Espaço de Estados

- Estado está associado ao armazenamento de Energia;
- Separa o futuro do passado, contendo toda a informação importante,

★ Saídas dos Integradores representam as variáveis de estados do sistema.
★ Integradores armazenam Energia

Equação de Estado:
$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x} + B\underline{u}(t)$

Equação de saída:
$y(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t)$

$x(t) =$ Vetor de Estado
$y(t) =$ Vetor de Saída
$u(t) =$ Vetor de Entrada

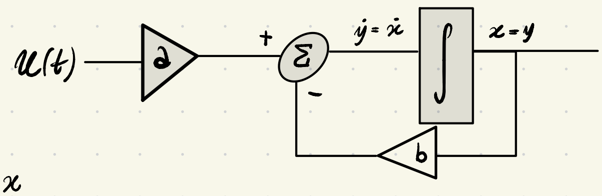
A ⇒ Matriz de Sistema
B ⇒ Matriz de Entrada
C ⇒ Matriz de Saída
D ⇒ Matriz Direta

• Exemplo 1:

Derivada & $\frac{1}{s}$ Integral

- $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{a}{s+b} \Rightarrow sY(s) + bY(s) = aU(s) \Rightarrow \dot{y}(t) + by(t) = au(t) \Rightarrow$ Isola-se o termo de mais alta derivada ⇒

$\Rightarrow \dot{y} = -by(t) + au(t) \Rightarrow$ Desenha-se:



↳ Logo $\dot{x}(t) = au(t) - bx(t)$ & $y = x$

• Exemplo 2

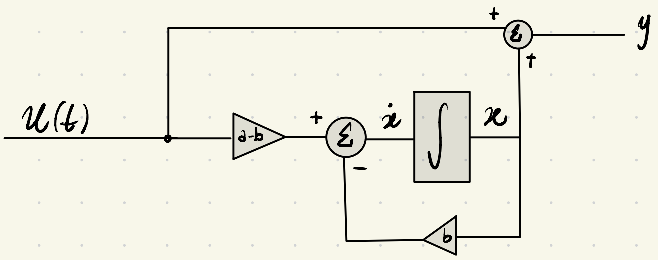
Divide-se p/ tirar o s de cima

- $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s+a}{s+b} \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} s+a & s+b \\ \hline -s-b & 1 \\ \hline a-b & \end{array}$$

$\Rightarrow 1 + \dfrac{a-b}{s+b} = \dfrac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow U(s) + U(s)\cdot\dfrac{(a-b)}{s+b} = Y(s)$

- Desenhando:



↳ $y(t) = u(t) + (a-b)u(t)$

↳ $y = x + u$

Exercício 1

Dada a função de transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+3)(s+4)}$$

Represente a função de transferência no espaço de estados

1)Escreva a função de transferência na forma de frações parciais, e a partir disto represente no espaço de estados.

- $$\frac{Y(s)}{U(s)} = \boxed{\frac{(s+1)(s+2)}{s(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+3)} + \frac{C}{(s+4)}}$$

- P/ 'A' ⇒ Multiplica-se a igualdade pelo denominado de 'A' e depois substitui-se s pela raiz do denominador :

$$\cancel{s}\cdot\frac{(s+1)(s+2)}{\cancel{s}(s+3)(s+4)}\Bigg|_{s=0} = \left(\frac{A\cancel{s}}{\cancel{s}} + \cancel{\frac{Bs}{(s+3)}}^{\,0} + \cancel{\frac{Cs}{(s+4)}}^{\,0}\right)\Bigg|_{s=0} \Rightarrow A = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4} = \frac{1}{6}$$

- P/ 'B' mesma coisa :

