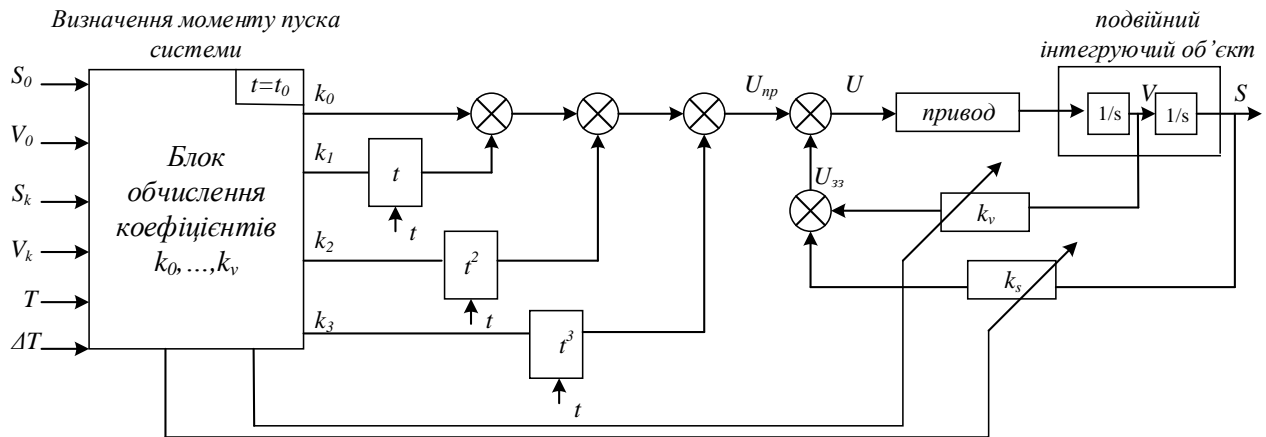


Рисунок 7.2 – Структурна схема термінальної САУ

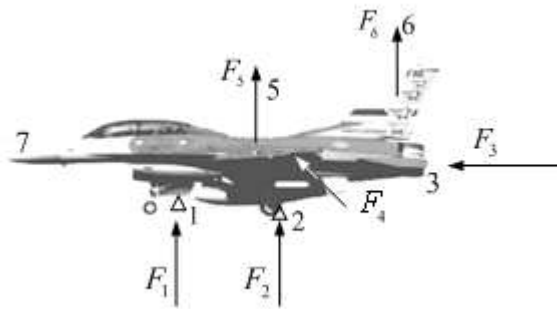
$k_v, k_s$  – змінні коефіцієнти, які встановлюються кожен раз у відповідності до необхідної задачі.

## 7.7 Термінальне управління при застосуванні декількох паралельно працюючих виконавчих елементів (приводів)

Для сучасних об’єктів управління характерна надлишковість виконавчих пристроїв (приводів). Причини цієї надлишковості різноманітні: вимоги надійності та живучості, багаторежимність (коли для кожного режиму використовуються різні типи виконавчих пристроїв), неможливість повного розділення каналів. В САУ таких об’єктів виникає задача забезпечення паралельної роботи декількох виконавчих пристроїв.



### 1) Вертикально взлітаючий літак



1, 2, 3 – газотурбінні двигуни;  
4, 5 – аеродинамічне кермо;  
6, 7 – газоструйне кермо.

Для керування рухом такого літака використовуються спільно: газотурбінні двигуни, газоструйні та аеродинамічні рулі. Надлишковість тут необхідна, як для надійності, так і для забезпечення працездатності на різних режимах (аеродинамічне кермо неефективне на малих швидкостях). Необхідно, щоб на всіх режимах – посадка, розгін, ... – ці виконавчі органи працювали узгоджено.

2) Роботи-маніпулятори по багатьом причинам вимушені копіювати, наприклад, людську руку.

Розглянемо типову схему РМ (робота-маніпулятора).

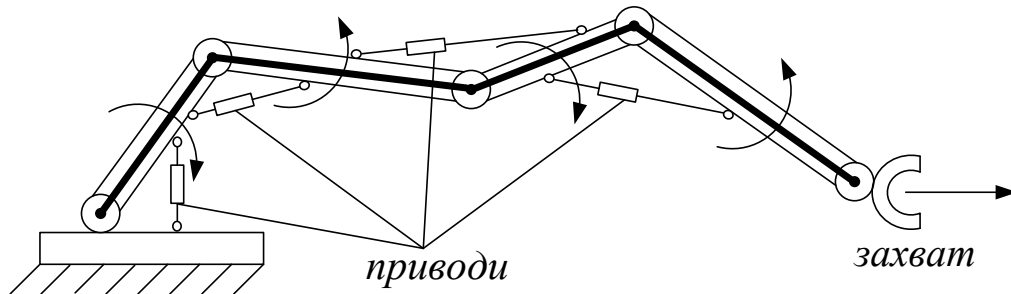


Рисунок 7.3 – Типова схема робота-маніпулятора

Більшість РМ являють собою кінематичний ланцюг (поки з 2-3 ланцюгів, в майбутньому із 3-10).

Вочевидь, рух захвату складним нелінійним чином залежить від обертальних рухів окремих ланцюгів.

Як керувати окремими ланцюгами, щоб їх рухи склались в цілеспрямований стійкий рух захвату?

Традиційними методами ТАУ таку задачу при кількості ланцюгів більше трьох розв'язати неможливо. Як же узгодити окремі приводи РМ?

З'ясували, що термінальне управління по вищій похідній дозволяє включати на паралельну роботу необмежену кількість виконавчих

пристроїв. Причому, термінальна САУ виявляється нечутливою до нелінійності окремих виконавчих пристроїв і навіть до відмов.

Як це довести? В даному випадку при довільних нелінійностях для доведення може використовуватися моделювання перехідних процесів в системі, хоча можливо застосовувати і деякі аналітичні методи (метод функцій Ляпунова, ...), однак тільки для вузьких класів нелінійностей.

Таким чином, для доведення використовується експеримент – модельний або натуральний.

Розглянемо схему термінальної САУ з паралельними виконавчими органами.

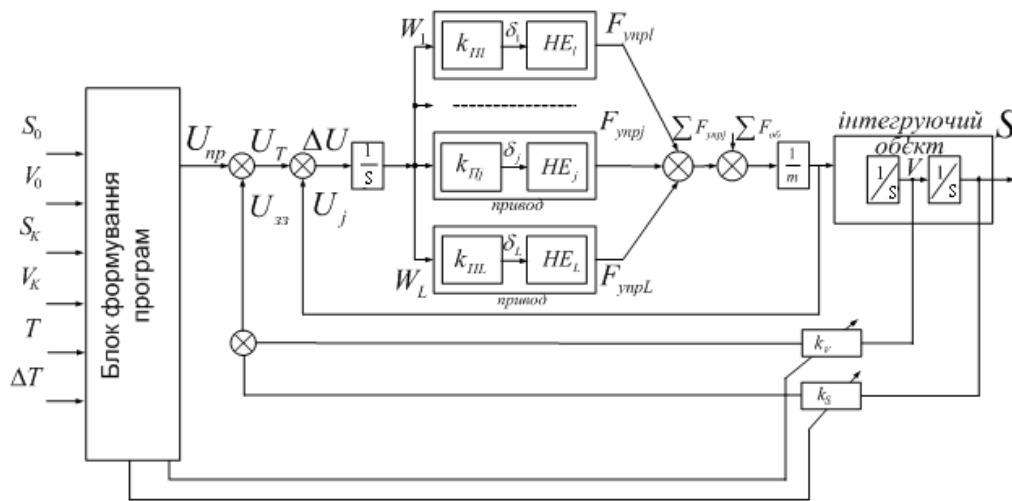


Рисунок 7.4 – Схема термінальної САУ з паралельними виконавчими органами

$k_{пj}$  – коефіцієнт передачі (підсилення) окремого привода, що обирається в широких межах;

$HE_j$  – структурний елемент, який характеризує нелінійності привода.

В якості управляючого впливу (однакового для всіх приводів) використовується  $W_j$ :

$$W_j = \int_0^t (U_T - U_j) dt; \quad j = \overline{1, L},$$

що в підсумку забезпечує астатизм внутрішнього контуру ( $U_j(\infty) = U_T(\infty)$ ).

При використанні метода управління по вищій похідній не вимагається здійснювати узгодження паралельно працюючих виконавчих елементів. Достатньо подати на всі елементи один і той же управляючий вплив  $W_j$ .

## 7.8 Принципи розв'язку термінального управління для багатомірного об'єкта

Ми досліджували модель руху об'єкту, яка складається з двох інтегруючих ланок. Звичайно, що ця модель справедлива, якщо час обробки заданого прискорення (сили) достатньо малий, щоб ним можна було знехтувати. Якщо ж врахувати динамічні властивості САУ та силової установки, то модель руху об'єкту буде багатомірною. Однак до неї можуть застосовуватися підхід та методика дослідження, розглянуті раніше.

Передаточна функція багатомірного об'єкту (лінійного):

$$W_{об}(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_0} = \frac{x_{вых}(s)}{U(s)}.$$

Диференціальне рівняння має вигляд:

$$a^n \cdot \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \cdot \frac{dx}{dt} + a_0 \cdot x = b_m \cdot \frac{d^m U}{dt^m} + \dots + b_0 \cdot U.$$

В якості управляючої функції візьмемо вищу похідну вихідної величини, нехай  $a_n = 1$ :

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \left( b_m \cdot \frac{d^m U}{dt^m} + \dots + b_0 \cdot U \right) - \left( a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 \cdot x \right)$$

Побудуємо структурну схему для моделювання об'єкта.

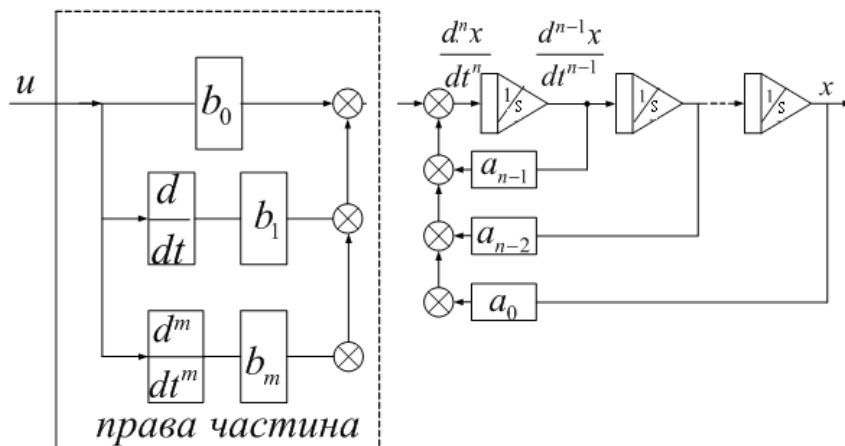


Рисунок 7.5 – Структурна схема для моделювання об'єкта

Моделлю об'єкту є ланцюг з послідовно ввімкнених інтеграторів з від'ємними зворотними зв'язками, які замикаються на її вхід. Довжина ланцюга визначається порядком характеристичного полінома.

Отже, в основі моделі будь-якої лінійної системи лежить ланцюг інтеграторів. Дослідимо властивості цього ланцюга.

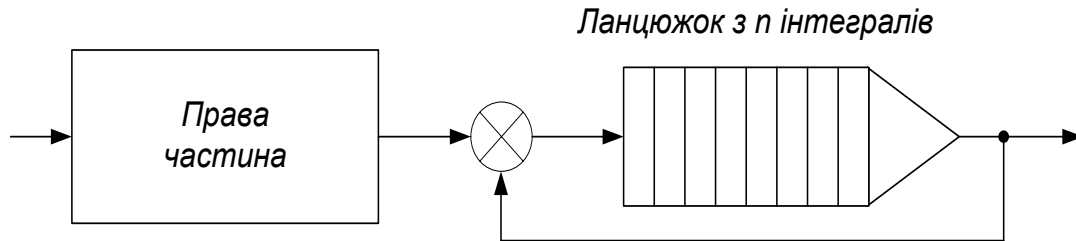


Рисунок 7.6 – Ланцюг інтеграторів

$$W_{об}(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_0}{s^n}.$$

Застосуємо методику синтезу термінального управління зі зворотнім зв'язком.

Позначимо:

$$\left. \begin{aligned} S &= x_1 \\ \frac{dS}{dt} &= x_2 \\ \frac{d^{n-1}S}{dt^{n-1}} &= x_n \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_n &= U_T \end{aligned} \right\}$$

(Не плутати  $S$  – координату та  $s$  – змінну характеристичного полінома!).

Нехай на  $r < n$  перших фазових координат накладені обмеження:

$$x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0} \xrightarrow{T} x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{rk}, \dots, x_{nk}.$$

Управління шукаємо у вигляді:

$$U_T = \sum_{i=0}^{r-1} c_i \cdot t^i.$$

Підставляємо  $U_T$  в  $\left( \dot{x}_n = U_T \right)$  диференціальне рівняння об'єкта, послідовно їх інтегруємо, підставивши  $t=T$ :

$$x_1(T) = x_{1k}$$

.....

$$x_r(T) = x_{rk}$$

Отримаємо систему алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів  $c_i$ .

Вводимо зворотній зв'язок і ліквідуємо особливість.

Зробимо заміну:

$$33 \quad x_{10} = x_1(t), \dots, x_{n0} = x_n(t); \quad T \rightarrow (T-t)$$

$$\text{Усун. особл.} \quad \begin{matrix} x_{1k} \rightarrow x_{1c}(t), \dots, x_{nk} \rightarrow x_{nc}(t) \\ T-t \rightarrow \Delta T \end{matrix},$$

де

$$x_{1c}(t) = x_{1k}(t + \Delta T).$$

Кінцевий вигляд  $U_T$ :

$$U_T = \underbrace{\sum_{L=0}^{n+(r-1)} k_L \cdot t^L}_{\text{програмна складова}} + \underbrace{\sum_{j=1}^r k_j \cdot x_j}_{33}$$

## 7.9 Структурна схема термінальної САУ

Структурна схема термінальної САУ для об'єкта-ланцюга інтеграторів представлена на рисунку 7.7.

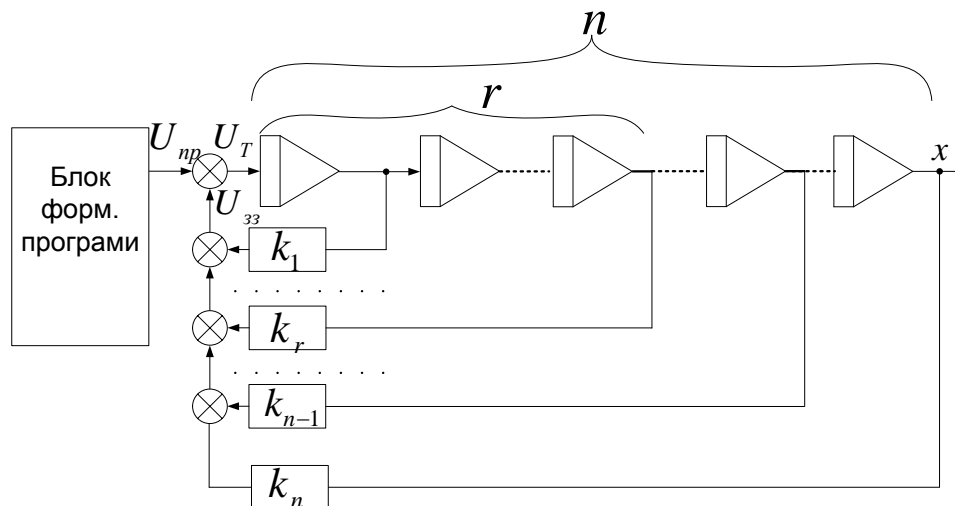


Рисунок 7.7 – Структурна схема термінальної САУ для об'єкта-ланцюга інтеграторів

## 7.10 Загальні властивості управління по вищій похідній

1) Близько 95% задач термінального управління описуються за допомогою математичної моделі 2-го порядку.

2) Динаміка об'єкту мало відбивається на кінцевій точності САУ.

3) Нелінійності в системі і обмеження, накладання на переміщення управляючих органів, практично не відбиваються на кінцевій точності управління.

4) На паралельну роботу можна включити скільки завгодно різних виконавчих елементів без будь-якого попереднього узгодження їх між собою.

5) Структура САУ визначається не динамікою об'єкту, а характером задачі, яка виконується.

6) Передаточні числа виконавчих елементів можуть вибиратися довільно, достатньо в широкому діапазоні значень.

7) Для реалізації термінального управління необхідний зворотній зв'язок по всім фазовим координатам, які контролюються, тобто фактично управління по вектору стану. Але ми вже знаємо, що в практичних задачах вектор стану повністю невимірюваний. Таким чином, спостерігач необхідний і при розв'язку задачі термінального управління.

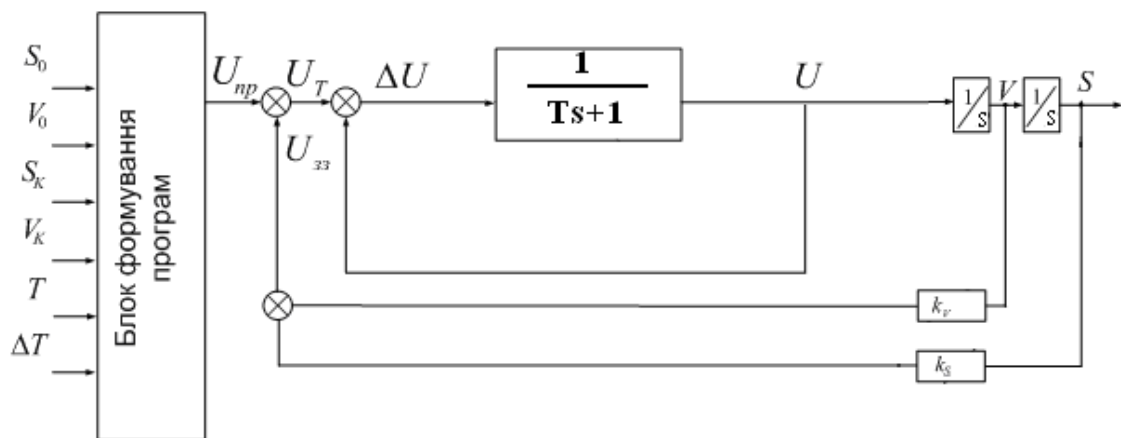


Рисунок 7.8 – Структурна схема термінального управління

*І спосіб:*

$$\begin{cases} \frac{1}{T \cdot s + 1} = \frac{U(s)}{U_T(s)}, & (1) \end{cases}$$

$$(2) : s^2 \cdot X(s) = U(s),$$

$$\begin{cases} \frac{1}{s^2} = \frac{X(s)}{U(s)}, & (2) \end{cases}$$

$$(1) : (T \cdot s + 1) \cdot U(s) = U_T(s)$$

Підставимо (2) в (1):

$$(T \cdot s + 1) \cdot s^2 \cdot X(s) = U_T(s)$$

$$s^3 \cdot X(s) \cdot T + s^2 \cdot X(s) = U_T(s)$$

Виконаємо обернене перетворення Лапласа і приведемо коефіцієнт при вищій похідній до одиниці діленням на  $T$ :

$$\frac{d^3 x}{dt^3} \cdot T + \frac{d^2 x}{dt^2} = U_T(t) \Rightarrow \frac{d^3 x}{dt^3} + \frac{1}{T} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{U_T}{T}.$$

Нехай:

$$\begin{cases} X_1 = X, \\ X_2 = \dot{X}, \\ X_3 = \ddot{X} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{X}_1 = \dot{X} = X_2, \\ \dot{X}_2 = \ddot{X} = X_3, \\ \dot{X}_3 = \frac{U_T}{T} - \frac{1}{T} \cdot X_3 \end{cases}$$

$$U_T = U_{np} + U_{33}; \quad U_{33} = K_s \cdot X + K_v \cdot \dot{X}$$

$$\dot{X}_3 = \frac{K_s \cdot X + K_v \cdot \dot{X} + U_{np}}{T} - \frac{1}{T} \cdot X_3 = \frac{K_s \cdot X_1}{T} + \frac{K_v \cdot X_2}{T} + \frac{U_{np}}{T} - \frac{1}{T} \cdot X_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s}{T} & \frac{K_v}{T} & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T} \end{bmatrix}.$$

*II спосіб:*

$$(1): \frac{1}{T \cdot s + 1} = \frac{U(s)}{U_T(s)}$$

$$(T \cdot s + 1) \cdot U(s) = U_T(s)$$

$$T \cdot s \cdot U(s) + U(s) = U_T(s)$$

$$T \cdot \frac{dU}{dt} + U = U_T \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{1}{T} \cdot U_T - \frac{1}{T} \cdot U.$$

$$(2): \frac{1}{s^2} = \frac{X(s)}{U(s)}$$

$$s^2 \cdot X(s) = U(s)$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = U$$

$$U_{33} = K_S \cdot S + K_V \cdot V; \quad S = X_1 \quad V = \dot{S} = \dot{X}_1 = X_2;$$

$$U_T = U_{np} + U_{33} = U_{np} + K_S \cdot S + K_V \cdot V = U_{np} + K_S \cdot X_1 + K_V \cdot \dot{X}_1 = \\ = U_{np} + K_S \cdot X_1 + K_V \cdot X_2.$$

$$\frac{d^3 X}{dt^3} = \frac{d\left(\frac{d^2 X}{dt^2}\right)}{dt} = \frac{dU}{dt} = \frac{1}{T} \cdot U_T - \frac{1}{T} \cdot U = \frac{1}{T} \cdot (U_{np} + K_S \cdot X_1 + K_V \cdot X_2) - \frac{1}{T} \cdot U.$$

Нехай:

$$\begin{cases} X_1 = X, \\ X_2 = \dot{X}, \\ X_3 = \ddot{X} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{X}_1 = \dot{X} = X_2, \\ \dot{X}_2 = \ddot{X} = X_3, \\ \dot{X}_3 = \frac{d^3 X}{dt^3} = \frac{1}{T} \cdot (U_{np} + K_S \cdot X + K_V \cdot \dot{X}) - \frac{1}{T} \cdot U = \\ = \frac{1}{T} \cdot (U_{np} + K_S \cdot X + K_V \cdot \dot{X}) - \frac{1}{T} \cdot \ddot{X} = \\ = \frac{1}{T} \cdot U_{np} + \frac{K_S}{T} \cdot X_1 + \frac{K_V}{T} \cdot X_2 - \frac{1}{T} \cdot X_3. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_S}{T} & \frac{K_V}{T} & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T} \end{bmatrix}.$$

### Контрольні питання:

1. Спробуйте аналітично дослідити стійкість такої САУ для типових нелінійностей (обмеження, зона нечутливості).
2. Як побудувати програму обчислювального експерименту для дослідження стійкості такої САУ?
3. Дайте словесну формулу тривалості перехідного процесу.
4. Наведіть приклади об'єктів управління, де обмежується перерегулювання.
5. Наведіть приклади об'єктів управління, де обмежується прискорення.
6. Напишіть формули для обчислення всіх використаних критеріїв.



