

APOSTILA DE
FUNDAMENTOS DE COMUNICAÇÕES
(EL67B)

EMILIO C. G. WILLE
UTFPR

PREFÁCIO

Esta apostila tem como objetivo fornecer ao aluno um embasamento teórico na área de Telecomunicações, apresentando os conceitos fundamentais, os principais problemas, e a análise de desempenho de vários sistemas de transmissão de sinais analógicos e digitais. Como em quase todas as áreas da engenharia o estudo é realizado com base no modelamento matemático dos sinais e sistemas considerados. Busca-se a obtenção das equações de desempenho dos sistemas baseando-se nos princípios de funcionamento dos mesmos.

Considera-se que o aluno já tenha conhecimentos matemáticos englobando números e variáveis complexas e cálculo íntegro-diferencial. Diversos exemplos e ilustrações são apresentados ao longo do texto. Uma lista de exercícios pode ser obtida na página WEB da disciplina, sendo que grande parte deles serão resolvidos nas aulas teóricas.

Esta apostila resultou das notas de aula referentes aos cursos de Circuitos de Comunicação e de Comunicações I ministrados pelo autor na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, em Curitiba, para alunos do curso de Engenharia Industrial Elétrica – Ênfase Eletrônica Industrial e Telecomunicações.

Apesar dos cuidados dispensados na elaboração desta apostila, alguns erros de datilografia (texto e equações), bem como no que se refere às ilustrações podem ocorrer. Assim, pedimos ao leitor que comunique eventuais falhas caso as encontre ou nos casos de dúvidas quanto ao conteúdo do material.

Prof. Dr. Emilio C. G. Wille
DAELN e CPGEI

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

a) Serão realizadas **três** avaliações ao longo do semestre envolvendo provas escritas. A **Nota de Teoria** corresponde à média aritmética simples do resultado das avaliações. A **Média** corresponde à média ponderada entre a Nota de Teoria e a **Nota de Laboratório**, sendo calculada da seguinte forma:

$$\text{Média} = 0,8 \times \text{Nota de Teoria} + 0,2 \times \text{Nota de Laboratório}$$

b) O aluno será aprovado se Média Parcial $\geq 6,0$. No caso em que $4,0 \leq \text{Média} < 6,0$ o aluno fará **uma única Reavaliação**, sendo promovido se:

$$(\text{Reavaliação} + 1,4 \times \text{Média}) / 2 \geq 6,0$$

c) Cada avaliação será composta por uma **questão discursiva** e três **exercícios** baseados na teoria apresentada conforme ementa da disciplina.

d) As datas das avaliações serão informadas no primeiro dia letivo.

e) Em cada avaliação será permitida a consulta a um **formulário** contendo as fórmulas e expressões que o aluno julgar necessárias, usando para tanto **uma única** folha A4. A elaboração do formulário é de inteira responsabilidade do aluno. O formulário **não pode** apresentar exercícios resolvidos, exemplos, notas teóricas e/ou diagramas. O formulário poderá ser retido junto com a resolução da avaliação. Poderão ser consultados tabelas e gráficos permitidos pelo professor.

f) Uma **única avaliação simulada** será aplicada com o objetivo de familiarizar o aluno quanto ao formato de prova, a dificuldade das questões, e ao tempo para realização. Não se trata de preparação quanto ao conteúdo.

g) O aluno terá direito à prova de 2ª chamada para as avaliações (exceto para a reavaliação), conforme regulamento do curso, **devendo solicitá-la** explicitamente na secretaria da UTFPR.

h) O aluno não poderá deixar a sala de aula durante a execução das avaliações.

i) Recomenda-se que o aluno dispense atenção especial na preparação para as avaliações (em torno de 10 a 15 horas de estudo para cada avaliação).

j) O **Plano de Ensino** referente à disciplina será disponibilizado em página WEB, devendo seu conteúdo ser conhecido pelo aluno.

k) Durante as aulas da disciplina **é proibido** o uso de *note-books*, *lap-tops*, *tablets*, telefones celulares e semelhantes.

Índice

1	CONCEITOS BÁSICOS	7
1.1	MODELO DE UM SISTEMA DE COMUNICAÇÕES	7
1.2	MODULAÇÃO	7
1.3	SINAIS E ESPECTROS	8
1.4	LIMITAÇÕES FUNDAMENTAIS DA COMUNICAÇÃO ELÉTRICA	8
2	ANÁLISE DE SINAIS.....	10
2.1	CLASSIFICAÇÃO DE SINAIS E SISTEMAS	10
2.1.1	Modelos de Sinais	10
2.2	SINAIS E FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	11
•	Um exemplo de sistema em comunicações: os filtros	12
2.3	FASORES E ESPECTROS	13
2.4	SÉRIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER	14
2.5	SÉRIE EXPONENCIAL COMPLEXA DE FOURIER	15
2.6	TRANSFORMADA DE FOURIER (sinais aperiódicos).	15
2.6.1	Propriedades da Transformada de Fourier	16
2.6.2	Pares de transformadas.....	17
2.6.3	Cálculo da Transformada de Fourier por diferenciações sucessivas	17
2.7	DENSIDADE ESPECTRAL DE ENERGIA	18
2.8	DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA	18
2.9	FUNÇÃO AUTOCORRELAÇÃO	19
2.9.1	Função autocorrelação de sinais aperiódicos	19
2.9.2	Função autocorrelação de sinais periódicos	19
1.10	FUNÇÃO DE CROSS-CORRELAÇÃO	19

2.9.3	Função cross-correlação de sinais aperiódicos.....	20
2.9.4	Função cross-correlação de sinais periódicos	20
2.10	TRANSFORMADA DE HILBERT	20
2.11	PROBLEMAS DA TRANSMISSÃO: DISTORÇÃO	21
2.11.1	Atraso de fase e de grupo	22
3	MODULAÇÃO ANALÓGICA EM AMPLITUDE	24
3.1	MODULAÇÃO AM-DSB (Double Side Band)	25
3.1.1	Geração dos Sinais AM-DSB	27
3.1.2	Demodulação dos Sinais AM-DSB.....	29
3.2	RECEPTOR DE RÁDIO AM	30
3.3	MODULAÇÃO AM-DSB/SC (Double Side Band – Supressed Carrier)	31
3.3.1	Geração dos Sinais AM-DSB/SC.....	31
3.3.2	Detecção Coerente dos Sinais AM-DSB/SC.....	34
3.4	MODULAÇÃO AM-SSB (Single Side Band)	35
3.4.1	Geração dos Sinais AM-SSB	37
3.4.2	DEMODULAÇÃO DOS SINAIS SSB.....	38
3.5	MODULAÇÃO AM-VSB (Vestigial Side Band)	39
3.5.1	Geração e Demodulação	41
3.5.2	Detecção de Envoltória de um Sinal VSB + Portadora	42
3.6	RECEPTOR DE TV (ANALÓGICA)	42
4	MODULAÇÃO ANALÓGICA EM ÂNGULO.....	44
4.1	DEFINIÇÕES BÁSICAS	44
4.2	MODULAÇÃO TONAL EM FREQUÊNCIA	45
4.2.1	MODULAÇÃO FM BANDA ESTREITA	46
4.2.2	MODULAÇÃO FM BANDA LARGA	47
4.2.3	LARGURA DE ESPECTRO DO SINAL MODULADO FM.....	48
4.3	GERAÇÃO DE SINAIS FM	49
4.4	DEMODULAÇÃO DE SINAIS FM	51
4.5	RECEPTOR DE RÁDIO FM	53
5	RÚIDO NAS MODULAÇÕES ANALÓGICAS	54
5.1	PROCESSOS ALEATÓRIOS	54
5.1.1	Processo Gaussiano.....	54

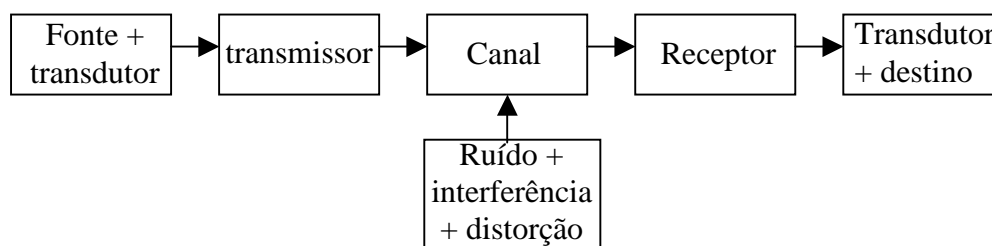
5.1.2	Processo Branco.....	54
5.2	RUÍDOS PASSA-FAIXA E BANDA-BASE	55
5.3	RAZÃO SINAL-RUÍDO (SNR)	56
5.3.1	Ruído em um Sistema Banda Base (modelo equivalente).....	56
5.4	MODELO DE UM RECEPTOR AM	57
5.4.1	Efeito do Ruído na Modulação DSB/SC.....	57
5.4.2	Efeito do Ruído na Modulação SSB	58
5.4.3	Efeito do Ruído na Modulação AM-DSB.....	59
5.5	MODELO DO RECEPTOR FM	61
5.5.1	Ruído na Recepção FM.....	61
5.5.2	Efeito Limiar em FM.....	63
5.5.3	Pré-Ênfase e De-Ênfase em FM.....	64
6	AMOSTRAGEM E MULTIPLEXAÇÃO.....	66
6.1	AMOSTRAGEM IDEAL	66
6.1.1	Recuperação de $g(t)$ a partir de amostras com $T_s=1/(2W)$:	67
6.1.2	Aliasing.....	68
6.2	AMOSTRAGEM PRÁTICA	68
6.3	AMOSTRAGEM DE SINAIS PASSA-FAIXA	69
6.4	MODULAÇÃO ANALÓGICA DE PULSOS	70
6.5	MULTIPLEXAÇÃO	71
6.5.1	Multiplexação por Divisão de Frequência (FDM).....	71
6.5.2	Multiplexação por Divisão de Tempo (TDM)	72
6.5.3	Leis de compressão (ITU-T)	75
7	TRANSMISSÃO DE DADOS EM BANDA BASE	76
7.1	MODELO DE SISTEMA DE TRANSMISSÃO DE DADOS	76
7.2	FORMATAÇÃO DE PULSO (SHAPING)	78
7.3	REPRESENTAÇÃO DE SINAIS DIGITAIS (CÓDIGOS DE LINHA)	80
7.3.1	Famílias de Códigos de Linha.....	81
7.3.2	Densidade Espectral de Potência de um Sinal Digital	83

1 CONCEITOS BÁSICOS

1.1 MODELO DE UM SISTEMA DE COMUNICAÇÕES

Define-se *comunicação* como o processo pelo qual a *informação* é transmitida de forma confiável de um ponto, no espaço e no tempo, denominado fonte, para outro ponto, o destino. A *mensagem* corresponde às manifestações físicas da informação produzida pela fonte. Um *sinal* é uma grandeza elétrica variável no tempo tal como uma corrente ou tensão, e representa a mensagem. Um *sistema* corresponde a um elemento físico que modifica os sinais a ele aplicados.

A finalidade de um *sistema de comunicações* é fornecer uma réplica aceitável da mensagem no destino. A figura a seguir mostra os elementos fundamentais de um sistema completo. O transdutor converte a mensagem em um sinal elétrico. O *transmissor* acopla o sinal ao *canal de transmissão*. Para fins de transmissão efetiva e eficiente, algumas operações de processamento de sinal devem ser realizadas. A *modulação* é uma operação importante realizada pelo transmissor. O canal é o meio físico entre transmissor e receptor, cobrindo a distância desde a fonte até o destino. A função do *receptor* é extrair o sinal desejado do canal e fornecê-lo ao transdutor de saída. Sua operação principal é a *demodulação*. O transdutor final converte o sinal elétrico em mensagem.



Ao longo da transmissão de um sinal pelo canal ocorrem alguns efeitos indesejados. Um deles é a *atenuação*, que reduz a intensidade do sinal; mais sérios, entretanto, são a *distorção*, a *interferência* e o *ruído*, que aparecem como alterações da forma do sinal. A distorção é uma alteração na forma do sinal devida a uma resposta imperfeita do sistema ao sinal. A interferência é a contaminação por sinais estranhos, normalmente feitos pelo homem, de forma similar ao sinal desejado. Finalmente, por ruído interpretam-se os sinais elétricos aleatórios ou imprevisíveis provenientes de causas naturais, tanto internos quanto externos ao sistema.

1.2 MODULAÇÃO

A maioria dos sinais de entrada, da maneira como são fornecidos pelo transdutor, não podem ser enviados diretamente através do canal. Consequentemente, uma *onda portadora*, cujas propriedades são mais convenientes ao meio de transmissão em questão, é modificada para representar a mensagem. A onda portadora é um sinal elétrico de referência com parâmetros fixos. A *modulação* é a alteração sistemática de uma, ou mais, características da onda portadora de acordo com a mensagem.

É interessante notar que muitas formas não elétricas de comunicação também envolvem um processo de modulação; a fala constitui um bom exemplo. Quando uma pessoa fala, os movimentos da boca são realizados em taxas baixas de frequência, não podendo efetivamente produzir ondas acústicas propagáveis. A transmissão da voz através do ar é conseguida pela geração de tons de alta frequência nas cordas vocais que são modulados pelos movimentos da cavidade bucal. O que o ouvido interpreta como fala é, portanto, uma onda acústica modulada, similar em muitos casos a uma onda elétrica modulada.

1.3 SINAIS E ESPECTROS

A descrição usual de um sinal $v(t)$ é no *domínio do tempo*, onde a variável independente é t . Porém, em comunicações, normalmente é mais conveniente descrever os sinais no *domínio da frequência*, onde a variável independente é f . Estritamente falando, uma função temporal é composta de várias componentes em frequência, cada uma delas com amplitude e fase apropriadas. Consequentemente, enquanto o sinal existe fisicamente no domínio do tempo, pode-se afirmar que ele consiste nessas componentes em sua descrição no domínio da frequência, descrição esta chamada *espectro*.

Nesta apostila, considera-se *largura de espectro* a faixa de frequências pertencentes a um sinal; e *largura de faixa* a faixa de frequências que um sistema pode transmitir com fidelidade.

A análise espectral, baseada nas séries e transformadas de Fourier, é uma ferramenta poderosa em engenharia de comunicações. Escolhe-se estas técnicas em relação a outras pelos seguintes motivos. Em primeiro lugar, é razoável restringir a atenção ao comportamento em estado estacionário (regime permanente) de um sistema de comunicação; as soluções detalhadas de transientes seria uma tarefa impossível. Em segundo lugar, a abordagem pelo espectro permite tratar de classes inteiras de sinais possuidoras de propriedades similares no domínio da frequência. Em terceiro lugar, muitos componentes de um sistema de comunicação podem ser classificados como dispositivos lineares e invariantes no tempo; quando isto ocorre, podemos descrevê-los por suas características de *resposta em frequência*.

1.4 LIMITAÇÕES FUNDAMENTAIS DA COMUNICAÇÃO ELÉTRICA

No projeto de um sistema de comunicação enfrenta-se dois tipos de restrições: os problemas tecnológicos (fatores de engenharia, práticos), e as limitações físicas fundamentais (leis da natureza pertinentes ao problema, definem o que pode ser alcançado). As *limitações fundamentais* da comunicação por meios elétricos são a *largura de faixa* e o *ruído*.

- a) **Largura de Faixa:** Nos sistemas físicos uma variação da energia armazenada necessita de um intervalo definido de tempo. Não se pode aumentar arbitrariamente a velocidade de sinalização, pois o sistema poderá eventualmente cessar de responder às variações do sinal. Em outras palavras, todo sistema tem uma capacidade máxima de resposta às variações do sinal de entrada. Nos canais de comunicação esta capacidade máxima corresponde à *largura de faixa* de frequências, que é limitada (não modificável), ou devido às

propriedades físicas do sistema ou imposta deliberadamente (por meio de normatizações).

- b) Ruído: O êxito da comunicação elétrica depende de quão precisamente o receptor pode determinar que sinal foi realmente enviado, distinguindo-o dos sinais que poderiam ter sido enviados. Como o ruído sempre está presente em sistemas elétricos (teoria cinética), as perturbações do ruído sobreposto limitam a habilidade de identificar corretamente o sinal enviado, limitando, assim, a transmissão da informação. É importante notar que, se a intensidade do sinal é insuficiente, a adição de estágios de amplificação não solucionará o problema; pois o ruído será amplificado juntamente com o sinal, ficando inalterada a *razão sinal-ruído*.

Como análise final, pode-se afirmar que o projeto de um sistema de comunicação é um problema de compromisso entre o tempo de transmissão, a potência transmitida, a largura de faixa e a razão sinal-ruído; compromisso ainda mais restrito pelos problemas tecnológicos.

O primeiro passo para o estudo de qualquer sistema é o de escrever equações que representam os vários sinais presentes. Porém, não se deve esquecer que tais equações são somente *modelos matemáticos* de grandezas físicas, normalmente modelos imperfeitos. De fato, uma descrição completa e perfeita do mais simples sinal ou componente seria proibitivamente complexa em sua forma matemática e, conseqüentemente, inútil para as finalidades de engenharia. Por isso, os modelos utilizados são aqueles que representam, com complexidade mínima, todas as propriedades importantes do problema considerado. Isto leva algumas vezes à construção de vários modelos diferentes para o mesmo problema, de acordo com a necessidade. Portanto, dado um problema particular, a escolha do modelo a ser utilizado é baseada no entendimento dos fenômenos físicos envolvidos e das limitações da matemática; no que pode ser considerada uma “engenharia da análise”.

2.1 CLASSIFICAÇÃO DE SINAIS E SISTEMAS

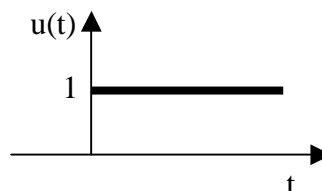
Um sinal pode ser classificado como: (1) *determinístico* quando não há incerteza com relação a seu valor em qualquer instante de tempo, (2) *aleatório* quando existe certo grau de incerteza antes que ele realmente ocorra; (3) *contínuo* quando é definido para todos os instantes de tempo, (4) *discreto* quando é definido para instantes discretos de tempo; (5) *periódico* quando repete-se regularmente a cada quantidade de tempo dita *período*, e (6) *aperiódico* quando não apresenta padrões de repetição.

Um sistema pode ser classificado como: (1) *linear* quando obedece ao *princípio da superposição*, (2) *não linear* quando não obedece; (3) *invariante no tempo* quando o sistema não impõe atraso entre excitação e resposta, e (4) *variante no tempo* quando o sistema impõe um atraso variável entre excitação e resposta.

2.1.1 Modelos de Sinais

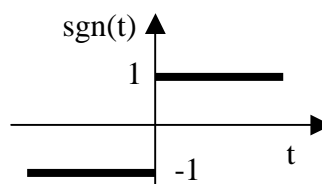
a) Degrau unitário

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



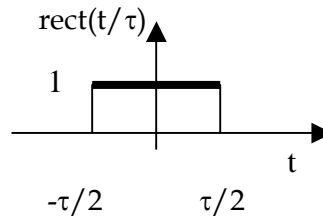
b) Sinal

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ +1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$



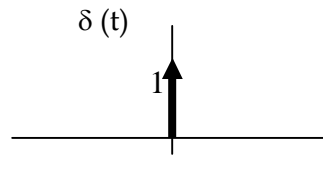
c) Pulso retangular

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$



d) Impulso unitário

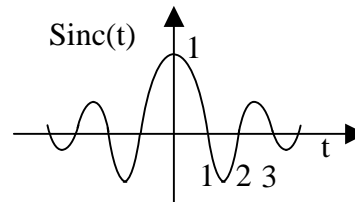
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$



$$\text{com } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t).dt = 1$$

e) Função sinc (seno cardinal)

$$\text{sinc}(t) = \frac{\text{sen}(\pi.t)}{\pi.t}$$



2.2 SINAIS E FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Suponha-se um sistema à cuja entrada é aplicado o sinal $x(t)$ produzindo um sinal de saída $y(t)$. O sinal $x(t)$ é um sinal *cossenoidal* se :

$$x(t) = A_x \cos(2\pi f_0 t + \theta_x) \quad -\infty \leq t \leq +\infty$$

onde A_x é a *amplitude* (em volts ou amperes), f_0 é a *frequência cíclica* (em hertz) e θ_x é a *fase* (em radianos ou graus). Também é conveniente introduzir a *frequência angular* $\omega_0 = 2\pi f_0$ (em radianos por segundo), de modo que o *período* do sinal (em segundos) é $T_0 = 1/f_0$. Obviamente, nenhum sinal real existe para sempre, mas o modelo é conveniente e útil para representar um sinal cossenoidal de duração finita se esta duração é muito maior que o período.

Considerando o sistema linear e invariante no tempo, o sinal $y(t)$ será cossenoidal na mesma frequência da entrada, diferindo somente na amplitude e no ângulo de fase, isto é :

$$y(t) = A_y \cos(2\pi f_0 t + \theta_y)$$

Portanto, conhecidos os parâmetros do sinal de entrada e as características do sistema, precisa-se apenas determinar a amplitude e a fase para descrever completamente o sinal de saída.

