Jordan标准形的另一种求法

Jordan标准形的几个基本性质：

(1) 每个Jordan 块 J_i 对应属于 λ_i 的一个特征向量；

$$P^{-1}AP = J$$

$$A[P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5] = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5]\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$$

$$AP_1 = 2P_1, \quad AP_4 = 3P_4$$

$$AP_2 = P_1 + 2P_2, \quad AP_3 = P_2 + 2P_3, \quad AP_5 = P_4 + 3P_5$$

(2) 对于给定的 λ_i，其对应的Jordan 块的个数等于λ_i 的几何重复度；

证明： $\operatorname{rank}(\lambda_i E - A) = \operatorname{rank} P^{-1}(\lambda_i E - A)P = \operatorname{rank}(\lambda_i E - J)$

设 A 的特征根 λ_i 对应的Jordan 块有 s 个, 则

$$\operatorname{rank}(\lambda_i E - J) = n - s.$$

λ_i 的几何重复度为 $q_i = n - \operatorname{rank}(\lambda_i E - A)$.

$\therefore \operatorname{rank}(\lambda_i E - A) = n - q_i$. 从而 $\operatorname{rank}(\lambda_i E - J) = n - q_i$.

$\therefore\ s = q_i$.

(3) 特征值 λ_i 所对应的全体 Jordan 块的阶数之和等于 λ_i 的代数重复度.

(4) 设 n 阶方阵 A 相似于Jordan标准形 J, 且 $P^{-1}AP=J$, 则

$$\operatorname{rank}(\lambda_i E-A)^l=\operatorname{rank}P^{-1}(\lambda_i E-A)^l P$$

$$=\left[P^{-1}(\lambda_i E-A)P\right]^l=\operatorname{rank}(\lambda_i E-J)^l,\ \ l=1,2,\ldots$$

(5) 对于 n_i 阶的Jordan块 J_i，$(J_i-\lambda_i E)^l$ 的秩变化如下：

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i},\qquad \begin{aligned}&\operatorname{rank}(J_i-\lambda_i E)=n_i-1,\\ &\operatorname{rank}(J_i-\lambda_i E)^2=n_i-2,\\ &\qquad\vdots\\ &\operatorname{rank}(J_i-\lambda_i E)^{n_i-1}=1,\\ &\operatorname{rank}(J_i-\lambda_i E)^h=0,\ (h\ge n_i)\end{aligned}$$

对于Jordan块 J_j，

$$J_j=\begin{bmatrix}\lambda_j & 1 & & & \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_j\end{bmatrix}_{n_j\times n_j}$$

如果 $\lambda_j\neq\lambda_i$，则

$$\mathrm{rank}(J_j-\lambda_i E)^l=n_j,\qquad (l=1,2,\cdots)$$

即随着 l 增大，影响 rank $(J-\lambda_i E)^l$ 的只有 λ_i 对应的Jordan块.

求 Jordan 标准形的另一种方法

(1) 计算 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^l$，得出

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}-\lambda_i\boldsymbol{E})^l=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^l,\quad l=1,2,\cdots$$

(2) 通过分析 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}-\lambda_i\boldsymbol{E})^l$，$l=1,2,\cdots$，得出对应于特征值 λ_i 的 Jordan 块的个数，阶数.

例：

$$J=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{2} \end{bmatrix},\quad J-2I=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{0} \end{bmatrix},\quad (J-2I)^2=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ & 0 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{0} \end{bmatrix},$$

$$(J-2I)^k=0,\quad k\geq 3.$$

反之，通过分析 rank $(A-2I)^l$ = rank $(J-2I)^l$，可得对应于特征值 2 的 Jordan 块的个数，阶数.

例：已知 10 阶矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^7 (\lambda - 3)^3.$$

经过计算得到下面的数据：

$$\operatorname{rank}(2I - A) = 7,$$
$$\operatorname{rank}(2I - A)^2 = 4,$$
$$\operatorname{rank}(2I - A)^3 = 3,$$
$$\operatorname{rank}(2I - A)^4 = 3.$$

$$\operatorname{rank}(3I - A) = 8,$$
$$\operatorname{rank}(3I - A)^2 = 7,$$
$$\operatorname{rank}(3I - A)^3 = 7.$$

确定 A 的 Jordan 标准形.