## 8 ОПТИМАЛЬНІ САУ

### 8.1 Оптимальні САУ. Класифікація оптимальних САУ

*Оптимальна САУ* – САУ, в якій забезпечується максимум або мінімум деякої чисельної міри степеню досягнення мети – критерію.

У загальному випадку оптимальність — відносне поняття, що залежить від:

- обраного критерію;
- заданих обмежень (на структуру та параметри регулятора, параметри об'єкта);
- діючі збурення, зовнішнього середовища.

Наприклад: уявіть собі, що означає “оптимально одягнутися”:

- це залежить від мети — в театр чи на лісозаготівлю;
- це залежить від того, що ви маєте в своєму розпорядженні (з чого вибирати, які строки підготовки);
- це залежить від погоди та пори року.

Що є найбільш характерним для задач управління об'єктами будь-якої природи? Кожний одразу і без вагань здогадається: обмеження на ресурси управління. У системі управління літака — це обмеження потужності двигуна, кутів відхилення аеродинамічних органів управління, в техніко-економічній системі — це обмеження виробничих потужностей, фінансових ресурсів, кадрів.

Який критерій оптимізації є найбільш характерним для задач управління? Знову ж таки, кожен скаже: швидкодія (зрозуміло, при обмеженнях на економічність, безпечність). Особливо у бізнесі: "другий повинен бути в десять разів кращий за першого", що в перекладі означає — запізнення з виходом на ринок з певним товаром суттєво знижує, або взагалі елімінує доходи.

А тепер спробуйте, спираючись на власні знання, досвід та інтуїцію здогадатися, яку структуру має оптимальне за швидкістю управління при обмеженнях на управління? Або простіше, — сформулюйте принцип такого управління? Інженери, практики винайшли і застосовували цей принцип ще до того, як була створена математична теорія оптимального управління. Це так званий принцип "максимальний розгін — максимальне гальмування". Суть його в тому, що оптимальне за швидкістю управління повинно бути в кожен момент часу максимально можливим.

Вибирається тільки напрямок дії. Функція оптимального управління  $U_{opt}(t)$  звичайно має розриви — "переключення". Для таких задач важко

застосувати методи класичного варіаційного обчислення — вони (методи, а не задачі) вимагають існування відповідних похідних. Саме для таких задач колективом вчених під керівництвом академіка Л. Понтрягіна на початку 1950-их років був розроблений метод під назвою принцип максимуму.

А тепер, враховуючи, що:

а) практики і без теоретиків винайшли структуру оптимального за швидкодією управління;

б) в сучасному світі глобалізованої, високотехнологічної, пов'язаної мережами економіки головним правилом є "не займайся оптимізацією, лови можливості !" (бестселер Стівена Келлі — "Нові правила для нової економіки. Десять радикальних стратегій для конектизованого світу").

### 8.1.1 Постановка задачі оптимізації

Дано:

Об'єкт управління:

$$\dot{\bar{x}} = F(\bar{x}, \bar{u}, t).$$

Обмеження:

– інтегральні:

$$\int_{t_0}^{t_k} f_{n+j}(\bar{x}, \bar{u}, t) \cdot dt = B_j, \quad j = \overline{1, r}.$$

– алгебраїчні:

$$\varphi_i(\bar{x}, \bar{u}, t), \quad i = \overline{1, l}.$$

Граничні умови (можуть бути і більш складніші):

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0; \quad \bar{x}(t_k) = \bar{x}_k.$$

Критерій (показник оптимізації або цільова функція):

$$I(\bar{x}, \bar{u}, t).$$

Мета оптимізації (найчастіше):

$$\min I(\bar{x}, \bar{u}, t) \text{ або } \max I(\bar{x}, \bar{u}, t).$$

Збурення (задаються різним чином).

Необхідно знайти  $\bar{u}(t)$ , при якому критерій приймає мінімальне (або максимальне) значення при заданих рівнянні об'єкта управління та обмеженнях і граничних умовах.

### 8.1.2 Класифікація критеріїв оптимізації

Локальні критерії:

$$I = G(\bar{x}_0, \bar{x}_k, t_0, t_k).$$

Інтегральні критерії:

$$I = \int_{t_0}^{t_k} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) \cdot dt.$$

Окремі випадки інтегрального критерію:

$$\min_u \int_{t_0}^{t_k} 1 \cdot dt = \min_u T \text{ — критерій швидкодії.}$$

$$\min_u \int_{t_0}^{t_k} [x(t) - x_T(t)]^2 \cdot dt \text{ — критерій інтегральної середньоквадратичної похибки.}$$

У загальному вигляді з використанням векторно-матричної квадратичної форми цей критерій запишеться:

$$\min_u \int_{t_0}^{t_k} \bar{x}^T(t) \cdot Q \cdot \bar{x}(t) \cdot dt.$$

$$\min_u \int_{t_0}^{t_k} \bar{u}^T \cdot R \cdot \bar{u} \cdot dt \text{ — критерій мінімуму витрат енергії на управління.}$$

$$\min_u \int_{t_0}^{t_k} (\bar{x}^T \cdot Q \cdot \bar{x} + \bar{u}^T \cdot R \cdot \bar{u}) \cdot dt \text{ — критерій, що об'єднує мінімум}$$

помилки та мінімум витрат енергії на управління.

$$\min_u \int_{t_0}^{t_k} \bar{u}^2 \cdot dt \text{ — витрати енергії на управління.}$$

$$\min_u \int_{t_0}^{t_k} |\bar{u}| \cdot dt \text{ — критерій мінімуму витрат робочого тіла на управління.}$$

### 8.1.3 Методи оптимізації

В даний час все різноманіття методів оптимізації може бути зведено до наступних груп методів:

1. Методи класичного варіаційного числення. Методи варіаційного числення з'явилися 100-200 років назад (Ейлер, Лагранж) з інтелектуальних математичних міркувань.

2. Метод динамічного програмування Беллмана. У 1940-1945 рр. інженерна практика САУ вимагала методів оптимізації. У 1948 р. був створений метод Белмана.

3. Метод принципу максимуму Понтрягіна.

#### 8.1.4 Синтез оптимального за швидкодією управління

Для розуміння даного розділу розв'яжемо задачу. Розглядаємо об'єкт другого порядку з одним (скалярним) управлінням. Використовуємо відповідні інформаційні технології: копіюємо і редагуємо "порядок розв'язання задачі".

Дано:

Критерій:

$$I = \int_0^T 1 \cdot dt .$$

Диференціальне рівняння процесу:

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = u .$$

Обмеження на управління (нормоване):

$$|u| \leq 1; \quad n = 2; \quad m = 1 .$$

Записуємо розширену систему рівнянь динаміки процесу:

$$\frac{d}{dt} x_0 = f(x, u, t)_0 = 1; \quad \frac{d}{dt} x_1 = f(x, u, t)_0 = x_2; \quad \frac{d}{dt} x_2 = f(x, u, t)_0 = u .$$

Рівняння 2 і 3 отримані приведенням до форми Коші вхідного диф. рівняння.

Записуємо гамільтоніан (символьний процесор не працює з індексованими змінними, тому замінюємо на прості:  $\psi_0$  на  $\psi_0$  і т.д.):

$$H = \sum_{i=0}^n \psi_i \cdot f_i = \psi_0 \cdot 1 + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot u; \quad H(\psi, x, u) := \psi_0 \cdot 1 + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot u .$$

Аналізуємо умови, за яких функція  $H(\psi, x, u)$  досягає максимуму, тому очевидно, що:

- а) тільки остання складова залежить від управління;
- б) для максимізації цієї складової треба, щоб управління  $u(t)$  мало:
  - б1) той самий знак, що і  $\psi_2$ ;
  - б2) максимально можливий модуль.

Таким чином, управління буде релейним. тобто таким, що у певні моменти змінює знак і має граничні за модулем значення.

$$\boxed{\max_u(H)} \Rightarrow \boxed{\max_u(\psi_2 \cdot u)} \Rightarrow \boxed{u_{op} = \text{sign}(\psi(t)_2)}$$

Записуємо і розв'язуємо рівняння для спряжених функцій (подаємо схему отримання цих рівнянь).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi(t)_i = -\frac{d}{dx_i} H & \begin{cases} \rightarrow \frac{d}{dx_0} H(\psi, x, u) \rightarrow 0 ; \quad \frac{d}{dt} \psi_0 = 0 ; \quad \psi_0 = \text{const} = C_0 ; \\ \rightarrow \frac{d}{dx_1} H(\psi, x, u) \rightarrow 0 ; \quad \frac{d}{dt} \psi_1 = 0 ; \quad \psi_1 = \text{const} = C_1 ; \\ \rightarrow \frac{d}{dx_2} H(\psi, x, u) \rightarrow \psi_1 ; \quad \frac{d}{dt} \psi_2 = -\psi_1 ; \quad \psi_2 = C_2 - C_1 \cdot t. \end{cases} \end{aligned}$$

## 8.2 Система оптимального управління синтезом стиролу

### Опис об'єкта управління. Аналіз альтернатив управління

Стирол – сировина для великотоннажної пластмаси – полістиролу. Виробництво стиролу звичайно є масовим. Реактори для синтезу стиролу працюють разом, паралельно. Причини цього – велика потреба в продукті, старіння реакторів, періодична зупинка їх для заміни каталізатора при умові підтримки заданого рівня випуску продукції. Паралельна робота реакторів, великі вимоги до надійності функціонування виробництва в цілому обумовлюють і методи управління – групового, одразу всіма реакторами.

Перша ціль управління – підтримка потрібного рівня сумарного виробництва незалежно від стану окремих реакторів. Специфіка масового виробництва продуктів у реакторах у тому, що навіть малі частки відсотка зміни експлуатаційних витрат призводять до великих сумарних

економічних ефектів. З цієї причини режими роботи реакторів – тиск, температуру, концентрації – ретельно оптимізують. Характеристики реакторів з часом погіршуються – проходить процес "отруєння каталізатору". Звичайно в батареї реакторів паралельно працюють реактори, які мають різні ефективності (одиниць продукції на одиницю експлуатаційних витрат). Зрозуміло, що кращі реактори треба завантажувати більше.

Друга ціль управління – таке розподілення навантаження по реакторах, яке дає мінімум експлуатаційних витрат при заданому рівні випуску продукції. Розглянемо стисло технологічний процес синтезу стиролу (рис. 1).

У реакторі нагрівається етилбензол в присутності каталізатора, утворюється суміш стиролу, етилбензолу, бензолу, толуолу, що переганяється, і виділений етилбензол знову йде у реактор. Реактор підігрівається парою. Особливості системи – нелінійні і нестационарні характеристики реактора, а також паралельна робота декількох реакторів на потрібний сумарний вихід стиролу. Необхідно розробити систему оптимального управління розподілом етилбензолу по окремих реакторах з урахуванням обмеження на сумарну продуктивність. Критерій – сумарні виробничі витрати на заданий випуск продукту. На рисунку 8.1 наведено спрощену схему системи та модель процесу синтезу стиролу.

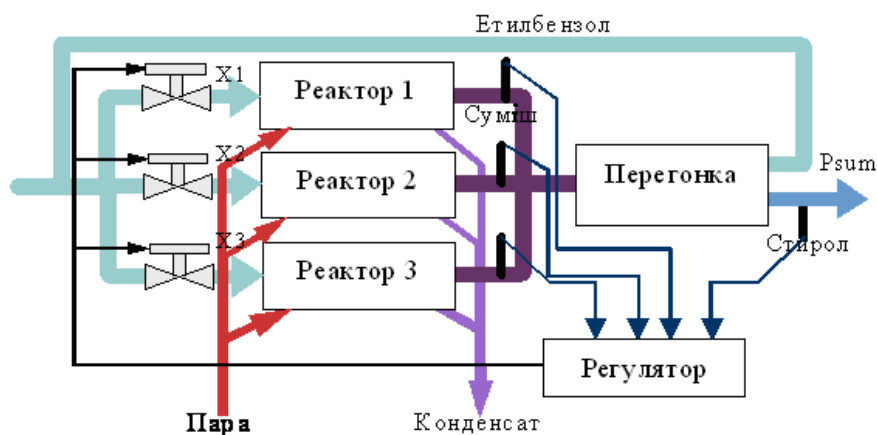


Рисунок 8.1 – Спрощена схема системи та модель процесу синтезу стиролу

Реактор для синтезу стиролу – не ракета, – він значно складніший. Щоб побудувати його аналітичну модель, треба враховувати закони каталітичної хімії, термодинаміки, газодинаміки і багато іншого. Для цілей практики іноді буває достатньо зняти експериментально характеристики реактора, а потім виконати апроксимацію цих характеристик, наприклад, поліномами.

## Розробка системи оптимального управління синтезом стиролу

Математична модель реактора для аспекту "залежність виробничих витрат від виходу стиролу" – апроксимація реальної характеристики поліномом. Запишемо похідну від цієї залежності (рис.15 3).

$$\begin{aligned} C(a_1, a_2, a_3, P) &= 20 + a_1 \cdot P + 0,5 \cdot a_2 \cdot P^2 + a_3 \cdot P^5, \\ dC(a_1, a_2, a_3, P) &= a_1 + a_2 \cdot P + 0,01 \cdot a_3 \cdot P^4. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Математична модель реактора для аспекту "залежність виходу стиролу від рівня подачі етилбензолу" розглядається на рисунку 15.4. Ця характеристика є оптимізованою за іншими вхідними змінними – витратою пари, температурою, тиском та іншими. Використовуємо як перше наближення модель з одним параметром  $b_1$ . Реактори мають характеристики одного класу і відрізняються параметром  $b_1$ . Модель нереалістична для малих значень  $x$ .

$$P_i(b_1, x) = b_1 \cdot x^{0.5}. \quad (8.2)$$

Задаємо ранжовані змінні  $P$  та  $X$  і будуємо графіки характеристик.

$ORIGIN := 1; X := 0, 0.25..40; P := 0, 0.5..25.$

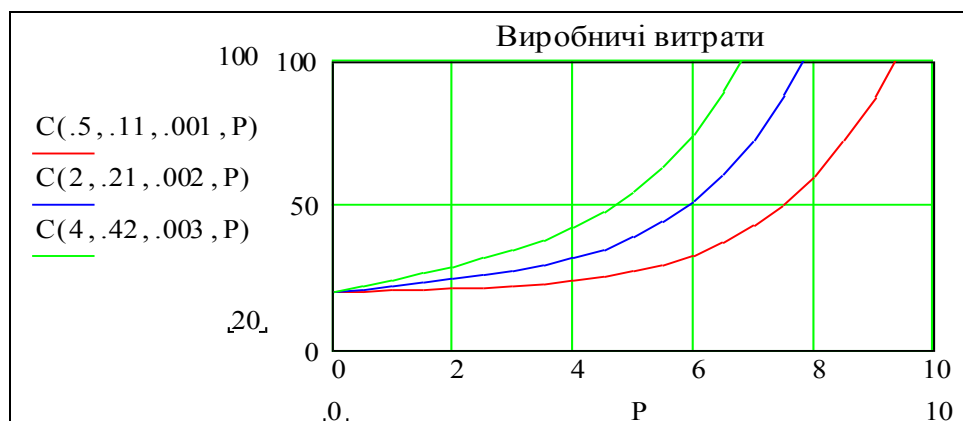


Рисунок 8.2 – Залежність виробничих витрат від виходу стиролу

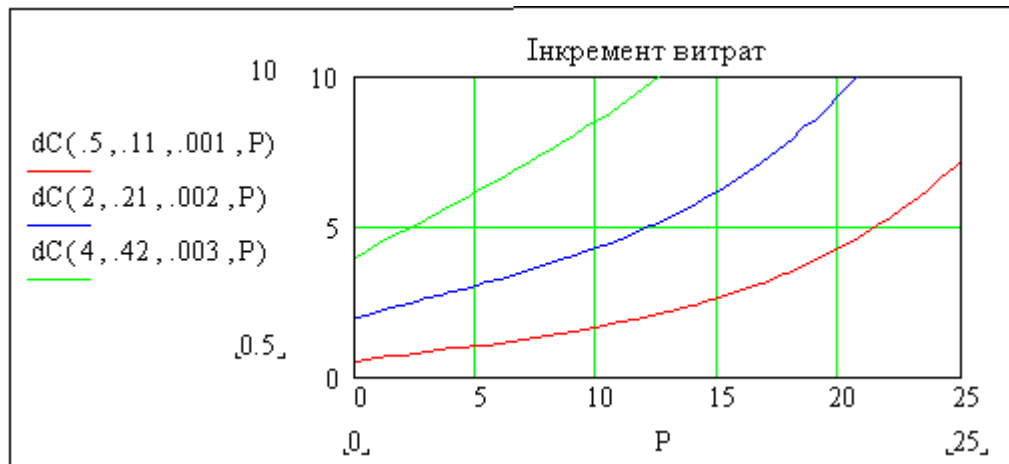


Рисунок 8.3 – Залежність інкременту виробничих витрат від виходу стиролу

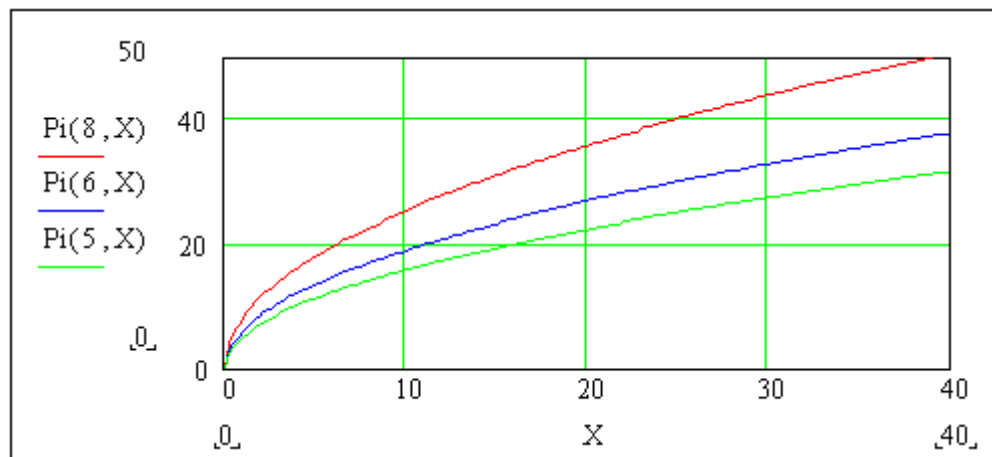


Рисунок 8.4 – Залежність виходу стиролу від виробничих витрат

### Формулювання оптимізаційної задачі

Задана цільова функція – сумарні виробничі витрати.  
Ціль оптимізації – мінімум цієї функції.

$$C_{sum} = F(P_1, P_2, P_3) = C_1(P_1) + C_2(P_2) + C_3(P_3). \quad (8.3)$$

Знайти:

$$\min \{F(P_1, P_2, P_3)\}. \quad (8.4)$$

Задано обмеження на сумарний вихід стиролу, тобто:



$$\begin{aligned}
P_1 + P_2 + P_3 &= P_{sum}; \\
P_{sum} &= P_{treb}; \\
G(P_1, P_2, P_3) &:= (P_{treb} - P_1 - P_2 - P_3) = 0.
\end{aligned}
\tag{8.5}$$

Задано:

- 1) такт квантування  $T = 5c$ ;
- 2) вимоги до перехідного процесу:
  - тривалість 5–15 тактів квантування;
  - перерегулювання  $< 10\%$ ;
  - точність регулювання –  $5\%$ .

Ставимо задачі першого рівня:

1. Побудувати структурну схему управління реакторами. Обґрунтувати вибір методу синтезу і критерію оптимальності САУ.
2. Розробити програму для знаходження оптимального розподілу навантаження реакторів методом невизначених множників Лагранжа. Визначити оптимальний розподіл і параметри регулятора.
3. Розробити математичну модель і програму моделювання АСУТП.
4. Виконати моделювання САУ. Дослідити поведінку САУ при варіації характеристик реакторів
5. Запропонувати рішення щодо модифікації програми моделювання для дослідження системи при від-/підключеннях реакторів, при врахуванні динаміки реакторів.

Задачі другого рівня:

1. Урахування в програмі того, що реактори є інерційними об'єктами, тобто вихід реактора визначається не алгебраїчним:

$$P_i(b_1, x) = b_1 \cdot x^{0.5},$$

а диференціальним рівнянням:

$$T_r \cdot \frac{d}{dt} P_d(t) + P_d(t) = P_i(b_1, x).$$

2. Урахування в програмі того, що управління  $x \geq 0$  (подача сировини не може бути від'ємною).
3. Модифікація програми для випадку 4-х реакторів, довільного числа реакторів.
4. Урахування в програмі повільного дрейфу характеристик реакторів (лінійні функції часу, інші функції).
5. Урахування в програмі підключення і відключення реактора в певні моменти часу.

6. Оптимальний регулятор не працює, коли немає перехідних процесів, тому в програму слід ввести тестові імпульси.

7. Модифікація програми – замінити простіші ПІ-регулятор та ПІД-регулятор на регулятори вектора стану.

Спочатку розглянемо альтернативні шляхи знаходження оптимального розподілення навантаження між реакторами.

### *Аналітичне розв'язання задачі*

Очевидна альтернатива – управління процесом можна побудувати на безпосередньому обчисленні оптимальних значень виходу стиролу для кожного реактора. Потім ці значення встановлюються за допомогою відповідних локальних систем регулювання, що повинні їх підтримувати, змінюючи подачу етилбензолу.

Для знаходження оптимального розв'язку використаємо метод невизначених множників Лагранжа. Згідно з цим методом запишемо функцію Лагранжа:

$$L(P_1, P_2, P_3, \lambda) = F(P_1, P_2, P_3) + G(P_1, P_2, P_3) \cdot \lambda. \quad (8.6)$$

Запишемо необхідні умови екстремуму цієї функції:

$$\frac{\partial}{\partial P_1} L(P_1, P_2, P_3, \lambda) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial P_2} L(P_1, P_2, P_3, \lambda) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial P_3} L(P_1, P_2, P_3, \lambda) = 0.$$

Додавши сюди рівняння обмеження отримаємо чотири рівняння для чотирьох невідомих змінних –  $P_1, P_2, P_3, \lambda$ .

