第五章　　向量与矩阵的范数

定义： 设 V 是实数域 R（或复数域 C）上的 n 维线性空间，对于 V 中的任意一个向量 α 按照某一确定法则对应着一个实数，这个实数称为 α 的范数，记为 $\|\alpha\|$，并且要求范数满足下列运算条件：

（1）非负性：当 $\alpha \neq 0$，$\|\alpha\| > 0$，当且仅当

$\alpha = 0$，$\|\alpha\| = 0$.

（2）齐次性：$\|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|$，$k$ 为任意数。

（3） 三角不等式：对于 V 中的任意两个向量 α, β 都有

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

例： 在 n 维线性空间 C^n 中，对于任意的向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in C^n$$

定义

(1) $$\|\alpha\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

(2) $$\|\alpha\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2}$$

(3) $$\|\alpha\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$$

则 $\|\alpha\|_1$， $\|\alpha\|_2$， $\|\alpha\|_\infty$

都是 C^n 上的范数，并且还有

$$(1)' \quad \|\alpha\|_\infty \le \|\alpha\|_1 \le n\|\alpha\|_\infty$$

$$(2)' \quad \|\alpha\|_2 \le \|\alpha\|_1 \le \sqrt{n}\|\alpha\|_2$$

$$(3)' \quad \|\alpha\|_\infty \le \|\alpha\|_2 \le \sqrt{n}\|\alpha\|_\infty$$

引理（Hoider不等式）：设

$$\alpha = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T, \beta = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T \in C^n$$

则

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}|a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{1/q}}$$

其中 $p>1$， $q>1$ 且 $1/p + 1/q = 1$.

引理（**Minkowski** 不等式）：

设

$$\alpha = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T,\ \beta = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T \in C^n$$

则

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p},\quad p \ge 1}$$

几种常用的范数

定义： 设向量 $\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$，对任意的数 $p\geq 1$，称

$$\boxed{\|\alpha\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{1/p}}$$

为向量 α 的 p－范数。

常用的 p－范数：

(1) **1－范数**

$$\|\alpha\|_1=\sum_{i=1}^{n}|a_i|$$

（2）2－范数

$$\|\alpha\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{1/2} = (\alpha^H \alpha)^{1/2}$$

也称为欧氏范数。$\left(\|U\alpha\|_2 = \|\alpha\|_2,\ U\right.$ 是酉矩阵$\left.\right)$

（3）∞ －范数 $\|\alpha\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |a_i|$

定理:

$$\|\alpha\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\alpha\|_p$$

证明：令 $x = \max\limits_{1\le i\le n} |a_i|$ ，

$$y_i = {|a_i|}/{x}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

于是有

$$\|\alpha\|_p = x\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\ p}\right)^{1/p}$$

另一方面

$$1 \le \sum_{i=1}^{n} y_i^{\ p} \le n$$

$$1 \le \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\ p}\right)^{1/p} \le n^{1/p}$$

故

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\ p}\right)^{1/p}=1$$

由此可知

$$\|\alpha\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\|\alpha\|_p=x=\max_{1\le i\le n}|a_i|$$

定义：设 $\|\alpha\|_a$，$\|\alpha\|_b$ 是 n 维线性空间 V 上定义的两种向量范数，如果存在两个与 α 无关的正数 d_1, d_2 使得

$$d_1\|\alpha\|_b\le\|\alpha\|_a\le d_2\|\alpha\|_b,\quad \forall\alpha\in V$$

则称范数 $\|\bullet\|_a$，$\|\bullet\|_b$ 等价。

注：设 $\|\bullet\|_a$，$\|\bullet\|_b$ 等价，如果向量序列 $\{X_k\}$ 依范数 $\|\bullet\|_a$ 收敛，即 $\lim\limits_{k\to\infty}\|X_k - X\|_a = 0$，则 $\{X_k\}$ 依 $\|\bullet\|_b$ 也收敛，反之亦然。

