Hermite二次型 (Hermite二次齐次多项式)

定义: 由 n 个复变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，系数为复数的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{x_i} x_j$$

称为 **Hermite二次型,** 这里 $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

如果记

$$X = \left[x_1, x_2, \cdots, x_n \right]^T \in C^n,$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

那么上面的 Hermite 二次型可以记为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^H AX$$

称为**Hermite二次型对应的矩阵**，并称 A 的秩为**Hermite二次型的秩.**

对于 Hermite 二次型作可逆的线性替换

$$X = CY$$

则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^H AX = Y^H (C^H AC) Y = Y^H BY$$

这里 $B=C^H AC$， $B^H=B$.

Hermite 二次型中最简单的一种是只含有纯的平方项无交叉项的二次型

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\lambda_1\overline{y_1}y_1+\lambda_2\overline{y_2}y_2+\cdots+\lambda_n\overline{y_n}y_n$$

称为Hermite 二次型的标准形.

定理: 对于任意一个 Hermite 二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^H AX$$

必存在酉线性替换

$$X = UY$$

可以将 Hermite 二次型 $f(x)$ 化为标准形

$$\boxed{f(x) = \lambda_1 \overline{y_1} y_1 + \lambda_2 \overline{y_2} y_2 + \cdots + \lambda_n \overline{y_n} y_n}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 H-矩阵 A 的特征值.

正定Hermite二次型与正定Hermite矩阵

定义： 对于给定的 Hermite 二次型

$$f(X)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{x_i}x_j=X^HAX$$

如果对于任意一组不全为零复数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0 (\geq 0)$$

则称该 **Hermite** 二次型为**正定的(半正定的)**，并称相应的**H-**矩阵 A 为**正定的(半正定的)**.

例：判断下列 **Hermite** 二次型的类别

$$f(y_1, y_2, y_3) = 4\overline{y_1}y_1 + 8\overline{y_2}y_2 + 3\overline{y_3}y_3$$

$$f(y_1, y_2, y_3) = 12\overline{y_2}y_2 + 9\overline{y_3}y_3$$

$$f(y_1, y_2, y_3) = -7\overline{y_1}y_1 + 6\overline{y_2}y_2 + \overline{y_3}y_3$$

$$f(y_1, y_2, y_3) = -\overline{y_1} y_1 - 4\overline{y_2} y_2 - 3\overline{y_3} y_3$$

$$f(y_1, y_2, y_3) = -6\overline{y_1} y_1 - 13\overline{y_3} y_3$$

与正定的实二次型一样，关于正定的 **Hermite** 二次型我们有

$$f(X) = X^H A X$$

(1) $f(X)$ 是正定的

(2) 对于任何 n 阶可逆矩阵 P 都有 $P^H AP$ 为正定矩阵.

(3) A 的 n 个特征值都大于零

(4) 存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $P^H AP = I$

(5) 存在 n 阶可逆矩阵 Q 使得 $A = Q^H Q$

(6)* 存在正线上三角矩阵 R 使得 $A = R^H R$，且此分解是唯一的.

定理：n 阶 Hermite（实对称）矩阵 $A=(a_{ij})$ 正定的充要条件是 A 的 n 个顺序主子式全大于零。即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

了解

例 1： 设 A 是一个正定的 **H**-阵，B 是一个反 **H**-阵，证明 AB 与 BA 的特征值实部为零.

证明: 设 λ 为矩阵 AB 的任意一个特征值，那么有 $\left|\lambda I - AB\right| = 0$. 由于 A 是一个正定 **H**-阵，所以存在可逆矩阵 Q 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}^{H}\boldsymbol{Q}$$

将其代入上面的特征多项式有

$$0=\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{AB}\right|=\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}^{H}\boldsymbol{QB}\right|$$

$$=\left|\lambda \boldsymbol{Q}^{H}(\boldsymbol{Q}^{H})^{-1}-\boldsymbol{Q}^{H}\boldsymbol{QBQ}^{H}(\boldsymbol{Q}^{H})^{-1}\right|$$

$$=\left|\boldsymbol{Q}^{H}\right|\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{QBQ}^{H}\right|\left|(\boldsymbol{Q}^{H})^{-1}\right|$$

$$=\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{QBQ}^{H}\right|$$

这说明 λ 也是矩阵 $\boldsymbol{QBQ}^{H}$ 的特征值. 另一方面注意矩阵 $\boldsymbol{QBQ}^{H}$ 为 **H**-反阵, 从而 λ 实部为零. 同样可以证明另一问.