Sabe-se que tais problemas são mais rápida e facilmente resolvidos por meio de funções exponenciais no tempo da forma $e^{j\omega t}$ em vez de funções cossenoidais. Portanto, $x(t)$ pode ser reescrita como :

$$x(t) = \frac{1}{2} A_x \cdot e^{j\theta_x} \cdot e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} A_x \cdot e^{-j\theta_x} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

Definindo a *função de transferência* $H(j\omega)$ do sistema tal que $y(t) = H(j\omega) \cdot e^{j\omega t}$ quando $x(t) = e^{j\omega t}$, pode-se obter o sinal de saída $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2} A_x \cdot H(j\omega_0) \cdot e^{j\theta_x} \cdot e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} A_x \cdot H(-j\omega_0) \cdot e^{-j\theta_x} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

Este resultado pode ser modificado para explicitar mais claramente suas características. Primeiro, visto que a *função de transferência* é em geral uma grandeza complexa, pode-se representá-la na forma polar :

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j \arg[H(j\omega)]}$$

Onde $|H(j\omega)|$ é a *resposta em amplitude* e $\arg[H(j\omega)]$ é a *resposta em fase* do sistema. Segundo, embora $H(j\omega)$ seja complexa, $y(t)$ deve ser uma função real no tempo já que $x(t)$ é real; isto somente será verdade se :

$$H(-j\omega) = H^*(j\omega)$$

onde $H^*(j\omega)$ é o complexo conjugado de $H(j\omega)$.

Substituindo e simplificando convenientemente obtém-se :

$$y(t) = A_x \cdot |H(j\omega_0)| \cdot \cos(2\pi f_0 t + \theta_x + \arg[H(j\omega_0)])$$

onde se identifica

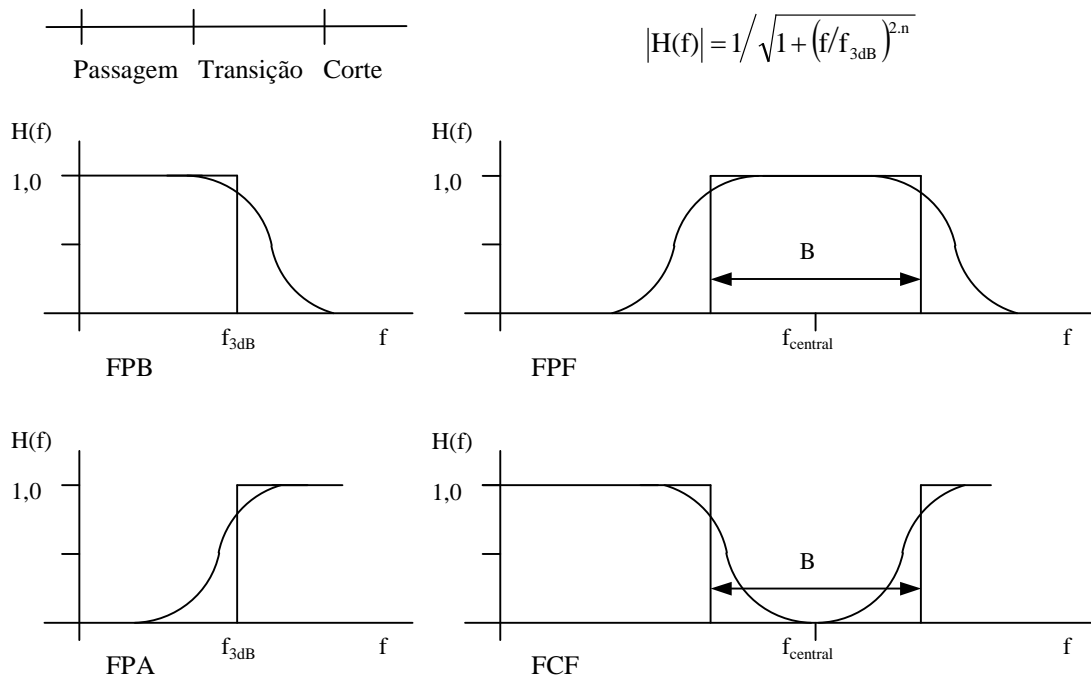
$$A_y = A_x \cdot |H(j\omega_0)| \quad \text{e} \quad \theta_y = \theta_x + \arg[H(j\omega_0)]$$

Ou seja, o sinal de saída tem sua amplitude alterada pela resposta em amplitude e sua fase alterada pela resposta em fase do sistema (na frequência ω_0).

• Um exemplo de sistema em comunicações: os filtros

Filtros são sistemas com a capacidade de selecionar e/ou descartar componentes de frequência presentes no sinal aplicado a sua entrada. Um *filtro ideal* possui como características: faixa de passagem plana, faixa de transição nula, e resposta em fase proporcional à frequência (tal filtro é um modelo teórico). Um *filtro real* possui como características: faixa de passagem com ondulações, faixa de transição, e resposta em fase não proporcional à frequência (tal filtro pode ser construído na prática com uso das funções de aproximação tipo Butterworth, Chebyshev, Bessel, Caue, etc). Os filtros são, ainda, classificados em: passa-baixa (FPB), passa-alta (FPA), passa-faixa (FPF), e corta-faixa (FCF). A figura a seguir mostra as funções de transferência de diversos filtros (filtros ideais em pontilhado). Outra característica dos filtros reais é sua *ordem*, ou seja, o número de pólos em sua função característica. Quanto maior a ordem,

mais próximo do ideal está o filtro. A equação mostrada corresponde a um FPB de n -ésima ordem de Butterworth.



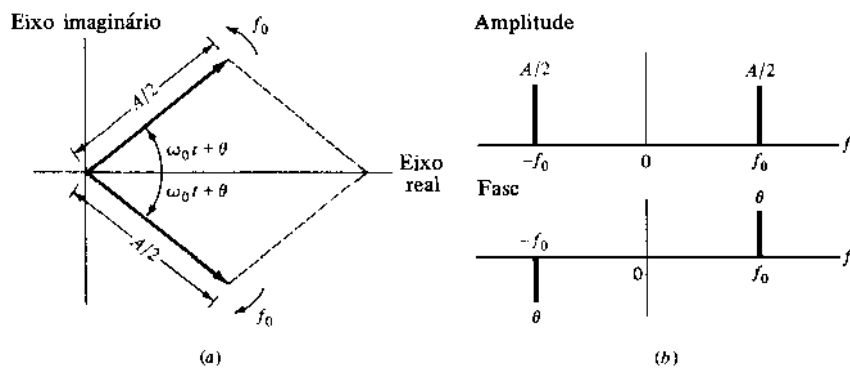
2.3 FASORES E ESPECTROS

A conversão de funções cossenoidais em exponenciais também introduz a noção e interpretação do domínio da frequência pelo método dos diagramas fasoriais. Relembrando a relação :

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) = \frac{1}{2} A \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} A \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

O termo à direita é a representação em *fasores* conjugados, visto que os dois termos são complexos conjugados entre si. Pode-se identificar dois fasores girantes em um plano complexo cujos eixos são as partes real e imaginária de $x(t)$. Os fasores tem amplitudes iguais a $\frac{1}{2}A$, taxas iguais a f_0 rotações por segundo em sentidos opostos e, no instante $t = 0$, formam um ângulo θ em relação ao eixo real positivo (fig. a). A soma em qualquer instante é igual a $x(t)$ e sempre cai sobre o eixo real (uma vez que $x(t)$ é real).

Para descrever estes fasores no domínio da frequência deve-se associar as amplitudes e fases correspondentes as frequências $+f_0$ e $-f_0$. Assim, uma descrição conveniente no domínio da frequência seria o *espectro de linhas* bilateral da fig. b, que consiste em dois gráficos, amplitude versus frequência e fase versus frequência. Deve-se ressaltar que, sob certos aspectos, o espectro de amplitude é mais importante do que o espectro de fase. É claro que ambas as partes são necessárias para definir um sinal sem ambigüidades no domínio do tempo, porém o espectro de amplitudes por si só indica quais frequências estão presentes e em quais proporções, isto é, informa sobre o conteúdo de frequências.



Os espectros de sinais mais complexos podem ser obtidos com o auxílio da Análise de Fourier; mais especificamente, espectros para sinais periódicos são obtidos com as Séries de Fourier e espectros para sinais aperiódicos são obtidos com a Transformada de Fourier.

• O que significa frequência negativa?

A existência de frequências negativas é algo intrigante, pois a frequência (número de repetições por segundo) é, por definição, uma grandeza positiva. Então, como interpretar a frequência negativa? O conceito de frequência associado a cossenoides de valores reais $\cos(\omega_0 t + \theta)$ descreve apenas a taxa de variação, sem ater-se a qualquer noção de sentido. A frequência negativa faz sentido apenas quando se consideram quantidades complexas $e^{+j\omega_0 t}$ e $e^{-j\omega_0 t}$, para os quais a taxa e o *sentido* da variação tem significado.

Uma boa analogia existe entre frequência positiva/negativa e velocidade positiva/negativa. A velocidade negativa simplesmente se refere tanto ao sentido negativo do deslocamento quanto a real velocidade de um objeto em movimento. De modo análogo, a frequência negativa *não* descreve a taxa de variação periódica de uma cossenoide (ou senoide), mas sim, o sentido e a taxa de variação de uma exponencial complexa de comprimento unitário.

2.4 SÉRIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Um sinal periódico pode ser representado como uma soma infinita de termos em senos e cossenoides harmonicamente relacionadas com a frequência fundamental ($f_0 = 1/T_0$) do sinal.

$$g_p(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) \right] \quad (2.1)^*$$

onde a_0 , a_n , e b_n são os *coeficientes da série* dados por:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

2.5 SÉRIE EXPONENCIAL COMPLEXA DE FOURIER

Embora a tradicional série trigonométrica de Fourier permita uma boa representação de todos os sinais periódicos, nesta seção apresenta-se uma representação equivalente baseada em um conjunto de exponenciais complexas ortogonais. A série exponencial complexa de Fourier consiste em componentes da forma $e^{j2\pi nt/T_0}$, com n variando de $-\infty$ a $+\infty$, sendo periódica de período T_0 .

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) \quad (2.2)^*$$

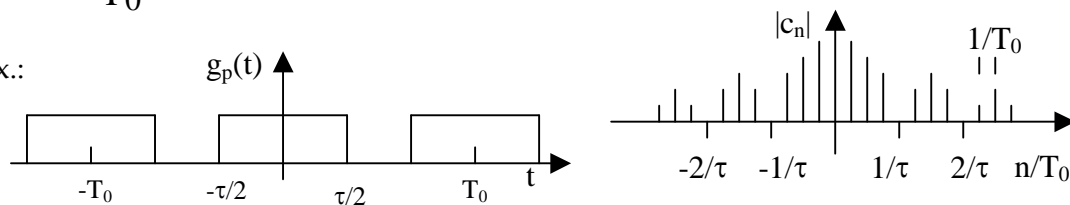
onde c_n são os coeficientes da série dados por:

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p(t) \exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$|c_n| \times \frac{n}{T_0} \rightarrow$ Espectro discreto de amplitude (espectro de linhas)

$\arg(c_n) \times \frac{n}{T_0} \rightarrow$ Espectro discreto de fase

Ex.:



2.6 TRANSFORMADA DE FOURIER (sinais aperiódicos).

A Transformada de Fourier consiste em uma ferramenta matemática que permite descrever um sinal $g(t)$ através de suas componentes exponenciais que ocupam o intervalo inteiro de frequências. Assim, a transformada $G(f)$ define a representação do sinal no domínio da frequência especificando amplitudes relativas das várias componentes em frequência que compõem o sinal.

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (2.3)^*$$

A transformada de Fourier é uma quantidade complexa :

$$G(f) = A(f) + j.B(f) = |G(f)| \exp[j.\theta(f)]$$

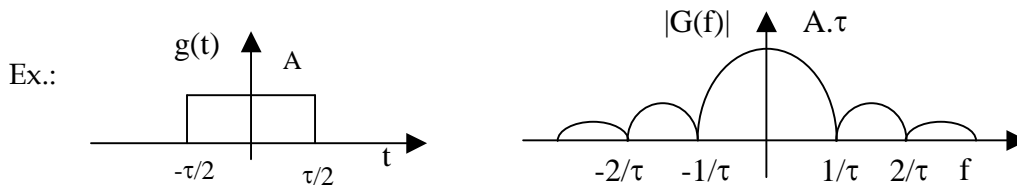
com :

$$|G(f)| = \sqrt{A^2(f) + B^2(f)} \quad \left(= \sqrt{G(f) \times G^*(f)} \right)$$

$$\theta(f) = + \arctg \left(\frac{B(f)}{A(f)} \right)$$

onde :

$|G(f)|$ é o *espectro contínuo de amplitude*, e $\theta(f)$ é o *espectro contínuo de fase*.



2.6.1 Propriedades da Transformada de Fourier

Seja o par transformado $g(t) \Leftrightarrow G(f)$, então:

- | | |
|--|-----------------------------------|
| a) $g(at) \Leftrightarrow \frac{1}{ a } G\left(\frac{f}{a}\right)$ | Mudança de escala (a é constante) |
| b) $g(t - t_0) \Leftrightarrow G(f) \cdot \exp(-j2\pi f t_0)$ | Deslocamento no tempo |
| c) $g(t) \cdot \exp(j2\pi f_c t) \Leftrightarrow G(f - f_c)$ | Deslocamento na frequência |
| d) $\frac{d^n}{dt^n} g(t) \Leftrightarrow (j2\pi f)^n G(f)$ | Diferenciação no domínio do tempo |
| e) $\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{G(0)}{2} \delta(f)$ | Integração no domínio do tempo |
| f) $g_1(t) * g_2(t) \Leftrightarrow G_1(f) G_2(f)$ | Convolução no domínio do tempo |
| g) $G(t) \Leftrightarrow g(-f)$ | Dualidade |
| h) $g^*(\pm t) \Leftrightarrow G^*(\mp f)$ | Conjugado |
| i) $g_p(t) \Leftrightarrow \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{T_0}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$ | Transf. de funções periódicas |

2.6.2 Pares de transformadas

$$A \cdot \text{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow A \cdot \tau \cdot \text{sinc}(f \cdot \tau)$$

$$\exp(-t) \cdot u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{1 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

$$A \cdot \text{sinc}(2W \cdot t) \Leftrightarrow \frac{A}{2 \cdot W} \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2 \cdot W}\right)$$

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

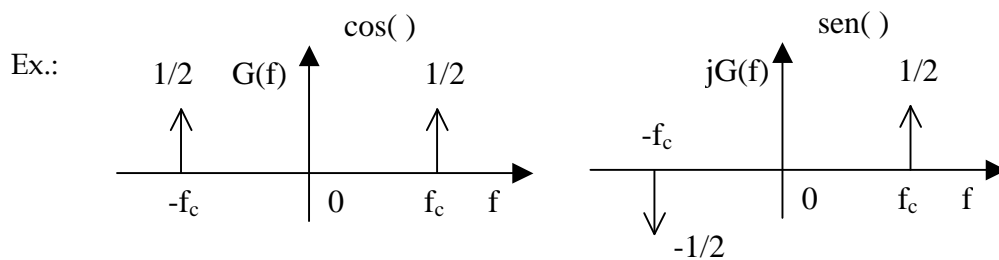
$$1 \Leftrightarrow \delta(f)$$

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0)$$

$$\exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot t) \Leftrightarrow \delta(f - f_c)$$

$$\cos(2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$

$$\sin(2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot t) \Leftrightarrow \frac{1}{2j} [\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)]$$



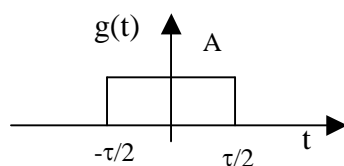
2.6.3 Cálculo da Transformada de Fourier por diferenciações sucessivas

Princípio:

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^n \cdot G(f) \quad F\left[\frac{d^n g(t)}{dt^n}\right] = (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^n \cdot G(f)$$

$$G(f) = \frac{F\left[\frac{d^n g(t)}{dt^n}\right]}{(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^n} \quad (2.4)^*$$

- Determine a TF do Pulso retangular usando diferenciações sucessivas



$$\frac{d}{dt}(\text{transição}) = \delta(t)$$

Ex:

2.7 DENSIDADE ESPECTRAL DE ENERGIA

A densidade espectral de energia (DEE), em J/Hz, mostra como a energia de um sinal se distribui ao longo do espectro de frequências e é definida como:

$$\Psi_g(f) = |G(f)|^2 \quad (2.5)^*$$

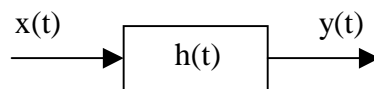
A área total sob a curva de DEE, é igual à energia total do sinal, em J. Assim:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(f) df \quad (2.6)^*$$

Resultado correlato:
$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \quad (2.7)$$

Que é o *teorema da energia de Rayleigh*.

- **Densidade espectral de energia na saída de um sistema**



$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 \cdot |X(f)|^2 \quad \Psi_y(f) = |H(f)|^2 \cdot \Psi_x(f)$$

Ex:

2.8 DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA

A densidade espectral de potência (DEP), em Watt/Hz, mostra como a potência de um sinal periódico se distribui ao longo do espectro. É definida como:

$$S_{gp}(f) = |G_p(f)|^2 \quad (2.8)^*$$

A área total sob a curva de DEP é igual à potência média do sinal periódico, em W. Assim:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |G_p(f)|^2 df \quad (2.9)$$

Outra forma de calcular a potência média é:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |g_p(t)|^2 dt \quad (2.10)^*$$

Pode-se provar, também, que:

$$P = |c_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad (2.11)^*$$

onde c_0, c_n são os coeficientes da série exponencial complexa de Fourier. Esta última equação é o *teorema da potência de Parseval*.

Ex:

2.9 FUNÇÃO AUTOCORRELAÇÃO

Fornece uma medida de similaridade ou coerência entre dois sinais (iguais) em função de um deslocamento (temporal) relativo entre eles.

2.9.1 Função autocorrelação de sinais aperiódicos

$$R_g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot g^*(t - \lambda) dt \quad \text{ou} \quad R_g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t + \lambda) \cdot g^*(t) dt \quad (2.12)^*$$

Propriedades:

- | | |
|--|-------------------------|
| a) $R_g(\lambda) = R_g^*(-\lambda)$ | Simetria conjugada |
| b) $E = R_g(0)$ | Energia total do sinal |
| c) $ R_g(\lambda) \leq R_g(0) \quad \forall \lambda$ | Valor máximo |
| d) $R_g(\lambda) \Leftrightarrow \Psi_g(f) = G(f) ^2$ | Transformada de Fourier |

2.9.2 Função autocorrelação de sinais periódicos

$$R_{gp}(\lambda) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) \cdot g_p^*(t - \lambda) dt \quad (2.13)^*$$

Propriedades:

- | | |
|---|-----------------------------------|
| a) $R_{gp}(\lambda) = R_{gp}^*(-\lambda)$ | Simetria conjugada |
| b) $P = R_{gp}(0)$ | Potência média do sinal |
| c) $ R_{gp}(\lambda) \leq R_{gp}(0) \quad \forall \lambda$ | Valor máximo |
| d) $R_{gp}(\lambda) \Leftrightarrow S_{gp}(f)$ | Relações de Wiener-Khintchine |
| e) $R_{gp}(\lambda) = R_{gp}(\lambda \pm n \cdot T_0)$ | Periodicidade ($n=1,2,3,\dots$) |

1.10 FUNÇÃO DE CROSS-CORRELAÇÃO

Fornece uma medida de similaridade ou coerência entre dois sinais distintos em função de um deslocamento (temporal) relativo entre eles.

2.9.3 Função cross-correlação de sinais aperiódicos

$$R_{12}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) \cdot g_2^*(t - \lambda) dt \quad \text{e} \quad R_{21}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot g_1^*(t - \lambda) dt \quad (2.14)^*$$

Propriedades:

- | | |
|--|-----------------------|
| a) $R_{12}(\lambda) = R_{21}^*(-\lambda)$ | Simetria conjugada |
| b) $R_{12}(0) = 0$ | Sinais ortogonais |
| c) $R_{12}(\lambda) \Leftrightarrow G_1(f) \cdot G_2^*(f)$ | Teorema da correlação |

2.9.4 Função cross-correlação de sinais periódicos

$$R_{12}(\lambda) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_{p1}(t) \cdot g_{p2}^*(t - \lambda) dt \quad (2.15)^*$$

Com $g_{p1}(t)$ e $g_{p2}(t)$ periódicos do mesmo período T_0 . A expressão para $R_{21}(\lambda)$ é similar.