$\mathrm{rank}(2I-A)=7,$ $\longrightarrow$ 对应于 $\lambda=2$ 的Jordan块共有 $10-7=3$ 块;

$\mathrm{rank}(2I-A)^2=4$ $\longrightarrow$ 对应于 $\lambda=2$ 的Jordan块中，阶数 ≥ 2 的有 $7-4=3$ 块;

$\mathrm{rank}(2I-A)^3=3$ $\longrightarrow$ 对应于 $\lambda=2$ 的Jordan块中，阶数 ≥ 3 的有 $4-3=1$ 块;

$\mathrm{rank}(2I-A)^4=3$ $\longrightarrow$ 不再降秩，所以 $\lambda=2$ 的Jordan块中最大阶数 $=3$

从而，对应于 $\lambda=2$ 的Jordan块分别为：3阶1块，2阶2块，共3块.

$\mathrm{rank}(3I - A) = 8,$ $\longrightarrow$ 对应于 $\lambda = 3$ 的Jordan块共有 $10 - 8 = 2$ 块;

$\mathrm{rank}(3I - A)^2 = 7$ $\longrightarrow$ 对应于 $\lambda = 3$ 的Jordan块中，阶数 ≥ 2 的有 $8 - 7 = 1$ 块;

$\mathrm{rank}(3I - A)^3 = 7$ $\longrightarrow$ 不再降秩，所以 $\lambda = 3$ 的Jordan块中最大阶数 $= 2$

从而, 对应于 $\lambda = 3$ 的Jordan块分别为：2阶1块，1阶1块，共2块.

一般地，对 n 阶矩阵 A，若：

$$\operatorname{rank}(\lambda_i I - A) = s_1, \qquad \operatorname{rank}(\lambda_i I - A)^2 = s_2,$$

$$\operatorname{rank}(\lambda_i I - A)^3 = s_3, \cdots, \quad \operatorname{rank}(\lambda_i I - A)^l = s_l,$$

$$\operatorname{rank}(\lambda_i I - A)^{l+1} = s_l.$$

则对于 A 的特征根 $\lambda = \lambda_i$，共有 $n - s_1$ 个Jordan 块，其中阶数最高为 l 阶，阶数 ≥ 2 的Jordan块有 $s_1 - s_2$ 个，阶数 ≥ 3 的有 $s_2 - s_3$ 个，阶数 ≥ 4 的有 $s_3 - s_4$ 个，…，l 阶的有 $s_{l-1} - s_l$ 个.

Jordan标准形的应用举例

例: 设 A 为数域 F 上的 n 阶方阵, 且存在正整数 m 使得 $A^m = I$. 证明: A 与对角矩阵相似, 且主对角线上的元素均为 m 次单位根.

证明：设 A 的Jordan标准形为

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

即有可逆矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=J$. 由于 $A^m=I$,

所以有 $$J^m=(Q^{-1}AQ)^m=Q^{-1}A^mQ=Q^{-1}IQ=I,$$

从而有

$$J_i^m=\begin{bmatrix} \lambda_i^m & m\lambda_i^{m-1} & \cdots & * \\ & \lambda_i^m & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & m\lambda_i^{m-1} \\ & & & \lambda_i^m \end{bmatrix}=I_k$$

因此，只有当 J_i 为一阶矩阵时上面的矩阵等式成立, 所以 $t=n$, J 为对角矩阵, A 与对角矩阵相似, λ_i 均为 m 次单位根.

例： 设 A 为数域 F 上的 n 阶方阵且满足 $A^2 = A$，证明：

A 与对角矩阵

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

相似.

证明：设 A 的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{bmatrix},\quad J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

即有可逆矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=J$.　由于 $A^2=A$,

所以有 $J^2=(Q^{-1}AQ)^2=Q^{-1}A^2Q=Q^{-1}AQ=J,$

从而有 $J_i^2=J_i,\quad i=1,2,\cdots,t.$ 即

$$\begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 2\lambda_i \\ & & & & & \lambda_i^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

因此，只有当 J_i 为一阶矩阵时上面的矩阵等式成立, 并且 $\lambda_i^2=\lambda_i$，所以有 $\lambda_i=1$ 或者 $\lambda_i=0$.

这说明 J 为一个对角矩阵且主对角线上的元素只能为 1 或 0，适当地调换主对角线上的元素次序可以得到对角矩阵

$$\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$$

此矩阵仍然与 A 相似.

例：任意 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 相似.

证明：设 $P^{-1}AP=J$，J 为 A 的Jordan标准形. 则

$$A=PJP^{-1}, \longrightarrow P^TA^T(P^T)^{-1}=J^T \longrightarrow J^T \sim A^T$$

设 $J=\operatorname{diag}(J_1,J_2,\cdots J_s)$，令

$$P_i=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

则 $P_i^{-1}=P_i$，

$P_iJ_iP_i=J_i^T$

$$\longrightarrow J_i \sim J_i^T \longrightarrow J \sim J^T$$

$$\longrightarrow A \sim A^T$$