例 2： 设 A 是一个正定的 H-阵，B 是一个反H-阵，证明： $A+B$ 是可逆矩阵.

证明： 由于A 是一个正定 H-阵，所以存在可逆矩阵 Q 使得

$$A=Q^H Q$$

这表明 A 是可逆的．于是

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right|=|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right|$$

另一方面注意矩阵 A^{-1} 仍然为正定H-阵， 而矩阵B 为H-反阵，由上面的例题结论可知

矩阵 AB^{-1} 的特征值实部为零，那么矩阵

$$I + AB^{-1}$$

的特征值中不可能有零, 从而

$$\left| I + AB^{-1} \right| \neq 0$$

定理: 设 A是正定(半正定) **Hermite** 矩阵，那么存在唯一正定(半正定) **Hermite** 矩阵 G 使得

$$A = G^2$$

例 3： 设 A 是一个半正定的 H-阵且 $\boldsymbol{A} \neq 0$, 证明:

$$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}\right| > 1$$

证明: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值, 由于 A 是半正定的, 所以 $\lambda_i \geq 0$, 又因为 $\boldsymbol{A} \neq 0$, $\boldsymbol{A}$ 至少有一个特征根大于**0 (why?)**, 于是有

$$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}\right| = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_n) > 1$$

例4,5 不讲, 但属于考试范围!

例 4： 设 A 是一个半正定的 **H-**阵且$A \neq 0$**,** B 是一个正定的 **H-**阵**,** 证明

$$|A+B| > |B|$$

证明: 由于 B 是一个正定的**H-**阵**,** 所以存在可逆矩阵 Q 使得

$$B = Q^H Q$$

这样有

$$|A+B| = |A+Q^H Q| = |Q^H||(Q^H)^{-1}AQ^{-1}+I||Q|$$

$$= |B||(Q^H)^{-1}AQ^{-1}+I|$$

注意矩阵

$$(\boldsymbol{Q}^H)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{-1}$$

仍然是一个半正定的 **H**-阵，有上面的例题可知

$$\left|\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{Q}^H)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{-1}\right|>1$$

从而

$$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right|=\left|\boldsymbol{B}\right|\left|(\boldsymbol{Q}^H)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{-1}+\boldsymbol{I}\right|>\left|\boldsymbol{B}\right|$$

例 5： 证明：

（1）半正定H-矩阵之和仍然是半正定的;

（2）半正定H-矩阵与正定H-阵之和和是正定的;

证明：设 A, B 都是半正定 H-阵，那么二者之和 $A+B$ 仍然是一个 H-阵，其对应的Hermite二次型为

$$f(X)=X^H(A+B)X,$$

其中

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$$

由于 A, B 都是半正定 **H**-矩阵，所以对于任意一组不全为零的复数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

我们有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{X}^{H}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X} \\ &= \boldsymbol{X}^{H}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}^{H}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} \geq 0 \end{aligned}$$

这说明 $A+B$ 为一个半正定**H**-阵。

类似地，可以证明另外一问。

Hermite 矩阵偶在复合同（复相合）下的标准形

例： 设 A, B 均为 n 阶 Hermite-阵，且 $\boldsymbol{B}$ 又是正定的，证明必存在 $P \in C_n^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{P^H A P}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{\boldsymbol{n}}\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P^H B P = I_{n\times n}}$$

同时成立，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是与 P 无关的实数。

证明： 由于 B 是正定 **H**-阵，所以存在 $P_1 \in C_n^{n\times n}$ 使得

$$P_1^H B P_1 = I_{n\times n}$$

又由于 $P_1^H A P_1$ 也是 **H**-阵，那么存在 $P_2 \in U_n^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{P}_2^{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{P}_1^{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{\boldsymbol{n}} \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 **H-**阵 $P_1^H A P_1$ 的 n 个实特征值。如果记 $P = P_1 P_2$ ，则有

$$\boldsymbol{P}^{H}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{\boldsymbol{n}}\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}^{H}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}.$$

