矩阵分析

主讲教师：张艳霞

矩阵理论的应用

微分方程、概率与统计、优化、信号处理、控制工程、经济理论等等。

如需更深入地学习和了解在自己专业的应用，可参考：

《矩阵分析与应用》，张贤达著，清华大学出版社；

《Matrix Analysis for Scientists & Engineers》：Alan J. Laub， SIAM.

第一章　　线性空间和线性变换

线性空间的基本概念及其性质

线性空间的基底，维数, 坐标变换

线性空间的子空间，交与和

线性映射及其值域、核

线性变换及其矩阵表示

矩阵（线性变换）的特征值与特征向量

矩阵的可对角化条件

第一节　线性空间

一： 线性空间的定义与例子

定义　设 V 是一个非空的集合，F 是一个数域，在集合 V 中定义两种代数运算, 一种是加法运算, 用 $+$ 来表示；另一种是数乘运算， 用 $\cdot$ 来表示, 并且这两种运算满足下列八条运算律：

（1） 加法交换律　$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

（2） 加法结合律　$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

（3） 零元素：　在 V 中存在一个元素 0，使得对于任意的 $\alpha \in V$ 都有 $\alpha + 0 = \alpha$

（4） 负元素：　对于 V 中的任意元素 α 都存在一个元素 β 使得 $\alpha + \beta = 0$

（5） $1 \cdot \alpha = \alpha$

（6） $k(l\alpha) = (kl)\alpha$

（7） $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

（8） $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

称这样的 V 为数域 F 上的线性空间。

例 1 复数域 $\mathbb{C}$上的全体 $m\times n$型矩阵构成的集合 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的线性空间。

例 2 实数域 R 上全体次数小于或等于 n 的多项式集合 $R[x]_{n+1}$ 构成实数域 R 上的线性空间;

实数域 R 上全体次数等于 n 的多项式集合不构成实数域 R 上的线性空间;

例3：设 A 是复数域 C 上的 $m\times n$ 矩阵，x 为 n 维列向量，则 m 维列向量集合：

$$V=\left\{y\in C^{m}\,\middle|\; y=Ax,\; x\in C^{n}\right\}$$

构成复数域 C 上的线性空间，称为 A 的**列空间**或 A 的**值域**.

其中，V 中的加法和数乘与 C^{m} 中相同.

二：　线性空间的基本概念及其性质

定义：线性组合；线性表出；线性相关；线性无关；向量组的极大线性无关组；向量组的秩

例 1　实数域 R 上的函数空间中，函数组

$$1, \cos^2 x, \cos 2x$$

是线性相关的函数组。

例 2　实数域 R 上的函数空间中，函数组

$$e^{x},\ e^{2x},\ e^{3x},\ e^{4x}$$

是一组线性无关的函数.

提示: 利用线性无关的定义. 假设

$$k_1 e^{x} + k_2 e^{2x} + k_3 e^{3x} + k_4 e^{4x} = 0.$$

然后令 x 分别等于 0, 1, 2, 3, 得到一个线性齐次方程组, 只有零解.

线性空间的基底，维数

定义 设 V 为数域 F 上的一个线性空间。如果在 V 中存在 n个线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 使得V 中的任意一个向量 α都可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一个基底；$(k_1,k_2,\cdots,k_n)^T$ 为向量 α 在基底 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标。此时我们称 V为一个n 维线性空间，记为 $\dim V = n.$

例 1　实数域 R 上的线性空间 R^3 中向量组

$$(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)$$

与向量组

$$(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)$$

都是 R^3 的基。R^3 是**3**维线性空间。

例 2 实数域 R 上的线性空间 $R[x]_{n+1}$ 中的向量组

$$1, x, x^2, \cdots, x^n$$

与向量组 $1, x-2, (x-2)^2, \cdots, (x-2)^n$

都是 $R[x]_{n+1}$ 的基底。$R[x]_{n+1}$ 的维数为 $n+1$.