定理：有限维线性空间 V 上的任意两个向量范数都是等价的。

定理：对 C^n 上任何向量范数 $\|\ \|_\mu$，

$$\lim_{k\to\infty} X_k = X \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\|X_k - X\|_\mu = 0$$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i, i = 1,\cdots n}$$

（利用 $\|\ \|_\infty$ ）

问题：$\|x\| \equiv (|2x_1 - 3x_2|^2 + |x_2|^2)^{1/2}$ 是否是 C^2 上的范数？

$$(2x_1 - 3x_2,\ x_2) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Ax$$

$$\boxed{\text{满秩方阵}}$$

$$\therefore\ \|x\| = \|Ax\|_2$$

$$\Downarrow$$

$Ax = 0$ 只有零解

$$\Downarrow$$

$x \neq 0$ 时，$\|x\| > 0$

非负性，齐次性，三角不等式容易验证。

利用向量范数可以去构造新的范数。

例：设 $\|\cdot\|_b$ 是 $\boldsymbol{C}^m$上的向量范数，且 $A \in C^{m\times n}$,

$\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n}$. 则由 $\|\boldsymbol{x}\|_a \triangleq \|\boldsymbol{Ax}\|_b$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n$.

所定义的 $\|\cdot\|_a$是 $\boldsymbol{C}^n$上的向量范数。

注：$\boldsymbol{Ax} = 0$ 只有零解,所以 $\|\boldsymbol{x}\|_a = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = 0$

矩阵范数

定义：对于任何一个矩阵 $A \in C^{m\times n}$ ，用 $\|\boldsymbol{A}\|$ 表示按照某一确定法则与矩阵 A 相对应的一个实数，且满足

(1) 非负性：当 $A \neq 0$, $\|A\| > 0$. 当且仅当 $A = 0$ 时, $\|A\| = 0$.

(2) 齐次性： $\|kA\| = |k|\|A\|$, k 为任意复数。

(3) 三角不等式：对于任意两个同种形状矩阵 A, B 都有

$$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$$

（4）**矩阵乘法的相容性**：对于任意两个可以相乘的矩阵 A, B ，都有

$$\|\boldsymbol{AB}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$$

那么我们称 $\|A\|$ 是矩阵 A 的范数。

例 1：对于任意 $A \in C^{m\times n}$ ，定义

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

可以证明如此定义的 $\|A\|$ 的确为矩阵 A 的范数。

证明：只需要验证此定义满足矩阵范数的四条性质即可。非负性，齐次性与三角不等式容易证明。现在我们验证乘法的相容性。

设 $A \in C^{m\times p}, B \in C^{p\times n}$，则

$$\|AB\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right| \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}|a_{ik}||b_{kj}|$$

$$\le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[(\sum_{k=1}^{p}|a_{ik}|)(\sum_{k=1}^{p}|b_{kj}|)]$$

$$= (\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}|a_{ik}|)(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}|b_{kj}|) = \|A\|\|B\|.$$

例 2 ：设矩阵 $A \in C^{n\times n}$ ，证明：

$$\|A\| = n \max_{i,j} |a_{ij}|$$

是矩阵 A 的范数。

证明：非负性，齐次性和三角不等式容易证得。

现在我们考虑乘法的相容性。设 $A \in C^{n\times n}$，

$B \in C^{n\times n}$ ，那么

$$\|AB\| = n\max_{i,j}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right| \leq n\max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|$$

$$\leq n \cdot n\max_{i,k}|a_{ik}|\max_{k,j}|b_{kj}|$$

$$= n\max_{i,k}|a_{ik}| \cdot n\max_{k,j}|b_{kj}| = \|A\|\|B\|$$

因此 $\|A\|$ 为矩阵 A 的范数。

例 3 ：对于任意 $A \in C^{m\times n}$，定义

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

可以证明 $\|A\|$ 也是矩阵 A 的范数。我们称此范数为矩阵 A 的 **Frobenius 范数**。

证明：此定义的非负性，齐次性是显然的。利用 **Minkowski** 不等式容易证明三角不等式。现在我们验证乘法的相容性。

设 $A \in C^{m\times l}$，$B \in C^{l\times n}$，则

$$\|AB\|_F^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}\right|^2\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}||b_{kj}|\right)^2$$

$$\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{l}|b_{kj}|^2\right)\right]$$

Schwartz 不等式

$$=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}|b_{kj}|^2\right)=\|A\|_F^2\|B\|_F^2$$

于是有 $\|AB\|_F\le\|A\|_F\|B\|_F$.