Підставимо конкретні значення функцій (4) і (5) в (6):

$$\begin{aligned} F(P_1, P_2, P_3) &:= a_{11} + a_{21} \cdot P_1 + a_{31} \cdot P_1^4 + a_{12} + a_{22} \cdot P_2 + a_{32} \cdot P_2^4 + a_{13} + a_{23} \cdot P_3 + a_{33} \cdot P_3^4. \\ G(P_1, P_2, P_3) &:= P_{treb} - P_1 - P_2 - P_3, \\ L(P_1, P_2, P_3, \lambda) &:= F(P_1, P_2, P_3) + G(P_1, P_2, P_3) \cdot \lambda. \end{aligned}$$

Для знаходження аналітичних виразів похідних використаємо апарат символьних обчислень:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P_1} L(P_1, P_2, P_3, \lambda) &\rightarrow a_{21} + 4 \cdot a_{31} \cdot P_1^3 - \lambda, \\ \frac{\partial}{\partial P_2} L(P_1, P_2, P_3, \lambda) &\rightarrow a_{22} + 4 \cdot a_{32} \cdot P_2^3 - \lambda, \\ \frac{\partial}{\partial P_3} L(P_1, P_2, P_3, \lambda) &\rightarrow a_{23} + 4 \cdot a_{33} \cdot P_3^3 - \lambda. \end{aligned}$$

Вводимо значення параметрів функцій виробничих витрат для усіх реакторів:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0,5; & a_{21} &= 0,25; & a_{31} &= 0,001; \\ a_{12} &= 1; & a_{22} &= 0,3; & a_{32} &= 0,0017; \\ a_{13} &= 2; & a_{23} &= 0,3; & a_{33} &= 0,005. \end{aligned}$$

Вводимо значення обмеження та початкові значення шуканих змінних:

$$P_{treb} = 80; \quad P_1 = 10; \quad P_2 = 10; \quad P_3 = 10; \quad \lambda = 10.$$

Записуємо і розв'язуємо числовим методом систему рівнянь, наприклад, в MathCad:

*Given*

$$\left. \begin{aligned} a_{21} + 4 \cdot a_{31} \cdot P_1^3 - \lambda &= 0, \\ a_{22} + 4 \cdot a_{32} \cdot P_2^3 - \lambda &= 0, \\ a_{23} + 4 \cdot a_{33} \cdot P_3^3 - \lambda &= 0, \\ P_{treb} - P_1 - P_2 - P_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} X_{1onm} \\ X_{2onm} \\ X_{3onm} \\ \lambda_{onm} \end{pmatrix} := Find(P_1, P_2, P_3, \lambda); \quad \begin{pmatrix} X_{1onm} \\ X_{2onm} \\ X_{3onm} \\ \lambda_{onm} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 33.023 \\ 27.667 \\ 19.31 \\ 144.304 \end{bmatrix}.$$

Контроль виконання обмежень:

$$\begin{aligned} X_{1onm} + X_{2onm} + X_{3onm} &= 80, \\ P_{treb} &= 80. \end{aligned}$$

Перевірка виконана, значення співпали.

Можна узагальнити цю задачу на випадок  $N$  реакторів, зробити розв'язання функцією значення обмеження  $X_{onm}(P_{treb})$ .

### ***Розробка системи управління реакторами***

При розробці структурної схеми виходимо із визначених нами функцій системи управління технологічним процесом:

- а) підтримка заданого рівня виходу стиролу;
- б) оптимізація розподілу навантаження між реакторами.

Для виконання першої задачі поставимо ПІ (пропорційно-інтегральний) регулятор. Виконання другої задачі ускладнено проблемами оперативного вимірювання характеристики  $C(P_1, P_2, P_3)$ . Замість цього використаємо індикатор – величину, що пов'язана з потрібною величиною монотонною залежністю. Такою величиною може бути похідна  $\frac{\partial P_i}{\partial X_i}$  – вихід стиролу на одиницю подачі етилбензолу.

Словесна модель регулятора оптимізації розподілу така (рис.8.5):

- регулятор рівня подає однакові управління в усі реактори;
- вимірюються "відгуки"  $\partial P_i$  кожного з реакторів на це управління;
- формуються відхилення від середнього, і з затримкою на такт;
- на реактори подаються "вирівнюючі" управління. У результаті збільшується навантаження реакторів, у яких  $\partial P_i$  вище середнього, а зменшується для тих реакторів, де  $\partial P_i$  – нижче середнього. Такий принцип перерозподілу дуже поширений. Для випадку монотонних випуклих функцій усталеним станом системи буде точка екстремуму.

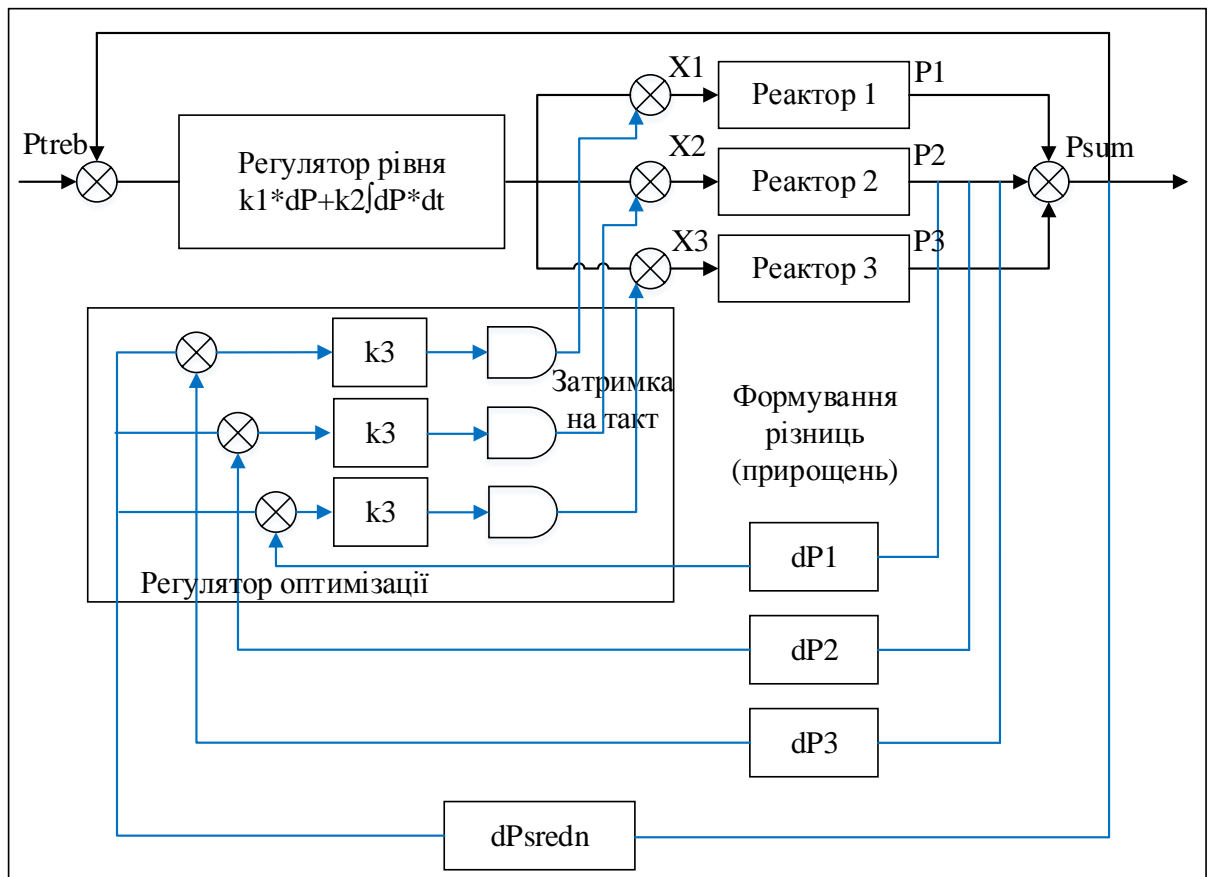


Рисунок 8.5 – Модель регулятора оптимізації розподілу

### 8.3 Оптимальне управління банківською системою

Ефективна система банків – одна з необхідних умов ефективності національної економіки і добробуту кожного громадянина.

Потенційно банки оптимізують розподіл суспільних ресурсів між споживанням, накопиченням і розвитком. Клієнтами банків сьогодні є більша частина населення розвинених країн.

Банк – специфічна система масового обслуговування. Специфіка банківської діяльності у високому рівні конкуренції та "примхливості" клієнтів. Ці два фактори разом породжують високий рівень невизначеності і ризиків.

Загальновизнано, що рівень банку визначається інтенсивністю використання і якістю математичних моделей – засобів прогнозування і управління. Життя змушує банки розробляти необхідні робочі моделі. Однак корисні моделі не виходять за межі організації. У програмі залишається в першу чергу освіта – майбутніх спеціалістів навчають, в основному, на словесних та елементарних загальних моделях. Знання основ банківської діяльності потрібні сьогодні практично всім. Парадоксальний аспект проблеми моделювання банків в Україні в тому, що це "нічийна територія". Для спеціалістів з фінансів це "математика", для спеціалістів з технічних наук – це "економіка". Хто повинен розробляти моделі? Фінансист, програміст, математик? Це питання не розв'язується дискусіями. Далі подано процес побудови робочої моделі банківської системи на базі теорії управління і системного аналізу.

Обсяг публікацій з банківської справи зростає експоненціально. У Росії і Україні щорічно видаються десятки посібників і підручників – своїх і перекладів з англійської. Однак публікацій з новими і конструктивними результатами небагато. Причини:

- системні – концентрація і розсіювання знань по джерелах публікацій (закони Бредфорда, Зіпфа);
- комерційні – ефективні моделі звичайно існують як "ноу-хау";
- класифікаційні – помилкова класифікація задачі.

Переглянута література була поділена на три класи, які можуть перетинатись:

- а) фундаментальні роботи з моделювання і управління;
- б) навчальні посібники і підручники;
- в) дисертації.

Особливістю літератури класів б) і в) є вторинність – це поглиблення певної лінії, наприклад, моделі на базі міжгалузевого балансу, нечіткої

логіки та нейронних мереж (особливо популярних в фінансових задачах) та ін. Виділено певні роботи – представники класів:

- типові підручники для фінансистів;
- підручники з елементами розробки моделей;
- підручники фундаментального рівня;
- класичні фундаментальні підручники–першоджерела.

В дисертаціях з банківської справи (захищених як за економічними, так і за технічними спеціальностями) виявлено багато цінних висновків і спостережень. Сьогодні з'являється все більше літератури безпосередньо з моделювання банківських систем. Однак все це не складається в єдину систему моделей. Тому вирішено не узгоджувати знайдене в літературі, а розробити робочу модель (таку, що виконується в середовищі математичного пакета) з самого початку – від твердо встановлених емпіричних законів банківської справи до робочих моделей функціонування банку. Це можна зробити з використанням методології конструювання математичних моделей. Робоча модель є інструментом для пошуку оптимальних, адаптивних і просто безпечних управлінь, і тут раціонально починати розробку з першоджерел з теорії управління.

Сьогодні потрібні не стільки нові моделі для нових систем і процесів, скільки раціональні технології розробки математичних моделей, здатних відобразити об'єкт, що еволюціонує. Необхідний інший підхід до моделювання, зокрема, робота з моделювання, де формули, набрані в текстовому редакторі, є прикладом нераціональної технології конструювання моделей.

### ***Постановка задачі***

Виділимо з численних тактичних і стратегічних задач банку базову задачу: "дешево брати в оренду гроші" і "дорого здавати". Виправданням для такої грубої моделі є те, що над нею потім можна необмежено виконувати операції надбудови (розбудови). На рисунку 1 наведено схему банківської системи, що відповідає базовій задачі банку.

Ця схема подібна схемі двоканальної системи автоматичного регулювання. Одразу можна побачити одну з головних причин складності – непрогнозований і метаморфозний об'єкт управління – клієнти. Однак велика кількість і різноманітність клієнтів є скоріше фактором спрощення – в умовах стабільної національної економіки можна усереднювати та агрегувати характеристики клієнтів



конкуренції, настроїв і сподівань клієнтів та ін. На першому етапі розглядаємо тільки залежність темпу депозитів від середньої ставки депозиту.

### *Модель вхідного темпу депозитів*

Будемо вважати стан економіки і стан банку (частку фінансового ринку) стабільними. Припускаємо, що кожному рівню ставки депозитів відповідає певний усталений темп депозитів, тобто існує монотонно зростаюча функція ставки депозиту  $tdp(rd, A)$ , де  $rd$  – ставка депозиту,  $A$  – потенційний (максимально можливий для даного регіону і періоду часу) темп депозитів.

Реальний темп депозитів тільки в ідеальних умовах досягатиме усталеного рівня. Цей процес залежить від темпу зростання інформованості клієнтів, наявності прикладу і порад інших клієнтів, а також від ірраціональних та випадкових факторів. Сукупну дію названих факторів на потенційних клієнтів при зміні ставки депозиту задаємо різницеvim рівнянням першого порядку.

$$tdvx_{k+1} = tdvx_k + Kd \cdot (tdp(rd, A) - tdvx_k) \cdot dT,$$

де  $tdvx_k$  – поточний темп депозитів;

$dT$  – крок обчислень;

$Kd$  – коефіцієнт реакції темпу депозитів на зміну ставки.

Враховуємо також сезонність та випадкову складову і формуємо відповідний програмний модуль (рис.8.7).

$Dpo(rd, dp) =$	$for\ k \in 1..Km$
	$kolv \leftarrow 1 + cid \cdot \sin(\omega M \cdot \pi \cdot k) - \text{"тренд пропозиції депозитів"}$
	$tdvx0 \leftarrow tdp(rd, Adp) \cdot kolv - \text{"максимальний темп депозитів"}$
	$tdvx_{k+1} \leftarrow tdvx_k + \frac{1}{Tdp} \cdot (tdvx0 - tdvx_k) \cdot dT - \text{"поточний темп"}$
	$tdvx_{k+1} \leftarrow rnorm(1, tdvx_{k+1}, \sigma m) - \text{"випадкова реалізація темпу"}$
	$tdvx$

Рисунок 8.7. – Програмний модуль



### Модель вихідного темпу депозитів

Модель вихідного темпу депозитів формуємо у виді програмного модуля, текст якого подано на рис. 8.8

$$\begin{array}{l}
 dpv_{yx}(rd, xd, Td) = \left\{ \begin{array}{l}
 kzd \leftarrow \text{round}\left(\frac{Td}{Tp} \cdot Np\right) - \text{"кроків повернення депозитів"} \\
 \text{for } k \in 1 \dots Np \\
 \quad \text{vypad} \leftarrow \text{rnd}(\text{nakop}) + (1 - \text{nakop}) - \text{"випадковість"} \\
 \quad xdd_k \leftarrow \left\{ \begin{array}{l}
 xd(k) \text{ if } (k < kzd) - \text{"повний вхідний темп"} \\
 xd(k) + zald_{k-1} \text{ otherwise}
 \end{array} \right. \\
 \quad pas1 \leftarrow \left\{ \begin{array}{l}
 0 \text{ if } k < kzd - \text{"вихідний темп без відсотків"} \\
 xdd_{k-kzd} \text{ otherwise}
 \end{array} \right. \\
 \quad pas2 \leftarrow pas1 \cdot (1 + rd \cdot Td) - \text{"вихідний темп з відсотками"} \\
 \quad pas3 \leftarrow pas2 \cdot \text{vypadko} - \text{"дійсний вихідний темп"} \\
 \quad zald_k \leftarrow pas2 - pas3 - \text{"залишок депозитів"} \\
 \quad yx^{(k)} \leftarrow \{stack(xdd_k, pas3, zald_k)\} - \text{"вектор стану"}
 \end{array} \right. \\
 yx
 \end{array}$$

Рисунок 8.8 – Модель вихідного темпу депозитів

Входи програмного модуля – ставка депозитів  $rd$ , середній термін депозиту і вхідний темп депозитів (фактично це програмний модуль вхідного потоку депозитів), виходи – вихідний темп депозитів без урахування залишків, залишки депозитів.

### Модель вхідного темпу кредитів

Як і для темпів депозитів, припускаємо, що кожному рівню ставки кредитів відповідає усталений темп кредитів, тобто існує монотонно спадаюча функція ставки кредиту  $tkr(rk, A)$ , де  $rk$  – ставка кредиту,  $A$  – потенційний (максимально можливий для даного регіону і періоду часу) темп кредитів.

Реальний темп кредитів тільки в ідеальних умовах досягатиме потенційного рівня – зі зростанням інформованості клієнтів, дії прикладу інших клієнтів, дії ірраціональних та випадкових факторів. Процес реакції потенційних клієнтів на зміну ставки кредиту задаємо різницеvim рівнянням першого порядку

$$tkvx_{k+1} = tkvx_k + Kk \cdot (tkr(rk, A) - tkvx_k) \cdot dT,$$

де  $tkvx_k$  – поточний темп кредитів;

$dT$  – крок обчислень;

$Kk$  – коефіцієнт реакції темпу кредитів на зміну ставки.

Враховуємо також сезонність та випадкову складову.

### ***Модель вихідного темпу кредитів***

Модель вихідного темпу кредитів формуємо на базі вбудованої фінансової функції пакету "виплата боргу рівними частками протягом терміну кредиту":

$$pmt\left(\frac{\text{відсоток}}{\text{число періодів на рік}}, \text{число періодів, борг стартовий, борг кінцевий}\right).$$

Вихідний потік буде визначатись виразом, подібним інтегралу згортки:

$$brgs(k, rk, xk, Tk) := - \sum_{m=1}^k pmt\left[rk \cdot \Delta t, \frac{Tk}{\Delta t}, xk(m), 0\right] \cdot \left[(k-m) < \frac{Tk}{\Delta t}\right],$$

де  $\Delta t$  – крок моделювання;

$Tk$  – середня тривалість кредиту;

$rk$  – ставка кредиту;

$xk(m)$  – значення вхідного темпу кредитів в дискретний момент часу  $m$ .

Природно використати математичну модель банківської системи для пошуку ефективних або безпечних управлінь. На першому етапі поставимо за мету – сформулювати закони управління банківською системою на базі застосування методології і методів теорії управління. Цілі управління для першого етапу – максимізація доходу банку та балансування темпів кредитів і депозитів. Потім на базі працездатної моделі можна розглянути більш тонкі управління – згладжування вхідних темпів кредитів і депозитів, диференціювання ставок, урахування прогнозів валютних курсів, економічних показників та ін. Розглядаємо як змінні управління ставки кредитів і депозитів

### ***Логіка управління***

Виділимо "логічні управління": управління балансом і управління для оптимізації доходу. Управління для збалансування темпів кредитів і депозитів повинно одночасно змінювати ставки кредитів і депозитів так,

щоб темпи "йшли назустріч". Для першого наближення беремо простіший, пропорційний закон управління балансом:

зміна ставки кредиту:

$$\Delta l_{rk} = K_{1k} \cdot \delta ba;$$

зміна ставки депозиту:

$$\Delta l_{rd} = -K_{1d} \cdot \delta ba,$$

де  $K_{1k}$ ,  $K_{1d}$  – "коефіцієнти підсилення";

$\delta ba$  – різниця темпів депозитів і кредитів (помилка регулювання).

Різні знаки обумовлені тим, що для збільшення темпу кредитів треба зменшувати ставку, а для збільшення темпу депозитів – збільшувати її.

Управління доходом банку відноситься до іншого класу – екстремального: потрібно не стабілізувати значення доходу на якомусь заданому рівні, а максимізувати за рахунок вибору значень ставки кредиту –  $r_k$ . Ставка депозиту прив'язується до ставки кредиту за рахунок умови збалансування темпів кредитів і депозитів.

Логіка екстремального управління така: на поточному кроці визначаємо приріст доходу за попередній період, якщо дохід зростає – продовжуємо змінювати управління в тому ж напрямку, що і на попередньому кроці, якщо дохід зменшується – змінюємо управління в протилежному напрямку.

Це досить примітивна і наївна логіка "індикаторної поведінки". Можна її удосконалювати введенням фільтрації (не реагувати на випадкові та короточасні збурення) і прогнозування (реагувати не тільки на зміну доходу, але і на тенденції зміни доходу). Перекладаємо ці міркування на мову рівнянь та алгоритмів. Розглянемо також банківську систему, як систему "попит-пропозиція":

- відсоткова ставка – це ціна грошей;
- залежність "ставка кредиту – темп кредитів" – це крива попиту на гроші;
- залежність "ставка депозиту – темп депозитів" – це крива пропозиції грошей.

На рисунку 8.9 подано постановку і розв'язання задачі про оптимальну різницю ставок – якщо існують монотонно спадна функція попиту на кредити і монотонно зростаюча функція пропозиції депозитів, то існує оптимальна різниця ставок, що дає максимум процентного доходу. Бачимо, що задача пошуку оптимальної різниці ставок еквівалентна геометричній задачі про вписаний прямокутник з максимальною площею. Можемо побачити також, що найбільший рівноважний стан досягається при рівних ставках кредиту і депозиту.

Зміна ставок кредитів і депозитів визначається дією двох розглянутих регуляторів:

$$rK_j = rK_{j-1} + \Delta 1rk + \Delta 2rk;$$

$$rD_j = rD_{j-1} + \Delta 1rd + \Delta 2rd ,$$

де  $\Delta 1rk$  ,  $\Delta 1rd$  – управління від регулятора балансу;

$\Delta 2rk$  ,  $\Delta 2rd$  – управління від екстремального регулятора.

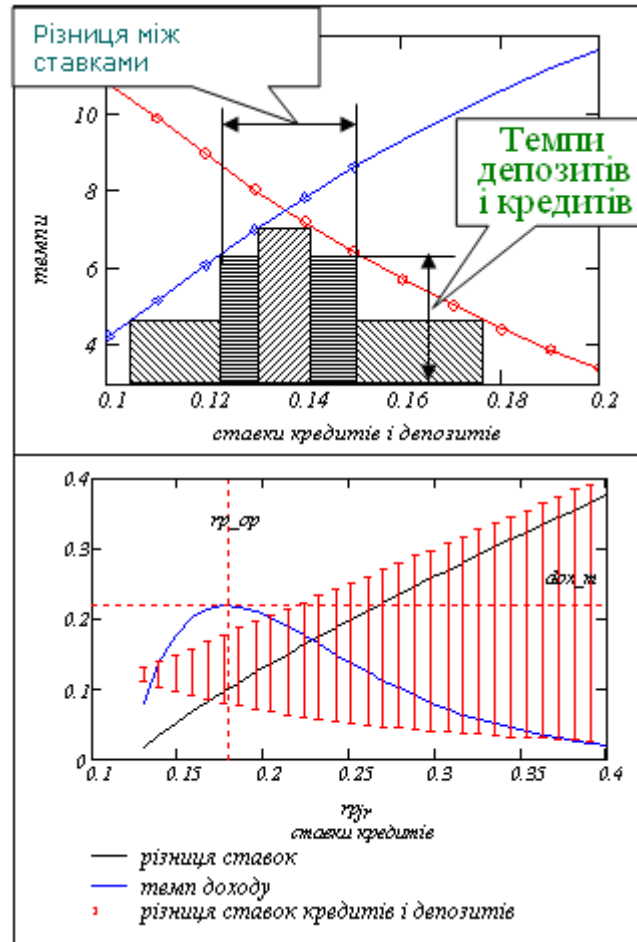


Рисунок 8.9 – Постановка і розв'язання задачі про оптимальну різницю ставок

На рисунку 8.10 подано схему програми моделювання. Інакше це називається "програма в псевдокодах". Програма складається з функціональних модулів, розглянутих вище, – вхідних і вихідних темпів кредитів і депозитів, трендів і невизначеностей, алгоритмів управління. За рахунок налаштування і заміни модулів програма дозволяє відобразити будь-яку специфіку функціонування банківської системи. Програма написана в середовищі мови програмування математичного пакета MathCad. Ця мова максимально наближена до природної мови математики, тому текст програми практично не відрізняється від запису системи

рівнянь математичної моделі. Саме тому використовуємо термін "робоча модель".