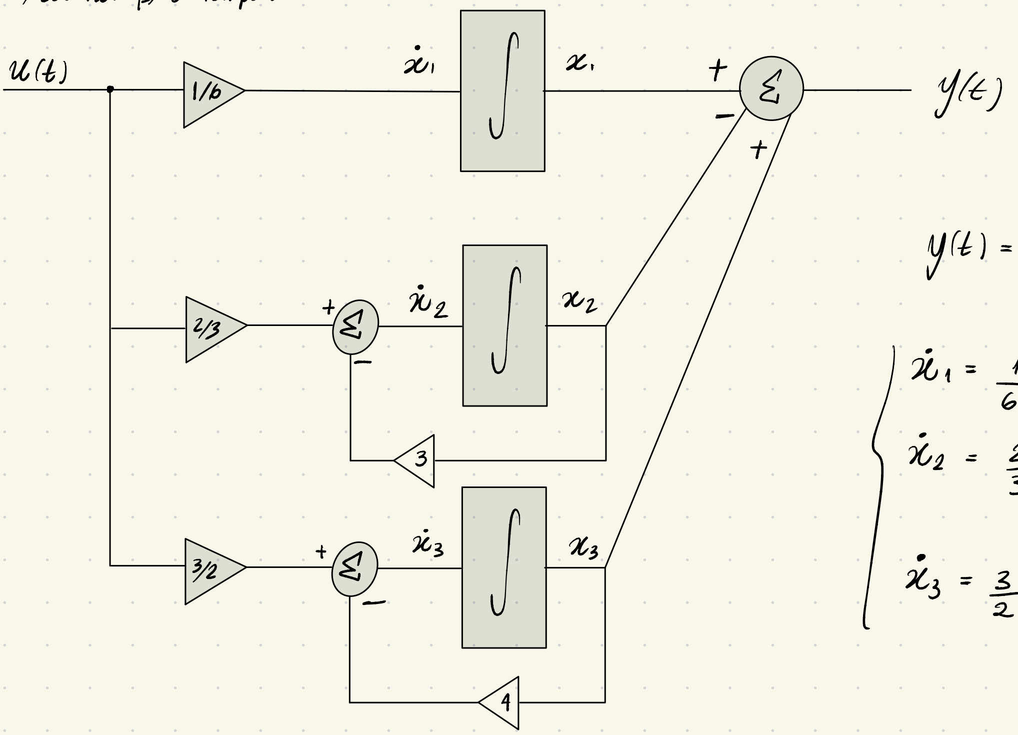
$$\cancel{(s+3)}\cdot\frac{(s+1)(s+2)}{s\cancel{(s+3)}(s+4)}\Bigg|_{s=-3} = \left(\cancel{\frac{A(s+3)}{s}}^{\,0} + \frac{B\cancel{(s+3)}}{\cancel{(s+3)}} + \cancel{\frac{C(s+3)}{(s+4)}}^{\,0}\right)\Bigg|_{s=-3} \Rightarrow B = \frac{(-2)(-1)}{(-3)(1)} = -\frac{2}{3}$$

- P/ 'C' :

$$\cancel{(s+4)}\cdot\frac{(s+1)(s+2)}{s(s+3)\cancel{(s+4)}}\Bigg|_{s=-4} = \left(\cancel{\frac{A(s+4)}{s}}^{\,0} + \cancel{\frac{B(s+4)}{(s+3)}}^{\,0} + \frac{C\cancel{(s+4)}}{\cancel{(s+4)}}\right)\Bigg|_{s=-4} \Rightarrow C = \frac{(-3)\cdot(-2)}{(-4)\cdot(-1)} = \frac{3}{2}$$

Logo $$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{6s} - \frac{2}{3(s+3)} + \frac{3}{2(s+4)} \Rightarrow Y(s) = \frac{U(t)}{6}\cdot\frac{1}{s} - \frac{2}{3}U(t)\cdot\frac{1}{s+3} + \frac{3}{2}U(t)\cdot\frac{1}{s+4}$$

Mudando p/ o tempo :



$$y(t) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{6}u(t) \\ \dot{x}_2 = \frac{2}{3}u(t) - 3x_2 \\ \dot{x}_3 = \frac{3}{2}u(t) - 4x_3 \end{cases}$$

↳ Montando a matriz :

Observa-se as raízes

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x} + B\underline{u}(t) = \begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix}\end{array} \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/6\\2/3\\3/2\end{bmatrix} u(t)$$

& $y(t) = C\underline{x}(t) + \underbrace{D}_{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}}\underline{u}(t)$

