第三章　内积空间、正规矩阵与H-矩阵

定义： 设 V 是**实数域** R 上的 n 维线性空间，对于 V 中的任意两个向量 α,β 按照某一确定法则对应着一个**实数**，这个实数称为 α 与 β 的**内积**，记为 (α,β)，并且要求内积满足下列运算条件：

(1)　$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

(2)　$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$

(3)　$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

(4)　$(\alpha,\alpha)\geq 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时 $(\alpha,\alpha)=0.$

这里 α,β,γ 是 V 中任意向量，k 为任意实数，我们称带有这样内积的 n 维线性空间 V 为欧氏空间。

例 1　在 $\boldsymbol{R}^n$ 中，对于

$$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad \beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

规定

$$(\alpha,\beta)_1=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

容易验证 $(\quad,\quad)_1$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的一个内积，从而 $\boldsymbol{R}^n$ 成为一个欧氏空间。如果规定

$$(\alpha,\beta)_2 = x_1y_1 + 2x_2y_2 + \cdots + nx_ny_n$$

容易验证 $(\quad,\quad)_2$ 也是 R^n 上的一个内积，这样 R^n 又成为另外一个欧氏空间。

例 2 在 nm 维线性空间 $\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 中，规定

$$(A,B) := \mathrm{Tr}(AB^T)$$

容易验证这是 $\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 上的一个内积，这样 $\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 对于这个内积成为一个欧氏空间。

定义： 设 V 是复数域 C 上的 n 维线性空间，对于V中的任意两个向量 α,β 按照某一确定法则对应着一个复数，这个复数称为 α 与 β 的内积，记为 (α,β) 并且要求内积满足下列运算条件：

$$(1)\quad (\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$$

$$(2)\quad (k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$$

$$(3)\quad (\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$$

$$(4)\quad (\alpha,\alpha)\geq 0$$

这里 α,β,γ 是 V 中任意向量，k 为任意复数，只有当 $\alpha=0$ 时 $(\alpha,\alpha)=0$ ，我们称带有这样内积的 n 维线性空间 V 为酉空间。欧氏空间与酉空间通称为内积空间。

例　设 C^n 是 n 维复向量空间，任取

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n),\quad \boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$$

规定 $(\alpha,\beta):=\alpha(\bar{\beta})^T=a_1\bar{b}_1+a_2\bar{b}_2+\cdots+a_n\bar{b}_n$

容易验证 (,) 是 C^n 上的一个内积，从而 C^n 成为一个酉空间。

例 3 在 n^2 维线性空间 $C^{n\times n}$ 中，规定

$$(A,B):=\mathrm{Tr}(AB^H)$$

其中 B^H 表示 B 中所有元素取共轭复数后再转置，容易验证（ , ）是 $C^{n\times n}$ 上的一个内积，从而 $C^{n\times n}$ 连同这个内积一起成为酉空间。

欧氏空间的性质：

(1) $(\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta)$

(2) $(\alpha, \beta+\gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$

(3) $(\sum_{i=1}^{t} k_i\alpha_i, \beta) = \sum_{i=1}^{t} k_i(\alpha_i, \beta)$

(4) $(\alpha, \sum_{i=1}^{t} k_i\beta_i) = \sum_{i=1}^{t} k_i(\alpha, \beta_i)$

酉空间的性质：

(1) $(\alpha, k\beta) = \overline{k}(\alpha, \beta)$

(2) $(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$

(3) $(\sum_{i=1}^{t} k_i \alpha_i, \beta) = \sum_{i=1}^{t} k_i (\alpha_i, \beta)$

(4) $(\alpha, \sum_{i=1}^{t} k_i \beta_i) = \sum_{i=1}^{t} \overline{k_i} (\alpha, \beta_i)$

定义：设 $A \in C^{n\times n}$，用 $\overline{A}$ 表示以 A 的元素的共轭复数为元素组成的矩阵，记

$$A^H = (\overline{A})^T$$

则称 A^H 为 A 的复共轭转置矩阵。不难验证复共轭转置矩阵满足下列性质：

$$(1) \quad A^H = (\overline{A^T})$$

$$(2) \quad (A+B)^H = A^H + B^H$$

$$(3) \quad (kA)^H = \overline{k} A^H$$

$$(4) \quad (AB)^H = B^H A^H$$

(5) $(A^H)^H = A$

(6) $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

如果 A 可逆

定义：设 $A \in C^{n\times n}$,如果 $A^H = A$ ，那么称 A 为**Hermite**矩阵；如果 $A^H = -A$，那么称 A 为反**Hermite**矩阵。

