

Schur 引理与正规矩阵

定义: 设 $A, B \in C^{n \times n}$ (或 $R^{n \times n}$), 若存在 $U \in U^{n \times n}$ (或 $E^{n \times n}$) 使得

$$U^H A U = U^{-1} A U = B \quad (\text{或 } U^T A U = U^{-1} A U = B)$$

则称 A 酉相似(或正交相似)于 B .

定理(Schur引理): 任何一个 n 阶复矩阵 A 酉相似于一个上(下)三角矩阵。

证明：用**数学归纳法**。 A 的阶数为1时定理显然成立。现设 A 的阶数为 $k-1$ 时定理成立，考虑 A 的阶数为 k 时的情况。

取 k 阶矩阵 A 的一个特征值 λ_1 ，对应的**单位特征向量**为 α_1 ，构造以 α_1 为第一列的 k 阶**酉矩阵**，

$$U_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]$$

$$\begin{aligned} AU_1 &= [A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_k] \\ &= [\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_k] \end{aligned}$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 构成 C^k 的一个标准正交基，

故 $A\alpha_i = \sum_{j=1}^k \bar{a}_{ij}\alpha_j (i = 2, 3, \dots, k)$, 因此

$$AU_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{31} & \cdots & \bar{a}_{k1} \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A_1 & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

其中 A_1 是 $k-1$ 阶矩阵, 根据归纳假设, 存在 $k-1$ 阶酉矩阵 W 满足

$$W^H A_1 W = R_1 \quad (\text{上三角矩阵})$$

令

$$\boldsymbol{U}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \\ & \boldsymbol{w} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{U}^{k \times k}$$

那么

$$\boldsymbol{U}_2^H \boldsymbol{U}_1^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{U}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \boxed{\boldsymbol{b}_{21} \quad \boldsymbol{b}_{k1}} \\ 0 & \\ \vdots & \boldsymbol{R}_1 \\ 0 & \end{bmatrix}$$

注意：等号右端的三角矩阵主对角线上的元素为矩阵 A 的**全部特征值**。

定理(Schur 不等式):

设 $A \in C^{n \times n}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为矩阵 A 的特征值, 那么

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$$

其中等号成立 $\longleftrightarrow A$ 酉相似于对角矩阵。

正规矩阵

定义： 设 $A \in C^{n \times n}$ ，如果 A 满足

$$AA^H = A^H A$$

那么称矩阵 A 为一个正规矩阵.

设 $A \in R^{n \times n}$, 如果 A 同样满足

$$AA^H = A^H A \quad \text{即} \quad AA^T = A^T A$$

那么称矩阵 A 为一个实正规矩阵。

例: (1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 为实正规矩阵。

$$(2) \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix}$$

其中 a, b, c, d 是不全为零的实数, 容易验证这是一个实正规矩阵.

$$(3) \quad \begin{bmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{bmatrix}$$

是一个正规矩阵.

(4) H-阵, 反H-阵, 正交矩阵, 酉矩阵, 对角矩阵都是正规矩阵.

正规矩阵的性质与结构定理

引理 1： 设 A 是一个正规矩阵， 则与 A 酉相似的矩阵一定是正规矩阵.

引理 2： 设 A 是一个正规矩阵， 且又是三角矩阵， 则 A 必为对角矩阵.

由上述引理可以得到正规矩阵的结构定理

定理： 设 $A \in C^{n \times n}$ ， 则 A 是正规矩阵的充要条件是存在一个酉矩阵 U 使得

$$U^H A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值.

$$U^H A^H U = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n)$$

推论 1: n 阶正规矩阵有 n 个线性无关的特征向量. (必要但不充分)

举例说明：可对角化的矩阵不一定可酉对角化.

设 X, Y 是两个线性无关但是不正交的向量，比如

$$\text{取 } P=[X \ Y]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } A = PDP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \text{ 可对角化，但不能酉对角化} \end{aligned}$$

推论 2： 正规矩阵属于不同特征值的特征向量彼此**正交**.

例 1： 设

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

求正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

解： 先计算矩阵的特征值

$$|\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$$

其特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 8$$

对于特征值 $\lambda_1 = -1$ 解线性方程组

$$(-I - A)X = 0$$

求得其一个基础解系

$$X_1 = [-1, 2, 0]^T, \quad X_2 = [-1, 0, 1]^T$$

现在将 X_1, X_2 正交化并单位化, 得到两个标准正交向量

$$\eta_1 = \left[\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right]^T, \quad \eta_2 = \left[\frac{-4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{2\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right]^T$$

对于特征值 $\lambda_2 = 8$ 解线性方程组

$$(8I - A)X = 0$$

求得其一个基础解系

$$X_3 = [2, 1, 2]^T$$

将其单位化得到一个单位向量

$$\eta_3 = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]^T$$

将这三个标准正交向量组成矩阵

$$Q = [\eta_1, \eta_2, \eta_3] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

则矩阵 Q 即为所求正交矩阵且有

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{bmatrix}$$

定理： 设 A 是正规矩阵，则

- (1) A 是H-阵的充要条件是 A 的特征值为实数 。
- (2) A 是反H-阵的充要条件是 A 的特征值的实部为零 。
- (3) A 是U-阵的充要条件是 A 的特征值的模长为1 。

注意：正规矩阵绝不仅此三类. 比如：

(1) A 是酉矩阵, $2A$ 也是正规矩阵;

(2) B 是反H-阵, $I + B, B + B^2$ 也是正规矩阵.

例 4 : 设 A 是一个 n 阶 \mathbf{H} -阵且存在自然数 k 使得,
 $A^k = \mathbf{0}$, 证明 $A = \mathbf{0}$.

证明: 由于 A 是 \mathbf{H} -矩阵, 所以存在一个酉矩阵
 $U \in U^{n \times n}$ 使得

$$A = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} U^H, \quad \lambda_i \in \mathbf{R}$$

于是可得

$$A^k = U \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} U^H = 0$$

从而

$$\lambda_i^k = 0, \quad \lambda_i \in R$$

$$\longrightarrow \lambda_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{即 } A = 0.$$

Hermite二次型 (Hermite二次齐次多项式)

Hermite 矩阵的基本性质

引理： 设 $A \in C^{n \times n}$ ， 则

(1) $A + A^H, AA^H, A^H A$ 都是 H-阵.

(2) $A - A^H$ 是反 H-阵.

- (3) 如果 A 是H-阵, 那么 A^k 也是H-阵, k 为任意正整数.
- (4) 如果 A 是可逆的 H-阵, 那么 A^{-1} 也是可逆的 H-阵.
- (5) 如果 A 是 H-阵(反H-阵), 那么 iA 是反H-矩阵(H-阵), 这里 i 为虚数单位.

H-阵的结构定理

定理： 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，则 A 是 H-阵的充分必要条件是存在一个酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得

$$U^H A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

H-阵酉相似于
实对角矩阵

推论： 实对称阵正交相似于实对角矩阵.

例： 设 A 为一个幂等 H -阵, 则存在酉矩阵 $U \in U^{n \times n}$ 使得

$$U^H A U = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

证明： A 为一个 H -阵, 所以存在酉矩阵 $W \in U^{n \times n}$ 使得

$$W^H A W = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

A 为一个幂等 H-阵, $\rightarrow \lambda_i = 0$ 或 $\lambda_i = 1$

将 1 放在一起, 0 放在一起, 那么可找到一个酉矩阵 $U \in U^{n \times n}$ 使得

$$U^H A U = \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad r \text{ 为矩阵 } A \text{ 的秩.}$$

推论： 设 A 为一个 n 阶矩阵，则

$$A = A^H = A^2$$

的充分必要条件是存在一个 $n \times r$ 型酉矩阵
使得 $U_1 \in U_r^{n \times r}$

$$A = U_1 U_1^H$$

其中 $r = \text{rank}(A)$ 。

$$U^H A U = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow A = \underbrace{U \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}}_{U_1} \underbrace{\begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} U^H}_{U_1^H}$$

关于正交投影（了解）

设 \mathcal{X} 是 C^n 的子空间，矩阵 U_1 的列由 \mathcal{X} 的标准正交基构成， 矩阵

$$P_{\mathcal{X}} = U_1 U_1^H,$$

则线性变换 $\sigma: C^n \rightarrow \mathcal{X}$

$$\sigma(z) = P_{\mathcal{X}} z, \quad z \in C^n$$

是 C^n 到 \mathcal{X} 的正交投影变换. 并且

$$\|z - P_{\mathcal{X}} z\|_2 = \min_{x \in \mathcal{X}} \|z - x\|_2, \quad \left(\|x\|_2 \triangleq \sqrt{x^H x} \right)$$