SFM-1201 Mathématiques Générales

Chapitre 2 : Introduction à la théorie des ensembles

André Zampera
Bureau 3255
andre.zampera@esiee.fr
Septembre 2024

Chapitre 2

Introduction à la théorie des ensembles

2.1 Généralités

La notion d'**ensemble** est supposée connue. De manière intuitive 'un ensemble est une collection d'objets ou une multitude qui peut être comprise comme un tout' (G. Cantor). Un ensemble est déterminé par les **éléments** qu'il contient.

Si E est un ensemble et x un objet la notation $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ signifie 'x appartient à E' (ou 'x est élément de E') et $\mathbf{x} \notin \mathbf{E}$ signifie 'x n'appartient pas à E' (ou 'x n'est pas élément de E').

Définition 1 (Égalité de deux ensembles) **:**

Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si ils sont constitués des mêmes éléments, c.à.d. si et seulement si

$$\forall x \ \ x \in E \Leftrightarrow x \in F$$

On note alors $E = F$.

Il existe un unique ensemble qui ne contient aucun élément, c'est l'**ensemble vide** noté $\emptyset$.

Si un ensemble est constitué des éléments $x_1, x_2, \dots x_n$, on le note $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots \mathbf{x_n}\}$.

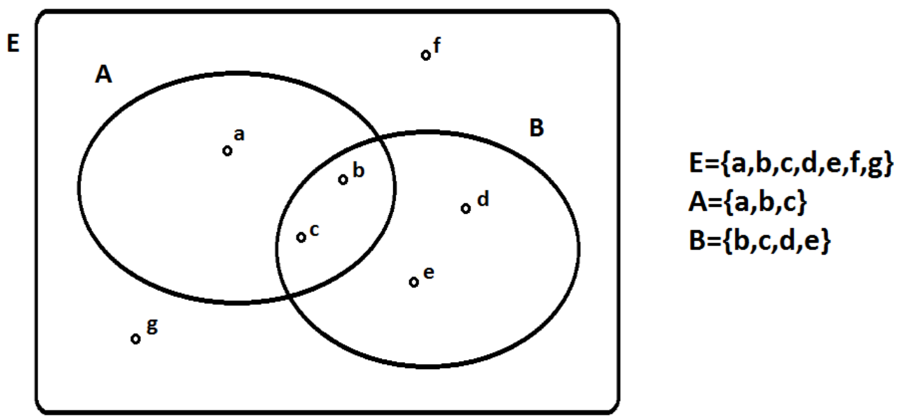
Un ensemble est défini lorsque pour chaque objet on peut dire s'il est élément ou non de cet ensemble. Un ensemble peut être défini de deux façons :

- **en extension :** On donne la liste complète explicite de tous ses éléments (Exemples : $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$)
- **en compréhension :** On donne la propriété caractéristique P que ses éléments vérifient et sont seuls à vérifier. On note $\{x | \ P(x)\}$ l'ensemble des objets qui vérifient la propriété P (Exemples : $\{x \in \mathbb{N} | \ x \text{ est impair et } x \leq 8\}$, $\{x \in \mathbb{Z} | \ x^2 \leq 4\}$ sont les mêmes ensembles comme ci-dessus mais décrits en compréhension)

Remarques : La définition de l'égalité de deux ensembles implique :
- Les éléments d'un ensemble sont considérés sans répétition, c.à.d. $\{a, a, b, c, c, c\} = \{a, b, c\}$
- L'ordre des éléments dans l'écriture entre accolades est sans importance c.à.d. $\{b, c, a\} = \{a, b, c\}$

Rappelons quelques ensembles classiques :
- $\mathbb{N}$ - ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{Z}$ - ensemble des entiers
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | \ p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*\}$ - ensemble des rationnels ($\mathbb{N}^*$ - ensemble des naturels strictement positifs)
- $\mathbb{R}$ - ensemble des réels
- $\mathbb{C}$ - ensemble des nombres complexes

Représentation d'un ensemble par un **diagramme de Venn** :



Cette représentation nous aide à visualiser les résultats des opérations sur les ensembles, mais elle n'a pas valeur de preuve.

Qu'ai-je compris ? :

1) Définir quelques ensembles en compréhension et en extension.
2) Soient deux ensembles donnés en compréhension par

$$A = \{x \in \mathbb{Q} | \ x^3(x^2-1)^2(x^2-4) = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{z \in \mathbb{Z} | \ |z| \leq 2\}$$

   Est-ce que $A = B$?
3) Décrire en extension les ensembles suivants :
   i) $\{z \in \mathbb{Z} | \ \sqrt{2} < z < 2\pi\}$
   ii) $\{x \in \mathbb{C} | \ \exists n \in \mathbb{N} \ \exists p \in \mathbb{N} \ \ x = \dfrac{n}{p} \ \wedge \ 1 \leq p \leq 2n \leq 7\}$
   iii) $\{x \in \mathbb{Q} | \ (x-1)(4x^2-1)(x^2-2)(x^2+1) = 0\}$
   iv) $\{x \in \mathbb{N}^* | x \leq 20 \ \wedge \ \exists k \in \mathbb{N}^* \ \ (3^k | x \ \wedge \ 2^k | x)\}$

Qu'ai-je compris ? :

4) Décrire en compréhension les ensembles suivants :
i) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
ii) $\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$
iii) $\{1, -1, i, -i\}$ où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$

2.2 Sous-ensemble, inclusion, ensemble des parties

Définition 2 (Inclusion) **:**

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F et on note $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{F}$ si tout élément de E est élément de F :

$$\forall x \quad x \in E \Rightarrow x \in F$$

On dit aussi que E est un **sous-ensemble** de F ou une **partie** de F

Exemples :
1) pour tout ensemble E, $\emptyset \subseteq E$ et $E \subseteq E$
2) $\{5, 9, 11\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Propriétés (Propriétés de l'inclusion) **:**

Pour trois ensembles E, F et G :
1) $E \subseteq E$
2) $E \subseteq F \ \wedge \ F \subseteq E \ \Rightarrow E = F$
3) $E \subseteq F \ \wedge \ F \subseteq G \ \Rightarrow E \subseteq G$

Démonstration :

Remarque : Propriétés 1) et 2) montrent que

$$E = F \Leftrightarrow E \subseteq F \ \wedge \ F \subseteq E$$

c.à.d. qu'on peut démontrer l'égalité de deux ensemble en démontrant double inclusion. C'est une méthode très couramment utilisée.

Définition 3 (Ensemble des parties) **:**

Pour tout ensemble E, les parties de E forment un ensemble noté $\mathcal{P}(E)$ et appelé **ensemble des parties** de E. $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble qui a pour éléments tous les sous-ensembles de E, c.à.d.

$$\forall A \ \ A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subseteq E$$

Quel que soit l'ensemble E, son ensemble des parties contient toujours au moins deux éléments : $\emptyset$ et E ($\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$).

