

矩阵的Jordan标准形

定义： 称 n_i 阶矩阵

$$J_i = \begin{bmatrix} a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$$

为 **Jordan 块**。设 J_1, J_2, \dots, J_s 为 **Jordan 块**,
称准对角形矩阵

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & & \\ & \mathbf{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_s \end{bmatrix}$$

为 **Jordan** 标准形。

由前面的例题和定理可知 **Jordan** 块的初等因子为 $(\lambda - a_i)^{n_i}$ ，从而**Jordan**标准形矩阵的初等因子为

$$(\lambda - a_1)^{n_1}, (\lambda - a_2)^{n_2}, \cdots, (\lambda - a_s)^{n_s}$$

定理： 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, A 的初等因子为

$$(\lambda - a_1)^{n_1}, (\lambda - a_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - a_s)^{n_s}$$

则

$$A \sim J$$

这里

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

其中

$$J_i = \begin{bmatrix} a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

称 J 是矩阵 A 的 **Jordan 标准形**。特别地，我们有

定理2.3.2: A 可以**对角化**的充分必要条件是 A 的初等因子都是一次因式。

例 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

的 **Jordan** 标准形。

解： 先求出 A 的初等因子。对 $\lambda I - A$ 运用初等变换可以得到

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ -4 & \lambda - 3 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \end{bmatrix}$$

所以 A 的初等因子为 $(\lambda-1)^2$, $\lambda-2$.

故 A 的标准形为

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

或

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

的Jordan标准形。

解： 先求出 A 的初等因子。对 $\lambda I - A$ 运用初等变换可以得到

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 & 2 \\ -3 & \lambda + 3 & -6 \\ -2 & 2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda(\lambda - 2) \end{bmatrix}$$

所以 A 的初等因子为 $\lambda, \lambda, \lambda - 2$.

故 A 的 **Jordan** 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2 \end{bmatrix}$$

或

$$J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

例 用矩阵秩的方法求出矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{bmatrix}$$

的 **Jordan** 标准形。

解： 先求出 A 的特征多项式及其特征值

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda - 8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$$

对于特征值 $\lambda_1 = 1$ ，它是 $f(\lambda)$ 的 1 重根，从而 λ_1 在 A 的 **Jordan** 标准形的主对角线上出现一次，因此 J 中主对角元为 1 的 **Jordan** 块只有一个且为一阶。

对于特征值 $\lambda_2 = 3$ ，先求 $\text{rank}(A - 3I)$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & -14 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $\text{rank}(A - 3I) = 2$, 从而 λ_2 的几何重数为

$$q_{\lambda_2} = n - 2 = 3 - 2 = 1$$

特征值 $\lambda_2 = 3$ 是 $f(\lambda)$ 的**两重根**, 从而 λ_2 在 A 的Jordan标准形 J 的主对角线上出现**两次**, 因此

J 中主对角元为 3 的Jordan块只有一个且为二阶。

故 A 的标准形为

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如何求相似变换矩阵？

设 n 阶方阵 A 的 **Jordan** 标准形为 J , 则存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = J$$

称 P 为**相似变换矩阵**。对于相似变换矩阵的一般理论我们不作过多的讨论，只通过具体的例题说明求 P 的方法。

例1 求方阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

的 **Jordan** 标准形及其相似变换矩阵 P 。

解： 首先用初等变换法求其 **Jordan** 标准形：

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 & 8 \\ 3 & \lambda + 1 & -6 \\ 2 & 0 & \lambda + 5 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 1)^2 \end{bmatrix}$$

故 A 的初等因子为

$$\lambda + 1, (\lambda + 1)^2$$

从而 A 的 **Jordan** 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

再求相似变换矩阵:

设所求矩阵为 P , 则 $P^{-1}AP = J$, P 按列分块记为

$$P = [X_1, X_2, X_3]$$

于是有

$$\begin{aligned}AP &= A[X_1, X_2, X_3] = [AX_1, AX_2, AX_3] \\&= PJ = [X_1, X_2, X_3] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\&= [-X_1, -X_2, X_2 - X_3]\end{aligned}$$

