第二章　　λ—矩阵与矩阵的Jordan标准形

λ --矩阵的基本概念

定义：设$a_{ij}(\lambda)(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$

为数域 F 上的多项式，则称

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

为多项式矩阵或 λ -矩阵.

$a_{ij}(\lambda)(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$ 中最高的次数为 $A(\lambda)$ 的次数。

特例：数字矩阵，特征矩阵 $\lambda E - A$.

定义 如果 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 中有一个 r 阶 $(r \geq 1)$ 子式不为零，而所有 $r+1$ 阶子式(如果有的话)全为零，则称 $A(\lambda)$ 的秩为 r，记为

$$\operatorname{rank} A(\lambda) = r$$

零矩阵的秩为0。

定义　下列各种类型的变换，叫做 λ-矩阵的初等变换：

(1)　矩阵的任二行(列)互换位置；

(2)　非零常数 c 乘矩阵的某一行(列)；

(3)　矩阵的某一行(列)的 $\varphi(\lambda)$ 倍加到另一行(列)上去，其中 $\varphi(\lambda)$ 是 λ 的一个多项式。

对单位矩阵施行上述三种类型的初等变换便得相应得三种 λ 矩阵得初等矩阵

$$P(i,j),\quad P(i(c)),\quad P(i,j(\varphi))$$

$$P(i,j)=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix},\qquad P(i(c))=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&c&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}\\ \quad\ \ i\ \text{列}\end{array}$$

$$P(i,j(\varphi))=\begin{array}{cl}\begin{bmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&\varphi(\lambda)&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}&\begin{array}{l}\\ i\ \text{行}\\ j\ \text{行}\\ \\ \end{array}\end{array}$$

定理　对一个 $m\times n$ 的 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的行作初等行变换，相当于用相应的 m 阶初等矩阵左乘 $A(\lambda)$。对 $A(\lambda)$ 的列作初等列变换，相当于用相应的 n 阶初等矩阵右乘 $A(\lambda)$。

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j),\qquad P(i(c))^{-1}=P(i(c^{-1})),$$

$$P(i,j(\varphi))^{-1}=P(i,j(-\varphi)).$$

定义　如果 $A(\lambda)$ 经过有限次的初等变换之后变成 $B(\lambda)$，则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价，记之为

$$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$$

λ 矩阵的等价关系满足：

（1）自反性： $A(\lambda)\simeq A(\lambda);$

（2）对称性： $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$则$B(\lambda)\simeq A(\lambda);$

（3）传递性：若$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$，$B(\lambda)\simeq C(\lambda)$,则$A(\lambda)\simeq C(\lambda).$

$\lambda-$矩阵Smith标准形的存在性

定 理　任意一个非零的 $m\times n$ 型的 λ-矩阵都等价于一个"对角矩阵"，即

$$A(\lambda)\simeq\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $r \geq 1$， $d_i(\lambda)$ 是首项系数为1的多项式且

$$d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda) \qquad (i = 1, 2, \cdots, r-1)$$

称这种形式的 λ-矩阵为$A(\lambda)$ 的 **Smith标准形**。

$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 不变因子。

例 1

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

将其化成Smith标准形。

解:

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\simeq\begin{bmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda & -\lambda^2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda \\ 0 & -\lambda^2 & -\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2 - \lambda \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

练习题：

（1）

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（2）

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 14 & 5 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

将其化为 Smith 标准形。

λ--矩阵标准形的唯一性 (了解)

定义： $A(\lambda)$ 为一个 λ -矩阵且$\operatorname{rank}(A(\lambda))=r$， 对于任意的正整数 k ，$1\le k\le r$， $A(\lambda)$ 必有非零的 k 阶子式，$A(\lambda)$ 的全部 k 阶子式的最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子(首1)。

显然，如果 $\operatorname{rank}(A(\lambda))=r$,则行列式因子一共有 r个。

例 1　　求

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

的各阶行列式因子。

解：　由于　$(1-\lambda,\lambda)=1,$　　$D_1(\lambda)=1$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$=\lambda(-\lambda^2-\lambda+1)=f(\lambda)$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2 \end{vmatrix}=\lambda^3(-\lambda-1)=g(\lambda)$$