↳ $y(t) = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

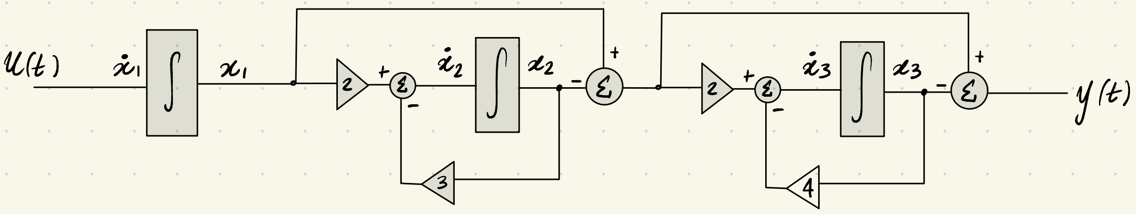
2) Escreva a função de transferência na forma de produtos, e depois represente no espaço de estados.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}\frac{(s+1)}{(s+3)}\frac{(s+2)}{(s+4)}$$

Retira o s do Numerador

• Segundo Termo: $\begin{array}{r|l} s+1 & s+3 \\ -s-3 & 1 \\ \hline -2 & \end{array} = 1 - \frac{2}{s+3}$; Terceiro Termo: $\begin{array}{r|l} s+2 & s+4 \\ -s-4 & 1 \\ \hline -2 & \end{array} \Rightarrow 1 - \frac{2}{s+4}$

⇝ Logo $\frac{Y(s)}{U(s)} = \left(\frac{1}{s}\right)\left(1 - \frac{2}{s+3}\right)\left(1 - \frac{2}{s+4}\right)$ => Desenhando o Sistema no Tempo:



$$\begin{cases} \dot x_1 = u(t) \\ \dot x_2 = 2x_1 - 3x_2 \\ \dot x_3 = 2(x_1 - x_2) - 4x_3 \\ y(t) = x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{x} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&0&0\\2&-3&0\\2&-2&-4\end{bmatrix}\end{array} + u(t)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$y(t) = \underline{x}\,[1 \;\; -1 \;, -1]$$

Não Unicidade do Conjunto de Variáveis de Estado

→ Para verificar a não unicidade, verifica o det. da matriz do conjunto de variáveis, o mesmo deve ser: det ≠ 0

↳ Verificando p/ os ex's anteriores:

1) $\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix}}^{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/6\\2/3\\3/2\end{bmatrix}u(t)$ ↳ det A = 12 ✓

2) $\dot{\underline{x}} = \underline{x}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&-3&0\\2&-2&-4\end{bmatrix} + u(t)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ↳ det A = 12 ✓

Auto Valores de uma matriz A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lembrar que é o det=0

- Os Autovalores são as raízes da Equação Característica $\boxed{|\lambda \cdot I - A| = 0}$ ⇒ São chamados de raízes características.

⇝ λ no Domínio do tempo, representam os polos no domínio da freq.

• Ex 1 - Calcule os Auto-valores de A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow |\lambda I - A| = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda+6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 6 + 11\lambda = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

↳ logo os autovalores são $-1, -2, -3$

• Ex 2 - Calcule os Auto-valores de A:

$$\dot{x} = x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} + u(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |I\lambda - A| = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+3 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda+4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det = \lambda(\lambda+3)(\lambda+4)$$

⇒ logo, os autovalores são $0, -3, -4$

Função de Transferência

$$\Rightarrow G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

Equação de Estado: $\dot{x}(t) = Ax + Bu(t)$

Equação de saída: $y(t) = Cx(t) + Du(t)$

✭ Matriz Inversa 2X2:

$$\text{Sendo } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Mult. de Matrizes
$A \cdot B$ ⇒ colunas A = linhas B
Se A $(m \times n)$ & B $(n \times p)$
$A \cdot B \; (m \times p)$

• Ex 1 ⇒ Calcule a função transferência:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u \quad ; \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x$$

• 1º Step ⇒ $(sI - A)$:

$$\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

→ 2º Step $(sI - A)^{-1}$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s-1)} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} = E$$

3º Step $E \cdot C = F$:

$$\underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}} = \underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}}$$

→ 4º Step $F \cdot B = G$

$$\underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{1\times 1}{\begin{bmatrix} \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}}$$

Last Step $F + D$:

→ Como $D = 0$ ⇒ $G(s) = F = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} = \frac{2s-1}{s(s-1)}$