例 4：对于任意 $A \in C^{m\times n}$ ，定义

$$\|A\| = [\mathrm{Tr}(A^H A)]^{1/2}$$

证明如此定义的 $\|A\|$ 是矩阵 A 的范数。

证明：注意到这样一个基本事实，即

$$[Tr(A^H A)]^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

由 例 3 可知此定义满足范数的性质。

Frobenius 范数的性质：

（1）如果 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}$，那么

$$\|\boldsymbol{A}\|_F^{\ 2}=\sum_{i=1}^{n}\|\alpha_i\|_2^{\ 2}$$

（2）$\|\boldsymbol{A}\|_F^{\ 2}=\mathbf{Tr}(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})$

（3）对于任何 m 阶酉矩阵 U 与 n 阶酉矩阵 V

都有等式

$$\|A\|_F = \|UA\|_F = \|A^H\|_F$$

$$= \|AV\|_F = \|UAV\|_F$$

利用性质（1）

关于矩阵范数的等价性定理：

定理：设 $\|A\|_\alpha$，$\|A\|_\beta$ 是矩阵 A 的任意两种范数，则总存在正数 d_1, d_2 使得

$$d_1\|A\|_\beta \le \|A\|_\alpha \le d_2\|A\|_\beta, \quad \forall A \in C^{m\times n}.$$

诱导范数（算子范数）

定义： 设 $\|X\|_\alpha$ 是向量范数，$\|A\|_\beta$ 是矩阵范数，如果对于任何矩阵 A 与向量 X 都有

$$\|AX\|_\alpha \le \|A\|_\beta \|X\|_\alpha$$

则称矩阵范数 $\|A\|_\beta$ 与向量范数 $\|X\|_\alpha$ 是相容的。

例 1： 矩阵的 **Frobenius** 范数与向量的 **2-**范数是相容的.

证明： 因为 $\|\boldsymbol{AX}\|_F \le \|\boldsymbol{A}\|_F \|\boldsymbol{X}\|_F$

于是有

$$\|AX\|_2 \le \|A\|_F \|X\|_2$$

例 2：设 $\|X\|_\alpha$ 是向量的范数，则

$$\|A\|_i = \max_{X\neq 0}\frac{\|AX\|_\alpha}{\|X\|_\alpha}$$

$$= \max_{\|Y\|_\alpha=1}\|AY\|_\alpha$$

满足矩阵范数的定义，且 $\|A\|_i$ 是与向量范数 $\|X\|_\alpha$ 相容的矩阵范数。

证明：首先我们验证此定义满足范数的四条性质。非负性，齐次性与三角不等式易证。现在考虑矩阵范数的相容性。

设 $B \neq 0$，那么

$$\left\|\boldsymbol{AB}\right\|_i = \max_{\boldsymbol{X}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\left\|\boldsymbol{ABX}\right\|_\alpha}{\left\|\boldsymbol{X}\right\|_\alpha} = \max_{\boldsymbol{X}\neq \boldsymbol{0}} \left(\frac{\left\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BX})\right\|_\alpha}{\left\|\boldsymbol{BX}\right\|_\alpha} \frac{\left\|\boldsymbol{BX}\right\|_\alpha}{\left\|\boldsymbol{X}\right\|_\alpha}\right)$$

$$\leq \max_{\boldsymbol{BX}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\left\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BX})\right\|_\alpha}{\left\|\boldsymbol{BX}\right\|_\alpha} \max_{\boldsymbol{X}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\left\|\boldsymbol{BX}\right\|_\alpha}{\left\|\boldsymbol{X}\right\|_\alpha}$$

$$\leq \max_{\boldsymbol{X}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\left\|\boldsymbol{AX}\right\|_\alpha}{\left\|\boldsymbol{X}\right\|_\alpha} \max_{\boldsymbol{X}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\left\|\boldsymbol{BX}\right\|_\alpha}{\left\|\boldsymbol{X}\right\|_\alpha} = \left\|\boldsymbol{A}\right\|_i \left\|\boldsymbol{B}\right\|_i$$