Ex:

• Auto-Correlação: uma ferramenta poderosa

Para um sinal $g(t)$, a densidade espectral de energia (DEE), que é igual a $|G(f)|^2$, pode ser determinada também pela transformada de Fourier (TF) de sua função auto-correlação. Se a transformada de Fourier de um sinal é suficiente para determinar a DEE, então porquê complicar desnecessariamente nossas vidas estudando funções auto-correlação? A TF é válida somente para sinais determinísticos, que podem ser definidos em função do tempo. Sinais aleatórios que ocorrem em problemas de comunicações não podem ser descritos desta forma, e é impossível determinar suas TF. Entretanto, a função auto-correlação para tais sinais pode ser determinada a partir de sua informação estatística. Isto permite determinar a densidade espectral de potência (DEP) de tais sinais. De fato, pode-se considerar a abordagem pela auto-correlação como uma generalização da análise de Fourier para sinais aleatórios e de potência.

2.10 TRANSFORMADA DE HILBERT

Considere um sinal $g(t)$ com TF $G(f)$, a transformada de Hilbert de $g(t)$, denominada $\hat{g}(t)$, é dada por:

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda \quad (2.17)^*$$

A TH é uma operação linear e sua transformada inversa é:

$$g(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda \quad (2.18)$$

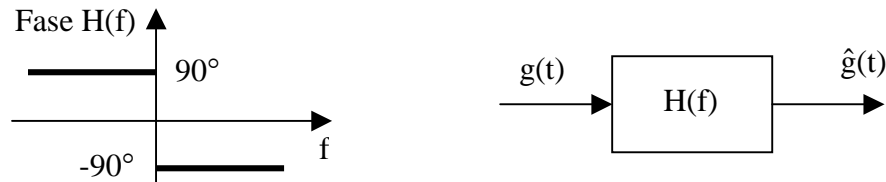
Pode-se interpretar a TH como sendo a seguinte convolução:

$$\hat{g}(t) = g(t) * \frac{1}{.t} \quad (2.19)$$

A T.F. de $\hat{g}(t)$ é :

$$\hat{G}(f) = -j.\text{sgn}(f).G(f) \quad (2.20)^*$$

Se $H(f) = -j.\text{sgn}(f)$, conclui-se que $\hat{g}(t)$ é obtido aplicando-se $g(t)$ a uma rede (ou filtro) com função de transferência $H(f)$.



Esta rede produz uma alteração de fase de -90° em todas as frequências positivas do sinal $g(t)$, e de $+90^\circ$ em todas as frequências negativas. As amplitudes não são alteradas.

Ex:

2.11 PROBLEMAS DA TRANSMISSÃO: DISTORÇÃO

Quando o sinal de saída de um canal de comunicação é uma réplica do sinal de entrada, exceto por uma possível mudança de amplitude e um atraso de tempo constante, tem-se uma *transmissão sem distorção*. Para isto, a função de transferência do canal deve satisfazer as condições:

- a) A resposta em amplitude $|H(f)|$ é constante para todas as frequências.

$$|H(f)| = K$$

- b) A fase $\beta(f)$ é linear com a frequência, e passa por um zero ou múltiplo de π na frequência zero.

$$\beta(f) = -2\pi f t_0 \pm n\pi$$

Se o espectro do sinal transmitido é limitado a uma faixa de frequências, as condições citadas devem ser satisfeitas por esta faixa de frequências. Na prática estas condições não são 100% satisfeitas, ou seja, sempre há certa quantidade de *distorção* no sinal de saída. A distorção corresponde a uma alteração na forma do sinal sendo que, com base no sinal recebido, não é possível reconhecer o sinal originalmente transmitido.

- a) Se $|H(f)|$ não for constante na faixa de interesse, as frequências que compõem o sinal de entrada serão transmitidas com quantidades diferentes de ganho ou atenuação \rightarrow *Distorção de amplitude*.

- b) Se $\beta(f)$ não for linear na faixa de interesse, as frequências que compõem o sinal serão transmitidas com diferentes atrasos, resultando em um sinal com forma diferente do sinal de entrada \rightarrow *Distorção de atraso (ou de retardo)*.

2.11.1 Atraso de fase e de grupo

Considere um canal com fase não linear descrito por:

$$H(f) = K \cdot \exp[j \cdot \beta(f)] \quad (2.21)$$

Onde K é constante e a fase $\beta(f)$ é uma função não linear da frequência. Expandindo-se $\beta(f)$ em série de Taylor, no ponto $f = f_c$ e considerando somente os 2 primeiros termos:

$$\beta(f) \cong \beta(f_c) + (f - f_c) \left. \frac{d\beta(f)}{df} \right|_{f=f_c}$$

Definindo-se:

$$\tau_p = \frac{\beta(f_c)}{2\pi \cdot f_c} \quad \text{e} \quad \tau_g = -\frac{1}{2\pi} \left. \frac{d\beta(f)}{df} \right|_{f=f_c} \quad (2.22)^*$$

Reescrevendo $H(f)$:

$$H(f) = K \cdot \exp \left[-j 2\pi \tau_p f - j 2\pi \tau_g (f - f_c) \right], \quad \text{para } f > 0 \quad (2.23)$$

Ao canal é aplicado o sinal:

$$x(t) = x_c(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) \quad (2.24)$$

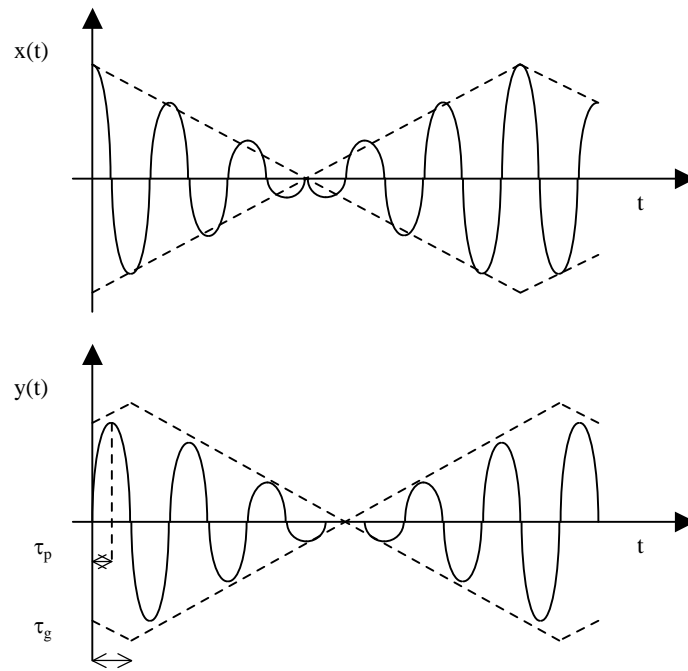
onde $x_c(t)$ é um *sinal banda-base* e corresponde a uma informação a ser transmitida.

O sinal de saída do canal será:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$y(t) = K \cdot x_c \left(t - \tau_g \right) \cos \left[2\pi f_c \left(t - \tau_p \right) \right] \quad (2.25)^*$$

Assim, dois atrasos são produzidos: o *atraso de fase* (τ_p), para frequências isoladas (sinais puros cossenoidais); e o *atraso de grupo* (τ_g), para a informação $x_c(t)$.



O atraso de um sinal ao passar por um sistema de comunicação é importante quando interfere no reconhecimento da informação pelo receptor. Pode-se citar, por exemplo, que a transmissão de áudio não é vulnerável ao atraso, mas a transmissão de dados é.

Ex:

3 MODULAÇÃO ANALÓGICA EM AMPLITUDE

Grande número de fontes de informação são fontes analógicas. Sinais analógicos podem ser modulados e transmitidos diretamente ou convertidos para sinais digitais e transmitidos usando técnicas digitais. Voz, imagem, e vídeo são exemplos de fontes analógicas de informações. Cada uma destas fontes é caracterizada por sua largura de espectro, range dinâmico, e natureza do sinal.

Apesar da tendência geral em direção à transmissão digital de sinais analógicos, ainda existe hoje uma quantidade significativa de transmissão analógica de sinais, especialmente em *broadcast* de áudio e vídeo.

A *modulação* corresponde a alteração sistemática de alguma característica de um sinal, denominado *portadora*, em função de um segundo sinal denominado *modulante* ou mensagem. O objetivo é conduzir a informação através de um sinal modulado cujas propriedades sejam as mais convenientes ao processo de comunicação considerado.

Por que modular?

- **Modulação para Facilidade de Irradiação:** Uma irradiação eletromagnética eficiente necessita de antenas com dimensões físicas da ordem de meio comprimento de onda. Muitos sinais, especialmente os sinais de áudio, possuem componentes de frequência baixa necessitando de antenas de grande dimensão para uma irradiação direta. Utilizando a propriedade da translação em frequência da modulação, estes sinais podem ser sobrepostos em uma portadora de alta frequência, com conseqüente redução no tamanho da antena.
- **Modulação para Multiplexação:** As técnicas de multiplexação, inerentemente formas de modulação, permitem a transmissão de múltiplos sinais através de um mesmo canal (sem interferência mútua), de modo que cada sinal pode ser separado no extremo de recepção.
- **Modulação para Redução de Ruído e Interferência:** Certos tipos de modulação possuem a propriedade de reduzir efeitos causados pelo ruído e pela interferência. Esta propriedade, entretanto, é obtida à custa de uma largura de faixa para a transmissão do sinal maior que a necessária para o sinal original.
- **Modulação para Designação de Frequência:** A seleção de uma estação, em um rádio ou televisão, é possível porque cada uma tem uma diferente frequência portadora de designação (atribuída). Duas ou mais estações transmitindo diretamente no mesmo meio, sem modulação, produziriam uma superposição de sinais interferentes.
- **Modulação para Superar Limitações de Projetos:** A modulação pode ser utilizada para transladar um sinal até a porção do espectro de frequência onde as necessidades de projeto são mais facilmente satisfeitas.

3.1 MODULAÇÃO AM-DSB (Double Side Band)

Modulação em amplitude AM-DSB: a amplitude da portadora varia linearmente em torno de um valor médio proporcionalmente à variação de amplitude do sinal modulante.

O sinal modulado é:

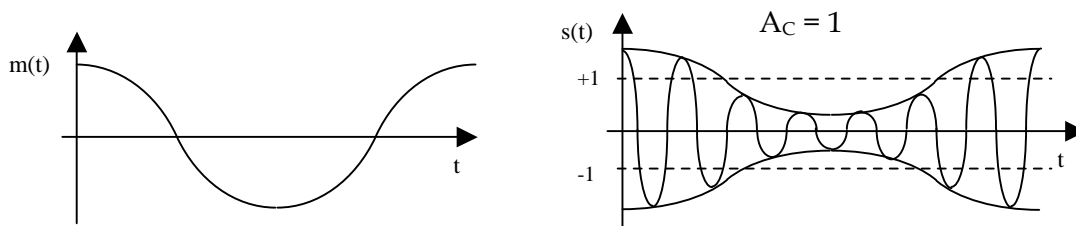
$$s(t) = A_c [1 + k_a \cdot m(t)] \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) \quad (3.1)^*$$

onde:

$$\begin{aligned} c(t) &= A_c \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) \text{ é a portadora,} \\ m(t) &\text{ é o sinal modulante, com frequência máxima igual a } W \text{ [Hz],} \\ k_a &\text{ é a sensibilidade em amplitude do modulador [1/V],} \\ [1 + k_a \cdot m(t)] &\text{ é a envoltória do sinal modulado.} \end{aligned} \quad (3.2)^*$$

A envoltória de $s(t)$ tem a mesma forma de $m(t)$ se:

- a) $|k_a \cdot m(t)| < 1$
- b) $f_c \gg W$



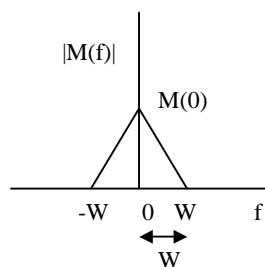
Se a condição a) não for satisfeita, haverá sobremodulação, onde ocorre reversão de fase quando a mensagem troca de sinal (cruza o eixo horizontal).

Aplicando a Transformada de Fourier em $s(t)$ obtém-se:

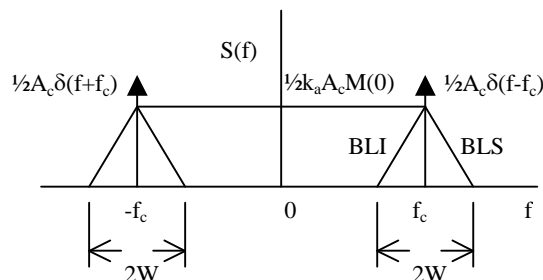
$$S(f) = \frac{A_c}{2} [(f + f_c) + (f - f_c)] + \frac{k_a \cdot A_c}{2} [M(f + f_c) + M(f - f_c)] \quad (3.3)^*$$

O espectro do sinal AM-DSB consiste de dois impulsos ponderados por $A_c/2$ em $+f_c$ e $-f_c$, mais dois espectros do sinal de mensagem ($M(f)$) ponderados por $(k_a \cdot A_c)/2$ e deslocados para $+f_c$ e $-f_c$. A largura de espectro, em Hz, do sinal AM-DSB é $B_T = 2W$.

Se:



então:



- **Modulação tonal**

É a modulação em que $m(t) = A_m \cdot \cos(2\pi \cdot f_m \cdot t)$. O sinal AM-DSB tonal será:

$$s(t) = A_c [1 + \mu \cdot \cos(2\pi \cdot f_m \cdot t)] \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) \quad (3.4)^*$$

onde $\mu = k_a \cdot A_m$ é *fator de modulação* ou *índice de modulação*.

Sejam A_{\max} e A_{\min} os valores máximo e mínimo da envoltória de $s(t)$ então:

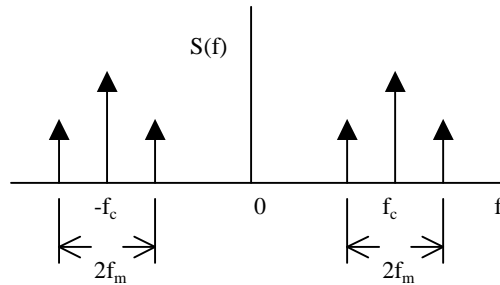
$$\mu = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} \quad (3.5)$$

A equação (3.4) pode ser expressa como:

$$s(t) = A_c \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) + \frac{\mu \cdot A_c}{2} \cos(2\pi \cdot (f_c + f_m) \cdot t) + \frac{\mu \cdot A_c}{2} \cos(2\pi \cdot (f_c - f_m) \cdot t) \quad (3.6)$$

A transformada de Fourier de (3.6) é:

$$\begin{aligned} S(f) = & \frac{A_c}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \\ & + \frac{\mu \cdot A_c}{4} [\delta(f - f_c - f_m) + \delta(f + f_c + f_m)] + \\ & + \frac{\mu \cdot A_c}{4} [\delta(f - f_c + f_m) + \delta(f + f_c - f_m)] \end{aligned} \quad (3.7)$$



- **Potência média do sinal AM-DSB (modulação tonal)**

Utilizando o seguinte resultado:

$$g(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t) \quad \Rightarrow \quad P_g = \frac{A^2}{2}$$

e observando a equação (3.6), conclui-se que a *potência média* do AM-DSB é:

$$P = \frac{A_c^2}{2} + \frac{\mu^2 \cdot A_c^2}{8} + \frac{\mu^2 \cdot A_c^2}{8} \quad \text{ou} \quad P = \frac{A_c^2}{2} \left(1 + \frac{\mu^2}{2}\right) \quad (3.8)^*$$

Relacionando a potência nas bandas laterais e potência média de $s(t)$, tem-se:

$$\frac{2 \cdot P_{BL}}{P} = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2}$$

para $\mu = 1$, (100% de modulação) obtém-se: $2 \cdot P_{BL} = \frac{1}{3} \cdot P$ e $P_c = \frac{2}{3} \cdot P$

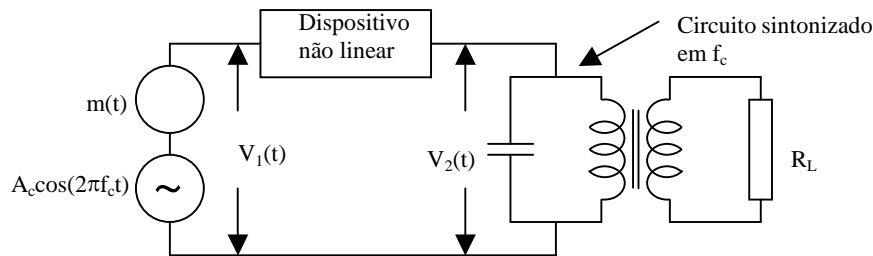
Conclusão: gasta-se mais potência para a transmissão da portadora que para a transmissão da informação.

Ex:

3.1.1 Geração dos Sinais AM-DSB

Requer o uso de elementos não lineares. Configurações básicas do sistema são apresentadas a seguir.

a) Modulação de lei quadrática



O dispositivo não linear (lei quadrática) é caracterizado por:

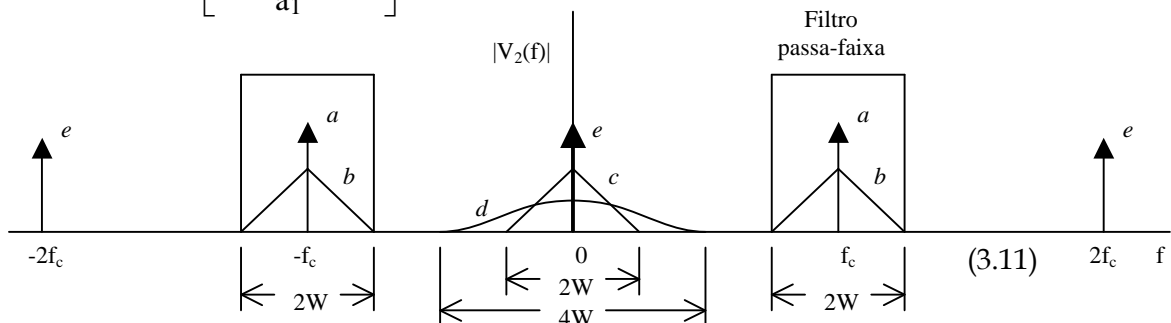
$$v_2(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_1^2(t) \quad (3.9)$$

onde a_1 e a_2 são constantes dependentes do dispositivo escolhido.

A tensão de entrada $v_1(t)$ é: $v_1(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + m(t)$ (3.10)

A tensão de saída será:

$$v_2(t) = a_1 \cdot A_c \left[1 + \frac{2 \cdot a_2}{a_1} \cdot m(t) \right] \cdot \cos(2\pi f_c t) + a_1 \cdot m(t) + a_2 \cdot m^2(t) + a_2 \cdot A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t)$$

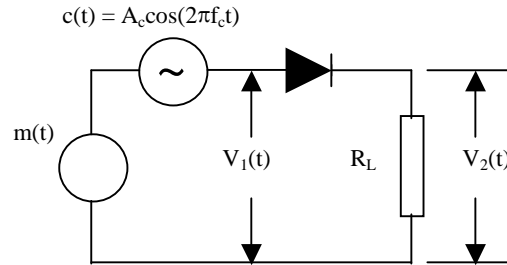


Após o filtro passa-faixa, tem-se:

$$s(t) = a_1 \cdot A_c [1 + k_a \cdot m(t)] \cos(2\pi f_c t) \quad \text{onde} \quad k_a = \frac{2 \cdot a_2}{a_1}$$

b) Modulador por chaveamento

Considere o circuito abaixo em que a portadora tem grande amplitude (quando comparada à modulante).



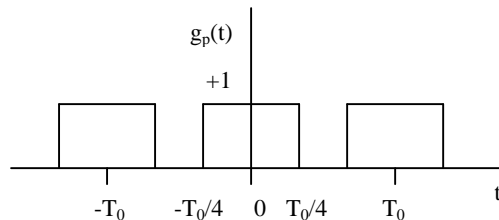
A tensão de saída é dada por:

$$v_2(t) \approx \begin{cases} v_1(t), & c(t) > 0 \\ 0, & c(t) \leq 0 \end{cases}$$

De outra forma pode-se escrever:

$$v_2(t) \cong [A_c \cos(2\pi f_c t) + m(t)] g_p(t) \quad (3.12)$$

onde $g_p(t)$, com $T_0 = \frac{1}{f_c}$, é:



Representando $g_p(t)$ em série trigonométrica de Fourier:

$$g_p(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot \cos[2\pi f_c (2n-1)t] \quad (3.13)$$

Substituindo e agrupando:

$$v_2(t) = \frac{A_c}{2} \left[1 + \frac{4}{\pi A_c} m(t) \right] \cos(2\pi f_c t) + \text{outros fatores}$$

Após um filtro passa faixa adequado:

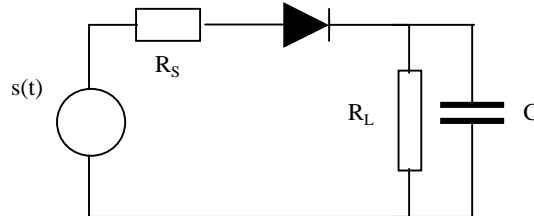
$$s(t) = \frac{A_c}{2} [1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t) \quad \text{onde} \quad k_a = \frac{4}{\pi A_c}$$

3.1.2 Demodulação dos Sinais AM-DSB

A demodulação consiste em recuperar $m(t)$ a partir de $s(t)$.

a) Detector de envoltória

Este sistema gera um sinal de saída que procura seguir a envoltória do sinal de entrada.