Resolução da Equação de Estados

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = e^{\mathbf{A}t}\vec{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}(\tau)d\tau$$

$\Rightarrow$ P/ $t_0 \neq 0$ $\Rightarrow$

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\vec{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}(\tau)d\tau$$

Solução da Equação:

Considere as equações dinâmicas:
Obtenha a solução para $t = 2s$, considerando uma entrada degrau unitário e as condições inciais:

$\mathbf{x}(0) = [.3 \quad .4]'$

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{B} = [1 \quad 1]'$
$\mathbf{C} = [1 \quad 0]$

1º Step $(sI-A)^{-1}$:

$\Rightarrow$ Cálculo de $(sI-A)^{-1} \Rightarrow (sI-A) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \Rightarrow (sI-A)^{-1} = \dfrac{1}{det}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$

2º Step e^{At}:

Sendo $e^{AT} = \mathcal{L}^{-1}(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$

• faz a T.L. dos termos confe a planilha da P_1

3º Step: $\vec{x}(t) = e^{At} \cdot \vec{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot Bu(\tau)\, d\tau$

$$\vec{x}(t) = \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}} \cdot \underset{2\times1}{\begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

4º $\Rightarrow$ Multiplicações & Integral p/ dentro:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 0,3\,e^{-2t} \\ 0,4\,e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-2(t-\tau)}\, d\tau \\ \int_0^t e^{-(t-\tau)}\, d\tau \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 0,3\,e^{-2t} \\ 0,4\,e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau \\ e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau \end{bmatrix}$$

5º ⇒ Resolvendo as Integrais e substituindo $t = 2s$

1º ⇒ $e^{-2t} \cdot \int_0^t e^{2\tau} d\tau = e^{-2t} \frac{1}{2} [e^{2t} - e^{0}] \Rightarrow \frac{e^{-2t}}{2} [e^{2t} - 1] = \frac{1 - e^{-2t}}{2} = \boxed{0,4908}$

2º ⇒ $e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^{-t} \cdot [e^{t} - 1] = 1 - e^{-t} = \boxed{0,8647}$

3º ⇒ $0,3 e^{-2t} = \boxed{0,0055}$

4º ⇒ $0,4 e^{-t} = \boxed{0,0541}$

6º → Substituindo valores:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 0,0055 \\ 0,0541 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4908 \\ 0,8647 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4963 \\ 0,9188 \end{bmatrix}$$

Discretização

$$\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}T} \qquad \mathbf{H} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda}\mathbf{B}\,d\lambda \qquad \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{G}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{H}\bar{\mathbf{u}}(k)$$

Discretize o sistema dado no exemplo 1, com T=0,1s e supondo um segurador de ordem zero na entrada.

Sendo $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1º ⇒ $G = e^{AT} = \begin{pmatrix} e^{-2T} & 0 \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8187 & 0 \\ 0 & 0,9048 \end{bmatrix}$

2º ⇒ $H = \int_0^1 e^{A\lambda} B \cdot d\lambda = \int_0^T \begin{pmatrix} e^{-2\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda = \begin{pmatrix} \int_0^T e^{-2\lambda} d\lambda \\ \int_0^T e^{-\lambda} d\lambda \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0,09063 \\ 0,09516 \end{pmatrix}$

3º ⇒ $\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0,8187 & 0 \\ 0 & 0,9048 \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 0,09063 \\ 0,09516 \end{bmatrix} \bar{u}(k)$

Controlabilidade

Se $\det(A|AB) = 0$ → Singular → Não é completamente controlável

Se $\det(A|AB) \neq 0$ → Não Singular → É completamente controlável

Observabilidade

$\underbrace{\text{Posto da matriz}}_{\text{nº de colunas}}$ = Nº vetores-colunas linearmente independentes

$[\, C' \mid (A')^{n-1} \cdot C' \,]$

1 2

- $\underbrace{\text{Posto } n}_{}$ vetores-colunas linearmente independentes

Nº de colunas (p/ este caso) Independentes

Valor da 1ª Coluna

Valor da 2ª coluna

→ Independentes quando $C_1 = C_2 = 0$ em $C_1 x_1 + C_2 x_2 = 0$

$C\bar{O}$ – subsistema controlável e não observável

$\bar{C}O$ – subsistema não controlável e observável

$\bar{C}\bar{O}$ – subsistema não controlável e não observável

CO – subsistema controlável e observável

Ex1: Represente no Espaço de Estados, separando em frações parciais: $G(s) = \dfrac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}$