显然 $(f(\lambda),g(\lambda))=\lambda,$ 而且其余的各2 阶子式也都包含 λ 作为公因子，所以 $D_2(\lambda)=\lambda.$

另外

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$|A(\lambda)|=-\lambda^3-\lambda^2$$

$$\Rightarrow D_3(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2$$

注意：观察 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), D_3(\lambda)$ 三者之间的关系。

定理2.1.5：等价λ矩阵有相同的各阶行列式因子，从而有相同的秩。

P.82

设 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的 **Smith** 标准形为

$$\boldsymbol{A}(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1(\lambda) & & & & & & \\ & \boldsymbol{d}_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \boldsymbol{d}_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

容易计算上面的标准形的各阶行列式因子为

$$D_1(\lambda)=d_1(\lambda)$$

$$D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)$$

$$\vdots$$

$$D_r(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda)$$

显然有

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)$$

$$d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}$$

$$\vdots$$

$$d_r(\lambda)=\frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$$

由于 $A(\lambda)$ 与上面的Smith标准形具有相同的各阶行列式因子，所以 $A(\lambda)$ 的各阶行列式因子为

$$D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_r(\lambda)$$

而 $$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$$

又是由这些行列式因子唯一确定的，于是

定理2.1.6：$A(\lambda)$ 的Smith标准形是唯一的。

定理2.1.7 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是对于任何的 k，它们的 k 阶行列式因子相同。

定理2.1.8 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的不变因子。

$$(1)\begin{bmatrix} \lambda-a & c_1 & & & \\ & \lambda-a & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda-a & c_{n-1} \\ & & & & \lambda-a \end{bmatrix}$$

首先观察此矩阵的元素排列规律，显然

$$D_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$$

下面看 $n-1$ 阶行列式因子。有一个 $n-1$ 阶子式要注意，即

$$\begin{vmatrix} c_1 & & & & \\ \lambda-a & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda-a & c_{n-1} \end{vmatrix} = c_1c_2\cdots c_{n-1}$$

容易计算出 $D_{n-1}(\lambda)=1$ 从而

$$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=\cdots=D_{n-1}(\lambda)=1$$

$$\Rightarrow d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=1, \cdots, d_{n-1}(\lambda)=1,$$

$$d_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$$

原 λ-矩阵的Smith标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (\lambda-a)^n \end{bmatrix}$$

初等因子和矩阵的相似

设 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$$

在复数域内将它们分解成一次因式的幂的乘积：

$$d_1(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{e_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{12}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{e_{1s}}$$

$$d_2(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{e_{21}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{22}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{e_{2s}}$$

$$\cdots\cdots$$

$$d_r(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{e_{r1}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{r2}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{e_{rs}}$$

其中 $\lambda_1,\cdots\lambda_s$ 是互异的复数，e_{ij} 是非负整数。因为 $d_i \mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,\cdots,r-1)$，所以满足如下关系

$$\mathbf{0 \le e_{11} \le e_{21} \le \cdots \le e_{r1}}$$

$$\mathbf{0 \le e_{12} \le e_{22} \le \cdots \le e_{r2}}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mathbf{0 \le e_{1s} \le e_{2s} \le \cdots \le e_{rs}}$$

定义　在上式中，所有指数大于零的因子

$$\boldsymbol{(\lambda-\lambda_j)^{e_{ij}}, e_{ij}>0, i=1,\cdots,r, j=1,\cdots,s}$$

称为 λ–矩阵 $A(\lambda)$ 的初等因子。

定理2.2.1 n 阶 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是它们有相同的秩且有相同的初等因子。

数字矩阵的相似与 λ -矩阵的等价

定理2.2.5：设 A, B 是两个 n 阶的数字矩阵，那么 A 与 B 相似的充分必要条件为它们的特征矩阵 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 等价。

对于任何一个数字矩阵 A， $|\lambda I - A| \neq 0$，　所以，

$$\operatorname{rank}(\lambda I - A) = n$$

于是可得下面两个定理

定理2.2.6：　两个同阶的方阵 A, B 相似的充分必要条件是 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 有相同的初等因子。

定理2.2.7：两个同阶的方阵 A, B 相似的充分必要条件是 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 有相同的行列式因子（或不变因子）。