O sinal modulado é retificado pelo diodo e filtrado pelo filtro passa baixas do tipo RC. Para o dimensionamento levam-se em conta as seguintes *linhas guias*:

$$R_s \cdot C \ll \frac{1}{f_c}$$

A constante de carga do capacitor deve ser pequena se comparada ao período da portadora.

$$\frac{1}{f_c} \ll R_L \cdot C \ll \frac{1}{W}$$

A constante de descarga deve ser grande para descarga lenta entre os picos da portadora; mas não tão grande em modo a poder acompanhar a envoltória de $s(t)$.

b) Detector tipo lei quadrática

Consiste da equação:

$$v_2(t) = a_1 \cdot v_1(t) + a_2 \cdot v_1^2(t)$$

onde $v_1(t)$ é o sinal modulado AM-DSB.

$$v_1(t) = s(t) = A_c [1 + k_a \cdot m(t)] \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t)$$

A tensão $v_2(t)$ será:

$$v_2(t) = a_1 \cdot A_c [1 + k_a \cdot m(t)] \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot A_c^2 [1 + 2 \cdot k_a \cdot m(t) + k_a^2 \cdot m^2(t)] [1 + \cos(2\pi \cdot 2f_c \cdot t)]$$

Após um filtro passa-baixas:

$$m_0(t) = a_2 \cdot A_c^2 \cdot k_a \cdot m(t) + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot A_c^2 \cdot k_a^2 \cdot m^2(t)$$

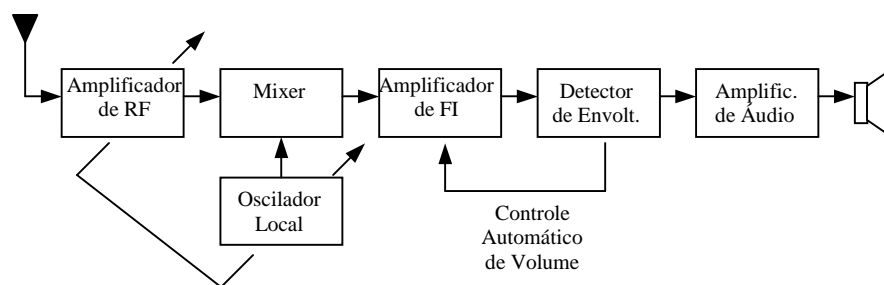
O último termo na saída é uma interferência que não pode ser eliminada.

Aplicação do AM-DSB: Radiodifusão comercial.

Ex:

3.2 RECEPTOR DE RÁDIO AM

Utiliza a faixa de frequências de 535k a 1605 kHz para transmissão de voz e música. As frequências portadoras variam entre 540k a 1600 kHz espaçadas de 10 kHz. O sinal de mensagem é limitado em 5 kHz. O receptor usado para a recepção de sinais AM é chamado *receptor super-heteródino*. E é formado por: uma antena, um amplificador sintonizado de radio frequência (RF), um mixer, um oscilador local, um amplificador de frequência intermediária (FI), um detetor de envoltória, um sistema automático de controle de volume, um amplificador de áudio, e um auto-falante.



Um capacitor variável seleciona a estação a ser recebida bem como ajusta a frequência do oscilador local. Cada estação sintonizada é deslocada no espectro para uma *frequência intermediária* de 455 kHz (graças ao mixer). Esta conversão de frequências (heterodinagem) permite o uso de um único amplificador sintonizado de FI para qualquer estação selecionada. O amplificador de FI é o responsável pelas características de *sensibilidade* e *seletividade* do receptor; e amplifica sinais em uma faixa de 10 kHz. A frequência do oscilador local é: $f_{LO} = f_C + f_{IF}$. O range de frequências do oscilador local é 995-2055 kHz. Na saída do mixer obtém-se duas componentes: f_{IF} e $2.f_C + f_{IF}$. A primeira componente é amplificada pelo amplificador de FI. A sinal obtido após o amplificador de FI é aplicado ao detetor de envoltória de modo a reproduzir sinal de mensagem. Este é amplificado e aplicado ao auto-falante. O sistema automático de controle de volume (AVC) ajusta o ganho do amplificador de FI baseado no nível de potência do sinal no detetor de envoltória.

Nota-se que na entrada do amplificador de RF estão presentes todas as estações captadas pela antena. Considere-se as conversões da estação em f_C e aquela em $f_C' = f_{LO} + f_{IF}$ (chamada *frequência imagem*). Ambos sinais convertidos serão deslocados para a frequência f_{IF} , causando interferência mútua. De modo a rejeitar a frequência imagem é suficiente fixar a largura de faixa do amplificador de RF de modo que: $B_{RF} < 2.f_{IF}$.

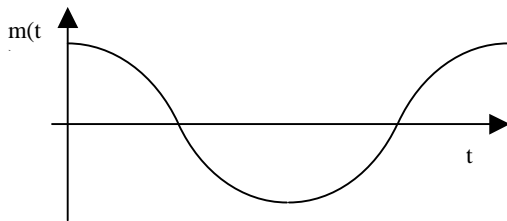
3.3 MODULAÇÃO AM-DSB/SC (Double Side Band – Supressed Carrier)

Na modulação AM-DSB, a onda portadora é completamente independente do sinal $m(t)$ e representa uma quantidade de potência que poderia ser economizada. Assim, na modulação DSB/SC a portadora é suprimida, obtendo-se:

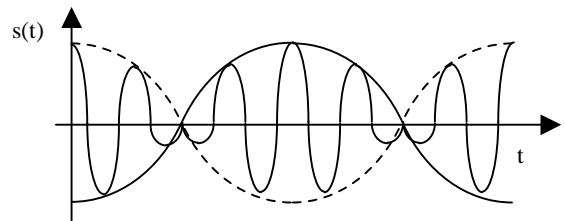
$$s(t) = A_c \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) \cdot m(t) \quad (3.15)^*$$

Desta forma, a envoltória do sinal modulado é diferente da forma de onda do sinal modulante.

Se:



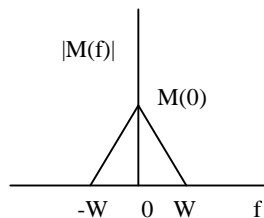
então:



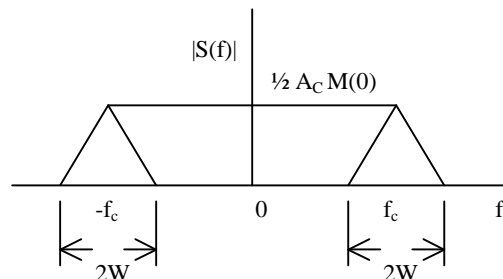
O espectro do sinal modulado é:

$$S(f) = \frac{A_c}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)] \quad (3.16)^*$$

Se:



então:



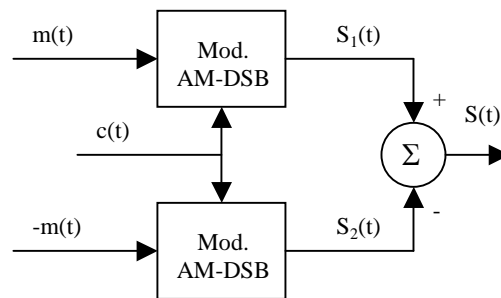
Ou seja, o espectro do sinal AM-DSB/SC é simplesmente o espectro de $m(t)$ deslocado para $\pm f_c$. A largura de espectro, em Hz, será $B_T = 2W$.

3.3.1 Geração dos Sinais AM-DSB/SC

O modulador DSB/SC também é conhecido por modulador *tipo produto*.

a) Modulador balanceado

É formado por dois moduladores AM-DSB iguais montados em configuração balanceada. O sinal $m(t)$ é invertido em uma das entradas.



As saídas dos moduladores AM-DSB são:

$$s_1(t) = A_c [1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

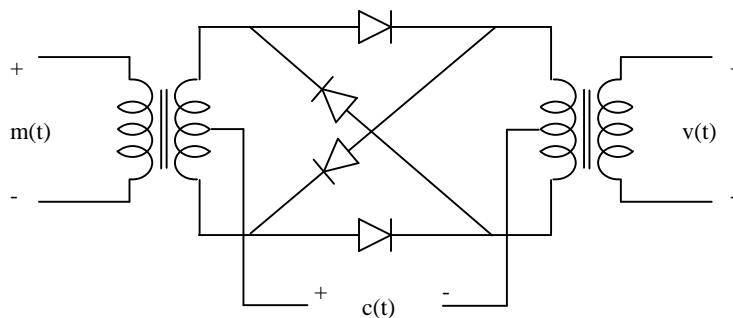
$$s_2(t) = A_c [1 - k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

De modo que:

$$s(t) = s_1(t) - s_2(t) = 2k_a A_c \cos(2\pi f_c t) m(t)$$

b) Modulador em anel

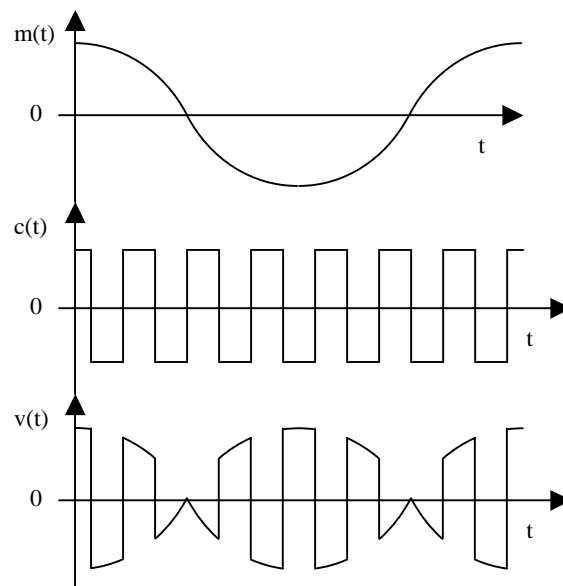
Considere o sistema abaixo:



Onde:

$$v(t) = \begin{cases} m(t), & c(t) > 0 \\ -m(t), & c(t) < 0 \end{cases}$$

Como exemplo têm-se os sinais abaixo:



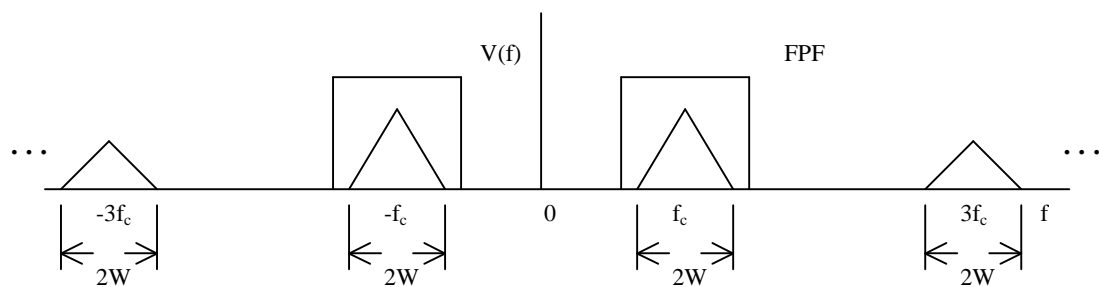
A portadora é representada em série trigonométrica de Fourier por:

$$c(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot \cos[2\pi \cdot f_c \cdot (2n-1)t] \quad (3.18)$$

assim:

$$v(t) = c(t) \cdot m(t)$$

$$v(t) = \frac{4}{\pi} \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) \cdot m(t) + \text{outros sinais múltiplos de } f_c.$$



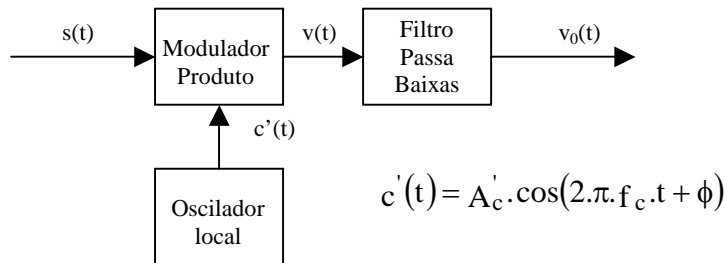
Após um FPF apropriado obtém-se o sinal modulado AM-DSB/SC:

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) \cdot m(t) \quad (3.19)$$

Ex:

3.3.2 Detecção Coerente dos Sinais AM-DSB/SC.

Consiste na reinjeção da portadora ao sinal modulado recebido e posterior filtragem com um FPB.



O sinal do oscilador local $c'(t)$ possui fase arbitrária (ϕ) em relação à portadora.

Assim:

$$\begin{aligned} v(t) &= s(t) \cdot c'(t) = \\ &= [A_c \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) \cdot m(t)] \cdot A_c' \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t + \phi) \\ &= \frac{A_c \cdot A_c'}{2} \cdot \cos(4\pi \cdot f_c \cdot t + \phi) \cdot m(t) + \frac{A_c \cdot A_c'}{2} \cdot m(t) \cdot \cos \phi \end{aligned}$$

Após o FPB:

$$v_0(t) = \frac{A_c \cdot A_c'}{2} \cdot m(t) \cdot \cos \phi \quad (3.19)$$

O erro de fase no oscilador local (ϕ) faz com que a saída do detector seja atenuada por um fator $\cos \phi$.

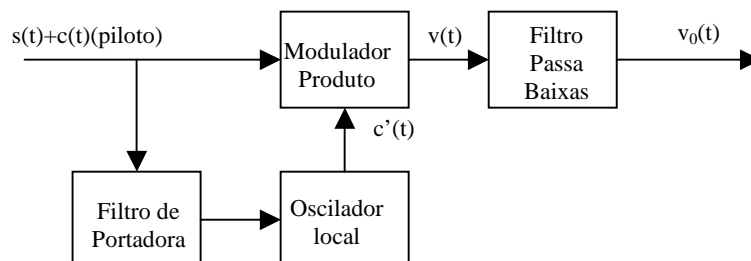
Se $\phi=0^\circ \rightarrow$ sincronismo \rightarrow máxima amplitude do sinal.

Se $\phi=60^\circ \rightarrow$ amplitude do sinal reduzida pela metade.

Se $\phi=90^\circ \rightarrow$ perda do sinal.

Conclui-se que é fundamental manter o oscilador local em sincronismo (fase e frequência) com $c(t)$, neste caso o processo é dito *detecção coerente*. A detecção coerente envolve o acréscimo de operações ao sistema elevando o seu custo.

- Possível solução para detecção coerente:**



- Utilização do AM-DSB/SC:** Sinal inicial para geração de outros sinais modulados, multiplexação, FM estereofônico, informação de cor em TV.

Ex:

3.4 MODULAÇÃO AM-SSB (Single Side Band)

Se a portadora e uma banda lateral são suprimidas no transmissor, nenhuma informação é perdida. Isto dá origem ao sistema de modulação SSB, cujas vantagens são: largura de espectro reduzida e eliminação da portadora de alta potência. As desvantagens são: complexidade e custo.

No domínio da frequência é possível visualizar o modulador SSB como sendo o modulador AM-DSB/SC com uma das bandas laterais suprimida.

Para descrever o sinal SSB no domínio do tempo supõe-se que:

$$s(t) = s_c(t) \cos(2\pi f_c t) - s_s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (3.20)$$

Esta representação é dita *representação na forma canônica*, onde:

$s_c(t)$ é a *componente de informação em fase* de $s(t)$ e

$s_s(t)$ é a *componente de informação em quadratura* de $s(t)$.

Multiplicando $s(t)$ por $\cos(2\pi f_c t)$ e utilizando com um filtro passa-baixas, isola-se $s_c(t)$, cuja T.F. é:

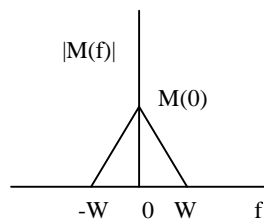
$$S_c(f) = [S(f - f_c) + S(f + f_c)], \quad -W \leq f \leq W \quad (3.21)$$

Multiplicando $s(t)$ por $\sin(2\pi f_c t)$ e utilizando com um filtro passa-baixas, isola-se $s_s(t)$, cuja T.F. é:

$$S_s(f) = j[S(f - f_c) - S(f + f_c)], \quad -W \leq f \leq W \quad (3.22)$$

Deseja-se obter as expressões de $s_c(t)$ e $s_s(t)$ para o sinal AM-SSB Banda Lateral Superior (U-SSB):

Considerando o espectro do sinal $m(t)$ abaixo:



O espectro do sinal U-SSB e das componentes em fase e quadratura são mostrados a seguir.

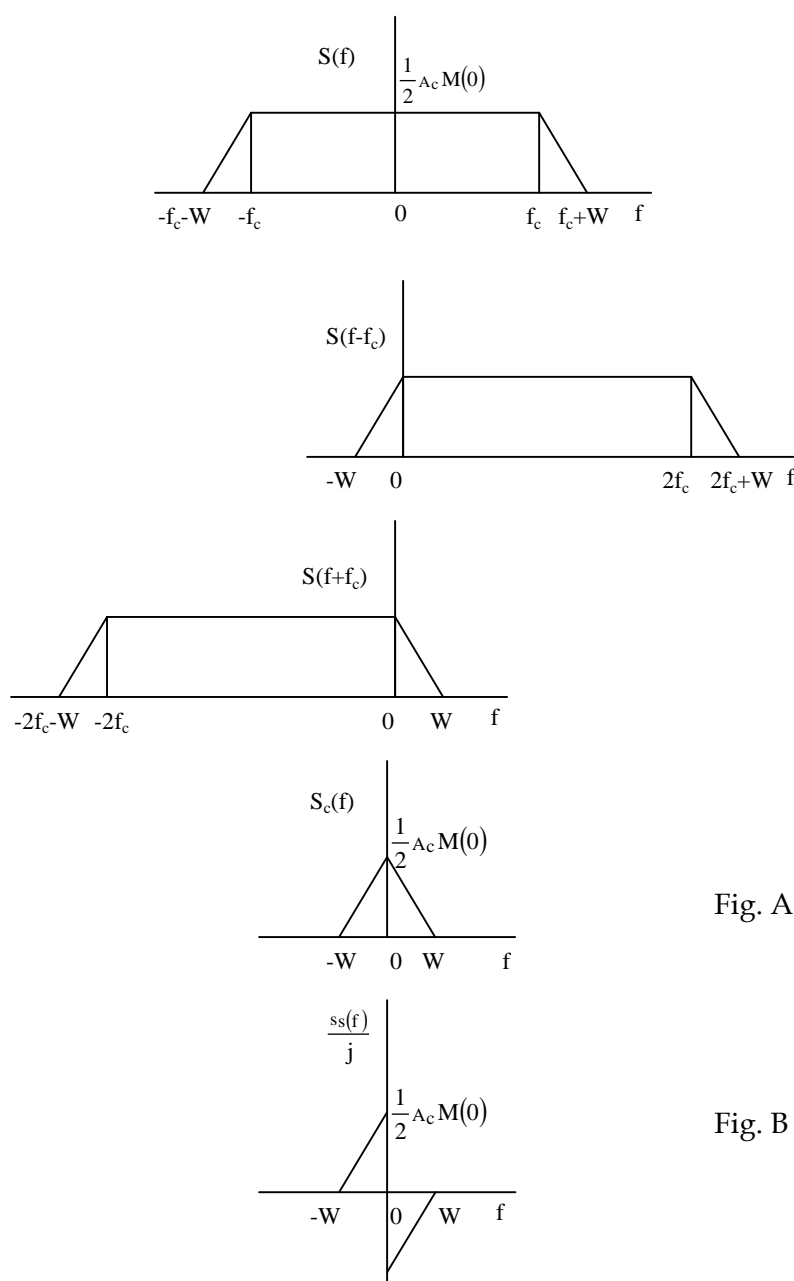


Fig. A

Fig. B

Da comparação entre $M(f)$ e o espectro da Fig. A obtém-se:

$$S_c(f) = \frac{A_c}{2} M(f) \quad \text{e} \quad s_c(t) = \frac{A_c}{2} m(t)$$

Com base na Fig. B:

$$\frac{s_s(f)}{j} = \begin{cases} \frac{A_c}{2} M(f), & f < 0 \\ 0, & f = 0 \\ -\frac{A_c}{2} M(f), & f > 0 \end{cases}$$

$$S_s(f) = \frac{A_c}{2} \cdot [-j \cdot \text{sgn}(f)] M(f) = \frac{A_c}{2} \cdot \hat{M}(f) \quad \text{e} \quad s_s(t) = \frac{A_c}{2} \cdot \hat{m}(t)$$

Voltando na expressão (3.20) obtém-se o sinal U-SSB:

$$s(t) = \frac{A_c}{2} \left[m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) - \hat{m}(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \right]$$

Generalizando:

$$s(t) = \frac{A_c}{2} \left[m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \pm \hat{m}(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \right] \quad \begin{array}{l} + \Rightarrow \text{L-SSB} \\ - \Rightarrow \text{U-SSB} \end{array} \quad (3.23)^*$$

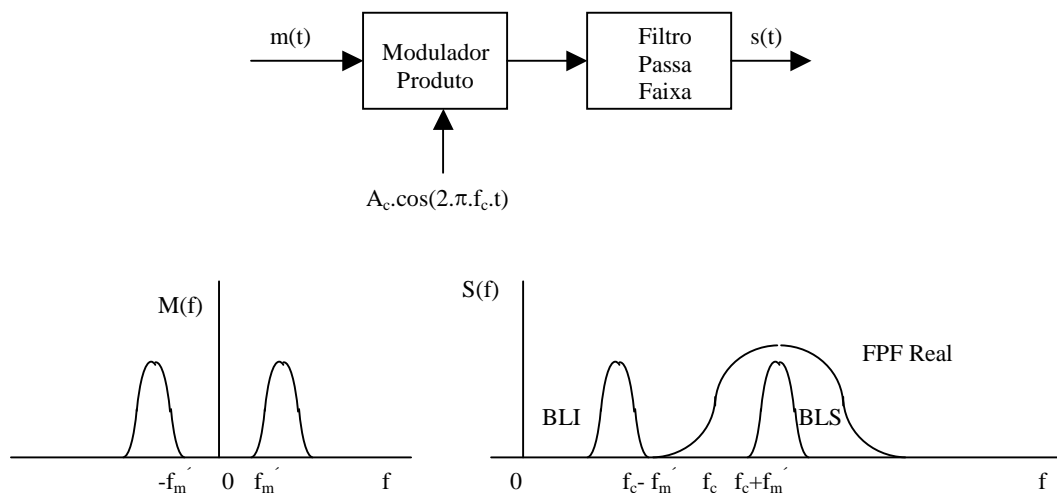
onde $\hat{m}(t)$ é a transformada de Hilbert de $m(t)$. A componente em quadratura $s_s(t)$ é fundamental para a supressão de uma das bandas laterais. A largura do espectro, em Hz, de $s(t)$ é $B_T = W$.