1° Step: Tentar simplificar a função

$$\begin{array}{r|l} s^2+6s+8 & s^2+4s+3 \\ \cline{2-2} -s^2-4s-3 & 1 \\ \hline 2s+5 & \end{array}$$

$$\frac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3} = 1 + \frac{2s+5}{s^2+4s+3}$$

2° Step: Encontrar as raízes do denominador:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{2} \qquad x_1 = -1, \quad x_2 = -3$$

$$(s+1)(s+3) = s^2+4s+3$$

3° Step: Encontrar as frações parciais para a parte restante da fração:

$$\frac{2s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{2s+5}{(s+1)(s+3)}(s+1)\Bigg|_{s=-1} = \left[\frac{A}{s+1}(s+1) + \frac{B}{s+2}(s+1)\right]\Bigg|_{s=-1}$$

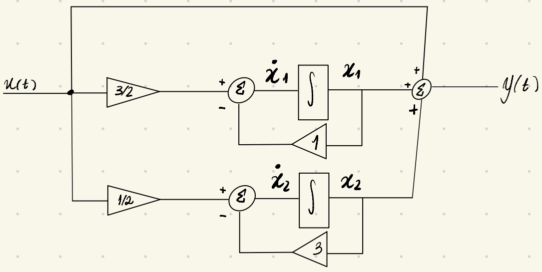
• Multiplica-se ambos os lados por um dos denominadores e então multiplica-se pela raiz associada

- $\dfrac{2s+5}{\cancel{(s+1)}(s+3)}\cancel{(s+1)}\Bigg|_{s=-1} = \left[\dfrac{A}{\cancel{s+1}}\cancel{(s+1)} + \cancel{\dfrac{B}{s+2}(s+1)}\right]\Bigg|_{s=-1}$ $\quad A = \dfrac{-2+5}{2} = \dfrac{3}{2}$

- $\dfrac{2s+5}{(s+1)\cancel{(s+3)}}\cancel{(s+3)}\Bigg|_{s=-3} = \left[\cancel{\dfrac{A}{s+1}(s+3)} + \dfrac{B}{\cancel{s+2}}\cancel{(s+3)}\right]\Bigg|_{s=-3}$ $\quad B = \dfrac{-6+5}{-2} = \dfrac{1}{2}$

4° Step: Desenhar & obter equações $\dot{x}$ e y:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+3}$$



$$\dot{x}_1 = \frac{3}{2}u(t) - x_1 \qquad \dot{x}_2 = \frac{1}{2}u(t) - 3x_2$$

$$y = u(t) + x_1 + x_2$$

5° Step: Montar as matrizes

$$\underline{\dot{x}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} u(t) \quad \& \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + u(t)$$

Ex 2: Teste a observabilidade & Controlabilidade:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• Ctrl:

→ det [A | AB]:

$$AB = \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}} \underset{2\times1}{\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -3/2 \end{bmatrix} \Rightarrow [A|AB] = \begin{bmatrix} -1 & -3/2 \\ 0 & -3/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det = \frac{3}{2}$$

→ Como det [A|AB] ≠ 0 → Não Singular → É completamente controlável

• OBS: $[\,C' \,|\, A'C'\,]$ → Posto = 2

$$A' = A, \quad C' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A'C' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow [C' \,|\, A'C'] = \begin{array}{cc} V_1 & V_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}} \end{array}$$

$$\alpha V_1 + \beta V_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{I} \quad \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \quad \text{III} \\ \text{II} \quad \alpha - 3\beta = 0 \Rightarrow \text{III em II} \Rightarrow -2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

Linearmente Independente ⇓ Observavel

→ Subsistema Controlavel & Observavel

Ex 3: Discretize o sistema, $T = 0{,}1s$:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

1° $G = e^{AT} = \begin{bmatrix} e^{-T} & \\ & e^{-2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9048 & 0 \\ 0 & 0{,}8187 \end{bmatrix}$

