矩阵序列与极限

定义：设矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ ，其中

$$\boldsymbol{A}^{(k)} = \left[\boldsymbol{a}_{ij}{}^{(k)}\right] \in \boldsymbol{C}^{m\times n},$$ 如果 mn 个数列

$$\{a_{ij}{}^{(k)}\},\quad i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n$$

都收敛，则称矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}^{(k)}\}$收敛。

$$\boxed{A^{(k)} = \left[a_{ij}^{(k)} \right] \in C^{m \times n}}$$

进一步，如果 $\lim\limits_{k \to \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$

那么

$$\lim_{k \to \infty} A^{(k)} = A = [a_{ij}]$$

我们称矩阵 A 为矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 的极限。

例 ：如果设 $A^{(k)}=\left[a_{ij}{}^{(k)}\right]\in C^{2\times 2}$ ，其中

$$a_{11}{}^{(k)}=\frac{k+1}{3k},\quad a_{12}{}^{(k)}=r^{k}(0<r<1)$$

$$a_{21}{}^{(k)}=r^{1/k}(r>1),\quad a_{22}{}^{(k)}=\frac{k^{2}-k}{k^{2}+k}$$

那么 $$\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=A=\begin{bmatrix}1/3 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

定理：矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 收敛于 A 的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|=0$$

其中 $\left\|A^{(k)}-A\right\|$ 为任意一种矩阵范数.

证明：取矩阵范数

$$\|A\|=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$$

$$\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=A=[a_{ij}]$$

那么由定义可知对每一对 i, j 都有

$$\lim_{k\to\infty}\left|a_{ij}^{(k)}-a_{ij}\right|=0$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

从而有

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}^{(k)}-a_{ij}\right|=0$$

上式记为

$$\lim_{k\to\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|=0$$

充分性：设

$$\lim_{k\to\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}{}^{(k)}-a_{ij}\right|=0$$

那么对每一对 i, j 都有

$$\lim_{k\to\infty}\left|a_{ij}{}^{(k)}-a_{ij}\right|=0$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

即

$$\lim_{k\to\infty}a_{ij}{}^{(k)}=a_{ij}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

故有

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A = [a_{ij}]$$

现在已经证明了定理对于所设的范数成立，如果是另外一种范数 $\|A\|_{\alpha}$ ，那么由范数的等价性可知

$$d_1\left\|A^{(k)} - A\right\| \le \left\|A^{(k)} - A\right\|_{\alpha} \le d_2\left\|A^{(k)} - A\right\|$$

这样，当

$$\lim_{k\to\infty}\left\|A^{(k)} - A\right\| = 0$$

时同样可得

$$\lim_{k\to\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|_{\alpha}=0$$

因此定理对于任意一种范数都成立。

同数列的极限运算一样，关于矩阵序列的极限运算也有下面的性质。

（1）一个收敛的矩阵序列的极限是唯一的。

（2）设

$$\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=A,\quad \lim_{k\to\infty}B^{(k)}=B$$

则

$$\lim_{k\to\infty} aA^{(k)} + bB^{(k)} = aA + bB, \quad a, b \in C$$

（3）设 $\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A$， $\lim_{k\to\infty} B^{(k)} = B$，

其中 $A^{(k)} \in C^{m\times l}, B^{(k)} \in C^{l\times n}$，那么

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} B^{(k)} = AB$$

（4）设 $\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A$ ，其中

$$A^{(k)} \in C^{m\times n}, P \in C^{m\times m}, Q \in C^{n\times n}$$

那么

$$\lim_{k\to\infty} PA^{(k)}Q = PAQ$$

（5）设 $\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A$ ，且 $\{A^{(k)}\}$ ，A 均可逆，

则 $\{(A^{(k)})^{-1}\}$ 也收敛，且

$$\lim_{k\to\infty}(A^{(k)})^{-1} = A^{-1}$$

$$(A^{(k)})^{-1} = \frac{\tilde{A}^{(k)}}{\left|A^{(k)}\right|}$$

例 1：若对矩阵 A 的某一范数 $\|A\| < 1$ ，则

$$\lim_{k\to\infty} A^{k} = 0 \qquad (\|A^{k}\| \le \|A\|^{k})$$

例 2：已知矩阵序列：$A, A^2, \cdots, A^k, \cdots$，则 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$ 的充要条件是 $\rho(A) < 1$。

证明：设 A 的 Jordan 标准形

$$J = \mathrm{diag}(J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \cdots, J_r(\lambda_r))$$

其中

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{d_i \times d_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

于是

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1^k(\lambda_1), \boldsymbol{J}_2^k(\lambda_2), \cdots, \boldsymbol{J}_r^k(\lambda_r))\boldsymbol{P}^{-1}$$

显然， $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{A}^k = 0$ 的充要条件是

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{J}_i^k(\lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

又因

$$J_i^k(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i^k & c_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & c_k^{d_i-1}\lambda_i^{k-d_i+1} \\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & c_k^1\lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