$MBU(mr) =$	$dtk \leftarrow$ "крок обчислень" $ome \leftarrow$ "частота сезонних коливань" $kpk \leftarrow$ "кількість кроків повернення кредиту" $kpd \leftarrow$ "кількість кроків повернення депозиту" $rK_1 \leftarrow$ "стартова ставка кредиту" $rD_1 \leftarrow$ "стартова ставка депозиту" "стартові значення темпів кредитів і депозитів:" "стартове значення балансу:" for $j \in \mathbb{Z} \dots Np1$ – "цикл по кроках моделювання" "максимальний рівень вхідного темпу кредитів" "поточне значення вхідного темпу кредитів" "випадкова реалізація вхідного темпу кредитів" "темпи повернення поточного кредиту" "вихідний темпи кредитів" "баланс кредитів" "максимальний рівень вхідного темпу депозитів" "поточне значення вхідного темпу депозитів" "випадкова реалізація темпу" "алгоритм повернення депозитів" "вихідний темпи депозитів" "залишок депозитів" "баланс депозитів" "баланс банку" "алгоритм управління балансом" "алгоритм управління максимізації доходу" "матриця вихідних масивів"
-------------	---

Рисунок 8.10 – Схема програми моделювання

Входи програми зібрані у матрицю з вісімнадцяти параметрів, вихід програми – десять дискретних функцій часу: вхідні і вихідні темпи депозитів, баланси "вхід-вихід" кредитів і депозитів, ставки кредитів і депозитів, загальний баланс банку та баланс вхідних темпів кредитів і депозитів.

Технологія конструювання моделей ставить специфічні вимоги і до тексту програми і до інтерфейсів. Це можливість доступу до всіх

елементів програми, орієнтованість інтерфейсу на обчислювальний експеримент. Вхідні дані для програми (рис. 6) вводяться з коментарями, у "змістовному вигляді", а потім збираються у матрицю параметрів *tr*. У першому рядку матриці зібрані параметри вхідних і вихідних потоків кредитів, в другому – те ж саме для депозитів.

## Результати тестування програми

Програма моделювання не мала прототипів, тому виконано комплексне тестування для перевірки:

- "синтаксичної" коректності (виявлення банальних помилок – втрачених складових і переплутаних знаків);
- "семантичної" коректності (перевірка результатів моделювання при нульових та рівних ставках, при однакових термінах кредитів і депозитів);
- "прагматичної" коректності (відповідність статистичним даним, можливість налаштування і модифікації програми).

Спочатку була випробувана модель з фіксованими ставками кредитів і депозитів, потім у модель був введений модуль управління з найпростішими законами управління – пропорційними. На рисунку 8.11 наведено приклади двох реалізацій перехідних процесів на відповідних фазових площинах з урахуванням випадкових збурень.

Резерв банку  $резерв := -3$ ; Залишкова частка депозиту  $vnkp := 0.0$ .  
**Ставки:** кредиту  $rko := 0.08$ , депозиту  $rdo := 0.06$ , середні терміни:  
 кредиту  $Tko := 5$ ; депозиту  $Tdo := 3$ .  
**Клієнти:**  
**Кредити:** інерційність  $Tkr1 := 1.1$ ; максимальний рівень  $poko := 21$ ;  
 Параметри попиту-сезонність  $ask := 2$  частота  $om := 1$ , розкид  $\sigma k := 0.1$ .  
**Депозити** інерційність  $Tdpl := 1.1$ ; максимальний рівень  $podo := 21$ ;  
 Параметри пропозиції-сезонність  $asd := 2$  частота  $(=)$  розкид  $\sigma d := 0.1$ .  
 Період моделювання  $Tp1 := 30$ ; число кроків  $Np1 := 150$ ;  $k := 1..Np1$ ;  
 $\Delta t := Tp1 + Np1$   $\Delta t = 0.2$ .  
**Параметри законів управління**  
 регулювання балансу  $K1k := 0.003$ ;  $K1d := 0.003$  натиски;  
 максимізація доходу  $K2k := 0.0003$ ;  $K2d := 0.0003$ ;  $\Delta o := 0.0$ .  
 Матриця параметрів  $mp := \begin{pmatrix} rko & Tko & poko & ask & \sigma k & om & K1k & K2k & Tkr1 \\ rdo & Tdo & podo & asd & \sigma d & vnkp & K1d & K2d & Tdpl \end{pmatrix}$

Рисунок 8.11 – Приклади двох реалізацій перехідних процесів на відповідних фазових площинах з урахуванням випадкових збурень

Перехідні процеси на фазовій площині для випадків стартової ставки кредиту нижче і вище оптимальної наведені на рис. 8.12

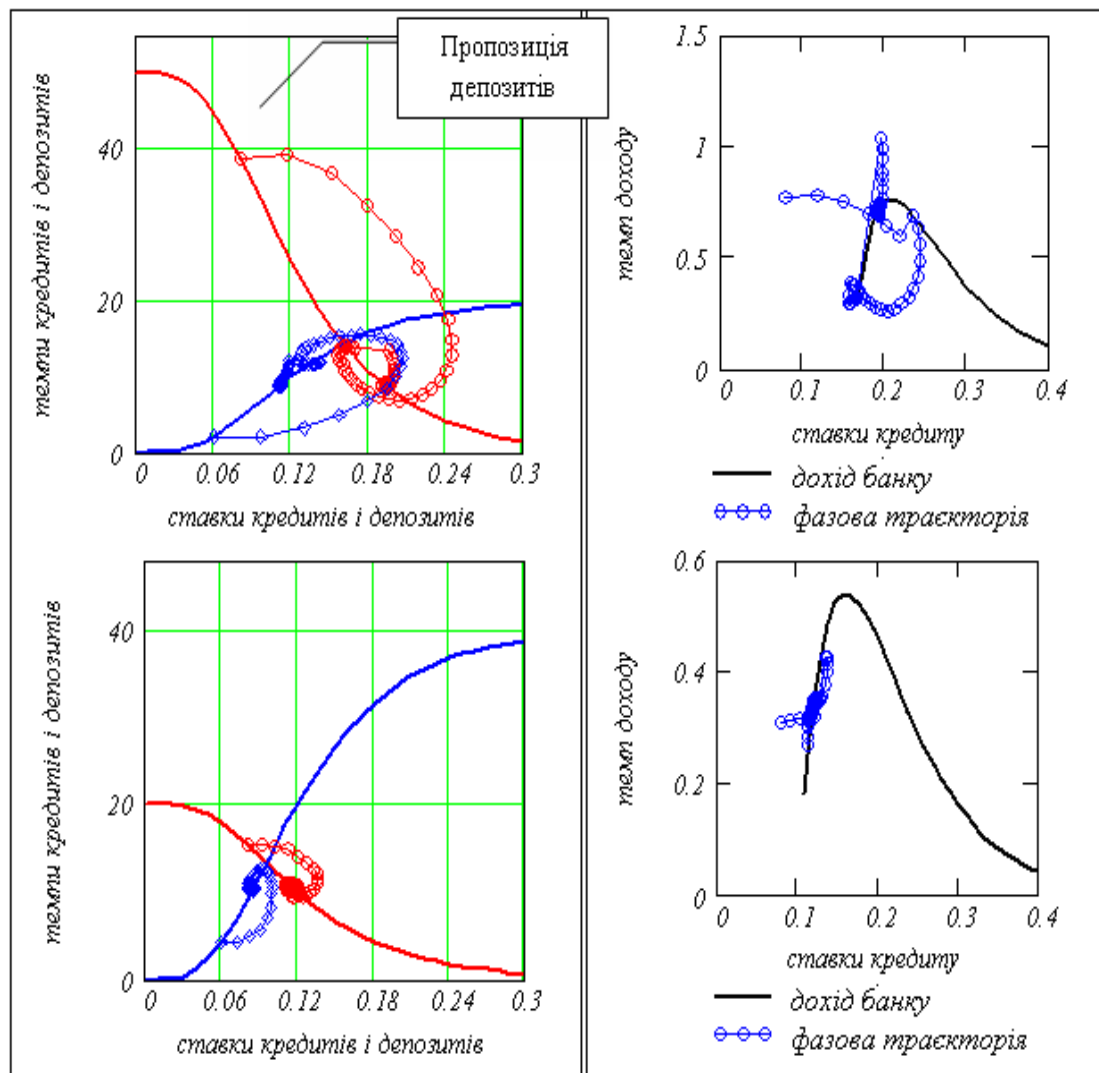


Рисунок 8.12 – Перехідні процеси на фазовій площині для випадків стартової ставки кредиту нижче і вище оптимальної

Бачимо, що:

- а) підсистема стабілізації балансу вхідних потоків кредитів і депозитів працює задовільно;
- б) підсистема максимізації доходу є незадовільною: не в усіх випадках приводить систему до максимуму, іноді – взагалі робить систему нестійкою.

Причини незадовільності підсистеми максимізації:

- а) підсистеми управління діють спільно на об'єкти управління, що може призводити до небажаної інтерференції;

б) занадто великі збурення і неоптимальні значення коефіцієнтів зворотних зв'язків:  $K1k$ ,  $K1d$ ,  $K2k$ ,  $K2d$ ;

в) алгоритм пошуку максимуму має органічний недолік – коли дохід майже незмінний, то припиняється оптимізація.

На рисунку 8.13 подано перехідні процеси в часі для тих же умов, що і на рисунку 8.12. Можемо бачити, що система управління приводить ставки кредиту і депозиту досить точно до оптимального стану (11%, 9%) з початкових станів "малі ставки" та "високі ставки".

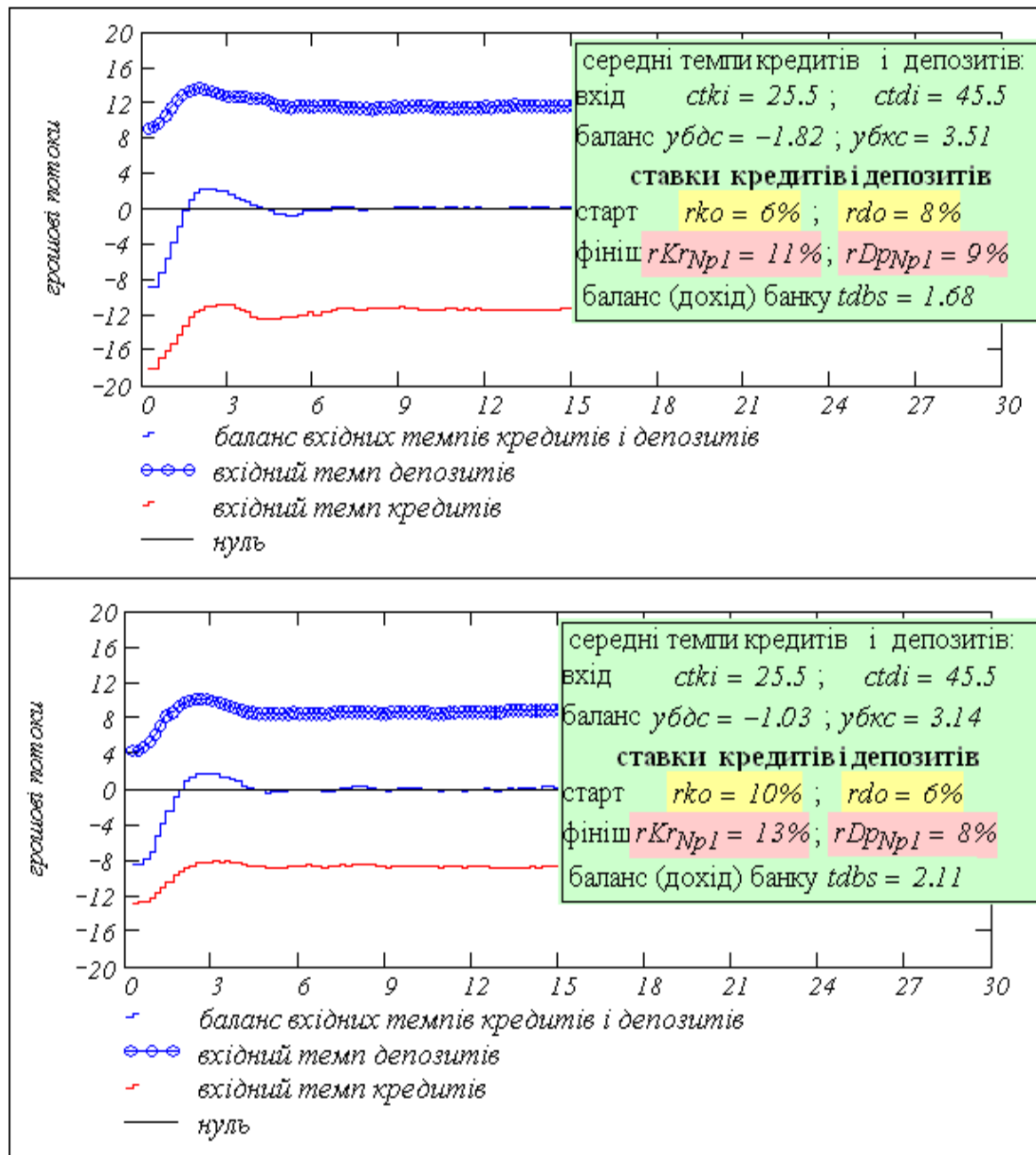


Рисунок 8.13 – Перехідні процеси в часі



## Напрямки розвитку моделі банківської системи

Початкова ціль розробки була в створенні максимально спрощеної математичної моделі банку як системи масового обслуговування. Розробка повинна була дати і дає можливість студентам виконувати експерименти над віртуальною реальністю; дає початкове розуміння суті банківської справи: джерела нестійкості і виникнення "безпричинних" банкрутств. Робочу модель довелося будувати "з нуля". Навіть найпростіша з реалістичних моделей виявилася досить об'ємною. Однак ця модель базова – вона дозволила відносно легко враховувати і досліджувати різноманітні аспекти банківської діяльності. У даній лекції як приклад розширення подано моделі управління банком. Крім цього були розроблені моделі темпів кредитів і депозитів з урахуванням інфляції, конкуренції та панічної поведінки клієнтів. Чисто технічною задачею є модифікація моделі для врахування диференціації ставок кредитів і депозитів а також диференціації клієнтів. Розроблені на базі класичних портфельних задач субмоделі для оптимізації структури активів і пасивів.

## 9 АДАПТИВНІ САУ

### 9.1 Адаптивні САУ з настроюванням власної частоти

*Проблеми при впровадженні адаптивних САУ у інженерну практику.  
Класифікація адаптивних САУ*

Як відомо, адаптивні САУ є нелінійними і нестационарними, навіть якщо об'єкт управління – лінійний. При впровадженні адаптивних САУ у масову інженерну практику можна виділити три класи проблем:

- проблеми реалізації складних, нелінійних алгоритмів, що "остаточно" вирішилися на базі сучасних апаратно-програмних платформ, але виявився брак життєздатних схем і концепцій для адаптивних САУ;
- проблеми міжгалузевих бар'єрів. Традиційно, в першу чергу, адаптивні САУ розробляли для об'єктів авіаційної та ракетно-космічної техніки, в інші галузі (у нас) цей досвід з відомих причин не переносився;
- проблеми небезпечності адаптивних САУ. Стисло це можна сформулювати як емпіричний закон (з виключеннями): чим більше інтелекту ми вкладаємо в систему, тим більш дорогими і різноманітнішими будуть її відмови.

Адаптивні САУ поділяються на два класи:

- аналітичні;
- пошукові.

В аналітичних налаштування параметрів регулятора відбувається за рахунок відомої аналітичної залежності між значеннями параметрів об'єкта, збуреннями і параметрами регулятора.

В пошукових адаптивних САУ налаштування відбувається за результатами пошуку деяким методом "спроб і помилок".

Сьогодні використання систем автоматизованого проектування (САПР) стало необхідною умовою будь-яких технічних систем. Непоміченою, в силу очевидності, концептуальною основою сьогоденних САПР є те, що середньостатистичний коефіцієнт новизни, оточуючих нас технічних систем і виробів, становить 2-5%. Принципово нові вироби і технології є рідкісними, епохальними подіями.

Якщо виділити і параметризувати структуру якогось класу технічних систем, то проектування при малих значеннях коефіцієнту новизни можна звести до заповнення розробником специфікації (фрейма) об'єкту даного класу. Якість результату буде обумовлена трьома факторами:

- якістю фрейма;
- повнотою бази знань (попередніх розробок);
- кваліфікацією розробника.

Направляючий фрейм-сценарій (НФС) заповнення специфікації об'єкту є фактично спеціалізованою експертною надбудовою над іншими – оптимізаційно-розрахунковими і креслярсько-графічними модулями САПР. В цій “екологічній ніші” експертних систем існують зразки настільки ефективні, що сам факт їх існування буває “фірмовим секретом” розробника, а фрейм описується в термінах “це схоже на гру у сім питань”. Між іншим така методологія (“мова виконуваних специфікацій”) є стандартом Міноборони США для розробки програмного забезпечення.

Вибір структур і алгоритмів адаптивної САУ теж може бути автоматизовано використанням відповідного НФС розробки. НФС є лінгвістичною моделлю об'єкта проектування, такою, що коректні відповіді спеціаліста на питання НФС породжують специфікацію системи, реалізація якої може бути повністю автоматизована. Для програмних систем це означає, що специфікація автоматично транслюється у робочу програму. Розробка ефективного НФС вимагає певного концептуального бачення проблеми.

Розглянемо приклад роботи з можливим НФС розробки адаптивної САУ – питання і вибрані відповіді.

«Основний контур системи?» – Об'єкт управління (для прикладу) – 3-ого порядку з такою інтерпретацією компонентів вектора стану:  $x$  – координата;  $v$  – швидкість,  $w$  – прискорення. Закон управління – лінійний, по вектору стану. Вектор управління – одномірний:  $u = k_1 \cdot x + k_2 \cdot v + k_3 \cdot w$ .

«Об'єкт настройки?» – Параметри  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  регулятора.

«Метод настройки?» – З можливих альтернатив настройки параметрів регулятора вибираємо ітеративний метод, тобто контура самонастройки зі зворотним зв'язком, що підтримує задане значення показника якості регулювання.

«Показник якості перехідного процесу? (керована змінна контура самонастройки)» – З можливих альтернатив – від узагальненого інтегрального квадратичного критерія до перерегулювання – вибираємо показник-індикатор, а саме частоту коливань у перехідному процесі, або власну демпфовану частоту  $\omega_d$ .

Індикатор – вимірювана або спостережувана змінна, пов'язана монотонною залежністю з основним критерієм якості, інші назви – підціль, псевдоціль, робочий критерій.

«Засоби дії на показники якості управління в основному контурі?» – Вибираємо безпосередню зміну параметрів регулятора  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  – це будуть управляючі змінні контура самонастройки. У сучасних цифрових регуляторах це потребує тільки зміни параметрів програми управління.

«Спосіб вимірювання власної частоти  $\omega_d$ ?» – 3 можливих альтернатив: перетворення Фур'є, виділення періодичного сигналу з нормалізацією і підрахунком переходів через нуль, вибираємо вимірювання різниці частот  $(\omega_z - \omega_d)$  за допомогою двох аналогових фільтрів або дискретних фільтрів з протилежними частотними характеристиками.

$\omega_z$  – потрібне значення частоти, що обумовлене потрібною швидкодією основного контуру.

7. «Спосіб забезпечення вхідної інформації?» – Щоб вимірювати показники перехідного процесу (ПП) треба стимулювати перехідні процеси. Можливі альтернативи стимуляції ПП:

- а) періодично подавати імпульси на вхід основного контура;
- б) подавати шум;
- в) нічого не подавати, якщо в основному контурі досить шумів та управляючих сигналів.

Для професіонала відповіді на питання (1 – 6) є майже вичерпними для побудови адаптивної САУ, блок-схему якої подано на рисунку 9.1.

В цьому прикладі вибрано варіант, коли потрібна якість управління  $Q_z$  задається непрямо – еталонною власною демпфованою частотою  $\omega_z$ . Дійсна частота  $\omega_d$  при коректному виборі параметрів регулятора  $k_2$ ,  $k_3$  є монотонною функцією параметра регулятора  $k_1$  – "штрафа за помилку", а тривалість перехідного процесу  $T_p$  приблизно пропорційна  $\omega_d$ . Таким чином,  $\omega_d$  – параметр досить просто вимірюваний і досить просто пов'язаний з іншими параметрами САУ:  $k_1$  монотонно змінює значення  $\omega_d$ , яке монотонно пов'язане з  $Q_d$ .