2° $H = \int_0^T e^{A\lambda} \cdot B d\lambda = \int \begin{pmatrix} e^{-\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda = \begin{pmatrix} \int_0^T e^{-\lambda} d\lambda \\ \int_0^T e^{-2\lambda} d\lambda \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -(e^{-T} - e^{0}) \\ \frac{-1}{2}(e^{-2T} - e^{0}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-0,1} \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-0,2}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}09516 \\ 0{,}09063 \end{pmatrix}$

3° $\bar{x}(K+1) = G\bar{x}(K) + H\bar{u}(K)$

$\hookrightarrow \bar{x}(K+1) = \begin{pmatrix} 0{,}9048 & 0 \\ 0 & 0{,}8187 \end{pmatrix} \cdot \bar{x}(K) + \begin{pmatrix} 0{,}09516 \\ 0{,}09063 \end{pmatrix} \bar{u}(K)$

Ex4: Discretize no Espaço de Estados p/ $t=0,1$

$G(s) = \frac{1}{s+5} = \frac{Y}{u}$; Com ZOH

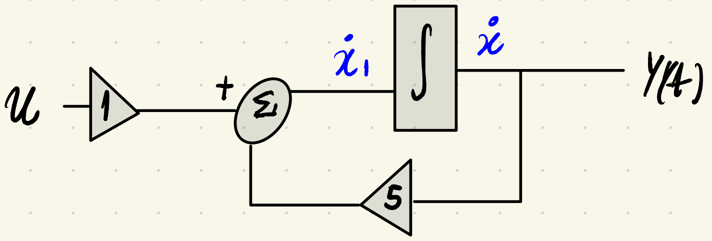
$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\cdot\frac{1}{s+5}\cdot\frac{5}{5}\right\} = \left(\frac{1-z^{-1}}{5}\right)\mathcal{Z}\left\{\frac{5}{s(s+5)}\right\} = \left(\frac{\cancel{z-1}}{5\cancel{z}}\right)\left(\frac{\cancel{z}(1-e^{-0,5})}{\cancel{(z-1)}(z-e^{-0,5})}\right)$$

$$\hookrightarrow G(z) = \frac{7,87\cdot10^{-2}}{z-0,607}$$

• Por Estados:

$$G(s) = \frac{1}{s+5} = \frac{Y}{u} \Rightarrow u = Ys + 5Y \longrightarrow \text{Tempo: } \underbrace{u(t) = \overset{\dot{x}_1}{\frac{dY}{dt}} + 5\overset{x_1}{y(t)}}$$

$$\dot{x}_1 = u(t) - 5x_1$$



$$\Rightarrow \dot{x} = \underbrace{[-5]}_{A}\dot{x} + \underbrace{[1]}_{B}\dot{u}(t)$$

1° Step:

$$G = e^{AT} = \mathcal{L}^{-1}(sI-A) = e^{-5T} = e^{-0,5} = 0,607$$

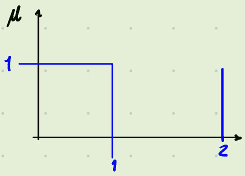
2° Step:

$$H = \int_0^T e^{A\lambda}B\,d\lambda = \int_0^T -e^{-5\lambda}\,d\lambda = -\frac{1}{5}\left(e^{-5T} - e^{0}\right) = \frac{1-e^{-0,5}}{5} = 78,7\cdot10^{-2}$$

3° Step:

$$\bar{x}(k+1) = G\bar{x}(k) + H\bar{u}(k) \Rightarrow \bar{x}(k+1) = 0,607\,\bar{x}(k) + 78,7\cdot10^{-2}\,\bar{u}(k)$$

Ex 5: Calcule o vetor de estados p/ $t = 2s$; $\underline{x}(0) = 0$



$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 1]\, \underline{x}$$

1º Step:

$$(sI-A)^{-1} \Rightarrow (sI-A) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \Rightarrow (sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/(s+1) & 0 \\ 0 & 1/(s+2) \end{bmatrix}$$

2º Step:

$$e^{AT} = \mathcal{L}^{-1}(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