Ex:

3.4.1 Geração dos Sinais AM-SSB

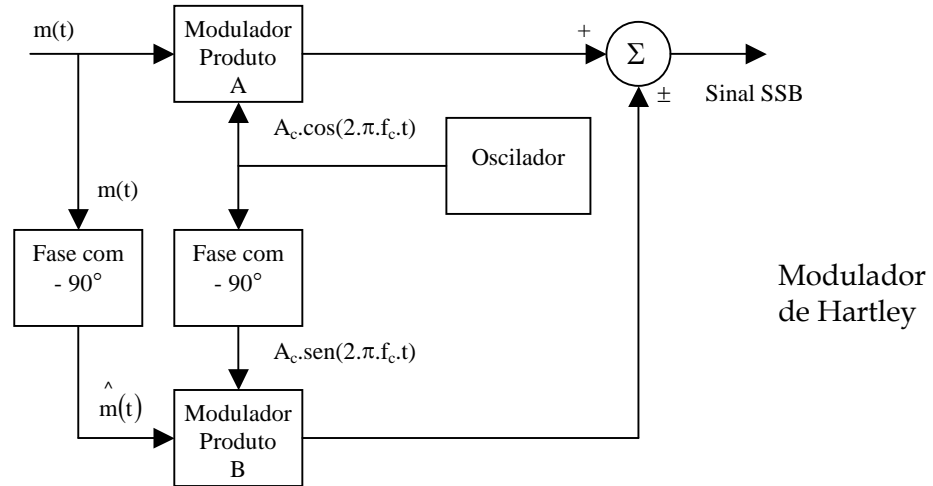
a) Método da discriminação em frequência

O sistema para obtenção do sinal SSB consiste em um modulador tipo produto mais um filtro projetado para rejeitar uma das bandas laterais. Neste método a menor frequência do sinal modulante (f_m) deve ser maior que zero para a correta atuação de filtro FPF de alta seletividade. Obs: Por este motivo a modulação SSB não é utilizada na transmissão de sinais que possuem componentes significativas de baixa frequência (ex.: vídeo).



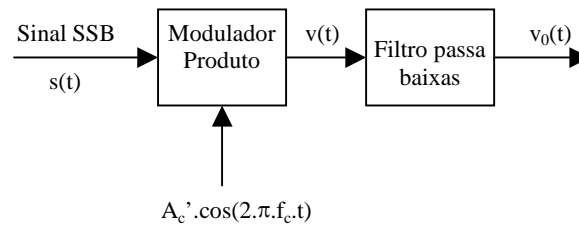
b) Método da discriminação em fase

São considerados sinais AM-DSB/SC com portadoras em quadratura moduladas por $m(t)$ e $\hat{m}(t)$.



3.4.2 DEMODULAÇÃO DOS SINAIS SSB

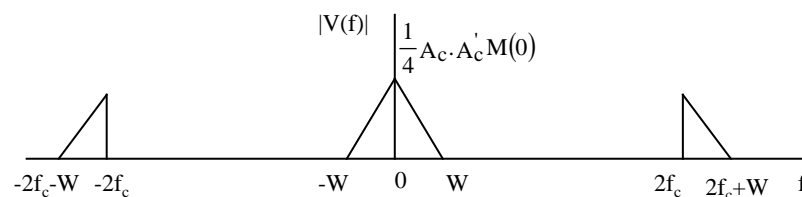
É necessário deslocar (em direção à origem) o espectro U-SSB ou L-SSB para recuperar o sinal original, usando-se um *detetor coerente*:



Após o modulador produto encontra-se:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \frac{A_c \cdot A'_c}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) \left[m(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) \pm \hat{m}(t) \cdot \sin(2\pi \cdot f_c \cdot t) \right] \\
 &= \frac{A_c \cdot A'_c}{4} \cdot m(t) + \frac{A_c \cdot A'_c}{4} \cdot \left[m(t) \cdot \cos(4\pi \cdot f_c \cdot t) \pm \hat{m}(t) \cdot \sin(4\pi \cdot f_c \cdot t) \right]
 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por exemplo, para U-SSB:



Após o FPB: $v_0(t) = \frac{A_c \cdot A_c'}{4} \cdot m(t)$

Há necessidade de geração de portadora f_c com frequência e fase estáveis para evitar distorções no sinal demodulado.

- a) Considerando o sinal do oscilador local com desvio de frequência Δf .

$$c'(t) = A_c' \cdot \cos[2\pi(f_c + \Delta f)t]$$

$$\text{Tem-se: } v_0(t) = \frac{A_c \cdot A_c'}{4} \left[m(t) \cdot \cos(2\pi \Delta f t) \mp \hat{m}(t) \cdot \sin(2\pi \Delta f t) \right] \quad \begin{array}{l} - \Rightarrow \text{L-SSB} \\ + \Rightarrow \text{U-SSB} \end{array}$$

Ou seja, uma *modulação residual* SSB. Em telefonia, usam-se osciladores com tolerância na estabilidade de frequência de até 5 Hz.

- b) Considerando o sinal do oscilador local com desvio de fase ϕ .

$$c'(t) = A_c' \cdot \cos[2\pi f_c t + \phi]$$

$$\text{Tem-se: } v_0(t) = \frac{A_c \cdot A_c'}{4} \left[m(t) \cdot \cos \phi \mp \hat{m}(t) \cdot \sin \phi \right] \quad \begin{array}{l} - \Rightarrow \text{L-SSB} \\ + \Rightarrow \text{U-SSB} \end{array}$$

Observa-se que o termo em seno não pode ser filtrado e corresponde a uma *distorção de fase*. Em comunicações de voz, a distorção de fase não é perceptível, mas em transmissões de vídeo e dados é intolerável.

Aplicações: Multiplexação FDM (telefonia em longa distância).

3.5 MODULAÇÃO AM-VSB (Vestigial Side Band)

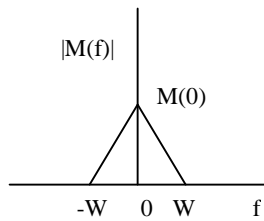
A modulação SSB é ideal para a transmissão de voz, pois existe um intervalo no espectro de voz entre zero e algumas centenas de Hertz.

Quando $m(t)$ contém componentes significativas em baixa frequência (ex.: vídeo), a modulação SSB não é apropriada devido às dificuldades em isolar uma das bandas laterais. Por outro lado, a modulação AM-DSB/SC não utiliza eficientemente o espectro.

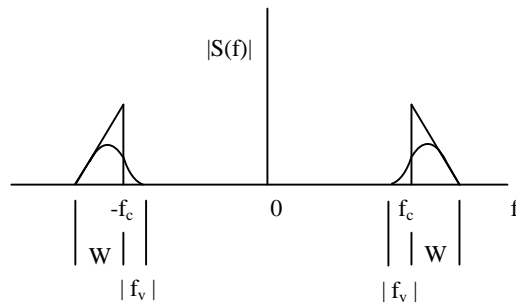
A modulação AM-VSB é um compromisso entre AM-SSB e o sinal AM-DSB/SC. Neste sistema, uma banda lateral permanece quase completamente no espectro, assim como um *vestígio* da outra banda lateral.

Um sinal AM-VSB com vestígio da banda lateral inferior (U-VSB) terá o seguinte espectro:

Se :



Então:

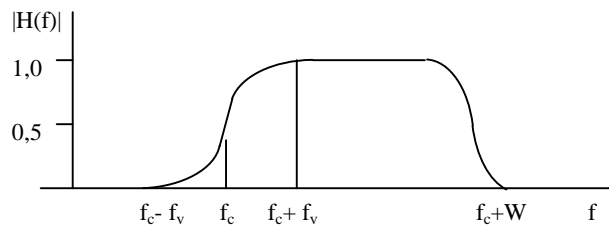


O vestígio compensa a quantidade da banda lateral principal removida (sem perda de informação). A largura do espectro é $B_T = W + f_v$ onde f_v é a largura da banda lateral vestigial. O sinal AM-VSB é gerado aplicando-se um sinal AM-DSB/SC a um filtro com função de transferência $H(f)$ apropriada (*filtro formatador de espectro*).

Matematicamente:

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \cdot [M(f - f_c) + M(f + f_c)] \cdot H(f) \quad (3.25)$$

Para o U-VSB, $H(f)$ é mostrado abaixo (na forma gráfica):



Observa-se que $H(f)$ tem *simetria ímpar* em relação a f_c , e satisfaz à propriedade:

$$H(f - f_c) + H(f + f_c) = 1 \quad -W \leq f \leq W \quad (3.26)$$

No domínio do tempo pode-se representar $s(t)$ por:

$$s(t) = s_c(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) - s_s(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \quad (3.27)$$

Cálculo de $s_c(t)$ e $s_s(t)$:

$$S_c(f) = [S(f - f_c) + S(f + f_c)] \quad -W \leq f \leq W \quad (3.28)$$

e

$$S_s(f) = j[S(f - f_c) - S(f + f_c)] \quad -W \leq f \leq W \quad (3.29)$$

Substituindo (3.25) em (3.28), obtém-se:

$$S_c(f) = \frac{A_c}{2} M(f) [H(f - f_c) + H(f + f_c)] = \frac{A_c}{2} M(f) \quad (3.30)$$

então: $s_c(t) = \frac{A_c}{2} m(t)$

Substituindo (3.25) em (3.29), encontra-se:

$$S_s(f) = j \frac{A_c}{2} M(f) [H(f - f_c) - H(f + f_c)] = \frac{A_c}{2} M(f) H_s(f) \quad (3.31)$$

Então: $s_s(t) = \frac{A_c}{2} m_s(t)$

A obtenção de $m_s(t)$ corresponde à filtragem de $m(t)$ por um filtro com função de transferência:

$$H_s(f) = j[H(f - f_c) - H(f + f_c)]$$

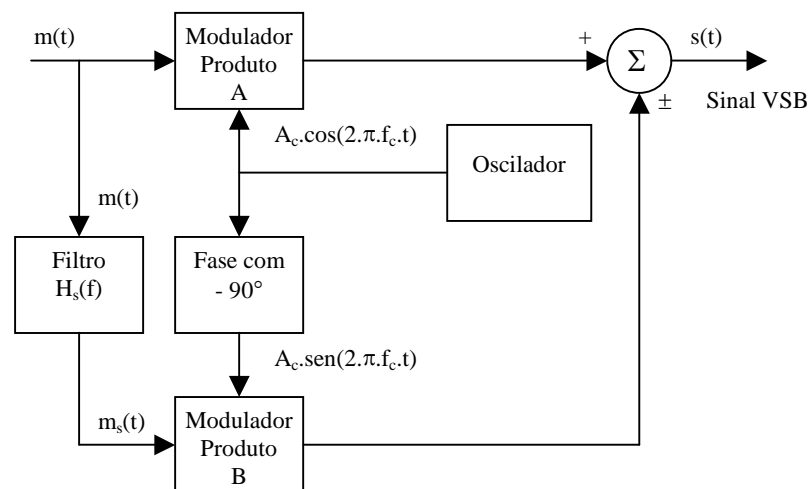
Voltando na expressão (3.27) obtém-se uma representação geral para o sinal VSB:

$$s(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \cos(2\pi f_c t) - \frac{A_c}{2} m_s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (3.32)$$

3.5.1 Geração e Demodulação

a) Geração

O sinal AM-VSB é gerado com uso de um modulador produto acrescido do filtro formatador de espectro. Alternativamente pode-se usar o sistema abaixo.



b) Demodulação

A demodulação é realizada com o detector coerente.

Aplicação: Transmissão de sinais de imagem.

3.5.2 Detecção de Envoltória de um Sinal VSB + Portadora

A transmissão conjunta de uma portadora com o sinal VSB permite a demodulação com Detector de Envoltória, entretanto uma distorção é introduzida.

Seja um sinal:

$$g(t) = a(t) \cdot \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] = g_c(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) - g_s(t) \cdot \sin(2\pi f_c t)$$

onde:

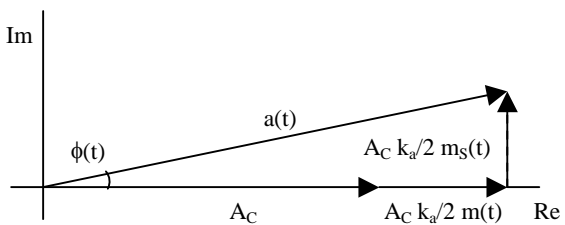
$$a(t) = \left(g_c^2(t) + g_s^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \phi(t) = \arctg\left(\frac{g_s(t)}{g_c(t)} \right)$$

Dado $g(t)$, o Detector de Envoltória recupera $a(t)$.

Considere, agora, o sinal VSB + portadora dado abaixo (com k_a um fator de percentagem de modulação):

$$s(t) = A_c \cdot \left[1 + \frac{k_a}{2} m(t) \right] \cdot \cos(2\pi f_c t) - \frac{k_a A_c}{2} m_s(t) \cdot \sin(2\pi f_c t)$$

então:

$$\begin{aligned} a(t) &= A_c \left(\left[1 + \frac{k_a}{2} m(t) \right]^2 + \left[\frac{k_a}{2} m_s(t) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= A_c \left[1 + \frac{k_a}{2} m(t) \right] \left(1 + \left[\frac{\frac{k_a}{2} m_s(t)}{1 + \frac{k_a}{2} m(t)} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$


Ex.:

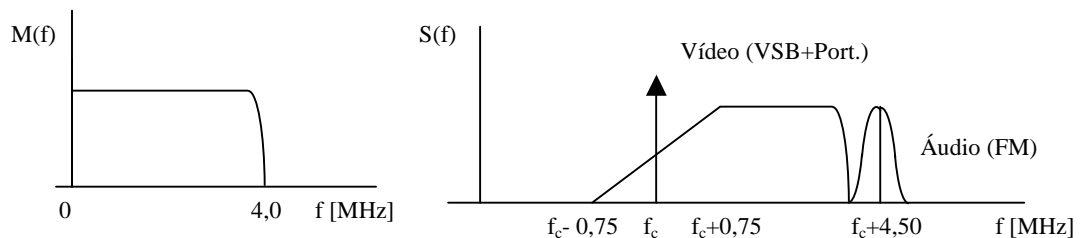
3.6 RECEPTOR DE TV (ANALÓGICA)

A transmissão de um sinal de vídeo é feita focalizando-se a imagem a ser transmitida sobre a tela foto-sensível da câmera de TV. Esta tela é *varrida* por um feixe eletrônico de modo que a corrente elétrica é diretamente proporcional à intensidade luminosa em cada ponto varrido. O movimento da imagem é captado como no cinema. Porém, no caso da televisão, são transmitidos 30 *quadros* (varreduras completas da tela) por segundo. A projeção de uma sequência de quadros na tela do receptor de TV nos dá a impressão de movimento contínuo, devido à característica de persistência da visão humana.

No Brasil é adotado o *padrão M* onde um quadro é composto por 525 *linhas*, das quais 495 linhas úteis, usadas para a transmissão efetiva de imagem e 30 linhas que são apagadas no intervalo de tempo para o retorno do feixe eletrônico ao início da tela, para iniciar nova varredura. Como têm-se 30 quadros por segundo e 525 linhas por quadro, a duração de cada linha é de $1/(30 \times 525) \approx 63,5 \mu s$, sendo $53,4 \mu s$ de tempo útil (imagem efetiva) e $10 \mu s$ em que a linha é apagada (retorno do feixe). Para uma

definição satisfatória de imagem verificou-se que, em cada linha, é necessário que se possam distinguir 425 *elementos de imagem*. Assim, o máximo número de transições ao longo de uma linha seria uma sequência de elementos de imagem alternadamente pretos (corrente mínima) e brancos (corrente máxima). Isso corresponde a uma onda quadrada com período de $2 \times (53,5 \mu\text{s}/425) \approx 0,25 \mu\text{s}$. Portanto, uma imagem de TV requer a transmissão de componentes de frequência desde 30 Hz (frequência de varredura de quadro) até 4 MHz (primeira harmônica do sinal com número máximo de transições em uma linha).

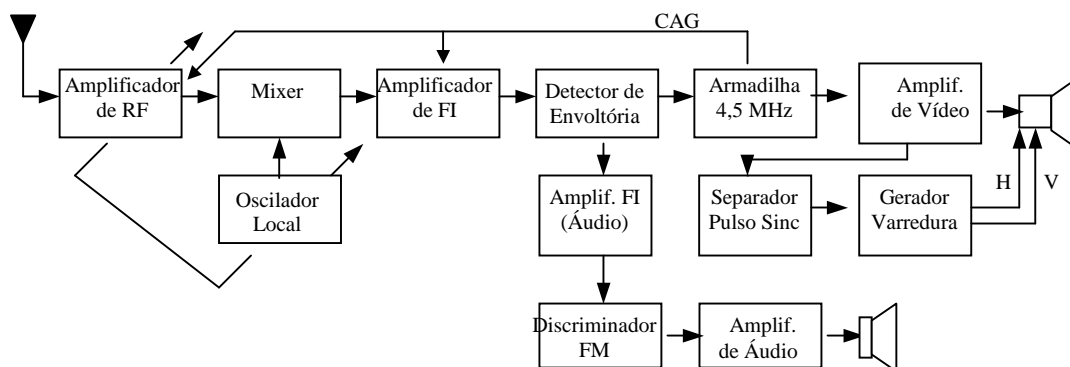
Para *radio-difusão comercial de TV*, assim como para radio-difusão sonora, interessa simplificar os receptores, isto levou à criação do sistema *AM-VSB + portadora* (economia de espectro, resposta em baixa frequência, simplicidade de demodulação/sincronismo). A figura a seguir mostra o espectro do sinal de vídeo (AM-VSB + portadora) e áudio (modulação FM) de um canal de televisão. Por exemplo, para o canal 4 a frequência f_c é igual a 67,25 MHz.



As seguintes faixas de frequência são alocadas para a radio-difusão comercial: de TV:

- 54 a 88 MHz: canais 2 a 6 da faixa inferior de VHF;
- 174 a 216 MHz: canais 7 a 13 da faixa superior de VHF;
- 470 a 890 MHz: canais 14 a 83 de UHF.

A figura seguinte mostra um diagrama de blocos do receptor de TV. A frequência intermediária de vídeo é de 45,75 MHz. Para áudio usa-se FI de 4,5 MHz com largura de espectro de 200 kHz.



4 MODULAÇÃO ANALÓGICA EM ÂNGULO

4.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

O sinal modulado em ângulo é expresso como:

$$s(t) = A_c \cdot \cos[\theta_i(t)] \quad (4.1)^*$$

A_c : amplitude da portadora.

$\theta_i(t)$: ângulo (rad) da portadora modulada em função da mensagem $m(t)$.

Define-se *frequência instantânea* de $s(t)$ como:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_i(t)}{dt} \quad (4.2)^*$$

Existem dois tipos básicos de modulação angular descritos a seguir.

a) Modulação em fase (PM)

O ângulo θ_i varia linearmente com $m(t)$.

$$\theta_i(t) = 2\pi \cdot f_c \cdot t + k_p \cdot m(t) \quad (4.3)^*$$

k_p : sensibilidade em fase do modulador [rad/V]

$2\pi \cdot f_c \cdot t$: ângulo da portadora não modulada.