注意： 通过上面的例子可以看出线性空间的基底并不唯一，但是维数是唯一确定的。利用维数的定义线性空间可以分为有限维线性空间和无限维线性空间。目前，我们主要讨论有限维的线性空间。

例 3 在4维线性空间 $R^{2\times 2}$ 中，向量组

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

与向量组

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

是其两组基，求向量 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 在这两组基下的坐标。

解：设向量 A 在第一组基下的坐标为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T,$$

于是可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ x_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

解得

$$x_1 = \frac{7}{3}, x_2 = \frac{4}{3}, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = \frac{-2}{3}$$

同样可解出在第二组基下的坐标为

$$y_1 = -1, y_2 = -1, y_3 = -1, y_4 = 4$$

基变换与坐标变换

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$（旧的）与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$（新的）是 n 维线性空间 V 的两组基底，它们之间的关系为

$$\beta_i = a_{1i}\alpha_1 + a_{2i}\alpha_2 + \cdots + a_{ni}\alpha_n$$

$$= \left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right]\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

将上式矩阵化可以得到下面的关系式

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称 n 阶方阵 $P=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

是由旧的基底到新的基底的过渡矩阵，那么上式可以写成

$$\left[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\right]=\left[\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n\right]\boldsymbol{P}$$

可逆

任取 $\zeta \in V$，设 ζ 在两组基下的坐标分别为

$[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ 与 $[y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$，那么我们有：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

称上式为坐标变换公式。

线性空间的子空间

定义　设 V 为数域 F 上的一个 n 维线性空间, W 为 V 的一个非空子集合, 如果对于任意的 $\alpha,\beta\in W$ 以及任意的 $k,l\in F$ 都有

$$k\alpha+l\beta\in W,$$

那么我们称 W 为 V 的一个子空间。

例 1　线性空间 V 和单个零向量构成的子空间 $\{0\}$ 是 V 的两个平凡的子空间。

例 2　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为 n 维线性空间 V 中的一组向量，那么非空子集合

$$span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}=$$
$$\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s \mid \forall k_i\in F\}$$

构成线性空间 V 的一个子空间, 称此子空间为有限 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 生成的子空间，其维数为向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 的秩。

例: 考虑 $(V,F)=(\mathbb{R}^{n\times n},\mathbb{R})$，令

对称

1. $W=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}: A \text{ is symmetric}\}.$

那么 W 是 V 的子空间。

正交

2. Let $W=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}: A \text{ is orthogonal}\}.$

那么 W 不是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间。

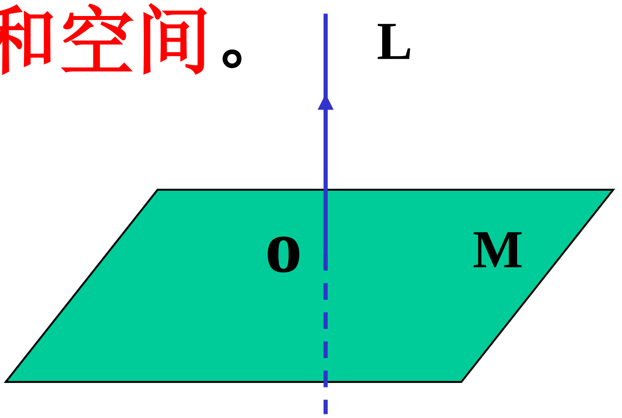
子空间的交与和

定义 设V_1, V_2是线性空间V的两个子空间,命

$$V_1 \cap V_2 = \{\alpha \mid \alpha \in V_1 \text{且} \alpha \in V_2\}$$

$$V_1 + V_2 = \{\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in V_1, \text{且} \alpha_2 \in V_2\}$$

可以验证:$V_1 \cap V_2$和$V_1 + V_2$都构成V的线性子空间,分别称为V_1和V_2的交空间与和空间。



例 $L + M = R^3$,

$L \cap M = \{0\}$.