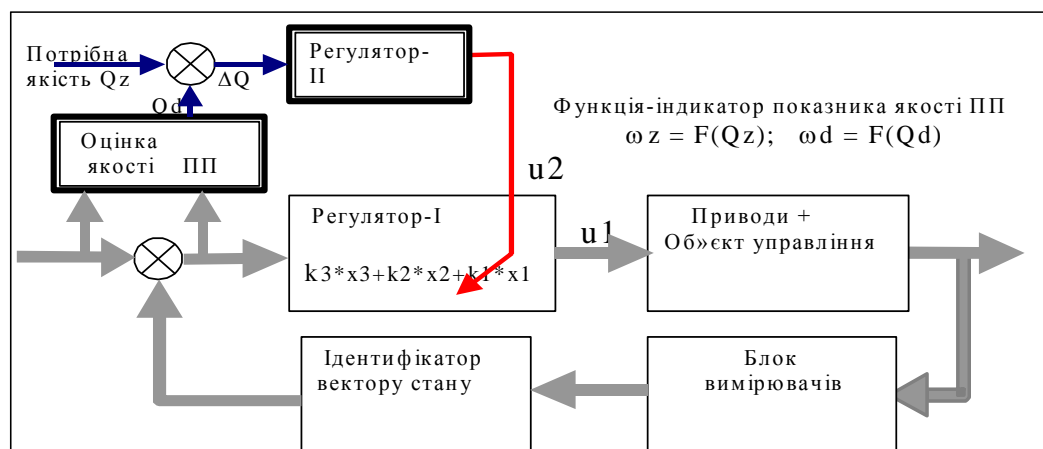
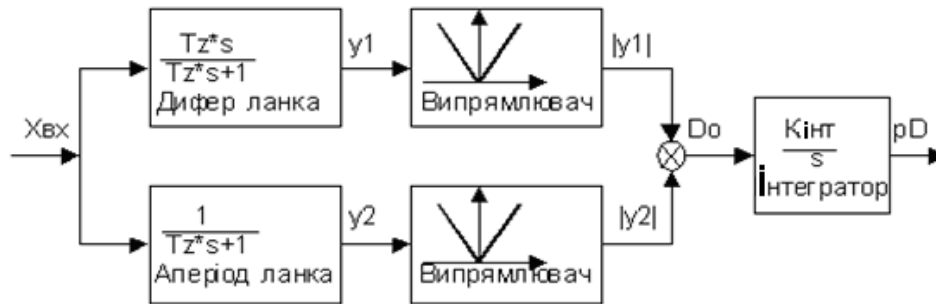


Рисунок 9.1 – Блок-схема адаптивної САУ

### Розробка блок-схеми і математичної моделі частотного дискримінатора



Згідно з «лінійною логікою» слід вибрати метод та пристрій для оптимального вимірювання «чистої» частоти  $\omega_d$ . Розглянемо дві альтернативи реалізації вимірювача частоти – аналогову на базі двох лінійних фільтрів і випрямлячів (рис. 9.2) і програмну реалізацію на базі еквівалентної дискретної моделі цієї аналогової системи.

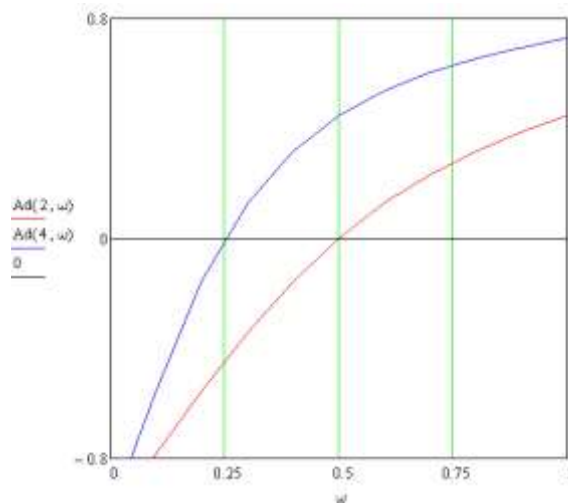


Рисунок 9.2 – АЧХ для двох значень власної частоти

Записуємо вираз для різниці  $A_d(\omega) = A_1(\omega) - A_2(\omega)$ , будуємо графіки. Бачимо, що характеристики такого вимірювача частоти нелінійні:

$$A_1(\omega) = \frac{T \cdot \omega}{\sqrt{1 + T^2 \cdot \omega^2}}, \quad A_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \cdot \omega^2}}, \quad A_d(T, \omega) = \frac{T \cdot \omega - 1}{\sqrt{1 + T^2 \cdot \omega^2}}.$$

Ще один недолік схеми – вихід пропорційний не тільки частоті, але і амплітуді вхідного сигналу. Але, як побачимо далі, цей недолік є дуже великою перевагою. Єдиним реальним недоліком схеми є неможливість використання лінійних методів, що вимагає використовувати технології розробки, орієнтовані на імітаційне моделювання.

Сьогодні в багатьох випадках обробку сигналів вигідніше виконувати в цифрових пристроях. Побудуємо еквівалентну дискретну математичну модель частотного дискримінатора, в якій окремі рівняння відповідають елементам аналогової схеми.

$$\begin{pmatrix} y1_{k+1} \\ y2_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y1_k \\ y2_k \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \omega e \cdot (X(k \cdot T) - y1_k) \\ dX(k \cdot T) - \omega e \cdot y2_k \end{bmatrix} \cdot T,$$

$$pD_1 := 0,$$

$$Do_k := (|y1_k| - |y2_k|), \quad pD_{k+1} := \left[ \frac{pD_k \cdot (k-1) + Do_k}{k} \right].$$

У цій моделі імена змінних аналогічні означенням на рис. 9.3. Зокрема,  $y1$ ,  $y2$  – виходи фільтрів;  $X(k \cdot T)$ ,  $dX(k \cdot T)$  – вхідний сигнал і його похідна;  $P_v$  – еквівалент інтегралу,  $Pd1$  – його початкове значення.

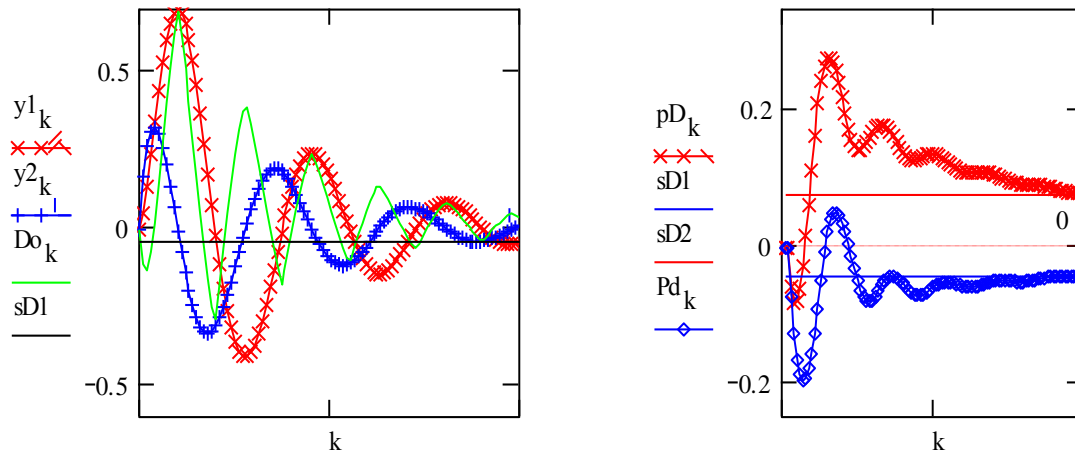


Рисунок 9.3 – Перехідні процеси в частотному дискримінаторі

Записані рівняння є виконуваними в середовищі математичного пакету, і водночас, це майже готова програма реалізації у мікропроцесорній системі. Як приклад досліджень цифрової реалізації на рисунку 9.3 подано графіки процесів у дискримінаторі для випадку згасаючого гармонічного сигналу – імітації імпульсної перехідної характеристики (ІПХ). І для таких сигналів усталений вихід монотонно залежить від різниці частот.

Аналітичне дослідження статичних і динамічних характеристик частотного дискримінатора пов'язане із значними математичними ускладненнями, але можливе, наприклад, на базі методу гармонічної лінеаризації. Можна показати працездатність пристрою на більш складних за спектром вхідних сигналах. Але це зроблено вже за допомогою моделі повної адаптивної системи.

На цих графіках  $pD$  і  $sD1$  – вихід дискримінатора і усталене значення для різниці частот  $\omega_d - \omega_e = 0.1$ ,  $Pd$  і  $sD2$  – теж саме для  $\omega_d - \omega_e = -0.1$ .

### *Розробка математичної моделі САУ з системою самонастройки*

Опорний параметр для системи самонастройки – власна демпфована частота, яка визначається в процесі синтезу основного контура, що є тривіальним для управління по вектору стану лінійним об'єктом і тому не наводиться. Подана далі система рівнянь разом з розташованими рядом графіками і зонами вводу є "стендом" для проведення обчислювальних експериментів.

Головні компоненти "стенду" зібрані в межах однієї екранної сторінки, що дозволяє змінювати параметри, рівняння і оперативно спостерігати перехідні процеси. Можливі такі альтернативи відображення моделі САУ на стенді – реалістичне відображення, блок-схема системи, математична модель (система рівнянь) і гібридні варіанти.

Для розробника-професіонала алгоритмів управління і професіонала у предметній області об'єкта управління найзручніша альтернатива – повністю прозора і відкрита для змін, онлайново діюча (live) математична модель. Проблеми виникають тільки з розташуванням в межах одного екрану моделі високого порядку. Але, як відомо, складніша модель не обов'язково точніша.

На рисунку 8.16 подано спрощений приклад такого стенду з настроюванням тільки одного параметра регулятора –  $K_1$  і без елементів управління експериментом. Для настроювання періодично подаються імпульси (функція  $\text{Im } p(n, N)$ , де  $N$  – кількість тактів квантування між імпульсами).

Фактично це система нелінійних різницевих рівнянь 7-го порядку. Перші три рівняння описують динаміку об'єкта управління. Рівняння (4 – 6) описують частотний дискримінатор, а останнє рівняння – вихід контуру самонастроювання. Користувач може вводити параметри як у зонах вводу – кнопками, спіннерами, слайдерами, так і безпосередньо у самих рівняннях.

Якість контура самонастройки визначають два параметри:  $K_I$  – "штраф за помилку" власної частоти;  $K_{adapt}$  – параметр згладження вихідного сигналу дискримінатора. Ці параметри можуть бути вибрані аналітично (для лінеаризованої моделі контура самонастройки) і пошуковими методами:

- а) "вручну" в середовищі цього документу, за 10-25 хвилин;
- б) за допомогою пошукової системи, що фактично буде контуром самостройки 3-го рівня.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \\ y1_{n+1} \\ y2_{n+1} \\ pD_{n+1} \\ K1_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \\ w_n \\ y1_n \\ y2_n \\ pD_n \cdot \alpha1 \\ K1_n \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} v_n \\ w_n \\ (K1_n - A0) \cdot x_n + (k2 - a1) \cdot v_n + (k3 - a2) \cdot w_n + K1_n \cdot \text{Imp}(n, N) \\ \omega Z \cdot (x_n - y1_n) \\ v_n - \omega Z \cdot y2_n \\ \left[ \frac{(|y1_n| - |y2_n|)}{2} \right] \cdot \omega_{kvant} \cdot (1 - \alpha1) \\ (-pD)_n \cdot K_{adapt} \end{bmatrix} \cdot T$$

На рисунку 9.5 наведено приклади перехідних процесів у адаптивній САУ для випадків початково нестійкого основного контуру. Вибрано аперіодично нестійкий без управління об'єкт класу “нестійкий маятник”, тому основний контур має дві границі стійкості по параметру  $K1$  – верхню (велике  $K1$  і коливальна нестійкість), і нижню (мале  $K1$  і аперіодична нестійкість).

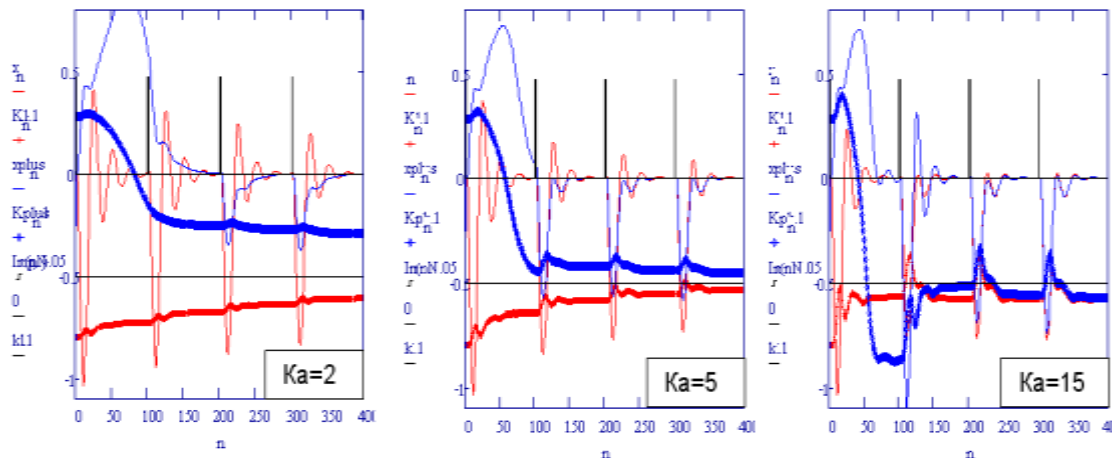


Рисунок 9.5 – Перехідні процеси у адаптивній САУ при різних значеннях  $K_{adapt}$

На цих графіках тонкі лінії – перехідні процеси в основному контурі – реакції на тестові імпульси, що подаються з певним періодом, жирні лінії – перехідні процеси в контурі адаптації (самонастроювання), тобто зміна параметру  $K1$  основного контуру (штрафу за помилку координати). Горизонтальні лінії – потрібні виходи основного контуру (нульова помилка координати) і контуру адаптації – розрахункові значення  $K1$ , яке забезпечує вибраний (заданий) перехідний процес в основному контурі.

Зауваження. Для прикладу на етапі синтезу основного контуру вибрано перехідний процес з підвищеною коливальністю.



Неважко на даній системі моделювання поставити інші обчислювальні експерименти. Розглянемо приклад дослідження впливу шумів в основному контурі. Ці шуми, з одного боку – завади, збурення, з іншого – стимулятор реакцій основного контуру, тобто джерело потрібної для самонастроювання інформації. Для моделювання системи за наявності шумів достатньо сконструювати функцію *Шум(.)* і замінити нею функцію генерації тестових імпульсних сигналів *Imp(.)* у «стенді».

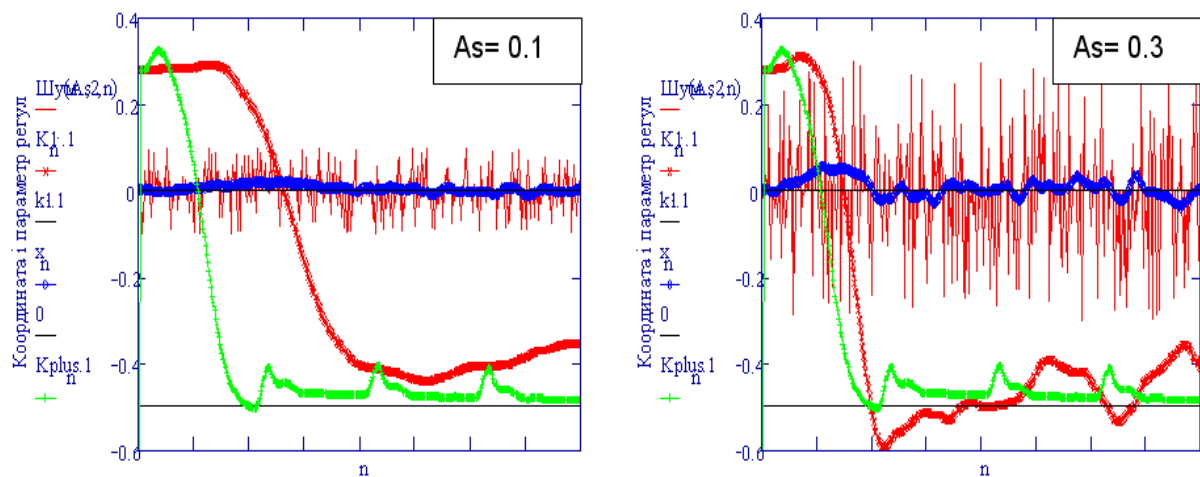


Рисунок 9.6 – Вплив шумів в основному контурі

На рисунку 9.6 подано графіки перехідних процесів в адаптивній САУ при дії шумів різної амплітуди ( $A_s=0.1$ ,  $A_s=0.3$ ). Дослідження дозволяють зробити висновок, що в певному діапазоні амплітуди  $A_s$  шуму, САУ буде стійкою і задовільною, але процес адаптації стає ймовірнісним і в середньому повільнішим, ніж при дії імпульсних тест-сигналів. На графіку для порівняння подано процес зміни  $K_1$  при дії імпульсних тестових сигналів. За занадто малої амплітуди шуму настроювання стає повільним, а при великій – контур адаптації працює нестабільно.

## 9.2 "Швидка" адаптивна САУ

Визначимо термін – "швидка". Класичні адаптивні САУ з підручників і монографій виникли як надбудови над звичайними регуляторами. Контур адаптації в такій САУ формував інформацію про якість перехідного процесу і згідно з цим змінював параметри регулятора основного контуру.

Номінально в такій САУ мало місце запізнювання на величину тривалості перехідного процесу. З урахуванням шумів, накопичення даних

і фільтрації запізнення могло бути ще більшим. Такі адаптивні САУ могли успішно працювати на об'єктах з дуже повільною зміною параметрів.

Для випадків, коли параметри об'єкта значно змінюються (більше 10% за період перехідного процесу), потрібні інші рішення. Одне з таких рішень подається в даній лекції. Суть його в тому, що під певний клас об'єктів і певний клас структур регуляторів (лінійний, релейний) можна знайти, підібрати параметризовані ПРАВИЛА зміни параметрів регулятора, виходячи з прогнозу поведінки об'єкта на базі значень поточного вектора стану.

Правило – певне висловлювання, наприклад: "якщо компоненти вектора стану задовольняють певне відношення  $\forall (x_1, x_2, x_3, \dots)$ , то змінити параметри регулятора згідно з алгоритмом  $A(k_1, k_2, k_3, \dots, x_1, x_2, x_3, \dots)$ ".

Такі правила фактично задають розбиття простору стану на класи еквівалентності. Знаходження правил – нетривіальна задача, тому існує метаправило: якщо правило працездатне, не слід робити його загальновідомим.

*Розробка базової програми моделювання "швидкої" адаптивної САУ*

Прочитаємо дані з файлів:

$K := \text{READPRN}("t21.prn"); K = (0.342 \ 0.486 \ -2.87 \ -2 \ 2 \ 1 \ 0.2 \ 10 \ 0.15);$

$ORIGIN := 1.$

Розшифровуємо дані з файлу:

$kn1 := K_{1,1}; kn2 := K_{1,2}; kn3 := K_{1,3}$  – номінальні параметри регулятора;

$a2 := K_{1,4}; a1 := K_{1,5}; a0 := K_{1,6}$  – номінальні параметри об'єкта;

$T := K_{1,7}; Trz := K_{1,8}; hmr := K_{1,9}$  – вимоги до якості регулювання.

Виводимо для контролю дані – номінальні параметри регулятора та параметри моделі об'єкта:

$kn1 = 0.342; kn2 = 0.486; kn3 = -2.87; a2 = 2; a1 = 2; a0 = 1; T = 0.2; hmr = 0.15,$   
задаємо кількість кроків моделювання:

$N := 150; n := 1 \dots N.$

*Записуємо компоненти математичної моделі об'єкта та початкові умови*

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad x^{<1>} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad k1 := -4; \quad k2 := -4; \quad k3 := -4.$$

Задача 1. На базі поданої вище інформації, використовуючи формули, побудуйте схему адаптивної системи.

Задаємо крок  $T := 1$ , точність обчислень  $TOL = 0.001$ ;  $t_n := T \cdot n$ ;  $j := 1..3$ . Вводимо розширений вектор стану, задаємо початкове значення вектора параметрів регулятора:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ k1_1 \\ k2_1 \\ k3_1 \\ u_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ Ko_1 \cdot 1 \\ Ko_2 \\ Ko_3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad Ko = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad \boxed{\gamma := 0.15} \text{ – параметр настроювання.}$$

Вводимо значення параметра настроювання і записуємо рівняння системи: перші три рівняння – 1, 2, 3 – описують динаміку об'єкта управління певного класу; рівняння 4, 5, 6 – настроювання параметрів об'єкта за певними правилами; рівняння 7 – регулятор.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \\ k1_{n+1} \\ k2_{n+1} \\ k3_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \\ w_n \\ k1_n \\ k2_n \\ k3_n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \cdot v_n \\ 1 \cdot w_n \\ -a0 \cdot x_n - a1 \cdot v_n - a2 \cdot w_n + (k1_n \cdot x_n + k2_n \cdot v_n + k3_n \cdot w_n) \\ \text{Наст}[x_n, (k1_n + 5)] \cdot 5 \\ -\text{Наст}[v_n, (k2_n + 5)] \cdot 16 + \text{Наст}[x_n, (k1_n + 1)] \cdot (-7) \\ \text{Наст}[w_n, (k3_n + 7)] \cdot 2 + \text{Наст}[x_n, (k1_n + 1)] \cdot (-2) \\ k1_n \cdot x_n + k2_n \cdot v_n + k3_n \cdot w_n \end{bmatrix} \cdot T_{\varepsilon} := \begin{pmatrix} k1_N \\ k2_N \\ k3_N \end{pmatrix}$$

Задача 2. Дивлячись на систему рівнянь вище, зробіть програму моделювання адаптивної САУ. Визначте через цю програму функцію користувача за таким зразком.

Будуємо графіки перехідних процесів в системі.

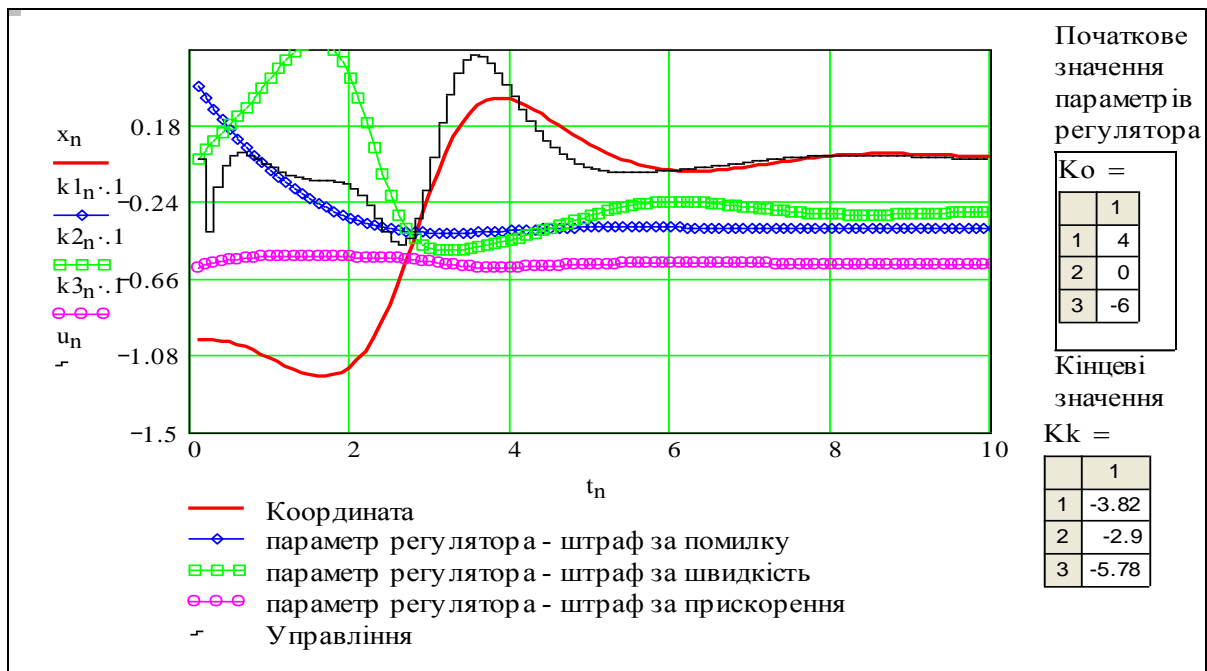


Рисунок 9.7 – Графіки перехідних процесів в системі

Перший об'єкт дослідження – залежність кінцевих значень параметра регулятора від початкових – нагадуємо, що ми досліджуємо суттєво нелінійну і нестационарну систему. Вводимо початкове, а виводимо кінцеве значення. Також вводимо змінні для графіків.

$$Ko \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad Kk = \begin{pmatrix} -3,82 \\ -2,9 \\ -5,78 \end{pmatrix}; \quad xv_n := x_n; \quad uv_n := u_n; \quad kv1_n := k1_n; \quad kv2_n := k2_n; \quad kv3_n := k3_n.$$

Подивимось на графіки (рис. 9.7): наведено перехідні процеси для нестійкого недемпфованого об'єкта з нестійким на початку регулятором. Бачимо, що процеси стабілізації об'єкта і процеси настроювання закінчуються одночасно. Система в цілому стійка.