Para PM:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} \{2\pi \cdot f_c \cdot t + k_p \cdot m(t)\} = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \cdot \frac{dm(t)}{dt} \quad (4.4)^*$$

O sinal modulado será:

$$s(t) = A_c \cdot \cos[2\pi \cdot f_c \cdot t + k_p \cdot m(t)] \quad (4.5)^*$$

b) Modulação em frequência (FM)

A frequência instantânea $f_i(t)$ varia linearmente com o sinal modulante $m(t)$.

$$f_i(t) = f_c + k_f \cdot m(t) \quad (4.6)^*$$

k_f : sensibilidade em frequência do modulador [Hz/V]

f_c : frequência da portadora não modulada.

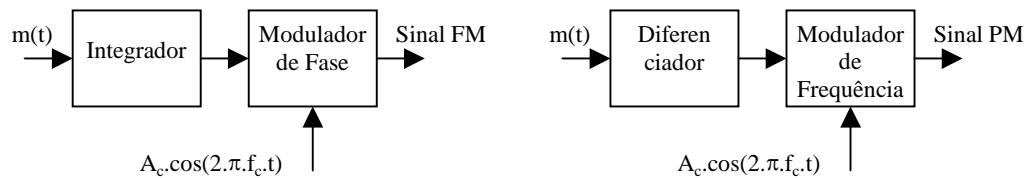
Integrando (4.6), e multiplicando por 2π :

$$\theta_i(t) = 2\pi \cdot f_c \cdot t + 2\pi \cdot k_f \int_0^t m(t) dt \quad (4.7)^*$$

Assim, o sinal FM será:

$$s(t) = A_c \cdot \cos \left[2\pi \cdot f_c \cdot t + 2\pi \cdot k_f \int_0^t m(t) dt \right] \quad (4.8)^*$$

A envoltória dos sinais PM e FM é constante e igual à amplitude da portadora.
Curiosidade: comparando (4.5) com (4.8) temos:



Ex:

4.2 MODULAÇÃO TONAL EM FREQUÊNCIA

Se $m(t) = A_m \cdot \cos[2\pi \cdot f_m \cdot t]$

então $f_i(t) = f_c + \Delta_f \cdot \cos[2\pi \cdot f_m \cdot t]$ (4.10)

onde: $\Delta_f = k_f \cdot A_m$ (4.11)^*

é o *desvio de frequência*: afastamento máximo de $f_i(t)$ em relação à f_c .

O ângulo é dado por:

$$\theta_i(t) = 2\pi \cdot f_c \cdot t + \beta \cdot \sin[2\pi \cdot f_m \cdot t] \quad (4.12)$$

onde: $\beta = \frac{\Delta_f}{f_m}$ (4.13)^*

é o *índice de modulação*: afastamento máximo de $\theta_i(t)$ em relação à $2\pi \cdot f_c \cdot t$.

Assim:

$$s(t) = A_c \cdot \cos[2\pi \cdot f_c \cdot t + \beta \cdot \sin(2\pi \cdot f_m \cdot t)] \quad (4.14)^*$$

Dependendo do índice de modulação pode-se distinguir dois casos:

se	$\beta \leq 0,5$	FM banda estreita
	$\beta > 0,5$	FM banda larga

4.2.1 MODULAÇÃO FM BANDA ESTREITA

Deseja-se obter o espectro do sinal FM-BE.

Expandindo (4.14) encontra-se:

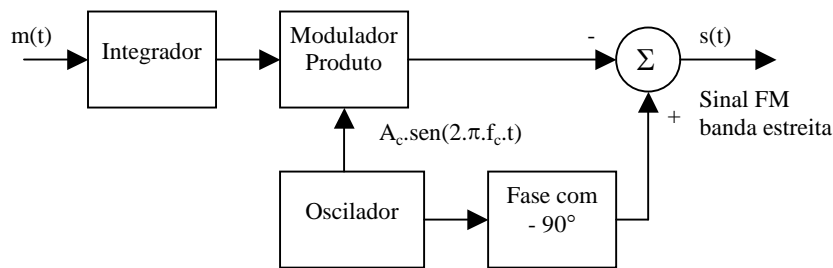
$$s(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t) \cdot \cos[\beta \cdot \sin(2\pi f_m t)] - A_c \cdot \sin(2\pi f_c t) \cdot \sin[\beta \cdot \sin(2\pi f_m t)] \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \text{se } \beta \leq 0,5 & \quad \cos[\beta \cdot \sin(2\pi f_m t)] \approx 1 \\ \text{e} & \quad \sin[\beta \cdot \sin(2\pi f_m t)] \approx \beta \cdot \sin(2\pi f_m t) \end{aligned}$$

Assim:

$$s(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t) - \beta \cdot A_c \cdot \sin(2\pi f_c t) \cdot \sin(2\pi f_m t) \quad (4.16)$$

Um possível sistema para gerar o FM-BE é mostrado abaixo.



Entretanto, o sinal modulado produzido pela (4.16) difere do ideal no seguinte:

- a) A envoltória contém “modulação residual de amplitude”.
- b) O ângulo contém “distorção harmônica”, ou seja, o ângulo é:

$$\theta(t) = 2\pi f_m t + \beta \cdot \sin(2\pi f_m t) + \frac{\beta^3}{12} \cdot \sin(2\pi \cdot 3f_m t) + \dots$$

Para $\beta \leq 0,3$ rad estes efeitos podem ser desconsiderados.

Expandindo (4.16) obtém-se:

$$s(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t) + \frac{\beta \cdot A_c}{2} \{ \cos(2\pi(f_c + f_m)t) - \cos(2\pi(f_c - f_m)t) \} \quad (4.17)^*$$

A equação (4.17) é similar ao sinal AM-DSB, exceto pelo sinal negativo na BLI.

Assim, para o sinal FM-BE, a largura de espectro e a potência média são dadas aproximadamente por: $B_T \approx 2f_m$ e $P \approx (A_c)^2/2$.

Ex.:

4.2.2 MODULAÇÃO FM BANDA LARGA

Deseja-se determinar o espectro de um sinal FM tonal para um β arbitrário. Analisando a equação (4.15), observa-se que $\cos[\beta \cdot \sin(2\pi f_m t)]$ e $\sin[\beta \cdot \sin(2\pi f_m t)]$ são periódicos e podem ser expressos em série de Fourier da seguinte forma:

$$\cos[\beta \cdot \sin(2\pi f_m t)] = J_0(\beta) + \sum_{n_{\text{par}}}^{\infty} 2J_n(\beta) \cos(2\pi n f_m t) \quad (4.18)$$

$$\sin[\beta \cdot \sin(2\pi f_m t)] = \sum_{n_{\text{impar}}}^{\infty} 2J_n(\beta) \sin(2\pi n f_m t) \quad (4.19)$$

onde $J_n(\beta)$ são *funções de Bessel* de primeira espécie e ordem n .

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[j(\beta \sin x - nx)] dx \quad (4.20)$$

Substituindo (4.18) e (4.19) em (4.15), e usando:

$$J_n(\beta) = (-1)^n J_{-n}(\beta), \text{ obtém-se:} \quad (4.21)$$

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + n f_m)t] \quad (4.22)^*$$

que é a representação em série de Fourier de um sinal FM tonal com β arbitrário, cujo espectro é:

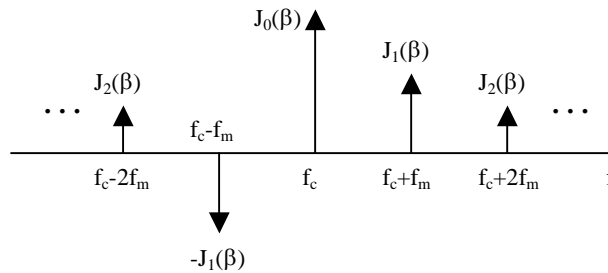
$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m)] \quad (4.23)^*$$

Obs: Os valores de $J_n(\beta)$ são tabelados.

		$J_n(x)$							
$n \backslash x$	0.5	1	2	3	4	6	8	10	12
0	0.9385	0.7652	0.2239	-0.2601	-0.3971	0.1506	0.1717	-0.2459	0.0477
1	0.2423	0.4401	0.5767	0.3391	-0.0660	-0.2767	0.2346	0.0435	-0.2234
2	0.0306	0.1149	0.3528	0.4861	0.3641	-0.2429	-0.1130	0.2546	-0.0849
3	0.0026	0.0196	0.1289	0.3091	0.4302	0.1148	-0.2911	0.0584	0.1951
4	0.0002	0.0025	0.0340	0.1320	0.2811	0.3576	-0.1054	-0.2196	0.1825
5	—	0.0002	0.0070	0.0430	0.1321	0.3621	0.1858	-0.2341	-0.0735
6		—	0.0012	0.0114	0.0491	0.2458	0.3376	-0.0145	-0.2437
7			0.0002	0.0025	0.0152	0.1296	0.3206	0.2167	-0.1703
8			—	0.0005	0.0040	0.0565	0.2235	0.3179	0.0451
9				0.0001	0.0009	0.0212	0.1263	0.2919	0.2304
10				—	0.0002	0.0070	0.0608	0.2075	0.3005
11					—	0.0020	0.0256	0.1231	0.2704
12						0.0005	0.0096	0.0634	0.1953
13						0.0001	0.0033	0.0290	0.1201
14						—	0.0010	0.0120	0.0650

- **Espectro FM tonal (conclusões a partir de $S(f)$)**

- a) Possui uma componente espectral de portadora, mais infinitas componentes laterais nas frequências $f_c \pm n f_m$, ponderadas por $J_n(\beta)$:



- b) O número de componentes significativas nas bandas laterais depende de β .
 c) A amplitude da componente de portadora depende do sinal modulante ($\beta = \frac{k_f \cdot A_m}{f_m}$).
 d) Valores elevados de β (com f_m constante) implicam em larguras de espectro elevadas.

- **POTÊNCIA MÉDIA DO SINAL FM TONAL**

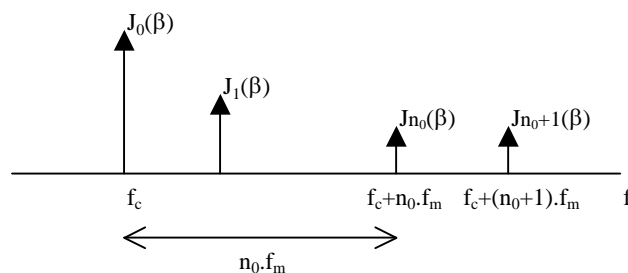
De (4.22) obtém-se:

$$P = \frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = \frac{A_c^2}{2} \quad (4.24)^*$$

Exemplo: Como as variações em amplitude e frequência de $m(t)$ afetam o espectro FM.

4.2.3 LARGURA DE ESPECTRO DO SINAL MODULADO FM

Na prática, se considera apenas as componentes espectrais significativas (de acordo com certo critério). Dado certo β , pode-se determinar a ordem n_0 , tal que $J_{n_0}(\beta) > \varepsilon$ e $J_{n_0+1}(\beta) < \varepsilon$, onde ε é um valor associado ao critério escolhido. Haverão n_0 componentes espectrais e a largura do espectro será: $B_T = 2 \cdot n_0 \cdot f_m$

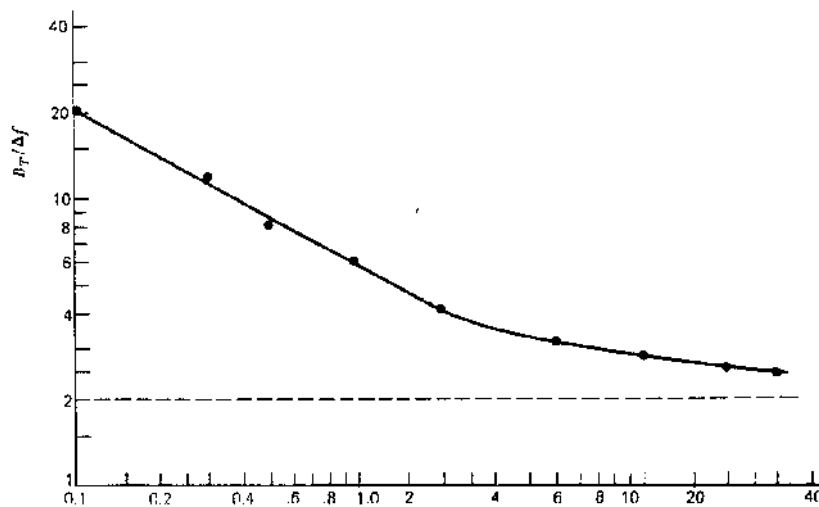


Critério: Desprezar as componentes espectrais que contribuem com menos 1 % da potência. Isto corresponde a escolher $\varepsilon = 0,1$.

Aplicação do critério em $J_n(\beta)$:

Para $\varepsilon = 0,1$ obtém-se $n_0 \approx +1$, assim: $B_T = 2(\beta + 1)f_m = 2(\Delta_f + f_m)$ (4.25)*

A equação (4.25) é conhecida como *Lei de Carson*. Um cálculo mais preciso pode ser feito com o auxílio da *curva universal*. Dado um índice de modulação, encontra-se o valor da relação B_T/Δ_f (largura do espectro pelo desvio de frequência).



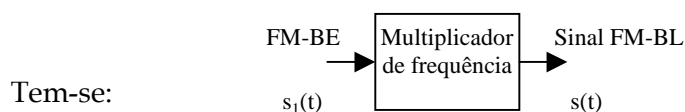
Generalização: Para um sinal modulante $m(t)$ qualquer, com frequência máxima de W Hz, define-se razão de desvio $D = \frac{\Delta_f}{W}$ e a utiliza no lugar de β .

Ex:

4.3 GERAÇÃO DE SINAIS FM

a) Método indireto

Inicialmente se produz um sinal FM-BE e depois se eleva o índice de modulação até o valor desejado através da *multiplicação de frequência*.



$$s_1(t) = A_1 \cdot \cos[2\pi \cdot f_1 \cdot t + \beta_1 \cdot \sin(2\pi \cdot f_m \cdot t)] \text{ com } \beta_1 \text{ pequeno.}$$

Após a multiplicação de frequência:

$$s(t) = A_c \cdot \cos[2\pi \cdot f_c \cdot t + \beta \cdot \sin(2\pi \cdot f_m \cdot t)] \quad \text{com} \quad \beta = n \cdot \beta_1 \text{ e } f_c = n \cdot f_1$$

onde n é o fator de multiplicação.

b) Método direto

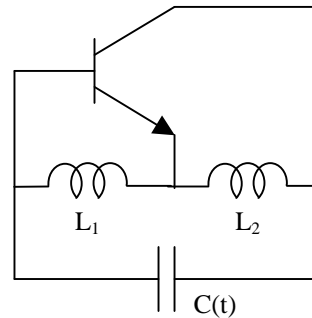
Pode-se utilizar um oscilador Hartley para a construção de um modulador FM fazendo com que a frequência do oscilador varie diretamente em função do sinal modulante.

Assume-se que a frequência do oscilador vale:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C(t)}}$$

com:

$$C(t) = C_0 + k_c \cdot m(t)$$



onde k_c é a constante de proporcionalidade capacitiva [F/V].

$$\text{Substituindo:} \quad f_i(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)(C_0 + k_c \cdot m(t))}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C_0 \left[1 + \frac{k_c}{C_0} \cdot m(t)\right]}} = f_c \left[1 + \frac{k_c}{C_0} \cdot m(t)\right]^{-1/2}$$

Onde: $f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C_0}}$ é a frequência na ausência de modulação.

$$\text{Dado que:} \quad \frac{k_c A_m}{C_0} \ll 1$$

Pode-se aproximar a ultima expressão da seguinte forma:

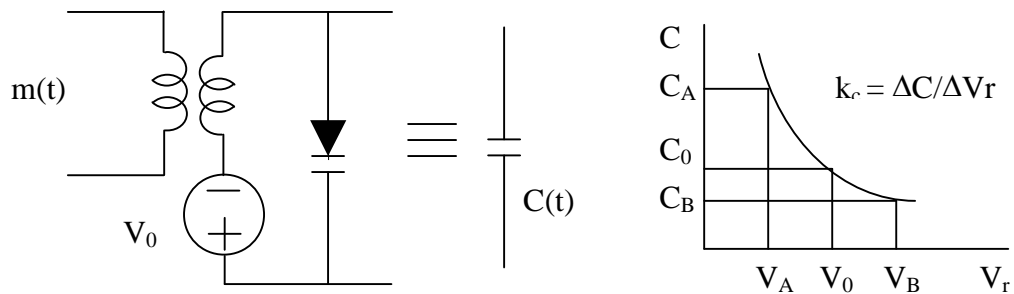
$$f_i(t) \approx f_c \left[1 - \frac{k_c}{2C_0} \cdot m(t)\right]$$

$$\text{Comparando com a frequência instantânea do FM:} \quad f_i(t) = f_c + k_f \cdot m(t)$$

$$\text{Conclui-se que:} \quad k_f = -\frac{k_c \cdot f_c}{2C_0}$$

- **Como obter $C(t)$?**

Com o uso de um diodo Varicap que, polarizado reversamente, comporta-se como um capacitor variável.



Ex:

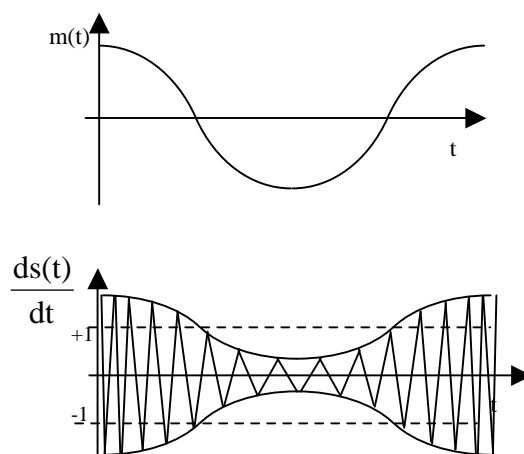
4.4 DEMODULAÇÃO DE SINAIS FM

O princípio geral é que o sinal demodulado tem amplitude diretamente proporcional a frequência instantânea do sinal FM.

Derivando o sinal FM encontra-se:

$$\begin{aligned}\frac{ds(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ A_c \cdot \cos \left[2\pi \cdot f_c \cdot t + 2\pi \cdot k_f \int_0^t m(t) dt \right] \right\} \\ &= A_c \cdot [2\pi \cdot f_c + 2\pi \cdot k_f \cdot m(t)] \cdot \sin \left[2\pi \cdot f_c \cdot t + 2\pi \cdot k_f \int_0^t m(t) dt \right]\end{aligned}$$

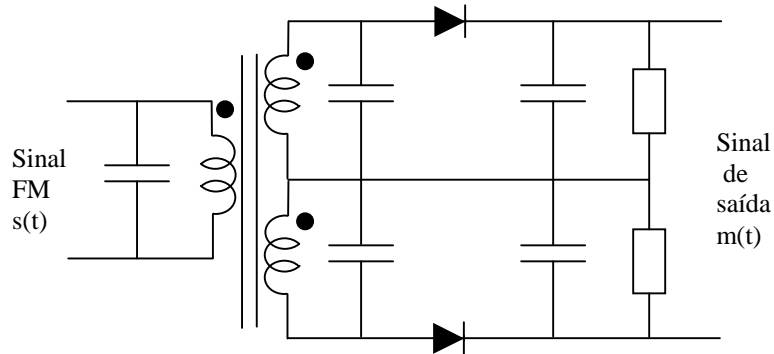
Este novo sinal é modulado em amplitude e frequência ao mesmo tempo.



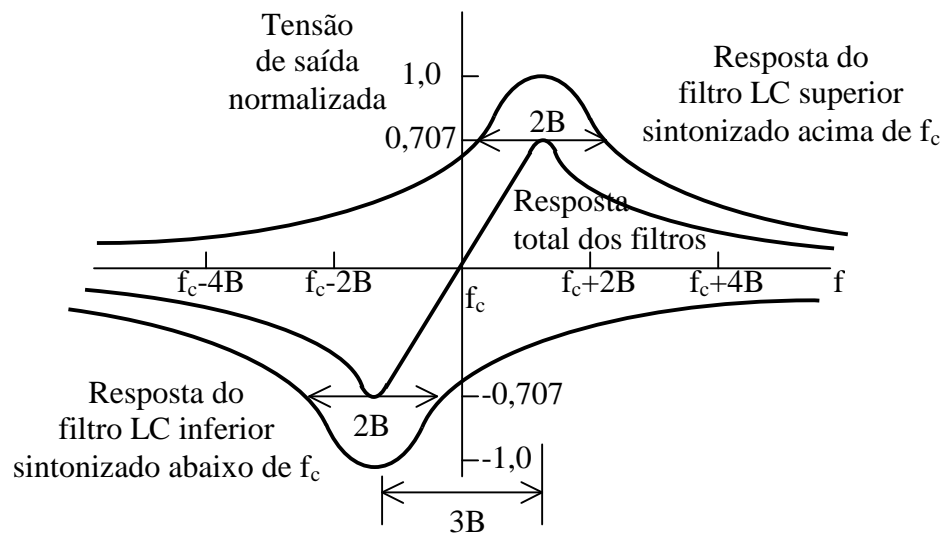
Assim, $m(t)$ pode ser obtido por um detector de envoltória após a diferenciação (entretanto este sistema apresenta baixo desempenho).

a) Discriminador de frequência

Este sistema utiliza uma configuração balanceada de modo a elevar o desempenho.