3º Step:

$$\vec{x}(t) = e^{AT} \cdot \cancelto{0}{\vec{x}(0)} + \int_0^T e^{A(T-\tau)} \cdot B u(\tau)\, d\tau \Rightarrow \vec{x}(t) = \int_0^T \begin{pmatrix} e^{-(T-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(T-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-T} \int_0^T e^{\tau} d\tau \\ e^{-2T} \int_0^T e^{2\tau} d\tau \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-T} & (e^{T}-1) \\ \frac{e^{-2T}}{2} & (e^{2T}-1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1-e^{-T} \\ \frac{1-e^{-2T}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < t \leq 1 \Rightarrow \text{Condição inicial de } t=1: \quad x(1) = \begin{pmatrix} 0{,}632 \\ 0{,}432 \end{pmatrix}$$

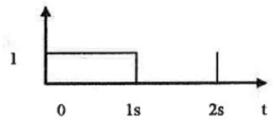
P/ $t = 2 \Rightarrow \underline{x}(t) = e^{A(T-1)}\, \underline{x}(1)$

$$\underline{x}(2) = \begin{pmatrix} e^{-(T-1)} & 0 \\ 0 & e^{-2(T-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}632 \\ 0{,}432 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}632\, e^{1-T} \\ 0{,}432\, e^{2-2T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}235 \\ 0{,}059 \end{pmatrix}$$

1ª Questão: Calcule o valor do vetor de estados no tempo, para: a) t=1s **(valor=4,0)** ; b) t=2s. **(valor=4,0)**

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\bar{x}$$



1° Step: $(sI - A)^{-1} \Rightarrow (sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix} \Rightarrow (sI-A)^{-1} = \dfrac{1}{s^2+2s-1} \cdot \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s \end{pmatrix}$

$s^2 + 2s - 1 \Rightarrow \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$ $\rightarrow 0{,}414$; $\rightarrow -2{,}414$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} \overset{1°}{\dfrac{s+2}{(s+2{,}414)(s-0{,}414)}} & \overset{2°}{\dfrac{1}{(s+2{,}414)(s-0{,}414)}} \\ \overset{2°}{\dfrac{1}{(s+2{,}414)(s-0{,}414)}} & \overset{3°}{\dfrac{s}{(s+2{,}414)(s-0{,}414)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{0{,}1464}{(s+2{,}414)} + \dfrac{0{,}8548}{(s-0{,}414)} & \dfrac{-0{,}3536}{(s+2{,}414)} + \dfrac{0{,}354}{(s-0{,}414)} \\ \dfrac{-0{,}3536}{(s+2{,}414)} + \dfrac{0{,}354}{(s-0{,}414)} & \dfrac{0{,}8536}{(s+2{,}414)} + \dfrac{0{,}1466}{(s-0{,}414)} \end{pmatrix}$$

P/ 1° :

- $\dfrac{s+2}{\cancel{(s+2{,}414)}(s-0{,}414)}\cancel{(s+2{,}414)}\Bigg|_{s=-2{,}414} = \left(\dfrac{A}{\cancel{(s+2{,}414)}} + \cancel{\dfrac{B}{(s-0{,}414)}}\right)\cancel{(s+2{,}414)}\Bigg|_{s=-2{,}414} \Rightarrow A = \dfrac{-2{,}414+2}{-2{,}414-0{,}414} = 0{,}1464$

- $\dfrac{s+2}{(s+2{,}414)\cancel{(s-0{,}414)}}\cancel{(s-0{,}414)}\Bigg|_{s=0{,}414} = \left(\cancel{\dfrac{A}{(s+2{,}414)}} + \dfrac{B}{\cancel{(s-0{,}414)}}\right)\cancel{(s-0{,}414)}\Bigg|_{s=-0{,}414} \Rightarrow = \dfrac{2+0{,}414}{2{,}414+0{,}414} = 0{,}8548$

P/ 2° :

- $\dfrac{1}{(s+2{,}414)(s-0{,}414)}(s+2{,}414)\Bigg|_{s=-2{,}414} = \left(\dfrac{A}{\cancel{(s+2{,}414)}} + \cancel{\dfrac{B}{(s-0{,}414)}}\right)\cancel{(s+2{,}414)}\Bigg|_{s=-2{,}414} \Rightarrow A = \dfrac{1}{-2{,}414-0{,}414} = -0{,}3536$