Exemple : Si $E = \{a, b, c\}$, on a

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

ATTENTION ! Il est important de faire la différence entre 'appartient' ($\in$) et 'inclus' ($\subseteq$). Ainsi en reprenant l'exemple précédent $b \in E$, mais $b \notin \mathcal{P}(E)$, $\{b\} \subseteq E$, mais $\{b\} \in \mathcal{P}(E)$ (et $\{b\} \not\subseteq \mathcal{P}(E)$)

Exercice corrigé : Soit $A = \{a, \{a\}, \emptyset, \{b, \emptyset\}\}$.
i) Trouver les élément de A.
ii) Trouver cinq sous-ensembles différents de A.
iii) Est ce que *a)* $a \in A$? *b)* $b \in A$? *c)* $\emptyset \in A$? *d)* $\{b, \emptyset\} \subseteq A$? *e)* $\{\{b, \emptyset\}\} \subseteq A$?

Corrigé :
i) $a, \{a\}, \emptyset$ et $\{b, \emptyset\}$
ii) Par exemple : $\{a\}$, $\{a, \{a\}\}$, $\{\{a\}\}$, $\{\emptyset, a\}$, $\{a, \{b, \emptyset\}\}$
iii) *a)* OUI *b)* NON *c)* OUI *d)* NON *e)* OUI

Qu'ai-je compris ? :

1) Soit $E = \{a, b, c\}$.
   i) Peut-on écrire : *a)* $a \subseteq E$, *b)* $\{a\} \subseteq E$, *c)* $\emptyset \in E$, *d)* $\emptyset \subseteq E$, *e)* $\{\emptyset\} \subseteq E$
   ii) E et $\mathcal{P}(E)$, ont-ils des éléments en commun ?

2) Soit $A = \{a\}$.
   i) Calculer $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.
   ii) Est-ce que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$? Ou $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$?
   iii) Trouver tous les éléments qui sont communs à $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. En déduire qu'un objet peut être en même temps élément et partie d'un ensemble.

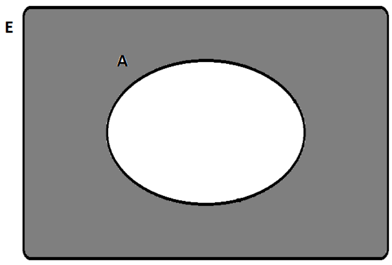
3) Répondre aux questions de l'exercice précédent si $A = \emptyset$.

2.3 Opérations sur les ensembles

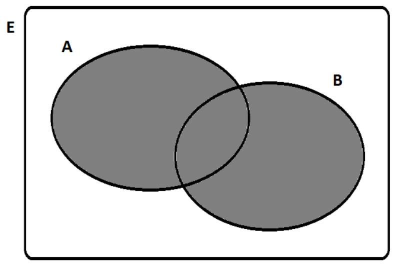
Définition 4 (Ensemble complémentaire, Intersection, Réunion) **:**

Soit A et B deux parties d'un même ensemble E. On définit :

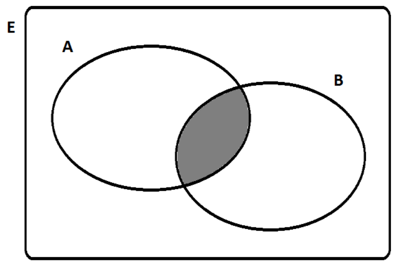
- $\mathbf{A^c = \{x \in E |\ x \notin A\}}$, le **complémentaire** de A (parfois noté aussi $C_E A$, $E \backslash A$ ou $\overline{A}$)
- $\mathbf{A \cap B = \{x |\ x \in A}$ et $\mathbf{x \in B\}}$, l'**intersection** de A et B
- $\mathbf{A \cup B = \{x |\ x \in A}$ ou $\mathbf{x \in B\}}$, la **réunion** de A et B



A^c



A ∪ B



A ∩ B

Exemple : Reprenons l'exemple du chapitre 1 : $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$. Alors

$$A^c = \{d, e, f, g\}, \quad B^c = \{a, f, g\}, \quad A \cap B = \{b, c\}, \quad \text{et} \quad A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

Proposition 1 (Propriétés des opérations ensemblistes) **:**

Pour $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, on a

$\mathbf{E^c = \emptyset \qquad \emptyset^c = E \qquad (A^c)^c = A}$		
$\mathbf{(A \cap B)^c = A^c \cup B^c}$	$\mathbf{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c}$	**lois de De Morgan**
$\mathbf{A \cap B \subseteq A}$ **et** $\mathbf{A \cap B \subseteq B}$	$\mathbf{A \subseteq A \cup B}$ **et** $\mathbf{B \subseteq A \cup B}$	
$\mathbf{A \cap A = A}$	$\mathbf{A \cup A = A}$	**idempotence**
$\mathbf{A \cap B = B \cap A}$	$\mathbf{A \cup B = B \cup A}$	**commutativité**
$\mathbf{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$	$\mathbf{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$	**associativité**
$\mathbf{\emptyset \cap A = \emptyset}$	$\mathbf{\emptyset \cup A = A}$	
$\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$		**distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$**
$\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$		**distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$**

Démonstration : Ces propriétés découlent de la définition des opérations. A titre d'exemple, on vérifie la loi de De Morgan par double inclusion : Pour tout x

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \ \vee \ x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \ \vee \ x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c \end{aligned}$$

Bien sûr, en lisant de gauche à droite (c.à.d. les implications $\Rightarrow$), on obtient l'inclusion $\subseteq$ et de droite à gauche (c.à.d. les implications $\Leftarrow$), on obtient l'inclusion $\supseteq$. Donc $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$ On peut utiliser aussi les **tables d'appartenance** (ci-dessous).