其中

$$C_k^l=\frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!}(l\le k)$$

$$C_k^l=0 \qquad (l>k)$$

于是 $\lim_{k\to\infty} J_i^k(\lambda_i) = 0$ 的充要条件是 $|\lambda_i| < 1$。

因此 $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$ 的充要条件是 $\rho(A) < 1.$

例: 判断下面矩阵序列的敛散性

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & -2 \\ 0 & 0.08 & 0.9 \end{bmatrix}^k, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \left(\frac{1}{\rho(B)} B\right)^k$$

解：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.9 & -2\\ 0 & 0.08 & 0.9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-A_2\right|=(\lambda-0.9)^2+0.16=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$

其中 $\lambda_1=0.9+0.4i,\qquad \lambda_2=0.9-0.4i$

由于 $\left|\lambda_1\right|=\left|\lambda_2\right|<1,$ 所以 $\lim\limits_{k\to\infty}A_2^k=0.$

从而

$$\lim_{k\to\infty}A^k=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&-1&2\\2&2&-1\end{bmatrix},\qquad \left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{B})}\boldsymbol{B}\right)^{k}$$

$$\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\right|=(\lambda-3)\left[(\lambda+1)^2-4\right]=(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+3)$$

$\boldsymbol{B}$ 有三个互异的特征根，从而有三个线性无关的特征向量，$\boldsymbol{B}$ 可以对角化，存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}3&&\\&1&\\&&-3\end{bmatrix}$$

显然 $\rho(B)=3$，所以

$$\frac{1}{\rho(B)}B = P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & -1 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{\rho(B)}B\right)^k = P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \left(\frac{1}{3}\right)^k & \\ & & (-1)^k \end{bmatrix}P^{-1},\quad \text{不收敛.}$$

矩阵的幂级数

定义：设 $A^{(k)}=[a_{ij}{}^{(k)}]\in C^{m\times n}$，如果 $m\times n$ 个常数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}{}^{(k)}, \quad i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$$

都收敛，则称矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$$

收敛。

$$\boxed{A^{(k)}=[a_{ij}^{(k)}]\in C^{m\times n}}$$

如果 $m\times n$ 个常数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ij}^{(k)}, \quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$$

都绝对收敛， 则称矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}A^{(k)}=A^{(1)}+A^{(2)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$$

绝对收敛。

例： 如果设 $A^{(k)}=\left[a_{ij}^{(k)}\right]\in C^{2\times 2}$，其中

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{11}^{(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)},\quad \sum_{k=1}^{\infty}a_{12}^{(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{21}^{(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^{k}},\quad \sum_{k=1}^{\infty}a_{22}^{(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^{k}}$$

那么矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}A^{(k)}=A^{(1)}+A^{(2)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$$

是收敛的。

定理：设$A^{(k)}=[a_{ij}^{(k)}]\in C^{m\times n}$，则矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}A^{(k)}=A^{(1)}+A^{(2)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$$

绝对收敛的充分必要条件是正项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|A^{(k)}\right\|=\left\|A^{(1)}\right\|+\left\|A^{(2)}\right\|+\cdots+\left\|A^{(k)}\right\|+\cdots$$

收敛，其中 $\|A\|$ 为任意一种矩阵范数。

证明：取矩阵范数

$$\left\|A^{(k)}\right\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}{}^{(k)}\right|$$

那么对每一对 i, j 都有

$$\left\|A^{(k)}\right\| \geq \left|a_{ij}{}^{(k)}\right|$$

因此如果

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|A^{(k)}\right\| = \left\|A^{(1)}\right\| + \left\|A^{(2)}\right\| + \cdots + \left\|A^{(k)}\right\| + \cdots$$

收敛， 则对每一对 i, j 常数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{ij}{}^{(k)}\right| = \left|a_{ij}{}^{(1)}\right| + \left|a_{ij}{}^{(2)}\right| + \cdots + \left|a_{ij}{}^{(k)}\right| + \cdots$$

都是收敛的，于是矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$$

绝对收敛。

反之，若矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$$

绝对收敛，则对每一对 i, j都有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{ij}^{(k)}\right| = \left|a_{ij}^{(1)}\right| + \left|a_{ij}^{(2)}\right| + \cdots + \left|a_{ij}^{(k)}\right| + \cdots < \infty$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\| = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}^{(k)}\right| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{ij}^{(k)}\right| < \infty$$

根据范数等价性定理知结论对任何一种范数都正确。

定义：设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$ ，称形如

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_k A^k + \cdots$$

的矩阵级数为矩阵幂级数。

定理：设幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 的收敛半径为 R， A 为 n 阶方阵。若 $\rho(A) < R$ ，则矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 绝对收敛；若 $\rho(A) > R$，则 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 发散。

证明： 设 A 的 **Jordan** 标准形为

$$P^{-1}AP = J = \mathrm{diag}(J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \cdots, J_r(\lambda_r))$$