因此 $\left\|A\right\|_i$ 的确满足矩阵范数的定义。

最后证明 $\|A\|_i$ 与 $\|X\|_\alpha$ 是相容的。

由上面的结论可知

$$\|\boldsymbol{A}\|_i \ge \frac{\|\boldsymbol{AX}\|_\alpha}{\|\boldsymbol{X}\|_\alpha}$$

$$\|\boldsymbol{AX}\|_\alpha \le \|\boldsymbol{A}\|_i \|\boldsymbol{X}\|_\alpha$$

这说明 $\|A\|_i$ 与 $\|X\|_\alpha$ 是相容的。

$$\boxed{\|\boldsymbol{A}\|_i = \max_{\boldsymbol{X}\neq 0} \frac{\|\boldsymbol{AX}\|_\alpha}{\|\boldsymbol{X}\|_\alpha}}$$

定义：上面所定义的矩阵范数称为由向量范数 $\|X\|_\alpha$ 所诱导的诱导范数或算子范数。

由向量 p--范数 $\|X\|_p$ 所诱导的矩阵范数称为矩阵**p--范数**。即

$$\|A\|_p = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_p}{\|X\|_p} = \max_{\|X\|_p = 1} \|AX\|_p$$

常用的矩阵 **p--范数**为 $\|A\|_1$，$\|A\|_2$ 和 $\|A\|_\infty$ 。

定理： 设 $A \in C^{m \times n}$ ，则

（1） $\|A\|_1 = \max_j (\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|)$, $\quad j = 1, 2, \cdots, n$

我们称此范数为矩阵 A 的列和范数。 **(了解)**

证：

$$\|A\|_1=\max_{X\neq 0}\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}=\max_{\|X\|_1=1}\|AX\|_1$$

$$\|Ax\|_1=\|A(x_1e_1+\cdots+x_ie_i+\cdots x_ne_n)\|_1$$

$$\leq|x_1|\|Ae_1\|_1+\cdots+|x_i|\|Ae_i\|_1+\cdots|x_n|\|Ae_n\|_1$$

$$\leq\max_j\|Ae_j\|_1\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$=\left(\max_j\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right)\sum_{i=1}^{n}|x_i|=\left(\max_j\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right)\|x\|_1$$

$$\therefore\quad \underline{\|A\|_1=\max_{X\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}\leq\max_j\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|}$$

又 $\|A\|_1 = \max\limits_{X\neq 0}\dfrac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \geq \max\limits_{j}\dfrac{\|Ae_j\|_1}{\|e_j\|_1} = \max\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{m}|a_{ij}|$

$$\therefore \quad \|A\|_1 = \max_{j}\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right)$$

（2）$\|A\|_2 = \max\limits_{j}(\lambda_j(A^H A))^{1/2}$，

A 的最大奇异值

$\lambda_j(A^H A)$ 表示矩阵 $A^H A$ 的第 j 个特征值。我们称此范数为矩阵 A 的谱范数。

证:

$$\|A\|_2 = \max_{X\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{X\neq 0}\frac{\left(x^H A^H Ax\right)^{1/2}}{\left(x^H x\right)^{1/2}}$$

$$= \max_j \left(\lambda_j (A^H A)\right)^{1/2}$$

（3）$\|A\|_\infty = \max_i (\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|)$， $i = 1, 2, \cdots, m$

我们称此范数为矩阵A 的行和范数。 (了解)