Définition 5 (ENSEMBLES DISJOINTS) **:**

Deux ensembles A et B sont **disjoints** si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Remarque : La commutativité et l'associativité de l'union et de l'intersection impliquent que l'ordre des opérandes et des opérations (place des parenthèses) dans les expressions contenant exclusivement $\cap$ ou $\cup$ n'ont pas d'importance. Ainsi

$$(A \cap B) \cap (C \cap D) = B \cap ((D \cap C) \cap A) = A \cap B \cap C \cap D$$

pour tous $A, B, C, D \in \mathcal{P}(E)$. Cela nous permet de

- généraliser les opérations : Pour toute famille d'ensembles $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x | \ \exists i \ x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x | \ \forall i \ x \in A_i\},$$

- et de montrer les généralisations suivantes (en utilisant le raisonnement par récurrence) : Pour toute famille d'ensembles $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ et tout ensemble B

$$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \quad \text{et} \quad (\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c \qquad \text{lois de De Morgan}$$

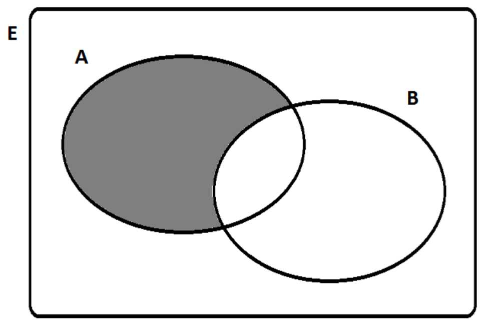
$$B \bigcap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \bigcap A_i) \quad \text{et} \quad B \bigcup (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (B \bigcup A_i) \quad \text{distributivité}$$

Nous définissons encore deux opérations classiques sur les ensembles :

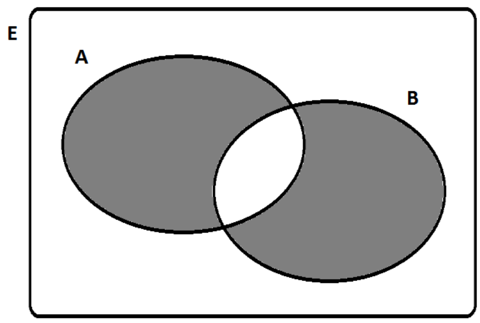
Définition 6 (DIFFÉRENCE, DIFFÉRENCE SYMÉTRIQUE) **:**

Soit A et B deux ensembles. On définit :

- $\mathbf{A \backslash B = \{x | \ x \in A}$ et $\mathbf{x \notin B\}}$, la **différence** de A et B
- $\mathbf{A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)}$, la **différence symétrique** de A et B



A ∖ B



A △ B

Exemple : Toujours le même exemple : $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$. Alors

$$A \backslash B = \{a\}, \quad B \backslash A = \{d, e\} \quad \text{et} \quad A \triangle B = \{a, d, e\}$$

Propriétés :

Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$

i) $A \backslash \emptyset = A$ et $A \backslash A = \emptyset$,

ii) $A \triangle \emptyset = A$ et $A \triangle A = \emptyset$,

iii) $A \triangle B = B \triangle A$,

iv) $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$ (par conséquent $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \backslash B = A$),

v) $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ (par conséquent $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \triangle B = A \cup B$),

vi) $A \backslash B = A \cap B^c$.

Démonstration :

Dans les exercices corrigés ci-dessous, je vous donne l'enchaînement des raisonnements sans vous indiquer chaque fois quelles propriétés des opérations j'utilise. Je vous laisse le soin de les découvrir.

Exercice corrigé 1 : Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Etablir

$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

Corrigé : On a :

$$A \backslash (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^c = A \cap (B^c \cup C^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

Exercice corrigé 2 : Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Trouver une écriture plus simple de l'expression

$$(A \triangle B) \cup (A \triangle B^c)$$

Corrigé :

$$(A \triangle B) \cup (A \triangle B^c) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \backslash B^c) \cup (B^c \backslash A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B) \cup$$

$$\cup (B^c \cap A^c) = [A \cap (B^c \cup B)] \cup [(B \cup B^c) \cap A^c] = (A \cap E) \cup (E \cap A^c) = A \cup A^c = E$$

Exercice corrigé 3 : Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que

$$A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B \subseteq C.$$

Corrigé : On montre d'abord que la condition $A \subseteq B \subseteq C$ est nécessaire pour l'égalité à gauche (c.à.d. l'implication $\Rightarrow$). On constate $B \cap C \subseteq B$, d'où $B \cap C \subseteq A \cup B$. Donc l'inclusion $\supseteq$ de l'égalité est toujours vérifiée. En ce qui concerne l'autre inclusion,

$$A \cup B \subseteq B \cap C \Rightarrow (A \cup B \subseteq B \wedge A \cup B \subseteq C) \quad (\text{puisque } \forall X \;\; X \subseteq B \cap C \Rightarrow X \subseteq B \wedge X \subseteq C).$$

Or $A \cup B \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B$. Maintenant $A \cup B \subseteq C$ et $A \subseteq B$ impliquent $B \subseteq C$. Donc $A \subseteq B \subseteq C$ est nécessaire à l'égalité.

Cette condition est aussi suffisante. En effet, $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ et $B \subseteq C \Rightarrow B \cap C = B$, donc $A \cup B = B \cap C$.

Qu'ai-je compris ? :

1) Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Dans les expressions suivantes mettez un des symboles $\Rightarrow, \Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$ pour que la proposition obtenue soit vraie. Démontrer la proposition et trouver un contre-exemple pour les implications manquantes.
   i) $A \subseteq B \cap C \; \square \; A \subseteq B \wedge A \subseteq C$
   ii) $B \cup C \subseteq A \; \square \; B \subseteq A \wedge C \subseteq A$
   iii) $B \cap C \subseteq A \; \square \; B \subseteq A \wedge C \subseteq A$
   iv) $A \subseteq B \cup C \; \square \; A \subseteq B \vee A \subseteq C$
   v) $A = \emptyset \wedge B = \emptyset \; \square \; A \cup B = \emptyset$
   vi) $A = \emptyset \vee B = \emptyset \; \square \; A \cap B = \emptyset$

2) Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Simplifier les écritures suivantes :
   i) $[A \cap (A \cap B)] \cap B^c$
   ii) $(A \cap B) \cup (A \cup B^c)^c$
   iii) $[(A \cap C) \cap (B \cap C)] \cap A$
   iv) $[(A^c \cap C^c)^c \cap (A \cap B)] \cup (C \cup B)$

2.3.1 Tables d'appartenance

Tables d'appartenance nous permettent de faire des démonstrations, vérifier l'égalité ou l'inclusion entre expressions ensemblistes ou trouver les contre-exemples, chercher des conditions suffisantes, nécessaires pour l'égalité ou l'inclusion...Elles consistent des colonnes correspondantes à chaque variable figurante dans les expressions et de celles qui correspondent aux expressions qu'on étudie. Dans chaque case on met 1 pour $\in$ et 0 pour $\notin$. Regardons les tables d'appartenance des opérations $^c, \cap, \cup$

A	A^c
0	1
1	0

A	B	$A \cup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	$A \cap B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Dans la deuxième table (celle qui correspond à $A \cup B$), la première ligne signifie : "Si $x \notin A$ et $x \notin B$, alors $x \notin A \cup B$", la deuxième "Si $x \notin A$ et $x \in B$, alors $x \in A \cup B$" et ainsi de suite.

Dans la mesure où les lignes engendrent toutes les possibilités d'appartenance pour les ensembles constituants une expression ensembliste, les tables d'appartenance ont valeur de preuve, d'où leur utilité.

