

1. 设  $R[x]_4$  表示所有次数小于或等于 4 的实系数多项式组成的线性空间, 求多项式

$$p(x) = 1 + 2x^3$$

在基底  $1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3$  下的坐标。

2. 设  $\phi$  是  $n$  维线性空间  $V$  的一个线性变换, 对某个  $\xi \in V$  有  $\phi^{k-1}(\xi) \neq 0, \phi^k(\xi) = 0$ . 试证:

$$\xi, \phi(\xi), \phi^2(\xi), \dots, \phi^{k-1}(\xi)$$

线性无关。

3. 试证:

$$\operatorname{tr}(AB)^k = \operatorname{tr}(BA)^k, \quad A \in C^{m \times n}, B \in C^{n \times m}, k = 1, 2, \dots$$

4. 试证:  $\operatorname{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$ ,  $\lambda_i$  是  $A$  的特征值,  $k$  是一正整数。

5. 设  $A^2 = A$ , 试证:  $A$  的特征值只能是 0 或 1。