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \le \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}x_j|$$

$$\le \|x\|_\infty \cdot \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \Longrightarrow \|A\|_\infty \le \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

如果 $A=0$, 结论显然. 假设 $A\ne 0$, 定义

$Z_j = (z_k^{(j)}) \in C^{n\times 1}$, 其中

$$\begin{cases} z_k^{(j)} = \dfrac{\bar{a}_{jk}}{|a_{jk}|}, & \text{if } a_{jk}\ne 0 \\ z_k^{(j)} = 1, & \text{if } a_{jk} = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

显然 $\|Z_j\|_\infty = 1$,

$$a_{jk}z_k^{(j)} = |a_{jk}|$$

$$\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}\geq \|AZ_j\|_\infty=\max_{1\leq i\leq m}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}z_k^{(j)}\right|$$

$$\geq\sum_{k=1}^{n}a_{jk}z_k^{(j)}=\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|$$

$$\therefore\quad \underline{\|A\|_\infty\geq\max_{1\leq j\leq m}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|}$$

注意：只需了解该定理内容，证明不要求掌握。

例：设

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

计算 $\|A\|_1$, $\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$ 和 $\|A\|_F$ 。

解：$\|A\|_1=5,\quad \|A\|_F=\sqrt{23},\quad \|A\|_\infty=5,$ 因为

$$A^H A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 6\\ 0 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

所以，$\|A\|_2=\sqrt{15}.$

矩阵的谱半径及其性质

定义： 设 $A \in C^{m\times n}$， A 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ，我们称

$$\boldsymbol{\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|\}}$$

为矩阵 A 的谱半径。

定理： 设 $A \in C^{m\times n}$，那么 $\rho(A) \le \|A\|.$

这里 $\|A\|$ 是矩阵 A 的任何一种范数。

例： 证明：对于任何矩阵 $A\in C^{m\times n}$ 都有

$$\|A^H\|_1=\|A^T\|_1=\|A\|_\infty$$

$$\|A^H\|_2=\|A^T\|_2=\|A\|_2$$

$$\|A^HA\|_2=\|A\|_2^{\ 2}$$

$$\|A\|_2^{\ 2}\le\|A\|_1\|A\|_\infty$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_2^{\ 2}=\lambda_{\max}\left(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\right)=\rho(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})\le\|\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\|_1$$

$$\le\|\boldsymbol{A}^H\|_1\|\boldsymbol{A}\|_1=\|\boldsymbol{A}\|_\infty\|\boldsymbol{A}\|_1$$

如何由矩阵范数构造与之相容的向量范数？

定理：设 $\|A\|_*$ 是矩阵范数，则存在向量范数 $\|X\|$ 使得

$$\|AX\| \le \|A\|_* \|X\|$$

证明：对于任意的非零向量 α ，定义向量范数

$$\|\boldsymbol{X}\| = \|\boldsymbol{X}\boldsymbol{\alpha}^{H}\|_*$$

容易验证此定义满足向量范数的三个性质，且

$$\|AX\| = \|AX\alpha^H\|_* \le \|A\|_* \|X\alpha^H\|_*$$

$$\le \|A\|_* \|X\|$$

例：已知矩阵范数

$$\|A\|_* = \|A\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

求与之相容的一个向量范数。

解：取 $\alpha = \begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\end{bmatrix}^T$ 。设

$$X = \begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}^T$$

那么

$$\|\boldsymbol{X}\| = \|\boldsymbol{X}\alpha^{H}\|_{*} = \sum_{i=1}^{n}|x_i| = \|\boldsymbol{X}\|_1$$

例： 设 $\|\bullet\|$是 $C^{n\times n}$上的矩阵范数。证明：

（1） $\|\boldsymbol{I}\| \geq 1$ $\quad\left(\|\boldsymbol{A}\| = \|\boldsymbol{AI}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{I}\|\right)$

（2）A 为可逆矩阵，λ 为 A 的特征值，则有

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|^{-1} \leq |\lambda| \leq \|\boldsymbol{A}\|$$

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$$