Nous illustrons la justification par tables d'appartenance avec des exemples :

Exemple 1 : Démontrons la loi de De Morgan $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ \ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Démonstration :

A	**B**	$A \cup B$	$\mathbf{(A \cup B)^c}$	A^c	B^c	$\mathbf{A^c \cap B^c}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

L'égalité des colonnes qui correspondent à $(A \cup B)^c$ et $A^c \cap B^c$ justifie l'égalité de deux expressions.

Exemple 2 : Soient $E \neq \emptyset$ et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. On définit deux expressions $X = A \triangle (B^c \cap C)$ et $Y = (A \triangle B^c) \cap C$.

a) Discuter l'existence de l'égalité ou de l'inclusion entre X et Y.

b) Trouver quelques conditions *i)* nécessaires et non suffisantes, *ii)* suffisantes et non nécessaires et *iii)* une condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité soit verifiée.

Corrigé : Nous rappelons qu'une condition nécessaire à l'égalité $X = Y$ est une proposition P telle que $X = Y \Rightarrow P$ (donc P est une conséquence) et une condition suffisante si $P \Rightarrow X = Y$ (donc P est une cause).

Construisons d'abord les tables d'appartenances :

A	**B**	**C**	B^c	$B^c \cap C$	**X**	$A \triangle B^c$	**Y**	
0	0	0	1	0	0	1	0	
0	0	1	1	1	1	1	1	
0	1	0	0	0	0	0	0	
0	1	1	0	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	0	0	$\longleftarrow$
1	0	1	1	1	0	0	0	
1	1	0	0	0	1	1	0	$\longleftarrow$
1	1	1	0	0	1	1	1	

Nous constatons d'abord que les colonnes X et Y ne sont pas égales, donc en général $X \neq Y$. Il y a deux lignes où l'égalité n'est pas vérifiée, on va les noter par (100) et (110) selon les valeurs d'appartenance à A, B et C. Pour donner un contre-exemple, on prend la ligne (100) parce que tant que la possibilité $x \in A$, $x \notin B$ et $x \notin C$ existe, on ne va pas avoir l'égalité. Il suffit donc de prendre $A \neq \emptyset$ quelconque, $B = \emptyset$ et $C = \emptyset$. D'autres contre-exemples peuvent être construits à partir de la ligne (110) : par exemple $A \neq \emptyset$ quelconque, $B = A$ et $C = \emptyset$.

Nous constatons aussi que chaque fois quand il y a un 1 dans la colonne Y, il y a un 1 dans la colonne X. Donc l'inclusion $Y \subseteq X$ est toujours vérifiée. C'est la réponse à *a)*.

Pour répondre aux questions *b)* il faut se concentrer de nouveau sur les lignes (100) et (110). Bien évidemment, la ligne (100) correspond à la situation où $x \in A$, $x \notin B$ et $x \notin C$, soit $x \in A \cap B^c \cap C^c$. De la même façon la ligne (110) correspond à $x \in A \cap B \cap C^c$. Bien sûr, pour que $X = Y$ il faut que la ligne (100) n'existe pas :

$$X = Y \Rightarrow A \cap B^c \cap C^c = \emptyset.$$

Ce n'est pas une condition suffisante puisque il faut aussi que la ligne (110) n'existe pas :

$$X = Y \Rightarrow A \cap B \cap C^c = \emptyset.$$

Donc on a trouvé deux conditions qui sont chacune nécessaire et non suffisante.

Bien évidemment, pour que l'égalité $X = Y$ soit vérifiée il faut et il suffit que les deux lignes n'existent pas, c.à.d.

$$X = Y \Leftrightarrow (A \cap B^c \cap C^c = \emptyset \quad \wedge \quad A \cap B \cap C^c = \emptyset). \tag{2.1}$$

Pour trouver une condition suffisante et non nécessaire il faut 'affaiblir' la proposition en sorte que d'autres lignes aussi soient supprimées. Comme les deux lignes ont un 1 à la première position, $A = \emptyset$ va les supprimer, mais aussi les lignes (101) et (111). Donc,

$$A = \emptyset \Rightarrow X = Y$$

est une condition suffisante mais pas nécessaire.

On voit aussi pour les lignes (100) et (110) que dès qu'on a un 1 dans la colonne A, on a un 0 dans la colonne C, donc pour supprimer ces deux lignes il suffit de ne pas avoir d'éléments dans A qui ne sont pas dans C, c.à.d. $A \subseteq C$. Donc

$$A \subseteq C \Rightarrow X = Y.$$

Mais comme il n'y a pas d'autres lignes avec un 1 dans la colonne A et un 0 dans la colonne C, c'est aussi une condition nécessaire, c.à.d .

$$X = Y \Leftrightarrow A \subseteq C.$$

On a obtenu ainsi une condition nécessaire et suffisante dans une forme plus simple et plus lisible que (2.1). (Essayez d'obtenir cette condition directement de (2.1) !)

Exemple 3 : Reprenons maintenant l'Exercice corrigé 3 pour obtenir le même résultat avec les tables d'appartenance. Donc on cherche une condition nécessaire et suffisante sur $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ pour que $A \cup B = B \cap C$.

Corrigé : On construit d'abord les tables d'appartenance :

A	**B**	**C**	$\mathbf{A \cup B}$	$\mathbf{B \cap C}$	
0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	
0	1	0	1	0	$\longleftarrow$
0	1	1	1	1	
1	0	0	1	0	$\longleftarrow$
1	0	1	1	0	$\longleftarrow$
1	1	0	1	0	$\longleftarrow$
1	1	1	1	1	

En comparant les deux dernières colonnes, on constate que $A \cup B \neq B \cap C$. (Je vous laisse de justifier $A \cup B \supseteq B \cap C$.) Pour avoir une égalité il est nécessaire et suffisant que les lignes où les colonnes $A \cup B$ et $B \cap C$ divergent soient supprimées. Comme dans l'exercice 2 on va les noter (010), (100), (101) et (110). Donc on a :

$$A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow (A^c \cap B \cap C^c = \emptyset \ \wedge \ A \cap B^c \cap C^c = \emptyset \ \wedge \ A \cap B^c \cap C = \emptyset \ \wedge \ A \cap B \cap C^c = \emptyset)$$

Pour simplifier l'expression à droite on va raisonner comme dans l'exercice 2 : On regarde les lignes (100) et (101) et on voit que ce sont les seules lignes où on a un 1 dans la colonne A et un 0 dans la colonne B. Donc la condition $A \subseteq B$ va éliminer seulement ces deux lignes, d'où :

$$A \cup B = B \cap C \Rightarrow A \subseteq B.$$

De la même façon, en regardant les deux lignes restantes (010) et (110) et les colonnes B et C on obtient une autre condition nécessaire $B \subseteq C$, c.à.d.

