例：求下列矩阵的奇异值分解表达式

(1) $A=\begin{bmatrix} 2 & i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

解： （1）容易计算AA^H的特征值为 5,0,0，所以 A 的奇异值为$\alpha=\sqrt{5}$.下面计算AA^H 的标准正交特征向量，解得分别与 5,0,0对应的三个标准正交特征向量

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad u_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad u_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

由这三个标准正交特征向量组成矩阵U，所以有

$$U=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad U_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

取 $V_1 = A^H U_1 \Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -i/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

取 $V_2 = \begin{bmatrix} -i/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ 与 V_1 正交. 由这两个标准正交特征向量 V_1, V_2

组成矩阵 V：

$$V = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{i}{\sqrt{5}} \\ -\frac{i}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

于是可得奇异值分解式为

$$A = U\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^H$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-i}{\sqrt{5}} \\ -\frac{i}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^H$$

(2) 先求 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^H$ 的奇异值分解.

$$\boldsymbol{A}^H=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^H$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{V}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} & 0\\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

可得$\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解表达式为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

推论：设 $A\in C_r^{m\times n}$，$\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_r$ 是 A 的 r 个奇异值，那么存在次酉矩阵 $U_r\in U_r^{m\times r}, V_r\in V_r^{n\times r}$ 使得 $A=U_r\Delta V_r^H$.

提示：

$$A=U\begin{bmatrix}\Delta & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^H=\begin{bmatrix}U_r & U_{m-r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_r^H\\ V_{n-r}^H\end{bmatrix}=U_r\Delta V_r^H$$

注：设 $A\in C_r^{m\times n}$，$\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_r$ 是 A 的 r 个奇异值，那么

$$A=U_r\Delta V_r^H=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & \dots & u_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1^H \\ v_2^H \\ \vdots \\ v_r^H\end{bmatrix}$$

$$=\alpha_1 u_1 v_1^H+\alpha_2 u_2 v_2^H+\dots+\alpha_r u_r v_r^H$$

(Schmidt, Mirsky), **仅供参考**

定理：设 $A\in C_r^{m\times n}$，$\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_r$ 是 A 的 r 个奇异值，存在次酉矩阵 $U_r\in U_r^{m\times r}, V_r\in V_r^{n\times r}$ 使得 $A=U_r\Delta V_r^H$. 其中

$$\Delta=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$$

令 $B=U_r\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_k,0,\cdots,0)V_r^H$，$0<k<r$.

$$=\alpha_1 u_1 v_1^H+\alpha_2 u_2 v_2^H+\ldots+\alpha_k u_k v_k^H$$

则 $\|A-B\|_F=\min\limits_{\mathrm{rank}(X)\leq k}\|A-X\|_F$，$\|C\|_F=\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}|c_{ij}|^2\right)^{1/2}$