Дивимось ще вище на систему рівнянь. Бачимо, що настроювання всіх параметрів регулятора виконується функцією Наст (Координата, Параметр регулятора), в яку власне "вкладена" вся складність алгоритму настроювання.

Бачимо очевидну недосконалість системи: велику кількість чисел – параметрів "підстроювання" системи самонастроювання. Якщо неможливо раціонально задати ці параметри (аналітично чи через певні процедури), то це означатиме нежиттєздатність даної адаптивної системи. Залишаємо цю проблему для самостійного розв'язання.

Бачимо очевидну обмеженість моделі об'єкта управління: це "динаміка матеріальної точки з ненульовою масою". Це вузький для теорії і поширений для практики клас динамічних систем. Згадаємо задачу термінального управління попереднього семестру – там ми теж почали з розгляду руху матеріальної точки.

### *Дослідження "швидкої" адаптивної системи. Вплив початкових умов*

Ми отримали не стільки ключ до знань, скільки інструмент – "відмичку". Проведемо серію пошукових експериментів на моделі адаптивної системи. Далі подано серію копій екрану. На графіку (рис. 9.8) наведено перехідні процеси для координати, параметрів закону управління, управління та числові значення параметрів управління в початковий і кінцевий моменти процесу.

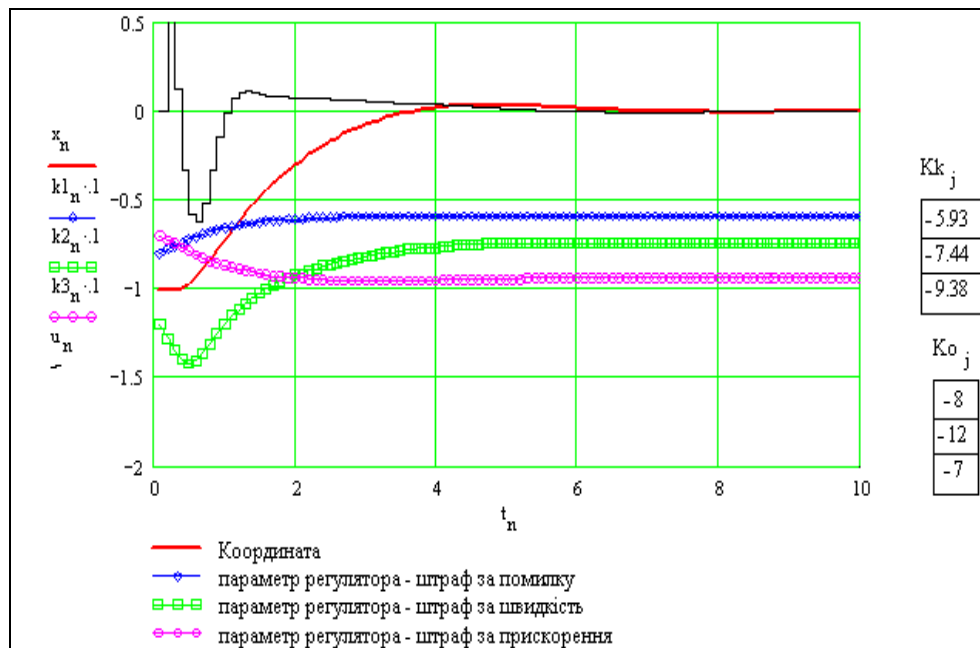


Рисунок 9.8 – Перехідні процеси для координати, параметрів закону управління, управління та числові значення параметрів управління в початковий і кінцевий моменти процесу

Бачимо, що параметри регулятора змінюються несуттєво – система є задовільною.

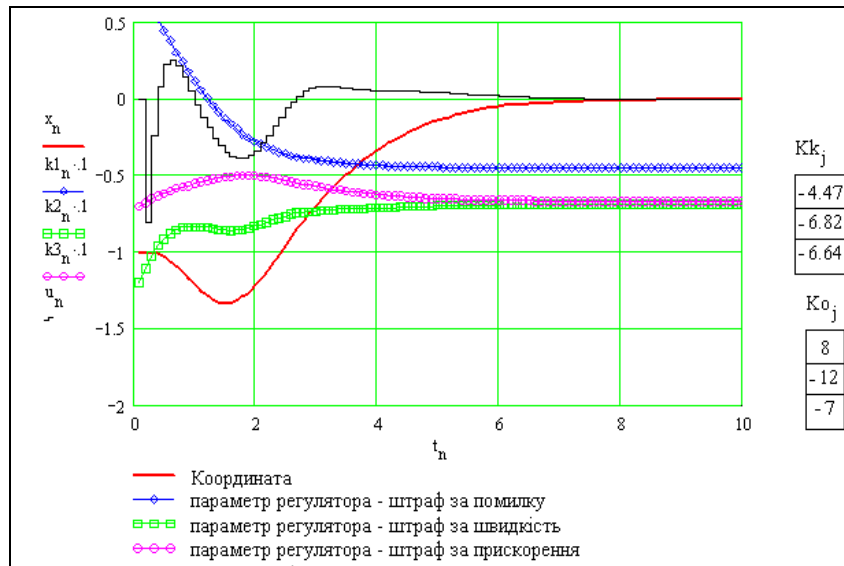


Рисунок 9.9 – Зміна параметрів регулятора

Бачимо на рисунку 3, що час перехідного процесу по координаті збільшується порівняно з попереднім випадком – з 4 до 6. В цілому всі процеси стійкі. Кінцеві параметри регулятора приблизно такі, як і в попередньому випадку.

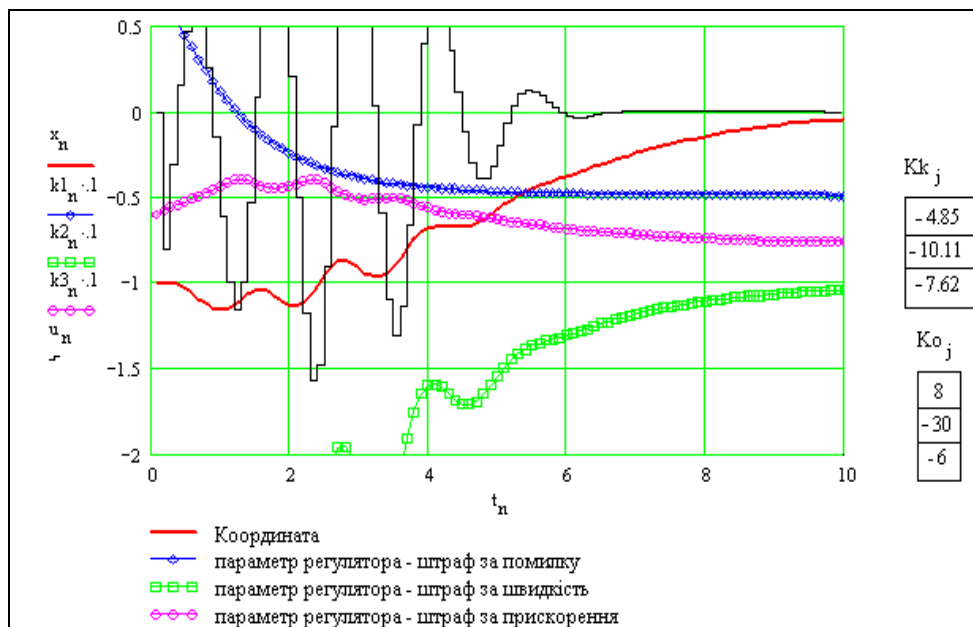


Рисунок 9.10 – Кінцеві параметри регулятора

Бачимо на рисунку 9.10, що перехідний процес по координаті не тільки розтягнутий, але й коливальний. Масмо колювання управління з великою

амплітудою. Цей експеримент є цінним: ми знайшли "хворобу" нашої адаптивної системи.

Порівняно зі звичайними САУ наша система має антиінтуїтивну поведінку: при збільшенні початкового демпфування виникають високочастотні коливання управління. В цілому процес є стійким.

### *Дослідження "швидкої" адаптивної системи. Вплив параметрів настроювання*

Запропонована адаптивна система – необґрунтована, невпорядкована, єдина позитивна якість – вона працює. В алгоритмі настроювання маємо десять параметрів. Природно припустити, що між ними є певні залежності, що їх число можна зменшити, що їх величини можна не підбирати, а розраховувати. Перший крок на цьому шляху – провести прості дослідження впливу цих параметрів на якість перехідних процесів в адаптивній системі.

Зробимо ще один екземпляр програмного об'єкта "рівняння динаміки адаптивної системи". Змінюємо відповідні параметри і будуємо разом два набори перехідних процесів.

Тест. Якщо Ви достатньо орієнтуєтесь в динамічних системах, у формах опису їх динаміки (диференціальні, різницеві рівняння), то вам неважко визначити, який параметр "приховано" під псевдонімом  $Mu\_My$ .

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \\ k_{1n+1} \\ k_{2n+1} \\ k_{3n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \\ w_n \\ k_{1n} \\ k_{2n} \\ k_{3n} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \cdot v_n \\ 1 \cdot w_n \\ -a_0 \cdot x_n - a_1 \cdot v_n - a_2 \cdot w_n + (k_{1n} \cdot x_n + k_{2n} \cdot v_n + k_{3n} \cdot w_n) \\ \text{Наст}[x_n, (k_{1n} + 5)] \cdot 44 \\ -\text{Наст}[v_n, (k_{2n} + 5)] \cdot 26 + \text{Наст}[x_n, (k_{1n} + 1)] \cdot (1) \\ -\text{Наст}[w_n, (k_{3n} + 1)] \cdot 1 + \text{Наст}[x_n, (k_{1n} + 1)] \cdot (-2) \\ k_{1n} \cdot x_n + k_{2n} \cdot v_n + k_{3n} \cdot w_n \end{bmatrix} \cdot Mu\_My$$

На рисунку 9.11 подано разом два перехідних процеси – один для випадку, коли параметри регулятора більше номінальних, другий для випадку, коли параметри регулятора менше номінальних.

Термін "номінальне значення параметрів регулятора" має дві інтерпретації:

- оптимальні значення параметрів, знайдені певним методом синтезу;

– усталені значення параметрів, що є результатом функціонування адаптивної системи.

Для кожного процесу виведено по шість змінних – три координати вектора стану об'єкта і три параметри регулятора.

Бачимо, що система настроюється при довільних початкових значеннях параметра регулятора  $K1$ , якщо встановлені достатні значення  $K2$  і  $K3$ . Система може настроїтись з нульового демпфування, якщо  $K1$  є номінальним.

Можемо виділити такі недоліки адаптивної системи:

- усталені помилки в контурі адаптації – при різних параметрах системи настроювання, коефіцієнти основного контуру  $K1$ ,  $K2$ ,  $K3$  встановлюються на близьких, але різних значеннях;
- не використано нечітку логіку.

Головна перевага адаптивної системи – процес настроювання виконується протягом перехідного процесу в основному контурі.

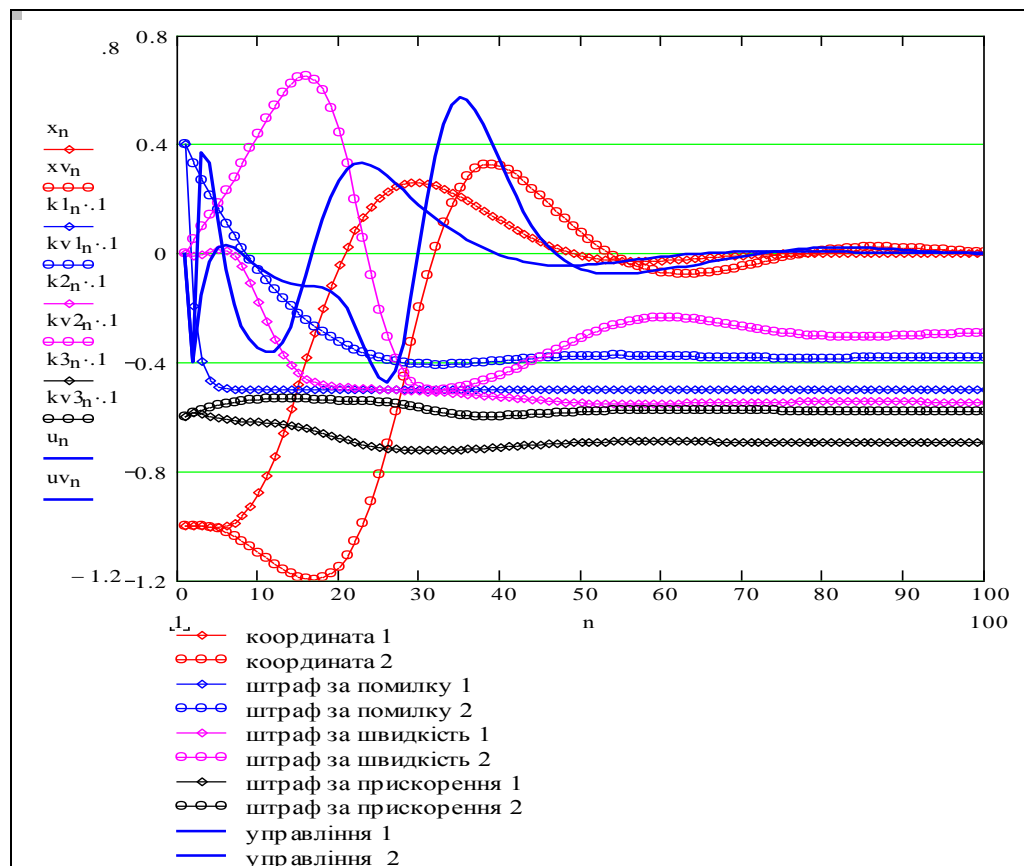


Рисунок 9.11 – Два перехідних процеси

*Альтернативні методи отримання інформації для настроювання*

- За рахунок чого настроювалася наша система?
- За рахунок аналізу поведінки системи в перехідному процесі.



– А якщо помилка в системі нульова, перехідні процеси відсутні?  
 – Ми вже знаємо, що в такому випадку настроювання не буде – вчаться саме на помилках.

Для процесу навчання (адаптації) слід забезпечити систему перехідними процесами помірного рівня: достатньо інтенсивними для навчання, і недостатньо – для виникнення нестійкості. Забезпечити адаптивну систему потрібною інформацією можна такими способами:

- періодична подача тестових імпульсів;
- подача гармонійного сигналу;
- подача "білого шуму".

Ці сигнали додаються до основного сигналу управління і є малими відносно середньої величини сигналу управління. Коли САУ працює в умовах постійних збурень і шумів (у вимірювачах та виконавчих елементах), то ці спеціальні сигнали для настроювання не потрібні.

Задаємо число кроків моделювання  $N := 400$ ;  $n := 1..N$ , дискретний

$$\text{час } t_n := T \cdot n, \text{ початковий вектор стану } \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ k1_1 \\ k2_1 \\ k3_1 \\ u_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \\ Ko_1 \cdot 1 \\ Ko_2 \\ Ko_3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ та параметри}$$

$$\text{регулятора } \begin{pmatrix} k1_1 \\ k2_1 \\ k3_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Формуємо тестові сигнали:

гармонійні:

$$Grm(n, \omega v) := 0.15 \cdot \sin(\omega v \cdot n \cdot T);$$

випадкові:

$$Шум(As, ks, n) := As \cdot (rnd(2) - 1) \cdot if(\text{mod}(n, ks) = 0, 1, 0);$$

імпульсні:

$$Imp(n, Ai, N) := if\left(\text{mod}\left(n - 1, \frac{N}{4}\right) > 0, 0, 1\right) \cdot A.$$

Задаємо параметри тестових сигналів:

$$\omega v := 0.8; As := 0.9; ks := 4; Ai := 8.$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \\ k1_{n+1} \\ k2_{n+1} \\ k3_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \\ w_n \\ k1_n \\ k2_n \\ k3_n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \cdot v_n \\ 1 \cdot w_n \\ (k1_n - a0) \cdot x_n + (k2_n - a1) \cdot v_n + (k3_n - a2) \cdot w_n + k1_n \cdot \text{Imp}(n, Ai, N) \\ \text{Наст}[x_n, (k1_n + 5)] \cdot 5 \\ -\text{Наст}[v_n, (k2_n + 7)] \cdot 22 + \text{Наст}[x_n, (k1_n + 2)] \cdot (-3) \\ \text{Наст}[w_n, (k3_n + 7)] \cdot 2 + \text{Наст}[x_n, (k1_n + 1)] \cdot (-0) \\ k1_n \cdot x_n + k2_n \cdot v_n + k3_n \cdot w_n \end{bmatrix} \cdot T$$

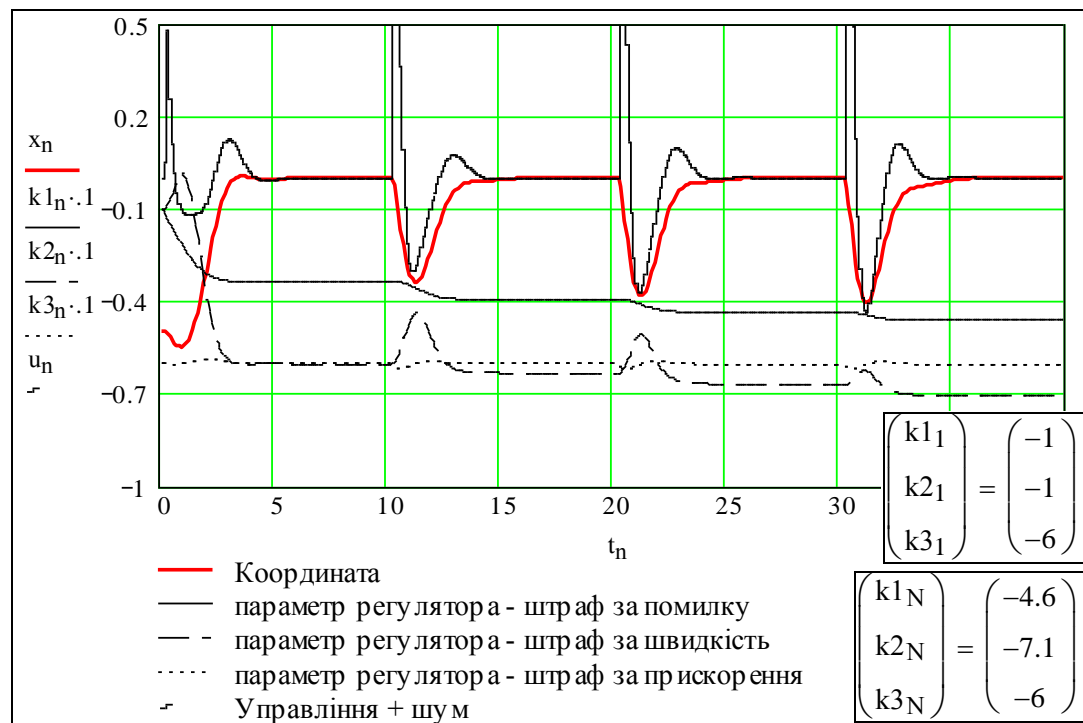


Рисунок 9.12 – Зміна нестійкої САУ на стійку

На рисунку 9.12 бачимо як спочатку нестійка САУ вже після першого імпульсу стає стійкою. Недолік даних імпульсних сигналів – ненульове середнє значення, слід чергувати додатні і від’ємні імпульси.

Система досить швидко настраюється під дією шумів (рис.9.13). Чим більше рівень шуму, тим швидше проходить настроювання, однак шуми – це збурення. Звичайно роблять рівень тестових шумів змінним – так, щоб вони зменшувались з часом. Однак це створює нові проблеми – надійності: все, що ми робимо змінним, може змінюватись зовсім в іншу сторону.

Використовуючи гармонійний тестовий сигнал, бачимо (рис.9.13), що процес настроювання подібний до процесу настроювання при випадкових сигналах. Побічна проблема – коефіцієнти регулятора мають гармонійну складову. Як і при інших видах тестових сигналів, слід вибрати їх оптимальний рівень.

