例　：求下列矩阵的奇异值分解表达式

$$(1)\quad A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

解： **（1）**容易计算 AA^H 的特征值为 **5，0，0**，所以 A 的奇异值为 $\sqrt{5}$ 。下面计算 AA^H 的标准正交特征向量，解得分别与 **5，0，0**对应的三个标准正交特征向量

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad u_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad u_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

由这三个标准正交特征向量组成矩阵 U ，所以有

$$U=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix} \end{bmatrix}$$

取 $\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Delta}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5}\end{bmatrix}$

取 $\boldsymbol{V}_2 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{V}_1$ 正交.

由这两个标准正交特征向量组成矩阵 V， 那么有

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

于是可得奇异值分解式为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{H}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

推论：设 $A\in C_r^{m\times n}$， $\alpha_1\ge\alpha_2\ge\cdots\ge\alpha_r$ 是 A 的 r 个奇异值，那么存在次酉矩阵 $U_r\in U_r^{m\times r}$，$V_r\in U_r^{n\times r}$ 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U_r\Delta V_r^H} \qquad \left(=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U_1} & \boldsymbol{U_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{V_1^H}\\ \boldsymbol{V_2^H}\end{bmatrix}\right)$$

矩阵的极分解

定理： 设 $A\in C_n^{n\times n}$，那么必存在酉矩阵 $U\in U^{n\times n}$ 与正定的 **H**-矩阵 H_1， H_2

使得

$$A = H_1 U = U H_2$$

且这样的分解式是唯一的。同时有

$$A^H A = H_2^{\ 2}, \quad AA^H = H_1^{\ 2}$$

称分解式

$$\boldsymbol{A = H_1 U = U H_2}$$

为矩阵 A 的极分解表达式。

定理：设 $A \in C^{n\times n}$，则存在 $U \in U^{n\times n}$

与半正定 H-矩阵 H_1, H_2 使得

$$A = H_1 U = U H_2$$

且满足

$$\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}_2^{\;2}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{H}_1^{\;2}$$

证明：根据矩阵的奇异值分解定理可知，存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$ 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix} \boldsymbol{U}_2$$

其中 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r$

$$> \alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \cdots = \alpha_n = 0$$

$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r$ 为 A 的 r 个奇异值。

于是有

$$A = (U_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix} U_1^H)(U_1 U_2)$$

$$=(U_1U_2)\left(U_2^H\boxed{\begin{bmatrix}\alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n\end{bmatrix}}U_2\right)$$

如果令

$$H_1 = U_1 \boxed{\operatorname{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)} U_1^H$$

$$H_2 = U_2^H \operatorname{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) U_2$$

$$U=U_1U_2$$

从而有

$$A=H_1U=UH_2$$

$$\boldsymbol{A^H A=H_2^{\,2}},\quad \boldsymbol{AA^H=H_1^{\,2}}$$

不一定唯一

其中 H_1, H_2 是半正定的 **H**-矩阵，U 是酉矩阵。

由上面的结论可以给出正规矩阵的另外一种刻划。

定理：设 $A\in C^{n\times n}$，则 A 是正规矩阵的充分必要条件是

$$\boldsymbol{A=HU=UH}$$

其中 H 是半正定的 **H**-矩阵，U 是酉矩阵，且

$$\boldsymbol{A}^{H}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}^{2}$$

矩阵的谱分解

主要讨论两种矩阵的谱分解：正规矩阵与可对角化矩阵。

设 A 为正规矩阵，那么存在 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{U}^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{A}=\overset{\color{blue}{U}}{\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right]}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\overset{\color{blue}{U^H}}{\begin{bmatrix}\alpha_1{}^H \\ \alpha_2{}^H \\ \vdots \\ \alpha_n{}^H\end{bmatrix}}$$

$$=\lambda_1\alpha_1\alpha_1{}^H+\lambda_2\alpha_2\alpha_2{}^H+\cdots+\lambda_n\alpha_n\alpha_n{}^H$$

其中 α_i 是矩阵 A 的特征值 λ_i 所对应的单位特征向量。

设正规矩阵 A 有 r 个互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ ，特征值 λ_i 的代数重数为 n_i ， λ_i 所对应的个两两正交的单位特征向量为 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{n_i}}$ ，则 A 的谱分解表达式为

$$A=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}\alpha_{ij}^H=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i G_i$$

其中 $G_i=\sum_{i=1}^{n_i}\alpha_{ij}\alpha_{ij}^H$ ，并且显然有

$$G_i^H=\boxed{G_i=G_i^2},\quad G_iG_k=0(i\neq k)$$

由上面的谱分解表达式又可以给出正规矩阵的一种刻划。

定理：设 A为一个n阶矩阵，其有 r 个互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$，$\lambda_i$ 的代数重数为 n_i，那么 A 为正规矩阵的充分必要条件是存在 r 个 n 阶矩阵 $G_1, G_2, \cdots, G_r$ 且满足

了解

(1) $\boldsymbol{A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i G_i}$; **(2)** $\boldsymbol{G_i^{H} = G_i = G_i^{2}}$

(3) $\boldsymbol{G_i G_k = 0 (i \neq k)}$; **(4)** $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{r} G_i = I}$

（5）满足上述性质的矩阵 G_i 是唯一的。

(6) $\mathrm{rank}(G_i) = n_i$

称 G_i 为正交投影矩阵。(投影到 特征子空间 V_{λ_i} ）

例 1： 求正规矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

的谱分解表达式。

解：首先求出矩阵 A 的特征值与特征向量。容易计算

$$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$$

从而 A 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,\quad \lambda_4=-3$$

当 $\lambda=1$ 时，求得三个线性无关的特征向量为

$$\alpha_1=[1,1,0,0]^T,\quad \alpha_2=[1,0,1,0]^T$$

$$\alpha_3=[-1,0,0,1]^T$$

当 $\lambda=-3$ 时，求得一个线性无关的特征向量为

$$\alpha_4=\left[1,-1,-1,1\right]^T$$

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交化与单位化可得

$$\eta_1=\left[{}^{1}\!/\!_{\sqrt{2}},{}^{1}\!/\!_{\sqrt{2}},0,0\right]^T$$

$$\eta_2=\left[{}^{1}\!/\!_{\sqrt{6}},{}^{1}\!/\!_{\sqrt{6}},{}^{2}\!/\!_{\sqrt{6}},0\right]^T$$

$$\eta_3=\left[{}^{-1}\!/\!_{\sqrt{12}},{}^{1}\!/\!_{\sqrt{12}},{}^{1}\!/\!_{\sqrt{12}},{}^{3}\!/\!_{\sqrt{12}}\right]^T$$

将 α_4 单位化可得：$\eta_4 = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^T$

于是有

$$G_1 = \eta_1 \eta_1^H + \eta_2 \eta_2^H + \eta_3 \eta_3^H$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \eta_4 \eta_4^{\ H}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

这样可得其谱分解表达式为

$$A = G_1 - 3G_2$$

例 2 ： 求正规矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的谱分解表达式。

解：首先求出矩阵 A 的特征值与特征向量。容易计算

$$|\lambda I - A| = \lambda(\lambda^2 + 2)$$

从而 A 的特征值为

$$\lambda_1 = \sqrt{2}i,\quad \lambda_2 = -\sqrt{2}i,\quad \lambda_3 = 0$$

可以求出分别属于这三个特征值的三个线性无关的特征向量

$$\lambda_1 \to \alpha_1 = \left[-\sqrt{2}, -i, 1\right]^T$$

$$\lambda_2 \to \alpha_2 = \left[\sqrt{2}, -i, 1\right]^T$$

$$\lambda_3 \to \alpha_3 = \left[0, i, 1\right]^T$$

再将其单位化可得三个标准正交的特征向量

$$\eta_1 = \left[{}^{-1}\!\big/\!{}_{\sqrt{2}}, {}^{-i}\!\big/\!{}_{2}, {}^{1}\!\big/\!{}_{2} \right]^T$$

$$\eta_2 = \left[{}^{1}\!\big/\!{}_{\sqrt{2}}, {}^{-i}\!\big/\!{}_{2}, {}^{1}\!\big/\!{}_{2} \right]^T$$

$$\eta_3 = \left[0, {}^{i}\!\big/\!{}_{\sqrt{2}}, {}^{1}\!\big/\!{}_{\sqrt{2}} \right]^T$$

于是有

$$G_1 = \eta_1 \eta_1^H$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{2}/4\, i & -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4\, i & 1/4 & -i/4 \\ -\sqrt{2}/4 & i/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \eta_2 \eta_2^H$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/4\, i & \sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4\, i & 1/4 & -i/4 \\ \sqrt{2}/4 & i/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \eta_3 \eta_3{}^H$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & i/2 \\ 0 & -i/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

这样可得其谱分解表达式为

$$A = -\sqrt{2} i G_1 + \sqrt{2} i G_2 + 0 G_3$$

下面我们讨论可对角化矩阵的谱分解表达式。

设 A 是一个 n 阶可对角化的矩阵，特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，与其相应的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，如果记

$$P=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$$

那么

$$A=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$
=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T\end{bmatrix}
$$

$$
=\lambda_1\alpha_1\beta_1^T+\lambda_2\alpha_2\beta_2^T+\cdots+\lambda_n\alpha_n\beta_n^T
$$

其中

$$
P^{-1}=\begin{bmatrix}\beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T\end{bmatrix}
$$

可对角化矩阵的谱分解步骤：

（1）首先求出矩阵 A 的全部互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 及每个特征值 λ_i 所决定的线性无关特征向量 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in_i}$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_{11} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{1\boldsymbol{n}_1} & \boldsymbol{\alpha}_{21} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{2\boldsymbol{n}_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_r}\end{bmatrix}$$

（2）计算

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n^T\end{bmatrix}$$

（3）令 $\boxed{G_i = \alpha_{i1}\beta_{i1}^T + \alpha_{i2}\beta_{i2}^T + \cdots + \alpha_{in_i}\beta_{in_i}^T}$

（4）最后写出

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \cdots + \lambda_r G_r$$

例 ：已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

为一个可对角化矩阵，求其谱分解表达式。

解:　首先求出矩阵 A 的特征值与特征向量。容易计算

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

从而 A 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$$

可以求出分别属于这三个特征值的三个线性无关的特征向量

$$\lambda_1 \to \alpha_1 = [2, -1, 0]^T$$

$$\lambda_2 \to \alpha_2 = [0, 0, 1]^T$$

$$\lambda_3 \to \alpha_3 = [-1, 1, 1]^T$$

于是

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \\ \boldsymbol{\beta}_3^T \end{bmatrix}$$

取

$$\beta_1 = [1, 1, 0]^T$$

$$\beta_2 = [-1, -2, 1]^T$$

$$\beta_3 = [1, 2, 0]^T$$

令

$$G_1 = \alpha_1 \beta_1^T + \alpha_2 \beta_2^T$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \alpha_3 \beta_3^{\ T}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

那么其谱分解表达式为

$$A = G_1 - 2G_2$$