从而可得

$$AX_1 = -X_1, \quad AX_2 = -X_2, \quad AX_3 = X_2 - X_3$$

整理以后可得三个线性方程组

$$(I + A)X_1 = 0$$

$$(I + A)X_2 = 0$$

$$(I + A)X_3 = X_2$$

前面的两个方程为同解方程组，可以求出它们的一个基础解系：

$$\alpha_1 = [0, 1, 0]^T, \alpha_2 = [-2, 0, 1]^T$$

可以取 $X_1 = \alpha_1$ ，但是不能简单地取 $X_2 = \alpha_2$ ，这是因为如果 X_2 选取不当，会使得第三个非齐次线性方程组无解。由于

α_1, α_2 的任意线性组合都是前两个方程组的解,

所以应该取 $X_2 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$

使得第三个非齐次方程有解, 即其系数矩阵与增广矩阵有相同的秩, 容易计算出其系数矩阵的秩为 1, 从而应该使得增广矩阵

$$[I + A, X_2]$$

的秩也为 1。即

$$[I + A, X_2] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & -2k_2 \\ 3 & 0 & 6 & k_1 \\ -2 & 0 & -4 & k_2 \end{bmatrix}$$

容易看出只需令 $k_1 = 3, k_2 = -2$ 就会使得上述矩阵的秩为1，于是

$$X_2 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2 = [4, 3, -2]^T$$

再由第三个方程解出一个特解为

$$X_3 = [1, 0, 0]^T$$

那么所求相似变换矩阵为

$$P = [X_1, X_2, X_3] = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

例 设 A 为数域 F 上的 m 阶方阵且存在正整数 n 使得 $A^n = I$ ，证明： A 与对角矩阵相似且主对角线上的元素均为 n 次单位根。

证明： 设 A 的Jordan标准形为

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

即有可逆矩阵 Q 使得

$$Q^{-1}AQ = J$$

由于 $A^n = I$ ，所以有

$$J^n = (Q^{-1}AQ)^n = Q^{-1}A^nQ = Q^{-1}IQ = I$$

从而有

$$J_i^n = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & * & \dots & * \\ & \lambda_i^n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_i^n \end{bmatrix} = I_k$$

因此，只有当 J_i 为一阶矩阵时上面的矩阵等式才成立，这样有 $t = n$ ，这表明 J 为对角矩阵，所以 A 与对角矩阵相似。

例 设 A 为数域 F 上的 n 阶方阵且满足 $A^2 = A$, 证明: A 与对角矩阵

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

相似。

证明：设 A 的Jordan标准形为

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

即有可逆矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ = J$.

由于 $A^2 = A$ ，所以有

$$J^2 = (Q^{-1}AQ)^2 = Q^{-1}A^2Q = Q^{-1}AQ = J$$

从而 $J_i^2 = J_i$, $i = 1, 2, \dots, t$. 即

$$\begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 2\lambda_i \\ & & & & & \lambda_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

因此，只有当 J_i 为一阶矩阵时上面的矩阵等式才成立且 $\lambda_i^2 = \lambda_i$ ，所以有

$$\lambda_i = 1, \quad \lambda_i = 0$$

这说明 J 为一个对角矩阵且主对角线上的元素只能为1或0，适当地调换主对角线上的元素次序可以得到方阵

此矩阵仍然与 A 相似。

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

例：任意 n 阶方阵 A 与其转置矩阵 A^T 相似.

证明：设 $P^{-1}AP = J$, 则 $A = PJP^{-1}$

$$\longrightarrow P^T A^T (P^T)^{-1} = J^T \longrightarrow J^T \sim A^T$$

设 $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s)$, 令

$$P_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{1} & \vdots & \vdots \\ \mathbf{1} & \dots & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \text{则} \quad \begin{aligned} P_i^{-1} &= P_i \\ P_i J_i P_i &= J_i^T \end{aligned}$$