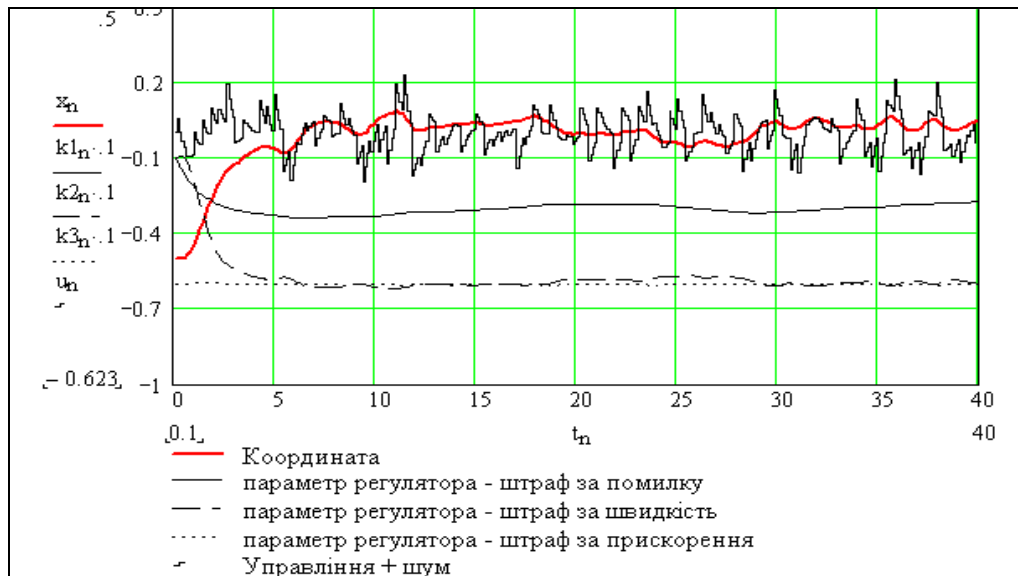


Рисунок 9.13 – Настроювання системи під дією шумів

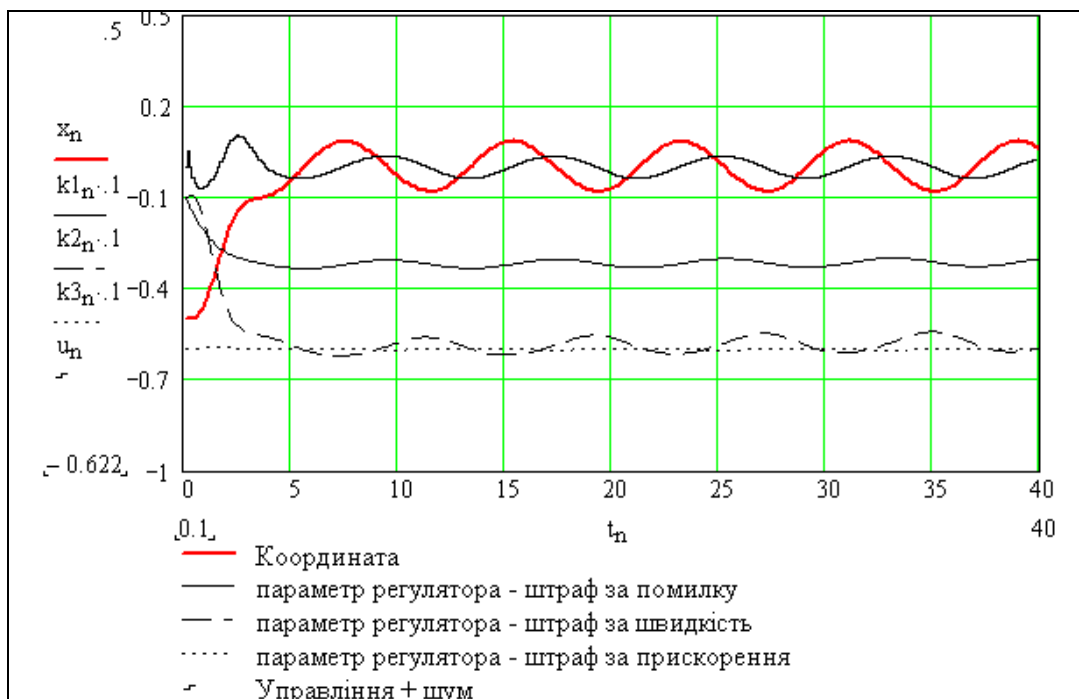


Рисунок 9.14 – Використання гармонічного тестового сигналу

Таким чином, отримали певну робочу гіпотезу, придатну, як мінімум для розбудови магістерської, кандидатської, інших видів дисертацій. Можна довести цю адаптивну систему до практичного використання.

У цій лекції отримали підтвердження головного принципу роботи з адаптивними та іншими інтелектуальними системами: завжди слід пам'ятати, що ці системи звичайно створюють більше проблем, ніж розв'язують.

Розглянута система має ряд недоліків. Існують два шляхи усунення недоліків – налаштувати "сторожів, щоб стерегти сторожів" та збирати мережеві системи з альтернативних регуляторів, прямувати до певної диверсифікації.

При бажанні можна назвати ці системи: "штучні нейронні мережі", "штучні соціальні мережі", "колективи автоматів", "ансамблі динамічних систем", навіть "нейродинамічні системи". На жаль, ці властивості систем не позбавляють від необхідності думати. Однак думати слід за раціональними технологіями і предметно. Ця лекція – приклад предметного думання: гіпотези, висновки, рішення реалізуємо в середовищі математичного пакета MathCad, експериментуємо, і так отримуємо предметний матеріал для роздумів.

Це не "нова інформаційна технологія", а скоріше напівзабута інтелектуальна технологія. Відомо, що більшість видатних конструкторів зброї (лауреатів, академіків), починали слюсарями, і потім кожний елемент гвинтівки чи автомата випробовували тисячі разів своїми руками.

### 9.3 Адаптивна САУ на базі нечіткої логіки

Що таке регулятор? З фундаментально-філософської точки зору це просто відношення, перетворення, обернене до перетворення об'єкта управління:

$$x = \text{Obj}(u); \quad u = \text{Reg}(x); \quad x = \text{Obj}(x, \text{Reg}(x)); \quad x = \text{Obj}(\text{Obj}(x)^{-1}),$$

звідки маємо:

$$x = x.$$

Принцип оберненої моделі можна реалізувати методами нечіткої логіки – побудувати регулятор, що буде поступово налаштовуватись на динаміку певного невизначеного, нелінійного, нестационарного об'єкта управління.

Справжня нечітка логіка досить незвична для осмислення. Тому почнемо з найелементарнішого прикладу – регулятора для статичного об'єкта. Між іншим цей приклад має певне практичне значення для побудови регулятора ustalених станів для динамічного об'єкта.

Пройдемо крок за кроком увесь шлях від концепції до розробки програми реалізації адаптивного регулятора на базі нечіткої логіки.

### *Постановка задачі*

Викладемо ідею нечіткого адаптивного регулятора, як вона подана в книзі М. Пешеля. Задано об'єкт управління, що описується в ідеальному випадку чіткою залежністю:

$$y = f(x).$$

Однак ця залежність з різних причин нечітка (неповністю визначена, розмита). Поставимо за мету (а не ціль, тому що поки не знаємо, як це зробити) розробку системи, що використовує інформацію про дійсну реакцію об'єкта для настроювання регулятора.

#### *Конструювання розподілу нечіткості (функції належності) регулятора*

Для того, щоб отримати змістовну (чітку) уяву про нечітку логіку, зробимо робочу модель нечіткої функції однієї змінної і поекспериментуємо з нею.

Задаємо параметри

$$ORIGIN := 1; A := 0.4; \alpha := 0.5.$$

і чітку функцію:

$$f(x) := A \cdot x^{\alpha}.$$

"Розмиваємо" (фазифікуємо) цю функцію – задаємо певний двовимірний розподіл нечіткості.

$$P_{ннч} = fz(x, y),$$

де  $y = f(x)$ .

Робимо це так:

– задаємо параметр розмитості (дисперсія)

$$\sigma(x) = 0.08 \cdot (1 + 2 \cdot x);$$

– у цілях економії інтелекту для розподілу нечіткості, використовуємо вбудовану функцію нормального розподілу:

$$fz(x, y) := dnorm(x - y, y, \sigma(x)).$$

Формат цієї функції:

*dnorm (вхідна\_змінна, математичне\_очікування, дисперсія).*

Задаємо розмір сітки:

$$Di := 40 \text{ та індекси: } i := 1..Di; j := 1..Di; ha := \frac{1}{Di}.$$

Робимо програму для розрахунку масиву значень і будуємо тривимірні графіки функції розподілу нечіткості. Дивимось на графіки на рисунку 9.15. Бачимо нечітку залежність. На одному з графіків подано перетини, що відповідають розподілам нечіткості для відповідних значень вхідної змінної, на другому графіку – лінії рівня. Ми зробили величину нечіткості (дисперсію) пропорційною величині вхідної змінної. Це іноді відповідає реальності.

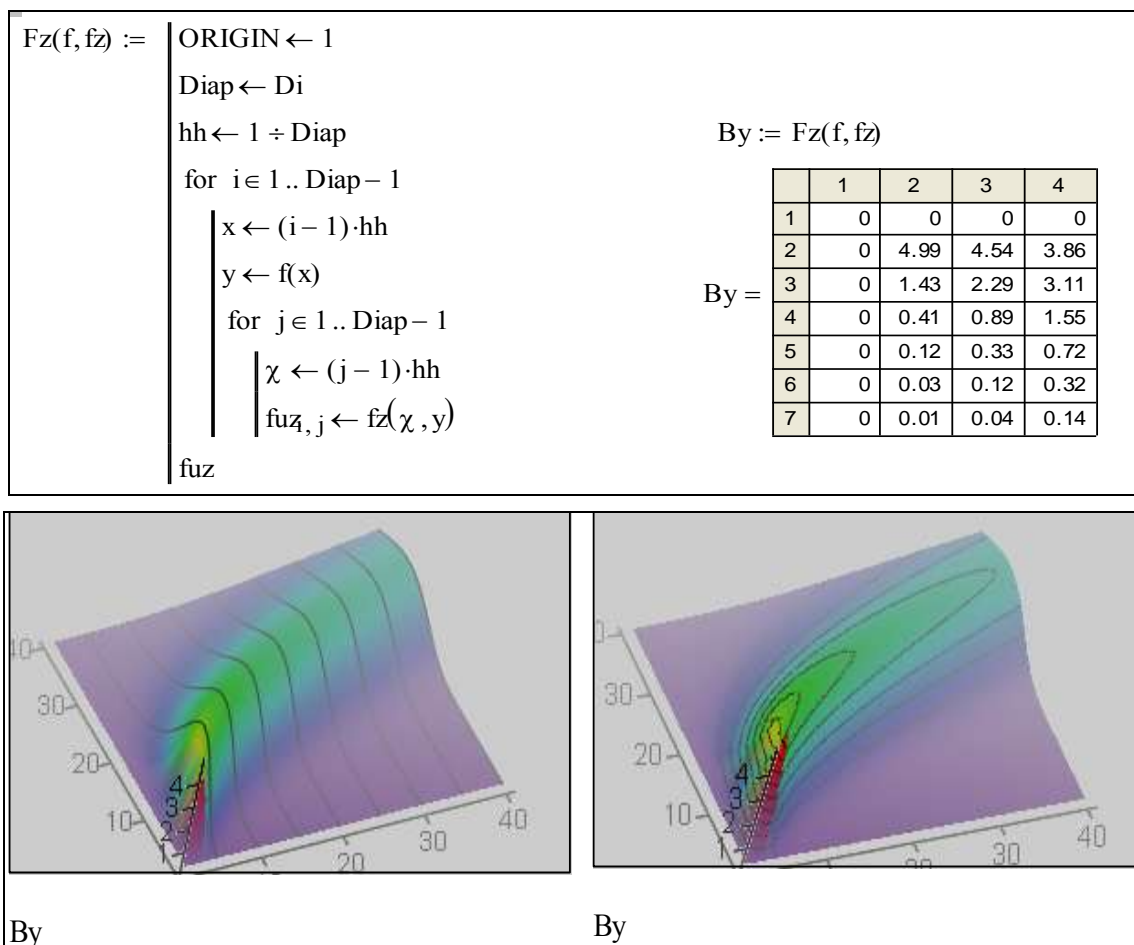


Рисунок 9.15 – Нечітка залежність

Вчимось маніпулювати віртуальною реальністю – витягнемо розподіли нечіткості:

$$\text{Obno}^{\langle j \rangle} := \text{match} \left[ \max \left[ \left( \text{By}^T \right)^{\langle j \rangle} \right], \text{By} \right]_1.$$

Ось що робить ця формула:

$$\text{match} \left[ \max \left[ \left( \text{By}^T \right)^{\langle 20 \rangle} \right], \text{By} \right]_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix},$$

тобто вона визначає координати максимуму розподілу нечіткості (характеристики регулятора при заданому значенні вхідної змінної  $j$ ).

Задаємо пару значень:

$$j_1 := 5; \quad j_2 := 20.$$

Будуємо графіки (рис. 9.16).

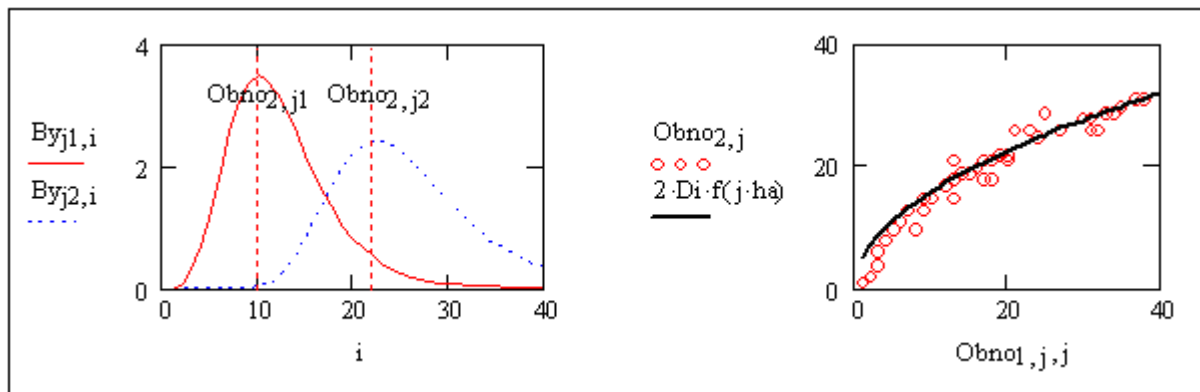


Рисунок 9.16 – Побудова графіків

На рисунку 9.16 наведені розподіли нечіткості для двох значень  $j_1=5$ ,  $j_2=20$ , а також "чітка" функція регулятора на фоні максимумів відповідної функції розподілу нечіткості.

### *Конструювання алгоритму адаптації*

Для реалізації і моделювання нечіткого регулятора потрібно вибрати і реалізувати такі функціональні модулі:

1. Функція належності одного експерименту (проби): задано певний випадковий вхідний сигнал, який подано на модель об'єкта і отримано певний вихідний сигнал, що є результатом дії деякого чіткого механізму і різних видів невизначеностей (збурення, помилки вимірювання, квантові

та інші властивості об'єкта). Можливо, що і вхідний сигнал реалізується з певними похибками. Треба задати відповідний двовимірний розподіл ймовірностей.

2. Імітація події: за допомогою певного генератора, відповідно до розподілу нечіткості, формується реалізація  $(x_p, u_p)$ .

3. Комбінування функції належності регулятора та проби. Альтернативи комбінування розглянуто далі.

4. Конструювання функції належності для об'єкта управління. Задаємо функцію розподілу нечіткості регулятора:

$$dX_v(x, u) := dnorm\left[x - 2, .1u^2, \left[0.7 + 0.04 \cdot (u - 1)^2\right]\right],$$

дискретизуємо цю функцію

$$x := 0, .5 .. 20; \quad u := 0, .5 .. 20; \quad X_i := i - 1; \quad U_j := j - 1; \quad mO_{i,j} := dX_v(X_i, U_j).$$

5. Конструювання функції належності для вимірювання виходу об'єкта управління. Задаємо функцію розподілу нечіткості проби (подали вхід – отримали вихід)

$$dX_i(x, u, x_i, u_i) := dnorm\left[x - x_i, x_i, \left[\sigma_p + 0.001 \cdot (x)^2\right]\right] \cdot dnorm\left[u - u_i, u_i, \left[\sigma_p + 0.0005 \cdot (u)^2\right]\right]$$

$$K_{ys} := 3; \quad X_i := i - 1; \quad U_j := j - 1.$$

Задаємо функції розподілу для декількох проб:

$$\begin{aligned} ri_{1,j} &:= K_{ys} \cdot dX_i(X_i, U_j, 2, 5); \\ ri_{2,j} &:= K_{ys} \cdot dX_i(X_i, U_j, 7, 9); \\ ri_{3,j} &:= K_{ys} \cdot dX_i(X_i, U_j, 11, 8); \\ ri_{4,j} &:= K_{ys} \cdot dX_i(X_i, U_j, 13, 9); \\ ri_{5,j} &:= K_{ys} \cdot dX_i(X_i, U_j, 16, 12). \end{aligned}$$

Записуємо альтернативи згортки розподілів нечіткості:  
добуток:

$$QQ := \overrightarrow{[(ri_1 + 1) \cdot (ri_2 + 1) \cdot (ri_3 + 1) \cdot (ri_4 + 1) \cdot (ri_5 + 1) \cdot (By + 1)]};$$

сума:

$$PP := \overrightarrow{(ri_1 + ri_2 + ri_3 + ri_4 + ri_5 + 0.3 \cdot By)}.$$

На рисунку 9.17 подано настроювання нечіткого регулятора.



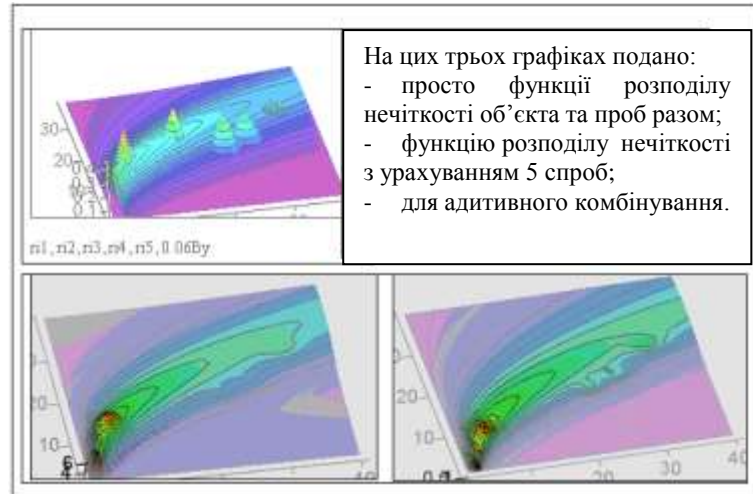


Рисунок 9.17 – Настроювання нечіткого регулятора

### *Конструювання програми функціонування системи з нечітким регулятором*

З розглянутих вище компонентів збираємо програму (рис. 9.18). Достатньо нераціональну і недосконалу та помірно працездатну. Це, певним чином, перша проба. Число точок дискретизації функції розподілу нечіткості:

$$M := 25; i = 1..M, j = 1..M .$$

```

Rr(N) :=
  xt ← runif(N, 1, 14)
  for i ∈ 1..M
    for j ∈ 1..M
      mRi,j ← dnorm(j - 5, i, 3)
  for k ∈ 1..N
    "Регулятор видає управління:"
    ut ← 0.05 rnd(k) + rnd(1)
    "Реакція об'єкта - випадкова з певним розподілом"
    xv ← rnorm[ 1, 0.15 · ut2, [ 0.2 + 0.02 · (ut - 1)1 ] ]1
    "В цьому подвійному циклі настраюється розподіл"
    "нечіткості регулятора"
    for i ∈ 1..M
      for j ∈ 1..M
        ri,j ← dXi(i, j, xv, ut)
        mRi,j ← [ S · mRi,j + (1 - S) · ri,j ]
  mR

```

Рисунок 9.18 – Збірка програми

Головний параметр для настроювання нечіткої характеристики регулятора

$$S = 0.96$$

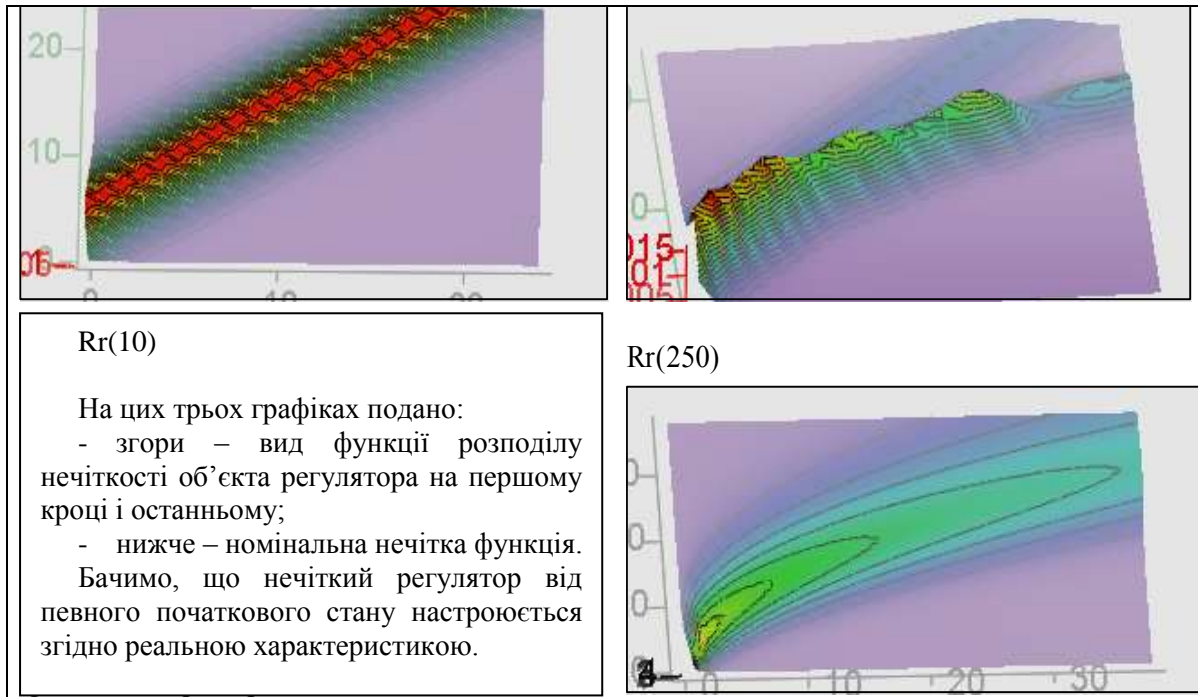


Рисунок 9.19 – Головний параметр для настроювання нечіткої характеристики регулятора

Таким чином, можливо зробити нечіткий ПД-регулятор для об'єкта другого порядку і визначити, чи не ускладнюється побудова і настроювання такого регулятора. Розглянули середовище для випробування численних версій нечіткого регулятора.

#### 9.4 Адаптивна САУ на базі нейронної мережі

##### *Нейронна мережа Кохонена*

Інша назва мережі Kohonen's Self Organizing Feature Map (SOFM) ("карта ознак Кохонена, що організується сама").

Ця мережа була запропонована Кохоненом в 1984 році. У цьому напрямку виконано багато робіт з модифікації базової моделі і побудови математичної теорії. Таке широке розповсюдження і велика кількість робіт можуть бути ознакою слабкої практичної корисності, тому що продуктивні напрямки зникають – стають фірмовими секретами.

У напрямку штучних нейронних мереж існує традиція виведення їх з дійсних чи гіпотетичних механізмів роботи мозку, хоч природно вивести її з моделей кінцевих автоматів і багатовимірних нелінійних імпульсних систем зі зворотними зв'язками – тобто моделей Я. Ципкіна.