定理1.3.4

设$V_1=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$,$V_2=\mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$,
则$V_1+V_2=\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}$.

定理1.3.5 (维数公式)

设V_1,V_2是线性空间V的两个子空间,则

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

子空间的直和、补子空间

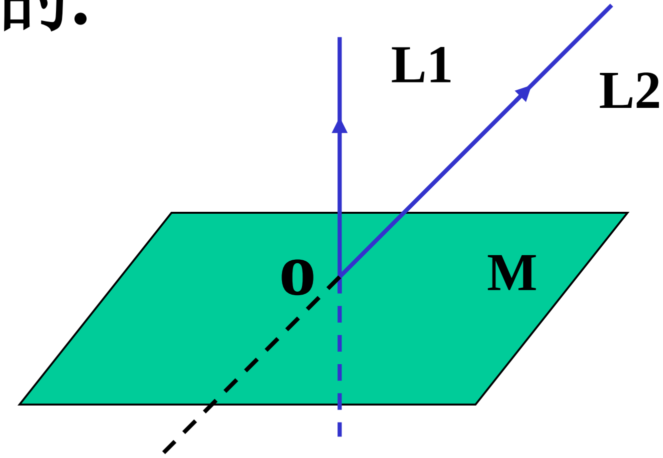
设V_1, V_2是线性空间V的两个子空间, 若$V_1 \cap V_2 = \{0\}$, 则称V_1, V_2的和空间$V_1 + V_2$是直和,记作$V_1 \oplus V_2$.

设W, W_1, W_2是线性空间V的三个子空间,且$W = W_1 \oplus W_2$, 则称W有一个直和分解.特别的,若$W = V = W_1 \oplus W_2$, 则称W_1, W_2是线性空间V的一对互补的子空间,或称W_1是W_2的代数补.

定理1.3.7

设U是线性空间V的一个子空间,则一定存在U的代数补子空间W,使得$V = U \oplus W$.

子空间 U 的代数补不是唯一的.



Example: Let $(V, F) = (\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R})$, let R be the set of skew-symmetric matrices in $\mathbb{R}^{n\times n}$, and let S be the set of symmetric matrices in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Then $V = R \oplus S$.

Proof: This follows easily from the fact that any $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ can be written in the form

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

The first matrix on the right-hand side above is in S while the second is in R.

线性映射

定义: 设V_1,V_2是数域F上两个线性空间, 映射$\phi: V_1 \to V_2,$

如果对于V_1的任何两个向量α_1,α_2和任何数$\lambda \in F$,都有

$$\phi(\alpha_1+\alpha_2)=\phi(\alpha_1)+\phi(\alpha_2),$$
$$\phi(\lambda\alpha_1)=\lambda\phi(\alpha_1).$$

则称映射 ϕ 是由V_1到V_2的线性映射。称α_1为$\phi(\alpha_1)$

的原像, $\phi(\alpha_1)$为α_1的像。

例 设 $B=(b_{ij})$是 $m\times n$ 实矩阵，若映射$\phi: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$

由下式确定 $\phi(\alpha)=B\alpha\in \boldsymbol{R}^m, \ \forall \alpha\in \boldsymbol{R}^n.$

则 ϕ 是线性映射。

线性映射的简单性质

$$\phi(0)=0,$$

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{s} k_i\phi(\alpha_i),$$

设$\alpha_1, \ \alpha_2,\cdots, \ \alpha_s\in V_1$,且$\alpha_1, \ \alpha_2,\cdots, \ \alpha_s$线性相关，

则 $\phi(\alpha_1),\phi(\alpha_2),\cdots,\phi(\alpha_s)$ 也是线性相关.

