4-1：求矩阵 A 的满秩分解

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4 - 2　　已知

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求 A 的奇异值分解.

4 -3(2) 已知

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

求 B 的谱分解.

4 -6 已知

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & i\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

求 A 的奇异值分解.

4 -7 已知

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & a\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

是单纯矩阵, 求 a, 并且求矩阵 A的谱分解表达式.

5 -3

对 $\alpha \in C^n, A \in C^{n\times n}$，设 $\|A\|$ 是诱导范数,且 $\det A \neq 0$，试证:

(1) $\left\|A^{-1}\right\| \geq \|A\|^{-1}$，(2) $\left\|A^{-1}\right\|^{-1} = \min\limits_{\alpha \neq 0} \dfrac{\|A\alpha\|}{\|\alpha\|}$.

5 -5

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数, $\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$,

证明: $\|\alpha\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \left|x_i\right|^2\right)^{1/2}$ 是向量范数.

5 -6 设 A 是正定 Hermite 矩阵，证明：若 $\alpha \in C^n$，则 $\|\alpha\| = \left(\alpha^H A\alpha\right)^{1/2}$ 是 α 的向量范数.

（椭圆范数）

5-9：讨论幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k$ 的敛散性.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

证明：对于任意的 $A \in C^{m\times n}$,

$$\|A\|_{m_\infty} = \max\{m,n\}\max_{i,j}|a_{ij}|$$ 是矩阵范数.