(1) $$\begin{bmatrix} 4i & 2+i & 4+2i \\ -2+i & i & 1 \\ -4+2i & -1 & -2i \end{bmatrix}$$

(2) $$\begin{bmatrix} 6 & 1+2i & 3i \\ 1-2i & 9 & 1-i \\ -3i & 1+i & -7 \end{bmatrix}$$

内积空间的度量

定义：设 V 为酉（欧氏）空间，向量 $\alpha \in V$ 的长度定义为非负实数

$$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha,\alpha)}$$

例　在 C^4 中求下列向量的长度

$$(1)\quad \alpha=(1+2i,-i,3,2+\sqrt{2}i)$$

$$(2)\quad \beta=(1,-2,3,4)$$

解： 根据上面的公式可知

$$\|\alpha\|=\sqrt{5+1+9+6}=\sqrt{21}$$

$$\|\beta\|=\sqrt{1+4+9+16}=\sqrt{30}$$

一般地，我们有：对于C^n中的任意向量

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

其长度为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2}$$

这里 $|a_i|$ 表示复数 a_i 的模。

定理3.1.2：向量长度具有如下性质

(1) $\|\alpha\| \geq 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\|\alpha\| = 0$

(2) $\|\boldsymbol{k\alpha}\| = |\boldsymbol{k}|\|\boldsymbol{\alpha}\|$, $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{C}$

(3) $\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|$ 三角不等式

(4) $|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$ → Cauchy-Schwarz 不等式

例 ： 在线性空间 $M_{n\times n}(C)$ 中，证明

$$\left|\mathrm{Tr}(AB^H)\right| \le \sqrt{\mathrm{Tr}(AA^H)}\sqrt{\mathrm{Tr}(BB^H)}$$

例 3 在 n^2 维线性空间 $C^{n\times n}$ 中，规定

$$(A,B) := \mathrm{Tr}(AB^H)$$

定义：设 V 为欧氏空间，两个非零向量 α,β 的夹角定义为

$$\langle\alpha,\beta\rangle := \arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$$

于是有

$$0\le\langle\alpha,\beta\rangle\le\pi$$

显然

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow(\alpha,\beta)=0$$

因此我们引入下面的概念：

定义：在酉空间 V中，如果 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，则称 α 与 β 正交，记为 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

定义： 长度为 1 的向量称为单位向量，对于任何一个非零的向量 α ，向量

$$\boldsymbol{\alpha} \Big/ \|\boldsymbol{\alpha}\|$$

总是单位向量，称此过程为单位化。

标准正交基底与Schmidt正交化方法

定义：设 $\{\alpha_i\}$ 为一组不含有零向量的向量组，如果 $\{\alpha_i\}$ 内的任意两个向量彼此正交，则称其为正交向量组。

定义：如果一个正交向量组中任何一个向量都是单位向量，则称此向量组为标准正交向量组。

例　在 C^3 中向量组

$$\alpha_1=[-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}],\alpha_2=[\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}]$$

$$\alpha_3=[\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$$

与向量组

$$\beta_1=[-\cos\theta,0,-i\sin\theta],\beta_2=[0,1,0]$$

$$\beta_3=[i\sin\theta,0,\cos\theta]$$

都是标准正交向量组。

定义：在 n 维内积空间中，由 n 个正交向量组成的基底称为**正交基底**；由 n 个标准的正交向量组成的基底称为**标准正交基底**。

定理：向量组 $\{\alpha_i\}$ 为正交向量组的充分必要条件是

$$(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad i \neq j$$

向量组 $\{\alpha_i\}$ 为标准正交向量组的充分必要条件是

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

定理：正交的向量组是一个线性无关的向量组。反之，由一个线性无关的向量组出发可以构造一个正交向量组，甚至是一个标准正交向量组。

Schmidt 正交化与单位化过程:

设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 为 n 维内积空间 V 中的 r 个线性无关的向量，利用这 r 个向量可以构造一个标准正交向量组, 而且它是 $\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 的一个标准正交基。

第一步　正交化

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{(\alpha_r, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \cdots - \frac{(\alpha_r, \beta_{r-1})}{(\beta_{r-1}, \beta_{r-1})}\beta_{r-1}$$

容易验证 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r\}$ 是一个正交向量组。

第二步　单位化

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\quad \eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\cdots,\ \eta_r=\frac{\beta_r}{\|\beta_r\|}$$

显然 $\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r\}$ 是一个标准的正交向量组。

几 何 解 释

$b_1 = a_1;$

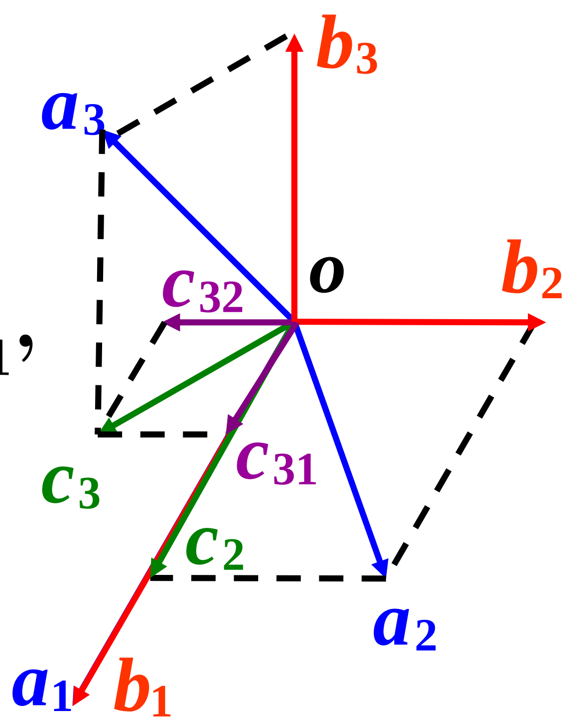
c_2为a_2在b_1上的投影向量,即

$$c_2 = (a_2, \frac{b_1}{|b_1|})\frac{b_1}{|b_1|} = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1,$$

$b_2 = a_2 - c_2;$

c_3为a_3在b_1, b_2所在

平面上的投影向量,



由于$b_1 \perp b_2$,故c_3等于a_3分别在b_1, b_2上的投影向量c_{31}及c_{32}之和,即

$$c_3 = c_{31} + c_{32} = \frac{(a_3, b_1)}{|b_1|^2} b_1 + \frac{(a_3, b_2)}{|b_2|^2} b_2, \qquad b_3 = a_3 - c_3.$$

酉变换与正交变换

定义：设 A 为一个 n 阶复矩阵，如果其满足

$$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H=\boldsymbol{I}$$

则称 A 是酉矩阵，一般记为 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{U}^{n\times n}$

设 A 为一个 n 阶实矩阵，如果其满足

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{I}$$

则称 A 是正交矩阵，一般记为 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{E}^{n\times n}$

例：

$$(1)\quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$ 是一个正交矩阵

(2) $\begin{bmatrix} -\cos\theta & 0 & i\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{bmatrix}$是一个酉矩阵

