例：设 A 是一个 n 阶正规矩阵，则 $\rho(A)=\|A\|_2$

证明：设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$A$ 是正规矩阵, 所以存在酉矩阵 U 使得 $A=U\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H$，从而

$$A^H A=U\operatorname{diag}(|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2)U^H$$

所以 $\|A\|_2=\max\limits_j(\lambda_j(A^H A))^{1/2}=\max\limits_j|\lambda_j|=\rho(A).$

例： 设$\|\cdot\|$是$C^{n\times n}$的相容矩阵范数，则对任意$A\in C^{n\times n}$，都有

$$\rho(A)=\lim_{k\to\infty}\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}$$

(本题不在考试范围,仅供`参考)

证明：关于矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)$, 我们有

$$(\rho(A))^k = \rho(A^k) \le \|A^k\|$$

于是有

$$\rho(A) \le \|A^k\|^{1/k}, k = 1, 2, \cdots\cdots$$

另一方面，对任给的 $\varepsilon > 0$, 我们可以构造矩阵

$$\bar{A} = [\rho(A) + \varepsilon]^{-1} A$$

那么 $\rho(\bar{A}) < 1$, 由定理5.4.3可知 $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{A}^k = 0$

于是当 $k \to \infty$, 有

$$\|\bar{A}^k - 0\| = \|\bar{A}^k\| \to 0$$

那么存在正整数 K, 当 $k > K$ 时有 $\left\|\bar{A}^k\right\| \le 1$, 即对任意的 $k > K$, 都有

$$\left\|A^k\right\| \le [\rho(A) + \varepsilon]^k$$

$$\left\|A^k\right\|^{1/k} \le \rho(A) + \varepsilon$$

故

$$\rho(A) = \lim_{k \to \infty} \left\|A^k\right\|^{1/k}$$

定理： 对于两个绝对收敛的矩阵级数，它们的Cauchy积所组成的矩阵级数仍然绝对收敛

$$S_1: A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots;$$

$$S_2: B_1 + B_2 + \cdots + B_k + \cdots.$$

$$S_1 \to A,\ \ S_2 \to B$$

$$S_3: A_1B_1 + (A_1B_2 + A_2B_1) + (A_1B_3 + A_2B_2 + A_3B_1)$$

$$+ \cdots + (A_1B_k + A_2B_{k-1} + \cdots + A_kB_1) + \cdots$$

$$S_3 \to AB$$

初等函数的Taylor展开式:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$+(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$+(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

$$+(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1]$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = x-\frac{x^2}{2}+$$

$$\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\quad x\in(-1,1]$$

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

$$+(-1)^n x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1)$$

所以对于任意的n阶矩阵A，下面矩阵幂级数绝对收敛.

$$e^{A}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{n}}{n!}=I+A+\frac{A^{2}}{2!}+\frac{A^{3}}{3!}+\cdots+\frac{A^{n}}{n!}+\cdots$$

$$\sin A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}A^{2n+1}=A-\frac{A^{3}}{3!}+\frac{A^{5}}{5!}-\cdots+(-1)^{n}\frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\cos A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}A^{2n}=I-\frac{A^{2}}{2!}+\frac{A^{4}}{4!}-\cdots+(-1)^{n}\frac{A^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

当矩阵A的谱半径$\rho(A)<1$ 时，下面的三个矩阵级数也是绝对收敛的:

$$\arctan A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}A^{2n-1}=A-\frac{A^3}{3}+\frac{A^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{A^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

$$\ln(I+A)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}A^n=A-\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3}-\frac{A^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{A^n}{n}+\cdots,$$

$$(I+A)^{-1}=I-A+A^2-A^3+\cdots+(-1)^n A^n+\cdots$$

$$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+A^3+\cdots+A^n+\cdots$$

定理：矩阵幂级数

$$I+A+A^2+\cdots+A^k+\cdots$$

绝对收敛的充分必要条件是 $\rho(A)<1$, 且其和为 $(I-A)^{-1}$.

例：已知

$$A=\begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 \\ 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

（1）求证：矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 A^k$ 收敛.

（2）求矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 A^k$ 的收敛和.

解： （1）由

$$|\lambda E - A| = (\lambda + \frac{2}{5})(\lambda - \frac{4}{5})$$

可知A的特征值为 $\lambda_1 = \frac{-2}{5}$，$\lambda_2 = \frac{4}{5}$，$\rho(A) = \frac{4}{5}$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 A^k$ 的收敛半径为 $R = 1$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1}, \quad (\sum_{k=0}^{\infty} x^k)' = (1-x)^{-2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = (1-x)^{-2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x(1-x)^{-2}$$

$$(\sum_{k=0}^{\infty} kx^k)' = (x+1)(1-x)^{-3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = x(1+x)(1-x)^{-3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 A^k = A(E+A)(E-A)^{-3} = 5\begin{bmatrix} -\frac{7}{24} & \frac{11}{24} \\ \frac{11}{24} & -\frac{7}{24} \end{bmatrix}$$

这里用到了第六章的定理