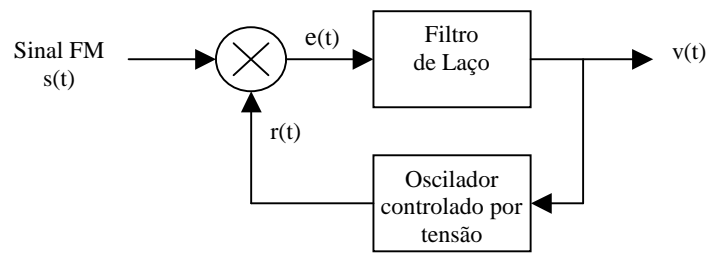
A resposta em frequência combinando dois filtros LC é mostrada na figura a seguir.



Uma separação de $3B$ entre as frequências ressonantes dos filtros LC garante a linearidade da porção central da resposta total, onde $2B$ é a largura de faixa dos filtros LC. A rampa converte as variações de frequência em variações de amplitude; os circuitos detectores de envoltória completam a demodulação.

b) Demodulação FM por PLL

O PLL (Laço Fechado por Fase) é um sistema com realimentação negativa composto de: Comparador de Fase, Filtro de Laço e Oscilador Controlado por Tensão (VCO).

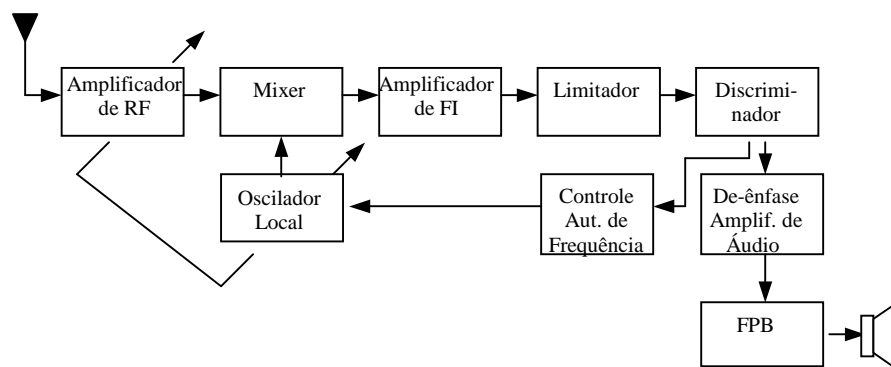


- VCO oscila inicialmente em f_c .
- $s(t)$ varia em frequência.
- O comparador produz erro $e(t)$.
- $e(t)$ é filtrado produzindo $v(t)$.
- $v(t)$ controla VCO com o objetivo de tornar $e(t)$ igual a zero.

Conclusão: $s(t)$ varia em frequência e $v(t)$ varia em amplitude → demodulador FM.

4.5 RECEPTOR DE RÁDIO FM

Utiliza a faixa de frequências de 88 a 108 MHz para transmissão de voz e música. As frequências portadoras estão espaçadas de 200 kHz. O sinal de mensagem é limitado em 15 kHz e o desvio de frequência é fixo em 75 kHz. O receptor é do tipo super-heteródino. E é formado por: uma antena, um amplificador sintonizado de radio frequência (RF), um mixer, um oscilador local, um amplificador de frequência intermediária (FI), um limitador, um discriminador de frequência, um sistema automático de controle de frequência, um amplificador de áudio, e um auto-falante.



Uma sintonia comum entre o amplificador de RF e o oscilador local permite que o mixer posicione a estação sintonizada FM na frequência de FI (10,7 MHz com faixa de 200 kHz). O limitador elimina variações de amplitude que resultariam em ruído. O discriminador faz a demodulação do sinal. Ressalta-se que o amplificador de áudio também faz a de-ênfase. O FPB elimina o ruído fora da faixa de áudio. O controle automático de frequência (CAF) ajusta, com base em $m(t)$, a frequência do oscilador local para que $f_{LO} - f_{RF} = f_{IF}$.

5 RUÍDO NAS MODULAÇÕES ANALÓGICAS

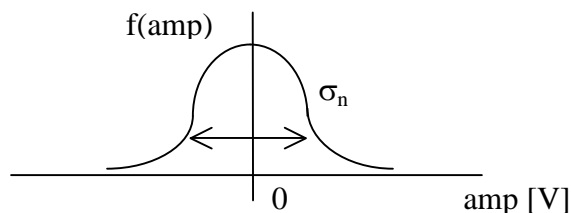
Um dos objetivos básicos no estudo dos sistemas modulados é (1) a análise dos efeitos do *ruído* no desempenho do receptor, e o uso dos resultados desta análise no projeto de sistemas. Também é de importância (2) a comparação dos diferentes processos de modulação em termos de seus desempenhos em relação ao ruído. Usa-se a *razão sinal-ruído (SNR) de saída* como uma medida para descrever a fidelidade com que o processo de demodulação recupera o sinal de mensagem na presença de ruído. Nesta discussão assume-se que o ruído é modelado por um processo aleatório do tipo *aditivo, branco e Gaussiano* de média zero (AWGN). Esta consideração corresponde a uma descrição razoável do tipo de ruído presente em muitos sistemas de comunicação e, também, torna os cálculos tratáveis.

5.1 PROCESSOS ALEATÓRIOS

Um *processo aleatório* é uma extensão natural do conceito de variável aleatória quando se consideram sinais. No modelamento de diversos sinais em telecomunicações é mais apropriado considerá-los como aleatórios e não como determinísticos.

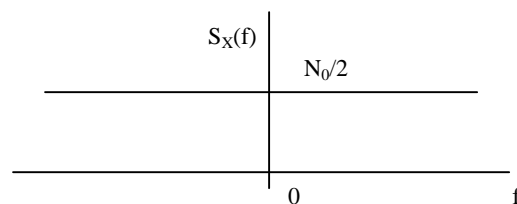
5.1.1 Processo Gaussiano

Corresponde a um sinal aleatório cujas amostras são distribuídas segundo uma distribuição Gaussiana. Tal processo descreve o *ruído térmico* em dispositivos eletrônicos, pois este é produzido pelo movimento aleatório de elétrons devido à agitação térmica. O comportamento Gaussiano pode ser explicado em função da soma de pequenas correntes produzidas por um grande número de fontes (os elétrons). O teorema do limite central garante que a corrente total possui distribuição Gaussiana.

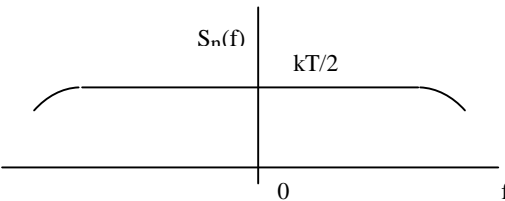


5.1.2 Processo Branco

Em um processo branco, todas as componentes possuem igual potência, i.e., a densidade espectral de potência (DEP) é constante para todas as frequências.



Obviamente, nenhum processo físico real pode ter potência infinita; entretanto a mecânica quântica mostra que o ruído térmico tem densidade espectral de potência (DEP) dada por:

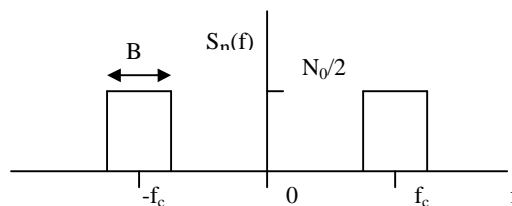
$$S_n(f) = \frac{h.f}{2 \left(e^{\frac{h.f}{k.T}} - 1 \right)}$$


onde h é a constante de Planck ($6,6 \times 10^{-34}$ J.s), k é a constante de Boltzmann ($1,38 \times 10^{-23}$ J/K), e T é a temperatura em graus Kelvin (K).

Este espectro tem valor máximo igual a $kT/2$, e decresce a uma taxa muito lenta. Encontra-se o valor $0,9.kT/2$ para $T=300$ K e $f=2 \times 10^{12}$ Hz (muito acima das frequências usadas em sistemas convencionais de comunicações). O valor kT é usualmente denotado por N_0 , assim a densidade espectral de potência do ruído térmico é dada por $S_n(f) = N_0/2$ (para propósitos práticos), e chamada *densidade espectral bilateral de potência*.

5.2 RUÍDOS PASSA-FAIXA E BANDA-BASE

Suponha-se que um ruído térmico com $S_n(f) = N_0/2$ é aplicado a um filtro passa faixa ideal com largura de faixa igual à B , obtendo-se um ruído com a seguinte DEP:



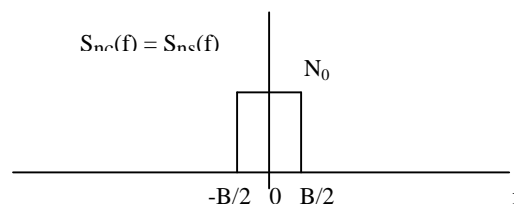
Um ruído com esta característica é dito *ruído passa-faixa*, e é representado por:

$$n(t) = n_c(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \cdot \sin(2\pi f_c t)$$

Pode-se demonstrar que as funções DEP para as componentes em fase e quadratura deste ruído são dadas por:

$$S_{nc}(f) = S_{ns}(f) = \begin{cases} [S_n(f - f_c) + S_n(f + f_c)] & |f| \leq \frac{B}{2} \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

De modo que:



Um ruído com esta característica é dito *ruído banda-base*. Observa-se que a potência média do ruído, nos dois casos, é igual e dada pela área das figuras, ou seja, $B \cdot N_0$.

5.3 RAZÃO SINAL-RUÍDO (SNR)

Usa-se a *razão sinal-ruído de saída* para avaliar a fidelidade da mensagem recebida (na presença do ruído):

SNR_o = potência média da mensagem na saída do receptor / potência média do ruído na saída do receptor

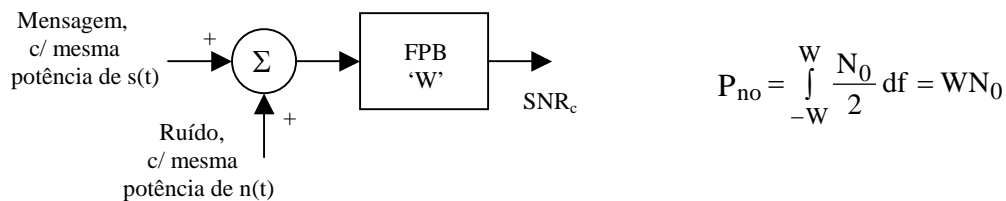
Para calcular a SNR para diferentes tipos de modulação-demodulação define-se a *razão sinal-ruído de canal*:

SNR_c = potência média do sinal modulado na entrada do receptor / potência média do ruído calculada considerando a largura de faixa ocupada pela mensagem na entrada do receptor

Esta razão pode ser vista como aquela resultante da transmissão em banda base ou da transmissão direta da mensagem sem modulação (porém deve-se considerar as potências do sistema passa-faixa). Neste caso o receptor consiste simplesmente em um FPB com largura de faixa W (modelo equivalente). Assume-se que (1) a potência da mensagem na entrada do FPB é igual a potência do sinal modulado, e (2) que o filtro permite a passagem do sinal de mensagem rejeitando o ruído fora-de-faixa.

5.3.1 Modelo Equivalente em Banda Base

A potência do ruído na saída do receptor será:



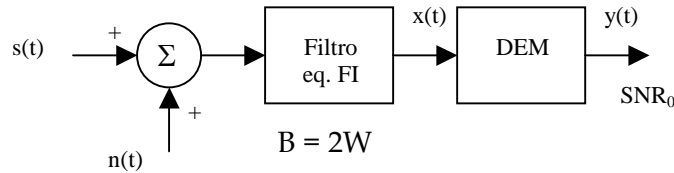
Considerando P_R a potência do sinal recebido, a SNR_c será:

$$SNR_c = \frac{P_R}{WN_0} \quad (5.1)^*$$

Para efeitos de comparação entre diversos sistemas modulados, define-se a *Figura de Mérito* do receptor como: $\mathfrak{F}_m = SNR_o / SNR_c$. Quanto mais alta a \mathfrak{F}_m , melhor será o desempenho do receptor frente ao ruído.

5.4 MODELO DE UM RECEPTOR AM

Com o objetivo de avaliar os efeitos do ruído no desempenho de um receptor AM considera-se o modelo abaixo, que consiste de um filtro equivalente de FI (representando o efeito serie das seções de RF e FI) e um demodulador. O filtro FI possui largura de faixa suficiente para acomodar o espectro do sinal modulado.



5.4.1 Efeito do Ruído na Modulação DSB/SC

Para esta análise são considerados sinal e ruído presentes na *entrada* de receptor. Desta forma após o filtro equivalente de FI tem-se:

$$\begin{aligned} x(t) &= s(t) + n(t) \\ &= A_c \cos(2\pi f_{ct}) m(t) + n_c(t) \cos(2\pi f_{ct}) - n_s(t) \sin(2\pi f_{ct}) \end{aligned}$$

Onde o ruído é representado por suas componentes em fase e quadratura. Tal sinal é demodulado usando-se um detector coerente (multiplicação por cosseno e filtragem):

$$\begin{aligned} v(t) &= x(t) \cos(2\pi f_{ct}) \\ &= \frac{1}{2} [A_c m(t) + n_c(t)] [1 + \cos(2\pi 2f_{ct})] - \frac{1}{2} A_c n_s(t) \sin(2\pi 2f_{ct}) \end{aligned}$$

De modo que:

$$y(t) = \frac{1}{2} [A_c m(t) + n_c(t)]$$

Assim, a potência média da parcela referente ao sinal demodulado (mensagem) é:

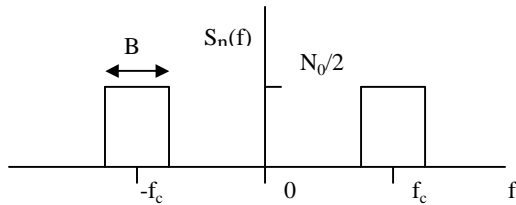
$$P_o = \frac{A_c^2 \cdot P_m}{4}$$

Onde P_m é a potência média do sinal de mensagem. Obs: $A \cdot g(t) \rightarrow A^2 \cdot P_g$

A potência da parcela referente ao ruído na saída é:

$$P_{n_o} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot P_{n_c} = \frac{1}{4} P_n$$

Onde usa-se o fato de que o conteúdo em potencia de $n_c(t)$ e de $n(t)$ (antes do demodulador) são iguais. Calculando a potencia media P_n obtém-se:



$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df = \frac{N_0}{2} \times 4W = 2WN_0$$

$$P_{n_o} = \frac{2WN_0}{4}$$

A SNR na saída será:

$$SNR_o = \frac{P_o}{P_{n_o}} = \frac{A_c^2 \cdot P_m}{2WN_0} \quad (5.2)^*$$

Neste caso a potência do sinal recebido é (igual à potência de $s(t)$):

$$P_R = \frac{A_c^2 \cdot P_m}{2}$$

Obs:

$$A \cdot \cos(2\pi f_0 t) \cdot g(t) \rightarrow \frac{A^2}{2} \cdot P_g$$

Assim obtém-se:

$$SNR_c = \frac{A_c^2 \cdot P_m}{2WN_0} \quad (5.3)^*$$

Finalmente: $\mathfrak{S}_m = 1$

Conclui-se que o desempenho do receptor frente ao ruído é o mesmo daquele obtido simplesmente transmitindo o sinal de mensagem diretamente na presença de ruído. Aqui o efeito da modulação é unicamente deslocar o sinal de mensagem para uma faixa diferente de frequências.

5.4.2 Efeito do Ruído na Modulação SSB

Neste caso:

$$s(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \cos(2\pi f_{ct}) \pm \frac{A_c}{2} m(t) \sin(2\pi f_{ct})$$

e

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

$$= \left[\frac{A_c}{2} m(t) + n_c(t) \right] \cdot \cos(2\pi f_{ct}) + \left[\pm \frac{A_c}{2} m(t) - n_s(t) \right] \cdot \sin(2\pi f_{ct})$$

e na saída do detector coerente:

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{A_c}{2} m(t) + n_c(t) \right]$$

como anteriormente:

$$P_o = \frac{A_c^2 \cdot P_m}{16}$$

$$P_{n_o} = \frac{P_n}{4}$$

entretanto:

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df = \frac{N_0}{2} \times 2W = WN_0$$

pois $B_T = W$ [Hz] para SSB.

Assim:

$$SNR_o = \frac{A_c^2 \cdot P_m}{4WN_o} \quad (5.4)^*$$

Com:

$$P_R = \frac{A_c^2 \cdot P_m}{4}$$

obtém-se:

$$SNR_c = \frac{A_c^2 \cdot P_m}{4WN_o} \quad (5.5)^*$$

Assim: $\mathfrak{I}_m = 1$

Conclui-se que SSB e DSB/SC possuem o mesmo desempenho.

5.4.3 Efeito do Ruído na Modulação AM-DSB

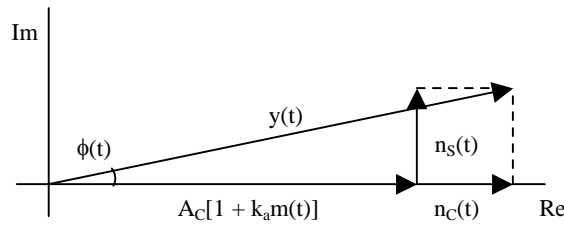
Neste caso:

$$s(t) = A_c \cdot [1 + k_a \cdot m(t)] \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

e

$$x(t) = \{A_c \cdot [1 + k_a \cdot m(t)] + n_c(t)\} \cdot \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \quad (5.6)$$

Entretanto o sinal recebido é aplicado a um detector de envoltória. Representando as componentes em um *diagrama de fasores*:



A resultante corresponde à envoltória de $x(t)$ e é a saída do detector:

$$y(t) = \{[A_c \cdot [1 + k_a \cdot m(t)] + n_c(t)]^2 + [n_s(t)]^2\}^{1/2}$$

Esta expressão é complexa e precisa ser simplificada. Considerando que a potência média da portadora é elevada quando comparada à potência média do ruído, obtém-se:

$$y(t) \approx A_c \cdot [1 + k_a \cdot m(t)] + n_c(t)$$

Após bloqueio da componente DC (uso de capacitor), encontra-se:

$$y(t) \approx A_c \cdot k_a \cdot m(t) + n_c(t) \quad (5.7)$$

de onde:

$$P_o = A_c^2 \cdot k_a^2 \cdot P_m$$

Uma vez que:

$$P_{n_o} = P_{n_c} = P_n = 2WN_o$$

chega-se a:

$$SNR_o = \frac{A_c^2 \cdot k_a^2 \cdot P_m}{2WN_o} \quad (5.9)^*$$

Com base em (5.6) :

$$P_R = \frac{A_c^2}{2} \cdot [1 + k_a^2 \cdot P_m]$$

e

$$SNR_C = \frac{P_R}{WN_o} = \frac{A_c^2 \cdot [1 + k_a^2 \cdot P_m]}{2WN_o} \quad (5.8)^*$$

Conclui-se que:

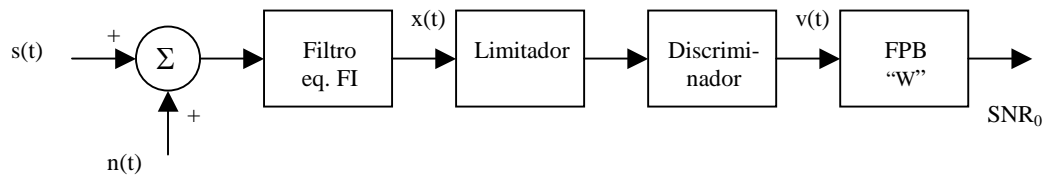
$$\mathfrak{I}_m = \frac{k_a^2 \cdot P_m}{1 + k_a^2 \cdot P_m} < 1 \quad (5.10)^*$$

Ou seja, o desempenho do receptor AM-DSB é sempre inferior ao desempenho do DSB/SC e do SSB (resultado da transmissão da portadora).

Ex:

5.5 MODELO DO RECEPTOR FM

Considere o modelo abaixo:



O limitador remove as variações de amplitude (ruído indesejado) do sinal FM. O discriminador produz um sinal de saída cuja amplitude é proporcional à frequência instantânea da portadora. O FPB elimina o ruído fora-de-faixa.