（3）设 $\alpha \in C^{n\times 1}$ 且 $\alpha^H\alpha = 1$ ，如果

$$G = I - 2\alpha\alpha^H$$

则 G 是一个酉矩阵。通常称为 **Householder 矩阵**。

酉矩阵与正交矩阵的性质：

设 $A,\ B \in U^{n\times n}$，那么

$$(1)\quad A^{-1} = A^{H} \in U^{n\times n}$$

$$(2)\quad |\det(A)| = 1$$

$$(3)\quad AB,\ BA \in U^{n\times n}$$

设 $A, B \in E^{n\times n}$，那么

$$(1)\quad A^{-1}=A^{T}\in E^{n\times n}$$

$$(2)\quad \det(A)=\pm 1$$

$$(3)\quad AB, BA\in E^{n\times n}$$

定理：设 $A\in C^{n\times n}$，A 是一个酉矩阵的充分必要条件为 A 的 n 个列（或行）向量组是标准正交向量组。

定义：设 V 是一个 n 维酉空间，σ 是 V 的一个线性变换，如果对任意的 $\alpha,\beta\in V$ 都有

$$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$$

则称 σ 是 V 的一个酉变换。

定理：设 V 是一个 n 维酉空间，σ 是 V 的一个线性变换，那么下列陈述等价：

（1）σ 是酉变换；

(2) $\|\sigma(\alpha)\| = \|\alpha\|$，$\forall \alpha \in V$

（3）将 V 的标准正交基底变成标准正交基底；

（4）酉变换在标准正交基下的矩阵表示为酉矩阵。

注意：关于正交变换也有类似的刻划。

幂等矩阵

定义：设 $A \in C^{n\times n}$ ，如果 A 满足

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$$

则称 A 是一个幂等矩阵。

$\boxed{\text{对应投影变换}}$

例

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}, \quad \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{C}^{r\times(n-r)}$$

是一个分块幂等矩阵。

幂等矩阵的一些性质：设 A 是幂等矩阵，那么有

（1）$A^T, A^H, I-A, I-A^T, I-A^H$ 都是幂等矩阵；

（2）$A(I-A)=(I-A)A=0$

（3）$N(A)=R(I-A)$

$\boxed{N(I-A)=R(A)}$

（4）$Ax=x$ 的充分必要条件是 $x\in R(A)$

（5）$C^{n\times 1}=R(A)\oplus N(A)$

$\boxed{x=Ax+\left(x-Ax\right)}$

定理：设 A 是一个秩为 r 的 n 阶矩阵，那么 A 为一个幂等矩阵的充分必要条件是存在 $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{C}_n^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$$

推论：设 A 是一个 n 阶幂等矩阵，则有

$$\mathbf{Tr}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{rank}(\boldsymbol{A})$$

定义：设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ 为一个 n 维标准正交列向量组，那么称 $n \times r$ 型矩阵

$$U_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r]$$

为一个次酉矩阵。一般地将其记为 $U_1 \in U_r^{n\times r}$

引理： $U_1 \in U_r^{n\times r}$ 的充分必要条件是

$$U_1^H U_1 = I_{r\times r}$$

证明：设 $U_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r]$，那么 $U_1^H = \begin{bmatrix} \alpha_1^H \\ \alpha_2^H \\ \vdots \\ \alpha_r^H \end{bmatrix}$

必要性：如果 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ 为一个 n 维标准正交列向量组，那么

$$
\boldsymbol{U}_1^{\ H}\boldsymbol{U}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\ H}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\ H}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_r^{\ H}\end{bmatrix}\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\right]
$$

$$
=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{H}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{H}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{H}\boldsymbol{\alpha}_r\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{H}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{H}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{H}\boldsymbol{\alpha}_r\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_r^{H}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_r^{H}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_r^{H}\boldsymbol{\alpha}_r\end{bmatrix}
$$

$$=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}=I_{r\times r}$$

充分性：设 $U_1=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]$，那么由 $U_1^H U_1=I_{r\times r}$，可得

$$\begin{bmatrix} \alpha_1{}^H \\ \alpha_2{}^H \\ \vdots \\ \alpha_r{}^H \end{bmatrix} [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r]$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1^H \alpha_1 & \alpha_1^H \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^H \alpha_r \\ \alpha_2^H \alpha_1 & \alpha_2^H \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^H \alpha_r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_r^H \alpha_1 & \alpha_r^H \alpha_2 & \cdots & \alpha_r^H \alpha_r \end{bmatrix} = I_{r \times r}$$

即

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\alpha_j^H\alpha_i=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$$

这表明 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 是一个 n 维标准正交列向量组。

定理：设 A 为一个 n 阶矩阵，则

$$A=A^H=A^2$$

的充分必要条件是存在一个 $n\times r$ 型次酉矩阵使得 $U_1\in U_r^{n\times r}$

$$A=U_1U_1^H$$

$\boxed{\text{对应正交投影}}$

其中 $r=\mathrm{rank}(A)$。

证明见下节课件