$$A \cup B = B \cap C \Rightarrow B \subseteq C.$$

En réunissant ces deux conditions on voit que $A \subseteq B \subseteq C$ va supprimer les quatre lignes qui ne permettent pas l'égalité, et seulement ces quatre lignes, donc c'est une condition nécessaire et suffisante pour que $A \cup B = B \cap C$:

$$A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B \subseteq C.$$

Qu'ai-je compris ? :

1) Que peut-on dire de deux ensembles A, B vérifiant :
   i) $A \backslash B = A \cup B$
   ii) $A \backslash B = \emptyset$
   iii) $A \backslash B = A$
   iv) $A \triangle B = A$
   v) $A \triangle B = A \cap B$

2) En utilisant les tables d'appartenance, démontrez que la proposition est vraie ou prouver qu'elle est fausse en trouvant un contre-exemple :
   i) $(A \backslash B) \cap (A \backslash C) = A \backslash (B \cap C)$
   ii) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash C) \backslash B$

3) Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que
   i) $(A \cap B)^c \backslash C = (C^c \backslash B) \cup (A^c \backslash C)$
   ii) Si $E = A \cup B$, $A \cap C \subseteq B$ et $B \cap C \subseteq A$ alors $C \subseteq A \cap B$
   iii) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$
   iv) $(A \backslash B) \cap (C \backslash D) = (A \cap C) \backslash (B \cup D)$
   v) $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$
   vi) $(A \backslash B) \cap (A \backslash C) = A \backslash (B \cup C)$

2.4 Produit cartésien

Certains objets peuvent être décrits par plusieurs attributs, chaque attribut appartenant à un ensemble prédéfini. Ainsi un cylindre circulaire droit est bien défini par le rayon de sa base r et la hauteur h. Même si r et h varient dans un même ensemble $\mathbb{R}_+^*$ il est évident qu'il ne suffit pas de donner deux réels strictement positifs quelconques pour caractériser un cylindre circulaire droit ; il faut encore savoir quel réel représente le rayon et quel la hauteur. C'est pour cela que si on associe à un tel cylindre un ensemble de deux éléments $\{r, h\} \subset \mathbb{R}_+^*$ (appelé aussi **paire**), cela ne va pas le définir de manière unique (Pourquoi ?).

On peut remédier à cela en lui associant au lieu d'une paire plutôt un **couple** des réels strictement positifs (r, h), c.à.d. une paire ordonné, un objet où on sait quelle est la première et quelle la deuxième composante. Si par convention on interprète la première composante comme rayon de la base et la deuxième comme hauteur on voit qu'à chaque cylindre circulaire droit correspond un couple unique des réels strictement positifs et que à chaque couple des réels strictement positifs correspond un seul cylindre circulaire droit. L'ensemble de tous ces couples constitue le **produit cartésien** de $\mathbb{R}_+^*$ par $\mathbb{R}_+^*$ et la correspondance qu'on vient de décrire montre que l'ensemble des cylindres circulaires droits peut être identifier en quelque sorte avec ce produit cartésien.

Si on prend deux ensembles A et B, et deux éléments x et y de A et B respectivement, on peut former un nouvel objet, une donnée conjointe appelé **couple** et notée (x, y). A la différence d'une paire $\{x, y\}$, l'ordre des éléments est important. x et y sont appelés respectivement **première et deuxième composante** du couple (x, y). (Parfois on parle aussi de **première et deuxième coordonnée**.)

Deux couples sont égaux si et seulement si leurs premières composantes d'une part et leurs deuxièmes composantes d'autre part sont égales,

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \;\wedge\; y = y')$$

L'ensemble de tous les couples construits de cette façon constitue un nouvel objet appelé **produit cartésien**.

Définition 7 (Produit cartésien) **:**

Si A et B sont deux ensembles, le **produit cartésien** $A \times B$ est défini par

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |\ \mathbf{x} \in \mathbf{A} \text{ et } \mathbf{y} \in \mathbf{B}\}.$$

Deux aspects sont particulièrement importants dans la construction du produit cartésien

- L'ordre des éléments est important ; si $(x, y) \in A \times B$, alors (y, x) en général n'est pas égal à (x, y). De plus il n'appartient pas en général à $A \times B$; il appartient à $A \times B$ si et seulement si $x, y \in A \cap B$. (Pourquoi ?)
- Le produit cartésien est constitué de **tous** les couples qu'on peut construire en prenant un élément de A et un élément de B, c.à.d. on peut librement choisir **n'importe quel** élément $x \in A$ et **n'importe quel** élément $y \in B$ et constituer un couple (x, y) qui appartiendra à $A \times B$.

Exemple : Si $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{2, 3\}$, alors

$$A \times B = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3)\}$$

et

$$B \times A = \{(2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}.$$

Remarque : $A \times A$ est noté A^2.

Proposition 2 :

Soit A, B, C trois ensembles. On vérifie facilement

i) $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset \quad \vee \quad B = \emptyset)$

ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

iii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

iv) $A \times B = A \times C \Leftrightarrow A = \emptyset \quad \vee \quad B = C$

v) $B \subseteq C \Rightarrow A \times B \subseteq A \times C$

Démonstration :

Exercice corrigé : Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. L'ensemble A, est-il un produit cartésien de deux ensembles ?

Corrigé : Procédons par l'absurde : Supposons qu'il existe $B, C \subseteq \mathbb{R}$ tels que $A = B \times C$. Alors le point $(1, 0) \in A$, et donc $1 \in B$. De même, $(0, 1) \in A$, et donc $1 \in C$. On en déduit que $(1, 1) \in B \times C = A$. Or $(1, 1) \notin B \times C = A$ puisque $1^2 + 1^2 > 1$. La contradiction montre que A n'est pas produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Une généralisation immédiate est le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles. Bien sûr on doit considérer au lieu des couples plutôt des n-uplets : Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ une famille d'ensembles. On choisit pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ un élément x_i de A_i et on forme n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Comme pour un couple c'est un ensemble ordonné, c.à.d. un objet où on sait quelle est la première, la deuxième, ..., la n-ième composante. Donc

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \Leftrightarrow (x_1 = x'_1 \wedge x_2 = x'_2 \wedge \ldots \wedge x_n = x'_n)$$

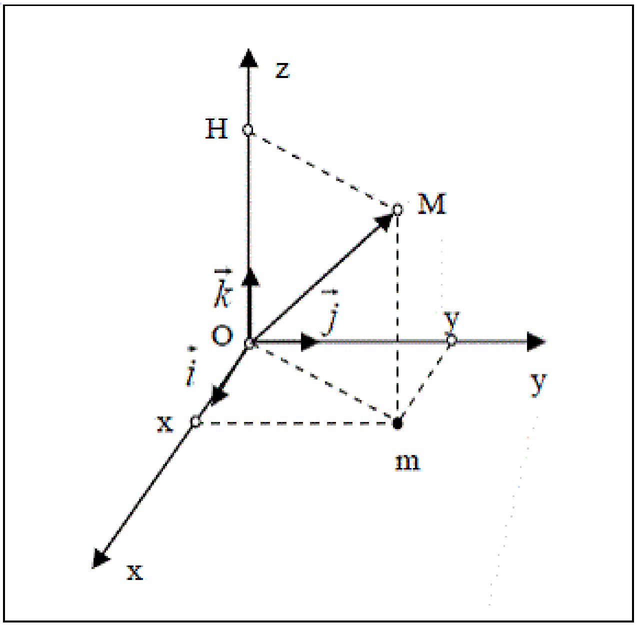
Définition 8 (Produit cartésien de plusieiurs ensembles) **:**

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ une familles d'ensembles. On définit le produit cartésien

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) |\ \forall i\ x_i \in A_i\}.$$

Dans le cas où $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ ce produit est plutôt noté A^n.