Алгоритм Кохонена вважається подібним процесам, що відбуваються у мозку при самонавчанні. Мережа Кохонена призначається для розділення векторів з певної множини на підгрупи – кластери. Мережа складається з  $M$  нейронів. При навчанні і роботі мережі на всі  $N$  входів кожного нейрона подається один і той же сигнал –  $N$ -вимірний вектор  $X$ . У процесі навчання змінюються "синаптичні ваги" нейронів. У книгах, наприклад, В. Круглова і В. Борисова вкрай неякісно перекладено матеріали – тексти і рисунки з першоджерел – це, певним чином, вторинні недоліки цього напрямку.

Вхідні сигнали – вектори дійсних чисел – послідовно подаються на входи мережі і виконується самонавчання. Після певного числа прикладів навчання закінчується і синаптичні ваги вже визначають кластери. Крім того, ваги організовуються так, що топологічно близькі нейрони схоже реагують на східні сигнали (вектори).

Для реалізації алгоритму необхідно визначити міру близькості нейронів. Розміри зони близькості повинні зменшуватись.

Задаємо число нейронів  $Ne := 12$  та число ознак  $Pr := 4$ , період моделювання  $Tm := 100$ ;  $t := 1..Tm$ ;  $ORIGIN := 1$ .

### *Алгоритм Кохонена*

#### Крок 1. Ініціалізація мережі.

Коефіцієнтам мережі числом  $Ne \cdot Pr = 48$  присвоюються малі випадкові числа.  $D(0)_j$  – початкова зона сусідства. Задаємо індекси ознак  $i := 1..Pr$  та індекси нейронів  $j := 1..Ne$ ;  $t := 1..Tm$ . Задаємо початкові значення ваги:

$$w1 := \begin{pmatrix} rnd(0.1) & rnd(0.1) & rnd(0.1) \\ rnd(0.1) & rnd(0.1) & rnd(0.1) \\ rnd(0.1) & rnd(0.1) & rnd(0.1) \\ rnd(0.1) & rnd(0.1) & rnd(0.1) \end{pmatrix};$$

$$ww_{i,j} := rnd(0.1); \quad w_1 := ww; \quad (w_1)_{1,1} = 0.001; \quad (w_1)_{3,2} = 0.074.$$

#### Крок 2. Подача до мережі нового вхідного сигналу.

Крок 3. Обчислення відстані від вхідного сигналу до кожного з нейронів за формулою:

$$d_j := \sum_{i=0}^{N-1} [x(t)_i - w(t)_{i,j}]^2,$$

де  $x(t)_i$  –  $i$ -ий елемент вхідного сигналу в момент часу  $t$ ;

$w(t)_{i,j}$  – вага зв'язку  $i$ -го компонента вхідного вектора з  $j$ -им нейроном.

Зауваження:

- $x(t)_i$  – "функція часу, що є  $i$ -им компонентом вектор-функції часу  $x(t)$ ";
- $x(t)_i$  – формально це " $i$ -ий рядок матриці  $X$ ";
- $x(t)_i$  – змістовно це " $i$ -ий компонент дискретизованої вектор-функції часу".

Щоб ефективно працювати в середовищі математичних пакетів потрібно сприймати кожен математичний об'єкт як єдиний в двох сутностях – неперервній і дискретній.

Крок 4. Вибір  $kk$ -нейрона, для якого відстань  $d_{kk}$  є мінімальною.

Крок 5. Настроювання ваг для нейрона  $kk$  та всіх сусідніх нейронів з зони сусідства  $D(t)_j$  згідно з рівнянням:

$$w(t+1)_{i,j} = w(t)_{i,j} + \eta(t) \cdot (x(t)_i - w(t)_{i,j}),$$

де  $\eta$  – крок навчання ( $0 \leq \eta(t) \leq 1$ ), що зменшується з часом до нуля.

Введемо функцію:

$$roz_m(xx, nmi, dis) := \frac{dnorm(xx, nmi, dis)}{dnorm(nmi, nmi, dis)}.$$

Зробимо генератор тестових векторів. Закладемо в нього 4 класи об'єктів. Це тільки макет для створення узагальненої програми (рис. 9.20).

xx(t) :=	kyd ← rnd(1) xto ← <table> <tr><td>1</td><td>if kyd ≤ 0.25</td></tr> <tr><td>2</td><td>if 0.25 &lt; kyd ≤ 0.5</td></tr> <tr><td>3</td><td>if 0.5 &lt; kyd ≤ 0.75</td></tr> <tr><td>4</td><td>if kyd &gt; 1.0000</td></tr> </table> vvz ← Shum zv ← 1 - vvz ay ← [ 4 · (zv + rnd(vvz))   3 · (zv + rnd(vvz))   2 · (zv + rnd(vvz))   1 · (zv + rnd(vvz)) ] qq ← [ 1 · (zv + rnd(vvz))   4 · (zv + rnd(vvz))   3 · (zv + rnd(vvz))   2 · (zv + rnd(vvz)) ] zz ← [ 2 · (zv + rnd(vvz))   1 · (zv + rnd(vvz))   4 · (zv + rnd(vvz))   3 · (zv + rnd(vvz)) ] fo ← [ 3 · (zv + rnd(vvz))   2 · (zv + rnd(vvz))   1 · (zv + rnd(vvz))   4 · (zv + rnd(vvz)) ] qq1 ← ay · (kyd ≤ 0.25) + qq · (0.25 < kyd ≤ 0.50) qq2 ← zz · (0.50 < kyd ≤ 0.75) + fo · (kyd > 0.75) · 1 vex ← qq1 + qq2 $\begin{pmatrix} ((vex))^T \\ xto \end{pmatrix}$	1	if kyd ≤ 0.25	2	if 0.25 < kyd ≤ 0.5	3	if 0.5 < kyd ≤ 0.75	4	if kyd > 1.0000
1	if kyd ≤ 0.25								
2	if 0.25 < kyd ≤ 0.5								
3	if 0.5 < kyd ≤ 0.75								
4	if kyd > 1.0000								

Рисунок 9.20 – Макет для створення узагальненої програми

Розпаковуємо вихід програми – генератора тестових послідовностей об'єктів класифікації

$$x_t := xx(t)_1; \quad MK^{<t>} := xx(t)_1; \quad Ky_t := xx(t)_2; \quad X1_t := MK_{1,t}; \quad Y1_t := MK_{2,t}; \quad Z1_t := MK_{3,t}.$$

На рисунку 9.21 подано випробування модуля генерування тестових векторів.

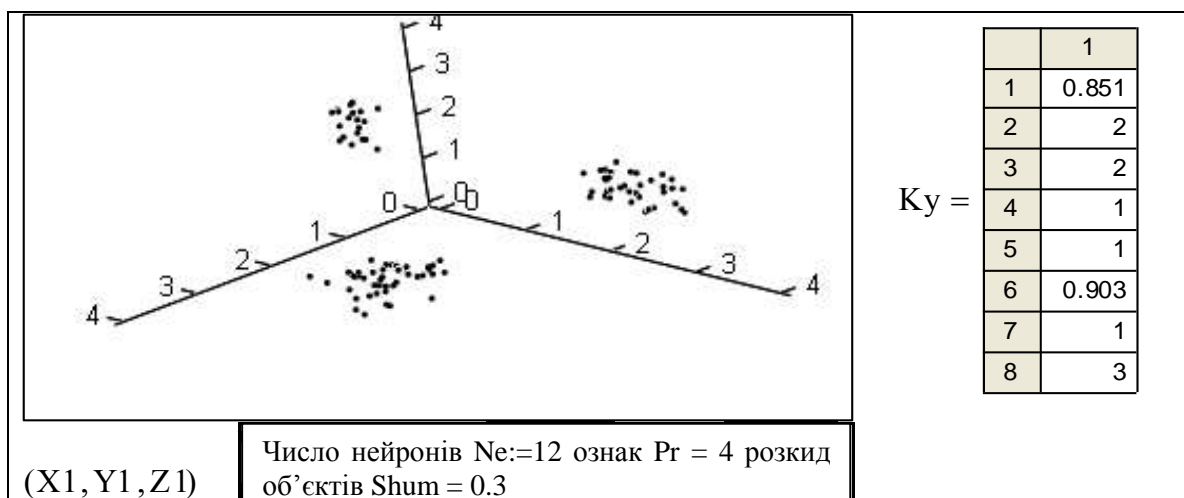


Рисунок 9.21 – Випробування модуля генерування тестових векторів

Крок 6. Повернення до кроку 2. На рисунку 9.22 наведено модуль "нейронна мережа Кохонена".

```

yHy :=
  w1 ← ww
  η1 ← start η
  dis ← startdis
  for t ∈ 1 .. Tm
    xt ← xx(t)1
    qd_t ← xx(t)2
    dmi ← 10000
    for i ∈ 1 .. NE
      di ← ∑j=1Pr [(xt)j - (wt)j,i]2
      if di < dmi
        dmi ← di
        nmi ← i
      "qq"
    for i ∈ 1 .. NE
      for j ∈ 1 .. Pr
        QQj,i ← (wt)j,i + ηt · [(xt)j - (wt)j,i] · rozm(i, nmi, dis)
        "бачимо, що ваги коректуються згідно з помилкою"
      wt+1 ← QQ
      ηt+1 ← ηt · dηη
      dis ← dis · dgn + 0.001
      nomit ← nmi
  (
    w
    nomi
    qd
  )

```

Рисунок 9.22 – Модуль "нейронна мережа Кохонена"

$Ves := yHy_1$ ;  $QD := yHy_3$ ;  $Nmi := yHy_2$ ;  $n8N := 1$ ;  $Shum = 0,3$ .

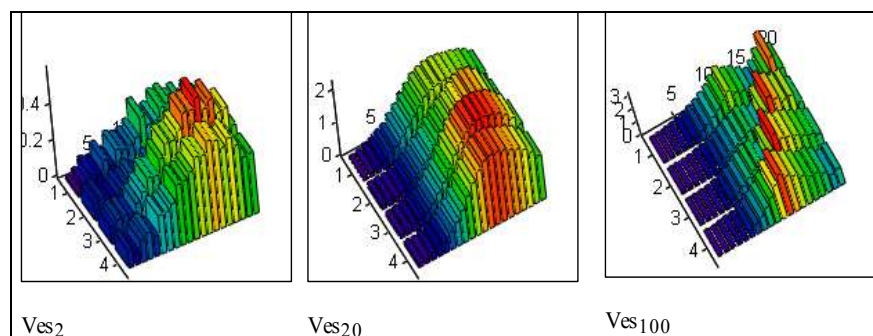


Рисунок 9.23 – Вивід модуля "нейронна мережа Кохонена"

Параметри процесу навчання:

- розкид елементів кластерів  $Shum \equiv 0.3$ ;
- стартова границя сусідніх нейронів  $startdis \equiv 6$ ;
- звуження границь нейрона  $dgn \equiv 0.997$ ;
- стартова швидкість навчання  $start\eta \equiv 0.14$ ;
- зменшення швидкості навчання  $d\eta \equiv 0.99$ .

Число нейронів  $NE \equiv 20$ ; число ознак (входів нейронів)  $Pr = 4$ .

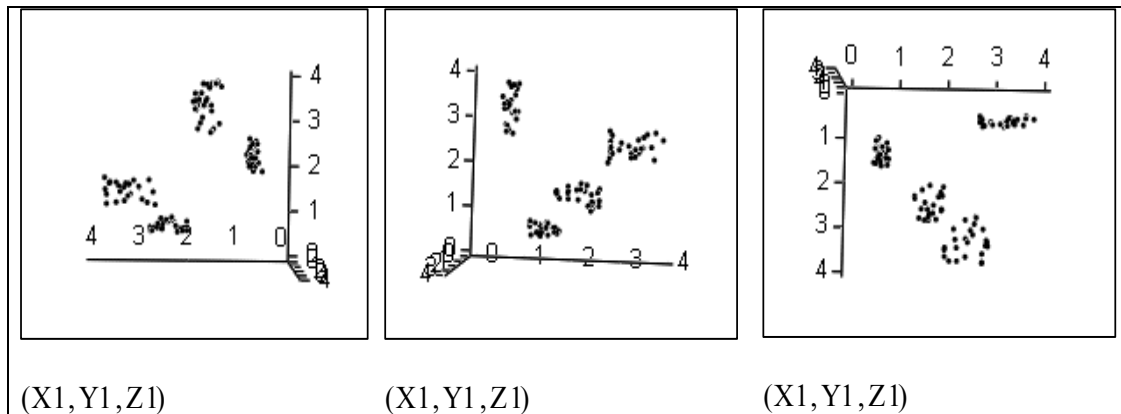


Рисунок 9.24 – Проекції в просторі перших трьох ознак

Три проекції в просторі перших трьох ознак

Задаємо номери нейронів для яких дивимось перехідні процеси:

пр := 10; др := 11; тр := 12.

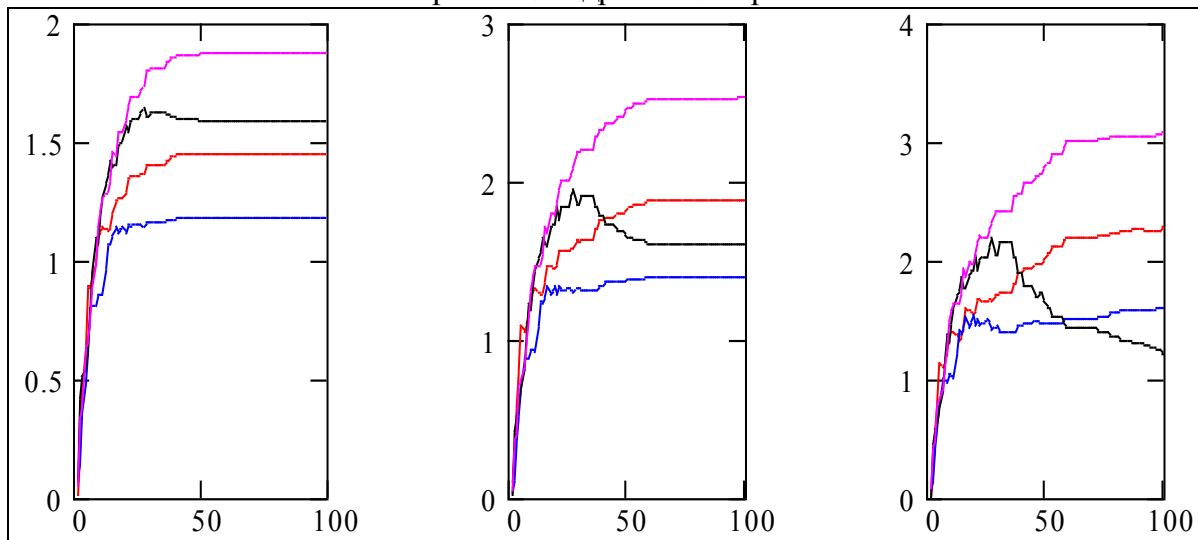


Рисунок 9.25 – Перехідні процеси навчання штучних нейронів

Зробимо анімацію, щоб подивитись еволюцію стану нейронів. Виразимо стан нейронів через системну змінну "*фрейм*". Далі все робимо згідно з інструкцією.

$$Sost := Ves_{2FRAME + 1} \cdot$$

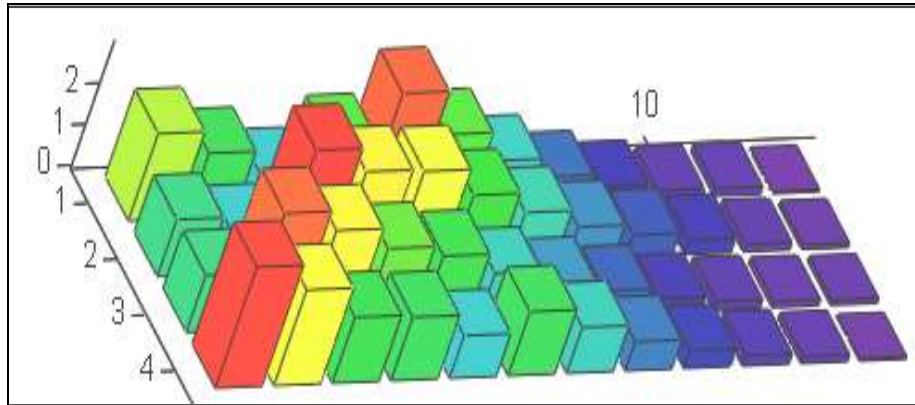


Рисунок 9.26 – Поточний стан процесу навчання нейроній мережі

Проаналізуємо, що ми власне отримали і до чого це можна застосувати. Розглянули ряд задач адаптивного управління і побудували працюючі моделі адаптивних систем.

За статистикою і комп'ютерною пресою термін "інтелектуальний", застосований до програмних продуктів, у 90% випадків є просто рекламною прикрасою. З того, що входить у 10%:

-9% – програми на базі нейронних мереж, мурашиних, мишиних і генетичних алгоритмів, які застосовують для задач, які розв'язуються і без застосування цієї термінології;

- 1% – новаторські роботи.

Однак це природна пропорція.

### Контрольні питання

1. Запишіть рівняння для нелінійностей "зона нечутливості" та "обмеження".

2. Як модифікувати документ для дослідження впливу цих нелінійностей у вимірювачах - координати, швидкості, прискорення.

3. Які методи і критерії для перевірки нелінійних САУ на стійкість ви знаєте?

4. Наведіть приклади елементів САУ із а) зоною нечутливості, б) обмеженням, в) зоною нечутливості та обмеженням.



## Заключення

В курсі лекцій подано крок за кроком теорію автоматичного управління – фундаментальні основи і теорію лінійних систем, – рішення лінійних диференційних рівнянь, перетворення Лапласа і його властивості, передаточні функції, перехідні функції стану, згортки.

Аналогічно розглянута теорія лінійних імпульсних систем: рішення різницевих рівнянь, Z-перетворення і його властивості, Z-передаточні функції, перехідні функції стану та їх властивості, згортки.

Така паралельна подача матеріалу полегшує вивчення досить важкого матеріалу дисципліни. Другий фактор такої подачі матеріалу можливість побачити єдину методологію роботи з неперервними та імпульсними класами систем. Ми розглянули основні поняття класичної теорії автоматичного управління. Відомо, що єдиної теорії нелінійних САУ не існує, однак, певні елементи теорії лінійних систем використовуються при роботі з нелінійними системами. Це полегшує освоєння методів аналізу нелінійних різницевих рівнянь. При розгляді випадкових процесів в САУ теж використовується аналог Z-перетворення, згортка розподілів ймовірностей.

Відсутність єдиної теорії для нелінійних систем спричиняє для окремих класів нелінійних об'єктів управління робити свої методики, методи і методології для аналізу і синтезу САУ. Тому подача матеріалу йде від розгляду конкретних об'єктів і задач управління з застосуванням прикладного системного аналізу, за результатами аналізу будується математична модель у вибраному програмному середовищі. Так в курсі лекцій подані задачі термінального управління, задачі управління банківською системою, системою хімічних реакторів і виробничою системою.

В другій частині посібника подані рішення задач управління з урахуванням невизначеностей і випадкових збурень, де використовуються програмні модулі для знаходження розподілів ймовірностей при нелінійних перетвореннях сигналів з випадковими складовими. Класичні аналітичні методи оперують тільки з гаусівськими розподілами.

Приведені програмні реалізації відомих проектів «інтелектуальних» адаптивних регуляторів. Студент може «власноручно» вивчити, протестувати і модифікувати такі регулятори і отримати власні оцінки переваг і недоліків цих методів адаптивного управління.

Таким чином курс лекцій дає студенту знання і вміння для рішення відомих задач розробки САУ для відомих об'єктів, а також започаткувати власні дослідження стосовно нових методів для нових об'єктів.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

### Базова

1. Воронов А.А. Теория автоматического управления. Ч. 1, 2. - М.: Энергия, 1986, 1987.
2. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. -М.: Машиностроение, 1986.
3. Изерман Р. Цифровые системы управления. -М.: Мир, 1984.
4. Боровська Т.М. Теорія автоматичного управління. Частина 1. Аналіз САУ: [навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл.] / Т.М. Боровська, В.А. Северілов, А.С. Васюра: М-во освіти і науки України. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 97 с. – ISBN 978-966-641-277-8.
5. Боровська Т.М. Моделювання та оптимізація систем автоматичного управління: [навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл.] / Т.М. Боровська, А.С. Васюра, В.А. Северілов: М-во освіти і науки України. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 132 с. – ISBN 978-966-641-319-5.
6. Боровська Т. М. Основи теорії управління та дослідження операцій: [навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл.] / Т. М. Боровська, І.С. Колесник, В.А. Северілов: М-во освіти і науки України. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 242 с. – ISBN 978-966-641-275-4.
7. Боровська Т. М. Спеціальні розділи вищої математики: [навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл.] / Т. М. Боровська, І. С. Колесник, В. А. Северілов: М-во освіти і науки України. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 182 с. – ISBN 978-966-641-276-1.
8. Боровська Т.М., Северілов П.В. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт з курсу "Теорія автоматичного управління". Електронна книга, Вінниця - 2008. – 75 с.
9. Боровська Т.М. Теорія автоматичного управління: [дистанційний курс] / Т.М. Боровська, В.А. Северілов, А.С. Васюра. – Вінниця: ВНТУ, 2010.

### Допоміжна

1. Моделювання задач управління інвестиціями: [навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл.] / Т. М. Боровська, В. А. Северілов, С. П. Бадьора, І.С. Колесник: М-во освіти і науки України. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 178 с. – ISBN 978-966-641-311-9.
2. Моделювання та оптимізація у менеджменті: [навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл.] / Т. М. Боровська, В. А. Северілов, С. П. Бадьора, І. С. Колесник: М-во освіти і науки України. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2009. – 145 с. – ISBN 978-966-641-287-7.
3. Северілов В.А., Боровская Т.Н. Живучесть САУ: Винница:ВПИ, 1989.
4. Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления. - М.: "Наука", 1986. - 615 с.

5. Методичні вказівки до виконання на ПЕОМ лабораторних і практичних занять з курсу ТАУ /Укл. Т. М.Боровська, В. А.Северілов, П. В.Северілов. Вінниця, ВПІ, 1994. - 53 с.
6. Батенко А.П. Управление конечным состоянием движущихся объектов. М., «Советское радио», 1977.
7. Пузырёв В.А. Управление технологическими процессами производства микроэлектронных приборов. М., «Радио и связь», 1984.
8. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., «Наука», 1968.

*Навчальне видання*

**Боровська Таїса Миколаївна**

**Теорія автоматичного управління**

Курс лекцій

Редактор В. Дружиніна

Оригінал-макет підготовлено Т. Боровською

Підписано до друку .....  
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman.  
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. ....  
Наклад ... пр. Зам. № 2015-

Вінницький національний технічний університет,  
навчально-методичний відділ ВНТУ.  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, к. 2201.  
Тел. (0432) 59-87-36.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті  
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-85-32,  
publish.vntu.edu.ua; email: kivc.vntu@gmail.com.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.