- $\dfrac{1}{(s+2{,}414)\cancel{(s-0{,}414)}}\cancel{(s-0{,}414)}\Bigg|_{s=0{,}414} = \left(\cancel{\dfrac{A}{(s+2{,}414)}} + \dfrac{B}{\cancel{(s-0{,}414)}}\right)\cancel{(s-0{,}414)}\Bigg|_{s=-0{,}414} \Rightarrow = \dfrac{1}{2{,}414+0{,}414} = 0{,}354$

P/ 3° :

- $\dfrac{s}{\cancel{(s+2{,}414)}(s-0{,}414)}\cancel{(s+2{,}414)}\Bigg|_{s=-2{,}414} = \left(\dfrac{A}{\cancel{(s+2{,}414)}} + \cancel{\dfrac{B}{(s-0{,}414)}}\right)\cancel{(s+2{,}414)}\Bigg|_{s=-2{,}414} \Rightarrow A = \dfrac{-2{,}414}{-2{,}414-0{,}414} = 0{,}8536$

- $\dfrac{s}{(s+2{,}414)\cancel{(s-0{,}414)}}\cancel{(s-0{,}414)}\Bigg|_{s=0{,}414} = \left(\cancel{\dfrac{A}{(s+2{,}414)}} + \dfrac{B}{\cancel{(s-0{,}414)}}\right)\cancel{(s-0{,}414)}\Bigg|_{s=-0{,}414} \Rightarrow = \dfrac{0{,}414}{2{,}414+0{,}414} = 0{,}1466$

2° Step :

$$e^{AT} = \mathcal{L}^{-1}(sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1464\, e^{-2{,}414t} + 0{,}8548\, e^{0{,}414t} & -0{,}3536\, e^{-2{,}414t} + 0{,}354\, e^{0{,}414t} \\ -0{,}3536\, e^{-2{,}414t} + 0{,}354\, e^{0{,}414t} & 0{,}8536\, e^{-2{,}414t} + 0{,}1466\, e^{0{,}414t} \end{pmatrix}$$

3° Step :

$$\vec{x}(t) = e^{At} \cdot \vec{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B u(\tau)\, d\tau$$

$$\vec{x}(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 0{,}1464\, e^{-2{,}414(t-\tau)} + 0{,}8548\, e^{0{,}414(t-\tau)} & -0{,}3536\, e^{-2{,}414(t-\tau)} + 0{,}354\, e^{0{,}414(t-\tau)} \\ -0{,}3536\, e^{-2{,}414(t-\tau)} + 0{,}354\, e^{0{,}414(t-\tau)} & 0{,}8536\, e^{-2{,}414(t-\tau)} + 0{,}1466\, e^{0{,}414(t-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -0{,}086\,(1-e^{-2{,}414t}) - 2{,}318\,(1-e^{0{,}414t}) \\ 0{,}207\,(1-e^{-2{,}414t}) - 1{,}208\,(1-e^{0{,}414t}) \end{pmatrix}$$

A) $t = 1 \Rightarrow \quad \vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 1{,}418 \\ 0{,}808 \end{pmatrix}$

B) P/ $t = 2 \Rightarrow \underline{x}(t) = e^{A(T-1)}\, \underline{x}(1)$

$$\begin{pmatrix} 0{,}1464\, e^{-2{,}414\overset{1}{\cancel{(t-1)}}} + 0{,}8548\, e^{0{,}414\overset{1}{\cancel{(t-1)}}} & -0{,}3536\, e^{-2{,}414\overset{1}{\cancel{(t-1)}}} + 0{,}354\, e^{0{,}414\overset{1}{\cancel{(t-1)}}} \\ -0{,}3536\, e^{-2{,}414\overset{1}{\cancel{(t-1)}}} + 0{,}354\, e^{0{,}414\overset{1}{\cancel{(t-1)}}} & 0{,}8536\, e^{-2{,}414\overset{1}{\cancel{(t-1)}}} + 0{,}1466\, e^{0{,}414\overset{1}{\cancel{(t-1)}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}418 \\ 0{,}808 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}259 \\ 0{,}955 \end{pmatrix}$$