Vous êtes tous familiers des **coordonnées cartésiennes**, c'est une application très importante du produit cartésien : En fait, si on prend un plan affine muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où O est un point et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaire, alors à tout point M du plan correspond un couple des réels unique (x, y) tel que $\vec{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}$. Les réels x et y s'appelle respectivement l'**abscisse** et l'**ordonnée**. Cette construction nous permet d'identifier un plan affine avec le produit cartésien $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et donc de représenter les objets géométriques par des équations ou inéquations en x i y. Ainsi par exemple une droite est représentée par une équation $ax+by+c = 0$, où a, b et c sont des nombres réels quelconques, un demi-plan par une inéquations $ax+by+c \geq 0$...Cette approche de la géométrie s'appelle **géométrie analytique**.



Bien sûr, pour un espace affine de dimension 3 le principe de la construction est la même : Si on fixe un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ non coplanaire (très souvent on choisit un repère orthonormé), on associe à chaque point M un unique triplets des réels $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme pour la géométrie plane, les objets géométriques sont représentés par des équations ou inéquations en x, y et z. C'est ce qu'on appelle géométrie analytique dans l'espace.

Qu'ai-je compris ? :

1) Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)\backslash\{\emptyset\}$, $x \in A$ et $y \in B$.
   i) Quelle est la différence entre (x, y) et $\{x, y\}$?
   ii) Est-ce que en général $(x, y) = (y, x)$? Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que ce soit le cas ?
   iii) Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que $A \times B \subseteq B \times A$?

2) Pourquoi l'assertion *v)* de la proposition précédente contient une implication et pas une équivalence ?

3) Les ensembles suivant sont-ils un produit cartésien de deux ensembles ?
   i) $\{(0, 1), (1, 0)\}$
   ii) $\{(0, 2), (1, 2), (2, 2)\}$
   iii) $\{((0, 0), 0), ((0, 0), 1), ((0, 1), 1), ((1, 0), 0), ((1, 1), 1)\}$
   iv) $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | \ x + y \leq 1\}$
   v) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ |x + y| \leq 1\}$
   vi) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x \geq 3 \text{ et } y \leq 5\}$

2.5 Cardinalité d'un ensemble fini

Cardinalité est une propriété des ensembles qui généralise la notion de nombre d'éléments. Dans le cadre de cette unité on va étudier uniquement la cardinalité des ensembles finis.

Définition 9 (CARDINAL D'UN ENSEMBLE FINI, DÉNOMBREMENT) **:**

Cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments de cet ensemble. Il est noté $|\mathbf{A}|$ ou $\mathbf{Card}(A)$.

Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est à dire déterminer son cardinal.

Par convention $|\emptyset| = 0$. On a donc $|A| = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$.

Proposition 3 :

Pour deux ensembles finis A et B, on a

i) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$ (Cette propriété est appelée parfois **principe additif)**

ii) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Démonstration : La propriété *i)* peut être démontrée en utilisant la définition générale et formelle de cardinalité.

Pour démontrer la partie *ii)*, nous appliquons le principe additif à la réunion $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$. En effet, A et $B \backslash A$ sont disjoints, donc

$$|A \cup B| = |A| + |B \backslash A| \tag{2.2}$$

D'autre part $B = (B \backslash A) \cup (A \cap B)$ est aussi une réunion disjointe, d'où, en utilisant de nouveau *i)*, $|B| = |B \backslash A| + |A \cap B|$, soit $|B \backslash A| = |B| - |A \cap B|$ qu'on remplace dans (2.2) pour obtenir *ii)*.

Proposition 4 :

Soient A et B deux ensembles de cardinal fini,

$$|A \times B| = |A|\,|B|.$$

Démonstration : Pour chaque élément $a \in A$ il y a $|B|$ possibilités de choisir la deuxième coordonnée, c.à.d. $|B|$ couples dans $|A \times B|$ de première coordonnée a. Comme il y a $|A|$ choix pour cette première coordonnée, on a

$$|A \times B| = |A|\,|B|$$

Le raisonnement utilisé dans cette démonstration est appelé parfois **le principe multiplicatif**. Il s'agit d'un des principes fondamentaux du dénombrement qui dit que si un événement peut avoir a issues possibles et un autre b issues possibles, alors le nombre d'issues pour les deux événements est égal à $a \cdot b$. (Exemple : Si un restaurant propose 3 entrées, 4 plats et 2 desserts, alors le nombre de menus différents composés d'une entrée, un plat et un dessert est $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$.)

Proposition 5 :

Si A est un ensemble fini,
$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

Démonstration : On fait une démonstration par récurrence.
Si $|A| = 0$, $A = \emptyset$. Donc $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$ et $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$.
Supposons que la proposition est vrai pour $|A| = n$. Nous devons montrer qu'elle est vrai alors pour $|A| = n + 1$. Donc supposons $|A| = n + 1$ et choisissons n'importe quel $x \in A$. Alors $A = (A \backslash \{x\}) \cup \{x\}$, $|A \backslash \{x\}| = n$ et
$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \backslash \{x\}) \cup \{H \cup \{x\} |\, H \in \mathcal{P}(A \backslash \{x\})\}.$$
Bien évidemment cette réunion est disjointe et $\{H \cup \{x\}|\ \forall H \in \mathcal{P}(A \backslash \{x\})\}$ est de même cardinal que $\mathcal{P}(A \backslash \{x\})$. Ce dernier est 2^n par l'hypothèse de récurrence. Donc
$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = 2^{|A|}.$$

Qu'ai-je compris ? :

1) Exprimer la cardinalité des ensembles suivants en termes de cardinalité de A, B, C, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$, $A \cap B \cap C$:
   i) $A \backslash (B \cap C)$
   ii) $(A \cup B) \backslash C$
   iii) $A \cap (B \cup C)$

2) Dans une université, 300 étudiants parlent au moins l'anglais, 250 étudiants parlent au moins l'espagnol,150 étudiants parlent au moins le russe, 100 étudiants parlent au moins l'anglais et l'espagnol,75 étudiants parlent au moins l'anglais et le russe, 50 étudiants parlent au moins l'espagnol et le russe. Si les données le permettent, calculer le nombre d'étudiants
   i) qui parlent anglais et ne parlent pas espagnol
   ii) qui parlent anglais et ne parlent pas russe
   iii) qui ne parlent que espagnol et russe

2.6 Combinatoire

Combinatoire ou **analyse combinatoire** est un domaine des mathématiques discrètes qui étudie et dénombre les configurations différentes constitués des éléments d'un ensemble fini.