下面证明 n 个实特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 与 P 无关。令 $Q=P_1^{H}AP_1$，那么 λ_i 是特征方程

$$\left|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}\right|=0$$

的特征根。又由于

$$\left|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}\right|=\left|\lambda \boldsymbol{P}_1^H \boldsymbol{B} \boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_1^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_1\right|$$

$$=\left|\boldsymbol{P}_1^H\right|\left|\lambda \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{P}_1\right|$$

因此 λ_i 是方程

$$\left|\lambda \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\right|=0$$

的根。它完全是由 A, B 决定的，与 P 无关 。

由此可以得到下面的 **H-**阵偶标准形定理：

定理：对于给定的两个二次型

$$f_1(X) = X^H AX = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_i}x_j$$

$$f_2(X) = X^H BX = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\overline{x_i}x_j$$

其中 $f_2(X)$ 是正定的，则存在非退化的线性替换

$$X = PY$$

可以将 $f_1(X)$, $f_2(X)$ 同时化成标准形

$$f_1 = \lambda_1 y_1 \overline{y_1} + \lambda_2 y_2 \overline{y_2} + \cdots + \lambda_n y_n \overline{y_n}$$

$$f_2 = y_1 \overline{y_1} + y_2 \overline{y_2} + \cdots + y_n \overline{y_n}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是方程 $|\lambda B - A| = 0$ 的根，而且全为实数。

定义：设 A, B 均为 n 阶 Hermite-阵,且 B 又是正定的，则方程

$$AX = \lambda BX$$

有非零解的充分必要条件是

λ 是次 n 代数方程方程

$$|\lambda B - A| = 0$$

的根。我们称此方程是 A 相对于 B 的特征方程。它的根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 称为 A 相对于 B 的广义特征值。将 λ_i 代入到方程

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\lambda BX}$$

中所得非零解向量 X 称为与 λ_i 相对应的广义特征向量。

广义特征值与广义特征向量的性质（了解）

（1）有 n 个实的广义特征值；

（2）有 n 个线性无关的广义特征向量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，即

$$AX_i = \lambda_i BX_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

（3）这 n 个广义特征向量可以这样选取，使得其满足

$$\boxed{\begin{aligned} X_i^H BX_j &= \delta_{ij} \\ X_i^H AX_j &= \lambda_j \delta_{ij} \end{aligned}}$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号。

Rayleigh 商

定义：设 $A^H = A$，称实数

$$R(X) = \frac{X^H A X}{X^H X} \qquad (X \in C^n, X \neq 0)$$

为Hermite 矩阵 A 的 Rayleigh 商.

以下将Hermite 矩阵 A 的特征值按如下排列：

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

以下内容仅供了解，不在考试范围

Hermite 矩阵 A 的 Rayleigh 商的性质：

$$R(X)=\frac{X^H AX}{X^H X}$$

(1) $R(kX)=R(X) \qquad (k\in R)$

(2) $\lambda_1 \le R(X) \le \lambda_n$

(3) $\min\limits_{X\neq 0} R(X)=\lambda_1,\ \max\limits_{X\neq 0} R(X)=\lambda_n$

证明：存在酉矩阵 U 使得

$$U^H AU=\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n)=\Lambda$$

命 $X=UY$, 则 $\quad R(X)=\dfrac{Y^H U^H AUY}{Y^H U^H UY}=\dfrac{Y^H \Lambda Y}{Y^H Y}$

$$R(X)=\frac{\lambda_1 y_1\overline{y}_1+\lambda_2 y_2\overline{y}_2+\cdots+\lambda_n y_n\overline{y}_n}{y_1\overline{y}_1+y_2\overline{y}_2+\cdots+y_n\overline{y}_n}$$

$$\lambda_1(y_1\overline{y}_1+\cdots+y_n\overline{y}_n)\le \lambda_1 y_1\overline{y}_1+\cdots+\lambda_n y_n\overline{y}_n$$

$$\le \lambda_n(y_1\overline{y}_1+\cdots+y_n\overline{y}_n)$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1\le R(X)\le\lambda_n$$