其中

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{d_i \times d_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

于是

$$A^k = P\,\mathrm{diag}(J_1^k(\lambda_1), J_2^k(\lambda_2), \cdots, J_r^k(\lambda_r))\,P^{-1}$$

$$J_i^k(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{d_i-1}\lambda_i^{k-d_i+1} \\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & C_k^1\lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &C_k^l=\frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!}(l\le k) \\ &C_k^l=0 \qquad\qquad\qquad\qquad (l>k) \end{aligned}}$$

所以

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{A}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{c}_k (\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^k \boldsymbol{P}^{-1})$$

$$= \boldsymbol{P}(\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{J}^k)\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$= \boldsymbol{P}\mathrm{diag}[\sum_{K=0}^{\infty} \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{J}_1^k(\lambda_1), \sum_{K=0}^{\infty} \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{J}_2^k(\lambda_2),$$

$$\cdots, \sum_{K=0}^{\infty} \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{J}_r^k(\lambda_r)]\boldsymbol{P}^{-1}$$

其中

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k J_i^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^k & \sum_{k=0}^{\infty} c_k C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} c_k C_k^{d_i-1} \lambda_i^{k-d_i+1} \\ & \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \sum_{k=0}^{\infty} c_k C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^k \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}$$

$$C_k^l = \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!} (l \le k)$$

$$C_k^l = 0 \qquad\qquad (l > k)$$

当 $\rho(A) < R$ 时，幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^k,\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k C_k^1 \lambda_i^{k-1},\ \cdots,\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k C_k^{d_i-1} \lambda_i^{k-d_i+1}$$

都是绝对收敛的,故矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 绝对收敛。

当 $\rho(A)>R$ 时，幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^k, i=1,\ldots n$ 至少有一个发散，所以$\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 发散。

例：

$$e^{x}=1+x+\frac{1}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{1}{n!}x^{n}+\cdots$$

收敛半径 $R=\infty$，所以对任意 n 阶矩阵 A，都有幂级数

$$I+A+\frac{1}{2!}A^{2}+\cdots+\frac{1}{n!}A^{n}+\cdots$$

绝对收敛。

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$$

$$- \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$- \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

收敛半径 $\boldsymbol{R}=\infty$，所以对任意 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，都有幂级数

$$\boldsymbol{A}-\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^{3}+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^{5}-\cdots+(-1)^{\boldsymbol{n}}\frac{1}{(2\boldsymbol{n}+1)!}\boldsymbol{A}^{2\boldsymbol{n}+1}+\cdots$$

$$\boldsymbol{I}-\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^{2}+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^{4}-\cdots+(-1)^{\boldsymbol{n}}\frac{1}{(2\boldsymbol{n})!}\boldsymbol{A}^{2\boldsymbol{n}}+\cdots$$

绝对收敛。

例 1： （1）求下面级数的收敛半径

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{2^k\cdot k}=\frac{x}{2\cdot 1}+\frac{x^2}{2^2\cdot 2}+\frac{x^3}{2^3\cdot 3}+\cdots+\frac{x^k}{2^k\cdot k}+\cdots$$

（2）设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & -3\end{bmatrix}$$

判断矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{2^k\cdot k}$ 的敛散性。

解：设此级数的收敛半径为 R ，利用公式

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{R}$$

容易求得此级数的收敛半径为 2，而 $\rho(A)=1$，

所以由上面的定理可知矩阵幂级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{2^k\cdot k} = \frac{A}{2\cdot 1}+\frac{A^2}{2^2\cdot 2}+\frac{A^3}{2^3\cdot 3}+\cdots+\frac{A^k}{2^k\cdot k}+\cdots$$

绝对收敛。

例：已知

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

讨论 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}A^k$ 的敛散性。

解：容易求得级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}x^k$ 的收敛半径为 $R=1$,

$|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$，所以 A 有三个特征根

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=-1,\quad \therefore \rho(A)=1.$

不能用定理判断 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\boldsymbol{A}^k$ 的敛散性。

考虑 $\boldsymbol{A}$ 的**Jordan** 标准形，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\boxed{A = PJP^{-1}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}A^k = P\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} & \boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}} \\ 0 & 0 & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} \end{bmatrix}P^{-1},$$

$\ln 2$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1} + \cdots, \quad x \in (-1,1]$$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k$ 收敛，但不绝对收敛。

例：已知矩阵 A的某种范数 $\|A\| < 1$, 求 $\sum_{k=1}^{\infty} kA^{k-1}$.

分析：$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = (1-x)^{-2}$

$\Downarrow$

$R=1$， $\|A\| < 1 \Rightarrow \rho(A) < 1$, $\therefore \sum_{k=1}^{\infty} kA^{k-1}$ 收敛.

猜测 $\sum_{k=1}^{\infty} kA^{k-1} = (I - A)^{-2}$