Exemples des questions qui relèvent du domaine de l'analyse combinatoire : De combien de façons peut-on choisir une délégation de 3 personnes dans un groupe de 15 personnes ? De combien de façons peut-on choisir un président et un vice-président d'un conseil d'administration si 4 personnes ont présenté leur candidature pour les deux fonctions ? Combien de codes d'entrée d'un immeuble de 4 chiffres peut-on construire si le clavier dispose des chiffres $0-9$, et combien de codes composés des chiffres distincts ?

Arrangements

Définition 10 (Arrangement) **:**

Soit E un ensemble de n éléments. On appelle **arrangement de p objets parmi n** tout p-uplets d'éléments distincts de E.
Le nombre d'arrangements de p objets pris parmi n est noté : A_n^p.

Exemples : Le choix d'un président, d'un vice-président et d'un trésorier d'une association comptant 50 personnes est un arrangement de 3 personnes parmi 50.

Remarques :

- Bien évidemment $p \leq n$ car il nous faut p objets différents pour constituer un arrangement de p éléments parmi n.
- Pour constituer un arrangement de p éléments parmi n éléments de E, il faut choisir p éléments de E et les ordonner. On peut décrire l'ensemble des arrangements de p éléments parmi n de façon suivante :

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E^p | \forall (i,j) \in \{1, 2, \ldots, p\}^2 \;\; x_i \neq x_j\}$$

Rappel : Si $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **factorielle** n, notée $n!$, le produit de tous les entiers entre 1 à n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Par convention $0! = 1$.

Proposition 6 :

Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration :

Définition 11 (Arrangement avec répétition) **:**

Soit E un ensemble de n éléments. On appelle **arrangement avec répétition de** p **objets parmi** n tout p-uplets d'éléments de E.
L'ensemble d'arrangements de p éléments de E est, bien sûr, E^p et leur nombre est n^p.

Exemple : Un code d'entrée d'un immeuble composés de 4 chiffres de 0 à 9 est un arrangement avec répétition de 4 éléments parmi 10.

Définition 12 (Permutation) **:**

On appelle **permutation** un arrangement de n éléments parmi n. Le nombre de permutations est $n!$

Exemple : Une façon de disposer 10 personnes autour d'une table est une permutation.

<u>**Combinaisons**</u>

Définition 13 (Combinaison) **:**

Soit E un ensemble de n éléments. On appelle **combinaison de** p **objets parmi** n tout sous-ensemble de E de cardinal p.
Le nombre d'combinaisons de p objets pris parmi n est noté : C_n^p.

Exemple : Le choix d'une délégation de 5 personnes d'une organisation comptant 15 personnes est une combinaison de 5 personnes parmi 15.

Remarques :
- Bien sûr, $p \leq n$.
- La différence entre un arrangement et une combinaison est que l'ordre d'éléments dans un arrangement est important, alors que pour une combinaison ce n'est pas le cas. Exemple : Le choix de deux délégués de classe d'un groupe scientifique correspond à une combinaison, alors que le choix d'un délégué et d'un délégué-adjoint correspondrait plutôt à un arrangement car le choix de l'élève x pour le délégué et y pour le délégué-adjoint n'est pas le même que le choix de y pour le délégué et x pour le délégué-adjoint.

Rappel : Soient n et p deux nombres naturels et $p \leq n$. On appelle coefficient binomial et on note $\binom{n}{p}$ l'expression

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

La proposition suivante est facile à démontrer :

Propriétés :

Les coefficients binomiaux vérifient les propriétés suivantes :

i) Propriété de symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

ii) Propriété du triangle de Pascal : $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

iii) $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

Démonstration : La démonstration de *i)* est très simple. La partie *iii)* est une conséquence de la proposition sur le cardinal de l'ensemble des parties. Il reste à démontrer la propriété *ii)* :

Proposition 7 :

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est

$$C_n^p = \binom{n}{p}$$

Démonstration :

Qu'ai-je compris ? :

1) *i)* Combien de "mots" de trois lettres peut-on construire des lettres $\{A, B, C, D, E, F, G\}$?
   ii) Combien d'anagrammes admet le mot "TRAIN" ?
   iii) Dix balles numérotées de 1 à 10 sont placées dans une urne. À quatre reprises, on pioche une balle, note son numéro et remet la balle dans l'urne. Combien de résultats différents peut-on obtenir après ce processus (l'ordre des numéros notés ayant son importance) ?
   iv) On dispose de 2 sortes de bonbon, chacune en grande quantité. De combien de manières peut-on donner un bonbon à chaque élève d'une classe de 20 étudiants ?
   v) De combien de façons peut-on repartir 50 élèves en deux groupes scientifiques d'effectif égal ?

2) Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.
   i) Calculer le nombre d'éléments de A.
   ii) Dénombrer les éléments de A composés de quatre chiffres distincts.
   iii) Dénombrer les éléments de A composés d'au moins deux chiffres identiques.
   iv) Dénombrer les éléments de A composés de quatre chiffres distincts autres que 3 et 5.

3) Au loto, il y a 49 numéros. Une grille de loto est composée de 6 de ces numéros. Quel est le nombre de grilles différentes ?

EXERCICES :

Exercice 1 : Définir en extension les ensembles suivants :
1) $\{x \in \mathbb{R} | \exists a \in \mathbb{Z} \ a^2 + x^2 = 16\}$
2) $\{x \in \mathbb{N} | x \leq 100 \wedge 2|x \wedge \forall k \in \mathbb{N}^* \ (3^k|x \vee 2^k \not| x)\}$

Exercice 2 : Soient A et B deux ensembles.
1) Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$?
2) Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

Etablir les inclusions correctes.

Exercice 3 : Soient A, B, C trois partie d'un ensemble E.
1) Montrer que si $A \cup B \subseteq A \cup C$ et $A \cap B \subseteq A \cap C$, alors $B \subseteq C$
2) En déduire : $(A \cup B = A \cup C \quad \wedge \quad A \cap B = A \cap C) \Rightarrow B = C$

Exercice 4 :
1) L'opération $\triangle$ est-elle commutative et associative ?
2) Pour trois ensembles quelconques A, B, C calculer $A \triangle B \triangle C \triangle A \triangle B \triangle C$.