取 Y_0 使得 $y_1\neq 0,\ y_2=y_3=\cdots=y_n=0,\ \ X_0=UY_0,$

可得 $R(X_0)=\lambda_1,\quad \therefore\ \min\limits_{X\neq 0} R(X)=\lambda_1$

定理:设 A, B 是 Hermite 矩阵,$\lambda_i(A),\lambda_i(B),\lambda_i(A+B)$ 分别表示矩阵$A, B, A+B$ 的特征值,且特征值从小到大按递增顺序排列,则对于每一个 k,有

$$\lambda_k(A)+\lambda_1(B)\le\lambda_k(A+B)\le\lambda_k(A)+\lambda_n(B)$$

证明: $\lambda_k(A+B)=\min\limits_{V_k}\max\limits_{X\neq 0,X\in V_k}\dfrac{X^H(A+B)X}{X^HX}$

$$=\min_{V_k}\max_{X\neq 0,X\in V_k}\left(\frac{X^HAX}{X^HX}+\frac{X^HBX}{X^HX}\right)$$

$$\boxed{=\min_{V_k}\max_{X\neq 0, X\in V_k}\left(\frac{X^HAX}{X^HX}+\frac{X^HBX}{X^HX}\right)}$$

$$\geq \min_{V_k}\max_{X\neq 0, X\in V_k}\left(\frac{X^HAX}{X^HX}+\lambda_1(B)\right)$$

$$\geq \lambda_k(A)+\lambda_1(B)$$

类似地可证明 $\lambda_k(A+B)\leq \lambda_k(A)+\lambda_n(B)$

we denote the eigenvalues of A by

$$\alpha : \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n,$$

and similarly write β and γ for the eigenvalues (spectra) of B and C.

What α, β, and γ can be the eigenvalues of n by n Hermitian (or real symmetric) matrices A, B, and C, with $C = A + B$?

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i.$$

$$(*_{IJK}) \qquad \sum_{k \in K} \gamma_k \leq \sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in J} \beta_j,$$

for certain subsets I, J, K of $\{1, \ldots, n\}$ of the same cardinality r, with $r < n$. We always write the subsets in increasing order, so

$$I = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_r\},$$

$J = \{j_1 < \ldots < j_r\}$, and $K = \{k_1 < \ldots < k_r\}$.

Horn defined sets T_r^n of triples (I, J, K) of subsets of $\{1, \dots, n\}$ of the same cardinality r, by the following inductive procedure. Set

$$U_r^n = \{(I, J, K) \mid \sum_{i \in I} i + \sum_{j \in J} j = \sum_{k \in K} k + r(r+1)/2\}.$$

When $r = 1$, set $T_1^n = U_1^n$.

$$T_r^n = \{(I, J, K) \in U_r^n \mid \text{ for all } p < r \text{ and all } (F, G, H) \text{ in } T_p^r,$$
$$\sum_{f \in F} i_f + \sum_{g \in G} j_g \leq \sum_{h \in H} k_h + p(p+1)/2\}.$$

Horn's Conjecture. *A triple (α, β, γ) occurs as eigenvalues of Hermitian n by n matrices A, B, C with $C = A + B$ if and only if $\sum \gamma_i = \sum \alpha_i + \sum \beta_i$ and the inequalities $(*_{IJK})$ hold for every (I, J, K) in T_r^n, for all $r < n$.*

Horn's conjecture is true.

Horn's Conjecture includes the following special cases:

in 1912 by H. Weyl $\gamma_{i+j-1} \leq \alpha_i + \beta_j$ whenever $i + j - 1 \leq n$.

In 1949 K. Fan $\sum_{i=1}^{r} \gamma_i \leq \sum_{i=1}^{r} \alpha_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i$ for any $r < n$.

H. Wielandt $\sum_{i \in I} \gamma_i \leq \sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i$

L. Freede and R. C. Thompson

$$\sum_{k \in K} \gamma_k \leq \sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in J} \beta_j, \text{ if } k_p = i_p + j_p - p \text{ for } 1 \leq p \leq r.$$

for any I and J, provided that $i_r + j_r \leq n + r$.