注意：若α_1，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_s\in V_1$线性无关，则$\phi(\alpha_1),\phi(\alpha_2),\cdots,\phi(\alpha_s)$不一定线性无关.(例1.4.5)

线性映射的矩阵表示

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V_1$的一组基，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是$V_2$的一组基。$\phi$是$V_1$到$V_2$的一个线性映射，则

$$\phi(\alpha_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\beta_i, \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

或 $$\phi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\phi(\alpha_1),\phi(\alpha_2),\cdots,\phi(\alpha_n))$$

$$=(\sum_{i=1}^{m}a_{i1}\beta_i,\sum_{i=1}^{m}a_{i2}\beta_i,\cdots,\sum_{i=1}^{m}a_{in}\beta_i)$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A}$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)A$$

矩阵 A 称为线性映射 ϕ 在基 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 与 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 下的矩阵表示。

线性映射的值域、核

定义：设 ϕ 是 V_1 到 V_2 的一个线性映射，令

$$\phi(V_1)=\{\beta=\phi(\alpha)\in V_2,\quad \forall\alpha\in V_1\}$$

则：$\phi(V_1)$是 V_2 的线性子空间，称为线性映射 ϕ 的**值域**，记为 $R(\phi)$.

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是V_1的一组基，则

$$R(\phi)=\mathrm{span}\{\phi(\alpha_1),\phi(\alpha_2),\cdots,\phi(\alpha_n)\}$$

定义： 设 ϕ 是 V_1 到 V_2 的一个线性映射，令

$$N(\phi)=\phi^{-1}(0)=\{\alpha\in V_1\mid\phi(\alpha)=0\}$$

则：$N(\phi)$ 是 V_1 的线性子空间，称为线性映射 ϕ 的**核子空间**，$\dim N(\phi)$称为ϕ 的**零度**。

定理： 设 ϕ 是 V_1 到 V_2 的一个线性映射，则

$$\dim N(\phi)+\dim R(\phi)=\dim V_1=n. \qquad \text{(了解)}$$

线性变换

定义：设 ϕ是 V到 V的一个线性映射，称 ϕ是线性空间V 的线性变换。

例　在线性空间$R[x]_n$中,定义变换

$$\sigma(f(x)) = \frac{d}{dx} f(x), f(x) \in R[x]_n$$

则由导数性质可以证明:σ是$R[x]_n$上的一个线性变换,这个变换也称为**微分变换.**

设 ϕ 是 V 的线性变换，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基，

$$\phi(\alpha_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\alpha_i,\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

则

$$\phi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

n 阶方阵 A 称为 ϕ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵表示

例1 在$R[x]_4$中,取基

$$p_1 = x^3, p_2 = x^2, p_3 = x, p_4 = 1,$$

求微分运算D的矩阵.

解

$$\begin{cases} D p_1 = 3x^2 = 0 p_1 + 3 p_2 + 0 p_3 + 0 p_4, \\ D p_2 = 2x = 0 p_1 + 0 p_2 + 2 p_3 + 0 p_4, \\ D p_3 = 1 \quad = 0 p_1 + 0 p_2 + 0 p_3 + 1 p_4, \\ D p_4 = 0 \quad = 0 p_1 + 0 p_2 + 0 p_3 + 0 p_4, \end{cases}$$

所以D在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

同一个线性变换在不同的基下有不同的矩阵，那么这些矩阵之间有什么关系呢？

定理：

设 ϕ 是 V 的线性变换，$\alpha_1,\alpha_{2,}\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V 的两组基，由 α_i 到 β_i 的过渡矩阵为 P，ϕ 在基 $\alpha_1,\alpha_{2,}\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A，在 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的矩阵为 B，则 $B = P^{-1}AP.$

定义： 设 $A, B \in F^{n\times n}$，若存在 $P \in F_n^{n\times n}$，满足

$$B = P^{-1}AP$$

则称 A 与 B **相似**，记为 $B \sim A.$

证明 $\because(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$

$$\phi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A,$$

$$\phi(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B$$

于是 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B=\phi(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

$$=\phi[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P]=\phi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AP=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)P^{-1}AP$$

因为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关，所以 $B=P^{-1}AP.$