Exercice 5 : Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Simplifier les écritures suivantes :
1) $[(A \setminus B) \cup A \cup (B \cap A)] \cap (C \setminus A) \cap (A \triangle C)$
2) $[(A \cup B) \cap (C \cup A) \cap (B \cup C)] \cap (A \triangle B)$, en sachant que A et B sont disjoints et que $A \cup B = C$
3) $(A \triangle B) \cap C \cap B \cap A \cap (A \cup B \cup C)$

Exercice 6 : Soient A, B, C trois ensembles. On définit $X = (A \cap B) \triangle C$ et $Y = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.
1) Est-ce que $X = Y$? Sinon, est-ce que $Y \subseteq X$ ou $X \subseteq Y$?
2) Trouver une condition nécessaire et non suffisante pour que $X = Y$
3) Trouver une condition suffisante et non nécessaire pour que $X = Y$
4) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $X = Y$
5) Montrer que $A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $X = Y$

Exercice 7 : Soit E un ensemble non vide et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. On définit deux parties X et Y de E par :

$$X = (A \triangle B) \cup (A \triangle C) \quad \text{et} \quad Y = (A \setminus B) \cup C$$

1) Est-ce qu'il y a une relation d'inclusion entre X et Y ?
2) Trouver une condition suffisante mais pas nécessaire pour que $X = Y$.
3) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $X = Y$.
4) Est-ce que $A \cap B = \emptyset$ est une condition nécessaire ou suffisante pour que $X = Y$?
5) Démontrer que $A \cap B = \emptyset$ et $B \subseteq C$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $X = Y$.
6) Si cette condition est vérifiée, exprimer X (ou Y) à l'aide des opérations ^{c}, $\cap$ et $\cup$ et simplifier le résultat autant que possible.

Exercice 8 : Soit $A = [0,5] \times [0,5] \times [0,5]$.
1) Est-ce que $\{0,5\} \times \{0,5\} \times \{0,5\} \subseteq A$?
2) Est-ce que $\{0,1,5\} \times \{1,3\} \subseteq A$?
3) Est-ce que $([1,2[\, \cup \{3\}) \times ([3,4] \cap \mathbb{Q}) \times \{4\} \subseteq A$?
4) Est-ce que $\{(1,t,t^2) |\, t \in \mathbb{R}\} \cap A$ est un produit cartésien ?

Exercice 9 : Les ensembles suivants peuvent-ils s'écrire comme produits cartésiens ?
1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 = y^2 = 1\}$
2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x \leq y\}$
3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, (x^2-1)(y^2-1) = 0\}$
4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, |x| \geq 2\}$
5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, |x| \geq 2 \wedge y^2 = 1\}$

Exercice 10 : Soit E et F deux ensembles, $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$ et $(C,D) \in \mathcal{P}(F)^2$. Démontrer que

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D).$$

Est-ce que l'identité est vérifiée si on remplace l'intersection par la réunion ?

Exercice 11 : Trouver une formule permettant de calculer
1) $|A \cup B \cup C|$
2) $|A \backslash (B \cup C)|$
3) $|A \triangle B|$
4) $|A \triangle B \triangle C|$

en termes de $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|A \cap B|$, $|B \cap C|$, $|A \cap C|$ et $|A \cap B \cap C|$.

Exercice 12 :
1) Dans un ensemble de 10 éléments, est-ce qu'il existe deux sous-ensembles disjoints de cardinal 6 chacun ? Justifier votre réponse.
2) Si l'intersection de trois ensembles A, B et C quelconques n'a aucun élément, est-ce que $A \cap B$ et $B \cap C$ peuvent avoir des éléments en commun ? Justifier votre réponse.
3) En déduire que dans un ensemble E de 10 éléments il n'existe pas trois ensembles A, B et C de cardinal 7 chacun et dont l'intersection $A \cap B \cap C$ est vide.
4) Soit $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Trouver $(A,B,C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que $|A| = |B| = |C| = 4$ et $A \cap B \cap C = \emptyset$.
5) Démontrer la proposition suivante : Si on choisit dans un ensemble E de cardinal 9 trois sous-ensembles A, B et C de cardinal 6 chacun tels que $A \cap B \cap C = \emptyset$, alors

$$E = A \cup B = B \cup C = A \cup C$$

Exercice 13 : Dans une école qui accueille 200 élèves trois langues étrangères sont enseignées : l'anglais, l'allemand et l'espagnol. Notons par E l'ensemble des élèves et par An, All et Es les ensembles des élèves inscrits respectivement aux cours d'anglais, d'allemand et d'espagnol. Chaque élève doit choisir au moins deux langues étrangères. Le cours d'anglais est suivi par 180 élèves, d'allemand par 140 et d'espagnol par 90.
1) Pourquoi peut-on être sûr que chaque élève est inscrit au cours d'espagnol ou d'allemand ? En déduire $|All \cup Es|$.
2) Calculer le nombre d'élèves qui ont choisi au moins l'allemand et l'espagnol.
3) Calculer aussi $|An \cap Es|$ et $|All \cap An|$.
4) Quel est le nombre d'élèves inscrits aux cours des trois langues proposés par l'école ?

Exercice 14 : Un clavier de 9 touches (1, 2, 3, 4, 5, 6, A, B, C) permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

1) Combien de codes différents peut-on former ?
2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3) Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4) Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5) Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Exercice 15 : Dans une classe de 25 élèves, on compte 19 garçons et 6 filles. On doit élire deux délégués.

1) Quel est le nombre de choix possibles ?
2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et fille
3) Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons ?

Exercice 16 : On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes.

a) De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes ?
b) Dans chacun des cas suivants, de combien de façons peut-on constituer ce groupe avec :
   1) uniquement des hommes
   2) des personnes de même sexe
   3) au moins une femme et au moins un homme

Exercice 17 : On extrait simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Cet ensemble de 5 cartes est appelé une "main".

a) Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?
b) Dénombrer les mains de 5 cartes contenant :
   1) un carré
   2) deux paires distinctes
   3) un full (trois cartes de même valeur, et deux autres de même valeurs. Exemple : 3 rois et 2 as)
   4) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré
   5) une quinte (5 cartes de même couleur, se suivant dans l'ordre croissant)

Exercice 18 : Un portemanteau comporte 5 patères alignées. Combien a-t-on de dispositions distinctes (sans mettre deux manteaux l'un sur l'autre) :

1) pour 3 manteaux sur ces 5 patères ?
2) pour 5 manteaux ?
3) pour 6 manteaux ?

Exercice 19 : Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.

1) Quel est le nombre de dispositions possibles ?
2) Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.
3) Même question si chaque fille est intercalée entre deux garçons.
4) Même question si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre