幂等矩阵与投影变换

定义：设 S,T 是 n 维酉空间 V 的两个子空间，且$V=S\oplus T$. 则对于 V 中任一向量 α 均可唯一的表示为

$$\alpha=x+y,\quad x\in S, y\in T$$

则称 x 是α 沿 T 到 S 的投影，y 是 α 沿 S 到 T 的投影.

由上式确定的线性变换 $\tau: V\to S\subseteq V$

$$\tau(\alpha)=x$$

称为 V 沿 T 到 S 的投影变换.

定理： 设 A 是一个 n 阶幂等矩阵，则下面线性变换

$$\tau(\alpha) = A\alpha, \quad \forall \alpha \in C^n$$

是 C^n 沿着 $N(A)$ 到 $R(A)$ 的投影变换.

提示： $C^n = R(A) \oplus N(A)$, $\quad \alpha = A\alpha + (\alpha - A\alpha)$, 其中

$$A\alpha \in R(A),\ (\alpha - A\alpha) \in N(A).$$

定理： 设 τ 是 n维酉空间 V 上的线性变换, 则下列命题等价.

（1）τ 是 V 上的投影变换.

（2）$\tau^2=\tau$.

（3）τ 的矩阵表示 A 满足 $A^2=A$.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2) τ 是 V 沿 T 到 S 的投影变换，$\forall\alpha\in V$,

$$\alpha=x+y,\quad x\in S, y\in T,\quad \tau(\alpha)=x,$$

$$\because \tau^2(\alpha)=\tau[\tau(\alpha)]=\tau(x)=x=\tau(\alpha),\quad \therefore \tau^2=\tau.$$

$(2) \Rightarrow (1)$, $\forall \alpha \in V$, 则 $\alpha = \underline{\tau(\alpha)} + \underline{\alpha - \tau(\alpha)}$, $\because \tau^2 = \tau$,

$\therefore \tau[\alpha - \tau(\alpha)] = \tau(\alpha) - \tau^2(\alpha) = 0$, 从而 $\alpha - \tau(\alpha) \in N(\tau)$, 并且

$$V = R(\tau) + N(\tau).$$

$\forall\, \underline{x \in R(\tau)}$, 则存在 $\beta \in V$, 使得 $x = \tau(\beta)$, 那么

$$\underline{\tau(x)} = \tau^2(\beta) = \tau(\beta) = \underline{x}.$$

从而 $\forall \gamma \in R(\tau) \cap N(\tau)$, 则 $\gamma = \tau(\gamma) = 0$. $\therefore V = R(\tau) \oplus N(\tau)$.

$\alpha = \tau(\alpha) + \alpha - \tau(\alpha)$, 即 τ 是 V 沿着 $N(\tau)$ 到 $R(\tau)$ 的投影变换.

(2)$\Rightarrow$(3), 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 V 的一组基, A 是 τ 在该基下的矩阵表示, 于是 $\tau(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A$,

$$\tau^2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\tau[(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A]=\tau(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A$$

$$=\underline{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A^2=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A.}\qquad(\because\tau^2=\tau)$$

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，所以 $A^2=A.$

(3)$\Rightarrow$(2), 若 $\tau(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A$, 则

$\tau^2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A^2$，如果 $A^2=A$, 则

$\tau^2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\tau(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，从而 $\tau^2=\tau.$

正交投影变换

定义：设 S, T 是 n 维酉空间 V 的两个子空间, 若对于任意的 $x \in S, y \in T$, 都有 $(x, y) = 0$, 则称 S 与 T 是正交的.

定义：设 S, T 是 n 维酉空间 V 的两个子空间, 若 S 与 T 是正交的, 则 $S+T$ 称为 S 与 T 的正交和. （显然是直和）

定义：设 n 维酉空间 V 是子空间 S 与 T 的正交和, 对任意 $\alpha \in V$, 有 $\alpha = x + y$, $x \in S, y \in T$, 则线性(投影)变换 $\sigma : V \to S \subseteq V$,

$$\sigma(\alpha) = x,$$

称为由 V 到 S 的正交投影.

定理： 设 A 是一个 n 阶**幂等的 H-矩阵**，则下面线性变换

$$\sigma(\alpha) = A\alpha, \quad \forall \alpha \in C^n$$

是 C^n 到 $R(A)$ 的**正交投影**变换.

提示: 只要证 $R(A)$ 与 $N(A)$ 正交. $\forall\, x \in R(A),\ y \in N(A) = R(I - A)$, 则存在 z_1, z_2 使得 $x = Az_1,\ y = (I - A)z_2$, 则

$$(x, y) = (Az_1, (I - A)z_2) = z_2^H (I - A)^H Az_1 = z_2^H (I - A)Az_1 = 0.$$

定理： 设 A 为一个 n 阶矩阵，则

$$A = A^H = A^2$$

的充分必要条件是存在一个 $n\times r$ 型次酉矩阵 $U_1 \in U_r^{n\times r}$ 使得

$$A = U_1 U_1^H$$

其中 $\operatorname{rank} A = r.$

提示： $U^H A U = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = U \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} U^H = U_1 U_1^H$

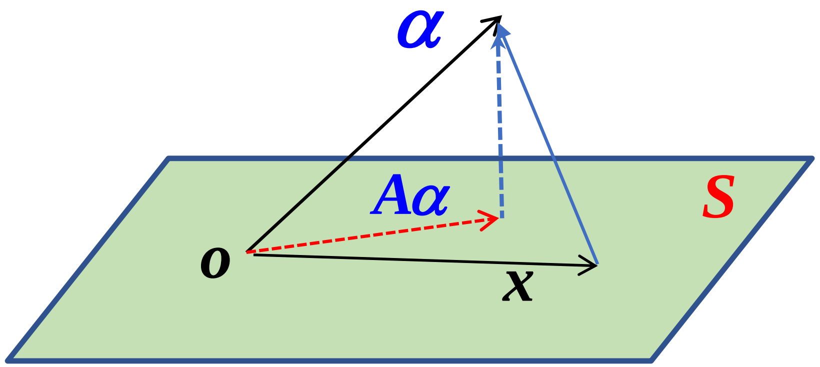
定理：设 S 是 C^n 的子空间，矩阵 U_1 的列由 S 的标准正交基构成， 令矩阵

$$A = U_1 U_1^H,$$

则线性变换 $\sigma: C^n \to C^n$,

$$\sigma(\alpha) = A\alpha, \quad \forall\, \alpha \in C^n$$

是 C^n 到 S 的正交投影变换.



提示：$U_1 \in U_r^{n\times r}$， $A = A^H = A^2$， $R(A) = R(U_1) = S$.

例: 设 A 是一个正定的 H-阵, B 是一个反 H-阵, 证明 AB 与 BA 的特征值实部为零.

证明: 由于 A 是一个正定 H-阵, 所以存在可逆矩阵 Q 使得 $A = Q^H Q$, 那么

$$AB = Q^H QB = Q^H QBQ^H (Q^H)^{-1} \sim QBQ^H$$

即 AB 相似于 QBQ^H, 从而有相同的特征值.

因为 B 是一个反 H-阵, 所以 QBQ^H 也是一个反 H-阵, 特征值实部为零. 同理可证 BA 的特征值实部也为零.

例：设 A 是一个正定的 H-阵, B 是一个反H-阵，证明：$A+B$ 是可逆矩阵.

证明：由于 A 是一个正定 H-阵，所以存在可逆矩阵 Q 使得 $A=Q^HQ$, 那么

$$|A+B|=|Q^HQ+B|=|Q^H||I+(Q^H)^{-1}B(Q)^{-1}||Q|,$$

B 是一个反 H-阵，所以 $(Q^H)^{-1}B(Q)^{-1}=(Q^{-1})^HB(Q)^{-1}$ 也是一个反 H-阵, 特征值实部为零, 从而 $|I+(Q^H)^{-1}B(Q)^{-1}|\neq 0$，$A+B$ 可逆.