5.5.1 Ruído na Recepção FM

Considera-se que o ruído na saída do filtro equivalente de FI é representado por:

$$n(t) = n_c(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) = r(t) \cdot \cos[2\pi f_c t + \psi(t)]$$

e que o sinal modulado FM é:

$$s(t) = A_c \cdot \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] = s_c(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) - s_s(t) \cdot \sin(2\pi f_c t)$$

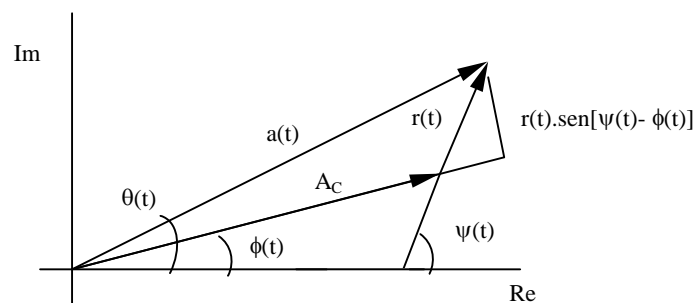
onde:

$$s_c(t) = A_c \cdot \cos \phi(t) \quad \text{e} \quad s_s(t) = A_c \cdot \sin \phi(t)$$

Então, o sinal após o filtro equivalente de FI será:

$$\begin{aligned} x(t) &= s(t) + n(t) \\ &= A_c \cdot \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] + r(t) \cdot \cos[2\pi f_c t + \psi(t)] = a(t) \cdot \cos[2\pi f_c t + \theta(t)] \end{aligned}$$

Cuja representação em diagrama de fasores é:

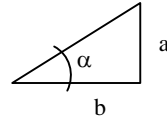


A envoltória de $x(t)$ não interessa (é removida pelo limitador). O objetivo é determinar o erro na frequência instantânea da portadora causado pelo ruído, ou seja, interessa a fase $\theta(t)$. Assumindo que a potência da portadora é muito maior que a potência do ruído, pode-se escrever:

$$\theta(t) = \phi(t) + \arctg \left[\frac{r(t) \cdot \sin[\psi(t) - \phi(t)]}{A_c + r(t) \cdot \cos[\psi(t) - \phi(t)]} \right]$$

$$\approx \phi(t) + \frac{r(t) \cdot \sin[\psi(t)]}{A_c} = \phi(t) + \frac{n_s(t)}{A_c} \quad \text{p/ } \theta(t) - \phi(t) \downarrow$$

Obs: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \alpha \approx \frac{a}{b} \quad \text{p/ } \alpha \downarrow$



Para FM:

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(t) dt$$

e a saída do discriminador será:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = k_f \cdot m(t) + n_d(t)$$

onde:

$$n_d(t) = \frac{1}{2\pi A_c} \frac{d n_s(t)}{dt}$$

Observa-se que a componente de ruído é inversamente proporcional à amplitude A_c da portadora, assim quanto maior é o nível do sinal menor será o nível de ruído (não ocorre em AM).

O sinal $n_d(t)$ é obtido pela derivada de $n_s(t)$. Isto equivale a filtrar $n_s(t)$ usando um filtro com $H(f) = jf / A_c$. Significa que a densidade espectral de potência (DEP) de $n_d(t)$ está relacionada à DEP de $n_s(t)$ da seguinte forma:

$$S_{Nd}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_{Ns}(f) = \frac{f^2}{A_c^2} S_{Ns}(f)$$

A DEP de $n_s(t)$ do ruído (em banda-base) é:

$$S_{Ns}(f) = N_0, \quad |f| \leq \frac{B_T}{2}$$

Após o FPB encontra-se:

$$P_{no} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{nd}(f) df = \int_{-W}^W \frac{f^2}{A_c^2} N_0 df = \frac{2N_0 W^3}{3A_c^2}$$

A potência média do sinal de saída $v(t)$ é: $P_o = k_f^2 \cdot P_m$

Assim:

$$SNR_o = \frac{3A_c^2 \cdot k_f^2 \cdot P_m}{2N_0 W^3} \quad (5.11)^*$$

Neste caso a potência do sinal recebido é:

$$P_R = \frac{A_c^2}{2}$$

e

$$SNR_C = \frac{A_c^2}{2WN_0} \quad (5.12)^*$$

Conclui-se que \mathfrak{I}_m pode ser maior do que a unidade:

$$\mathfrak{I}_m = \frac{3k_f^2 P_m}{W^2} \quad (5.13)^*$$

Ex:

- **Comparação dos Desempenhos dos Sinais Modulados AM-DSB e FM**

Para AM-DSB tonal com $\mu=1$ tem-se $\mathfrak{I}_m = 1/3$.

Usando FM é possível melhorar o desempenho frente ao ruído se: $\mathfrak{I}_m(\text{FM}) > \mathfrak{I}_m(\text{AM-DSB})$, ou seja:

$$\frac{3}{2} \beta^2 > \frac{1}{3}$$

que fornece $\beta > 0.5$ (FM banda larga!).

5.5.2 Efeito Limiar em FM

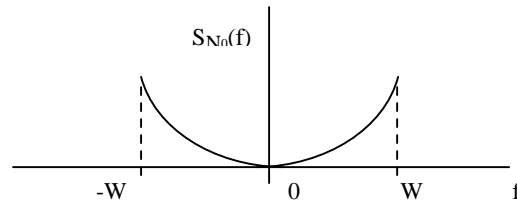
Assumindo-se uma SNR alta observa-se que as componentes de sinal e ruído na saída do discriminador FM são aditivas. Em geral esta consideração não é correta. Para baixos valores de SNR as componentes de sinal e ruído apresentam-se tão interligadas que é impossível distinguir o sinal desejado do ruído (devido à não linearidade do processo de demodulação). Existe um valor específico para a SNR_C , abaixo do qual, este fenômeno ocorre e o receptor FM deixa de funcionar (*efeito limiar*). A literatura mostra que a SNR de limiar é dada por:

$$SNR_{\text{LIMIAR}} \approx 20.(\beta + 1) \quad (5.14)$$

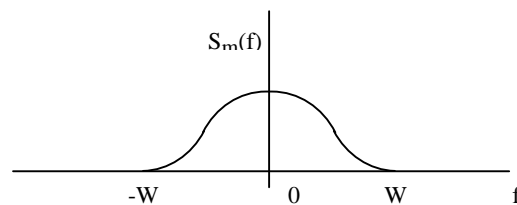
Esta expressão permite calcular o *máximo valor* permitido de β de modo a assegurar que o sistema trabalha acima do limiar.

5.5.3 Pré-Ênfase e De-Ênfase em FM

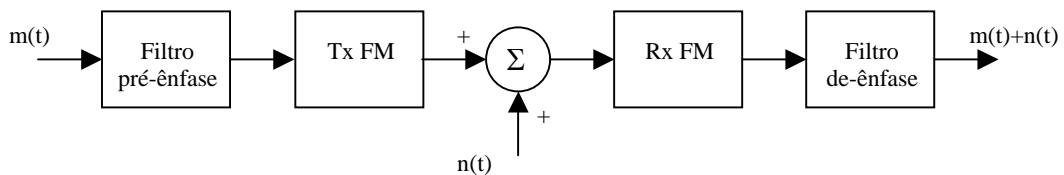
Mostrou-se que a DEP do ruído na saída do receptor FM apresenta uma dependência quadrática com a frequência, ou seja:



Tipicamente sinais de mensagem possuem DEP da forma:



Isto significa que para baixas frequências o desempenho da demodulação FM é melhor do que para altas frequências. O método de pré(de)-ênfase permite equalizar o desempenho ao longo de toda a faixa de frequências, conforme mostrado abaixo:



As componentes de alta frequência de $m(t)$ são artificialmente enfatizadas antes da modulação, e antes que o ruído seja introduzido. Na saída do discriminador realiza-se uma operação inversa atenuando as componentes de alta frequência e, assim, aumentando a SNR de saída do sistema.

No sistema FM comercial, utilizam-se filtros RC (1º. ordem) passa-baixa para de-ênfase, e passa-alta para pré-ênfase.

$$H_{de}(f) = \frac{1}{1 - j \frac{f}{f_o}}$$

e

$$H_{pre}(f) = 1 + j \frac{f}{f_o}$$

Como os efeitos dos filtros são cancelados, a potência de $m(t)$ permanece inalterada e deve-se considerar somente o efeito da filtragem (FPB) sobre o ruído recebido.

O ruído após a de-ênfase tem DEP igual a:

$$S_N(f) = S_{Nd}(f) \cdot |H_{de}(f)|^2$$

$$= \frac{N_o}{A_c^2} f^2 \frac{1}{1 + \frac{f^2}{f_o^2}}$$

Com potência:

$$P_{no} = \int_{-W}^W S_n(f) df = \frac{2N_o f_o^3}{A_c^2} \left[\frac{W}{f_o} - \arctg\left(\frac{W}{f_o}\right) \right]$$

A melhora pelo uso da pré(de)-ênfase no sistema é:

$$D = \frac{SNR_{o,PD}}{SNR_o} = \frac{P_{no}}{P_{no,PD}} = \frac{\left(\frac{W}{f_o}\right)^3}{3 \left[\frac{W}{f_o} - \arctg\left(\frac{W}{f_o}\right) \right]} \quad (5.15)$$

Se $W = 15$ kHz e $f_o = 2,1$ kHz, então $D = 22$ (13 dB).

A figura abaixo compara o desempenho dos vários sistemas:

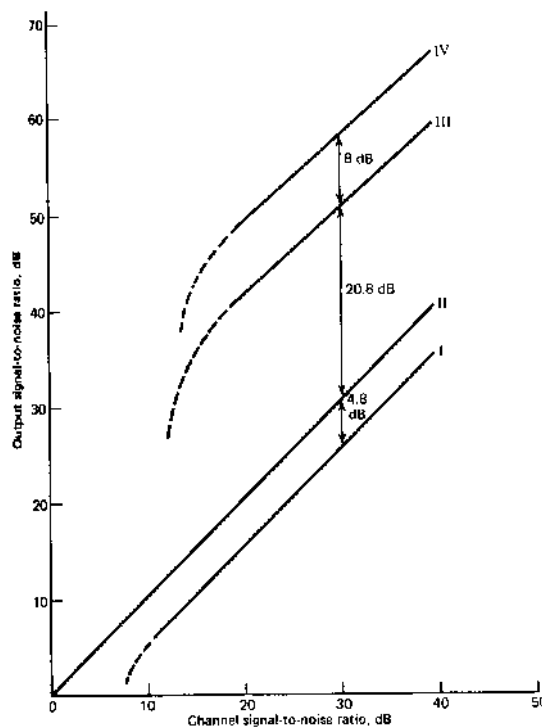


Figure 5.21 Comparison of the noise performance of various CW modulation systems. Curve I: Full AM, $\mu = 1$. Curve II: DSBSC, SSB. Curve III: FM, $\beta = 2$. Curve IV: FM, $\beta = 5$. (Curves III and IV include 13-dB pre-emphasis, de-emphasis improvement).

Ex:

6 AMOSTRAGEM E MULTIPLEXAÇÃO

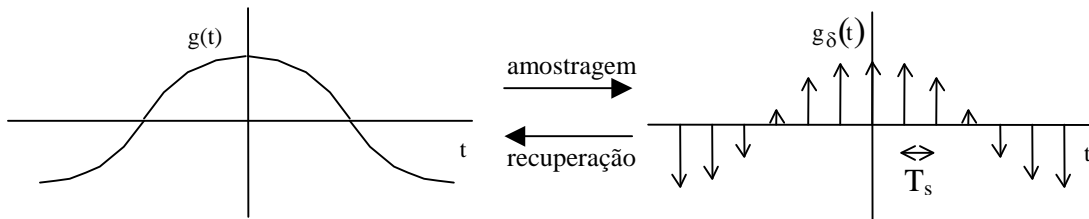
A amostragem é a base para a *conversão analógico-digital*, *multiplexação* no tempo, e para a *modulação analógica de pulsos*. Na amostragem, representa-se um sinal $g(t)$ por amostras tomadas periodicamente no tempo. O *sinal amostrado* substitui, então, o sinal original (para fins de transmissão/processamento). Deseja-se determinar as condições que devem ser satisfeitas para que sinal amostrado represente o sinal original $g(t)$ sem perda de informação.

6.1 AMOSTRAGEM IDEAL

Pode-se expressar um sinal amostrado por:

$$g_{\delta}(t) = g(t) \cdot g_{Ts}(t) \quad (6.1)$$

onde $g_{Ts}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$ é a *função de amostragem ideal*, e T_s é o *período de amostragem*.

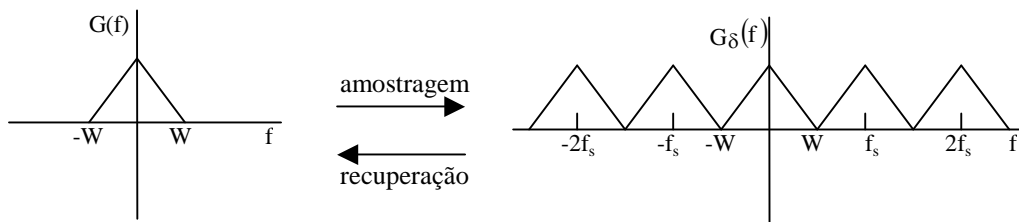


A T.F. do sinal amostrado $g_{\delta}(t)$ é:

$$G_{\delta}(f) = G(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \quad \text{ou} \quad G_{\delta}(f) = \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \quad (6.2)^*$$

Tem-se um espectro periódico com período igual à *frequência de amostragem* $\left(f_s = \frac{1}{T_s}\right)$.

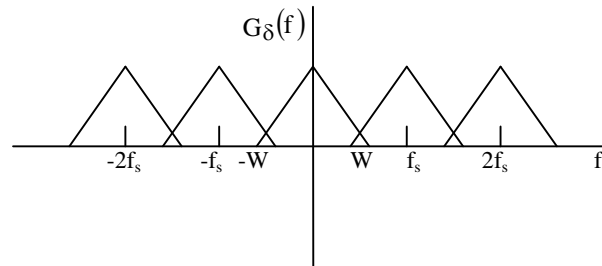
Se $f_s = 2W$:



Por observação, conclui-se que para recuperar $g(t)$ deve-se usar um FPB, mas deve-se impor a condição de não sobreposição das réplicas de $G(f)$ no espectro periódico, ou seja, $f_s \geq 2W$.

Obs: A quantidade $f_s = 2W$ é conhecida como *Taxa de Nyquist*.

No caso em que $f_s < 2W$ ocorre sobreposição de espectros, conforme a figura abaixo. O sinal original *não* pode ser recuperado pois sofre interferência.



6.1.1 Recuperação de $g(t)$ a partir de amostras com $T_s=1/(2W)$:

a) Do ponto de vista do domínio da frequência:

$$G(f) = G_\delta(f)H(f) \quad (6.3)$$

com

$$H(f) = \frac{1}{2W} \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right) \quad (\text{FPB ideal com } f_{3\text{dB}} = W) \quad (6.4)$$

b) Do ponto de vista do domínio do tempo:

$$g(t) = g_\delta(t) * h(t)$$

dado que :

$$g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n \cdot T_s) \delta(t - n \cdot T_s)$$

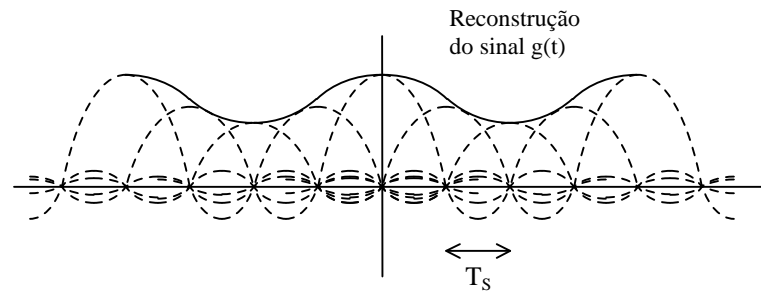
obtém-se:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2W}\right) \delta\left(t - \frac{n}{2W}\right) * h(t)$$

Finalmente, com uso de (6.4), obtém-se:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2W}\right) \cdot \text{sinc}(2Wt - n), \quad -\infty \leq t \leq \infty \quad (6.5)^*$$

Conclui-se que $g(t)$ é unicamente determinada pelas amostras $\left\{g\left(\frac{n}{2W}\right)\right\}$. A equação (5.5) fornece uma *fórmula de interpolação* para a reconstrução do sinal original.



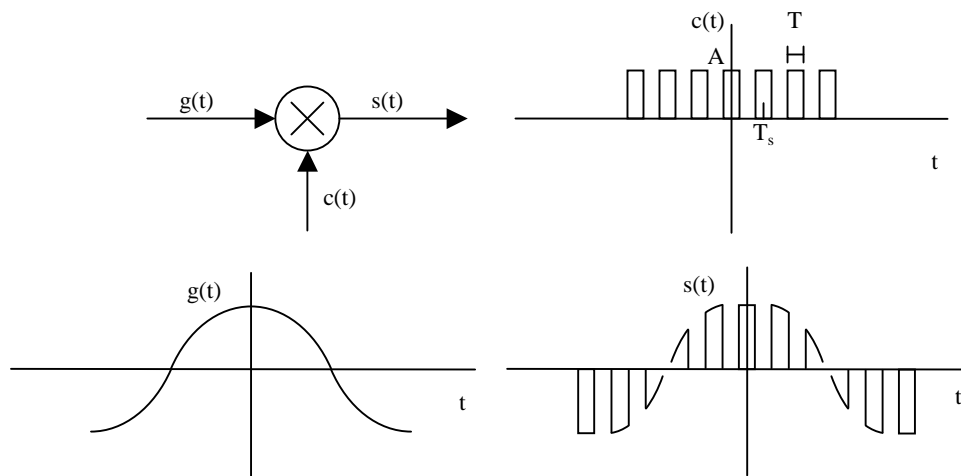
6.1.2 Aliasing

Quando $f_s < 2W$, um sinal de frequência acima de $f_s/2$ é visto como um sinal de frequência abaixo de $f_s/2$. Em outras palavras, devido à escolha incorreta de f_s , componentes de frequência elevada do sinal original são deslocadas incorretamente para uma região de baixas frequências no espectro (confusão de frequências).

Ex:

6.2 AMOSTRAGEM PRÁTICA

Circuitos físicos não amostram instantaneamente. Considere-se então o sistema amostrador abaixo onde a função de amostragem corresponde a um trem de pulsos retangulares (ou seja, as amostras terão duração finita):



Então: $s(t) = c(t)g(t)$

Porém $c(t)$ pode ser expressa em série de Fourier .

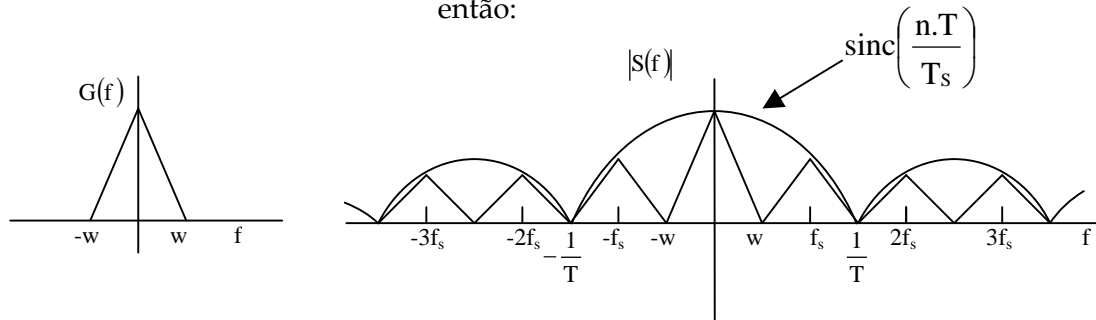
$$c(t) = \frac{T_s A}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{nT_s}{T_s}\right) \exp\left(\frac{j2\pi n t}{T_s}\right) \quad (6.6)$$

Substituindo e trabalhando, têm-se no domínio da frequência:

$$S(f) = \frac{T.A}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n.T}{T_s}\right) G\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \quad (6.7)^*$$

se:

então:

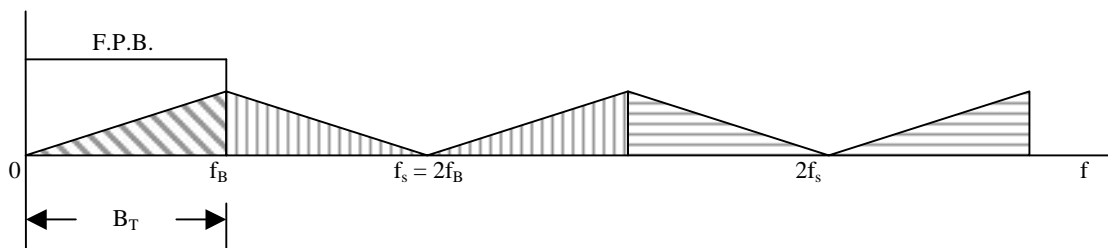


A n -ésima replica do espectro $G(f)$ é ponderada pelo valor $\text{sinc}(n.T/T_s)$. Vale a condição de Nyquist e o sinal original pode ser recuperado usando um FPB.

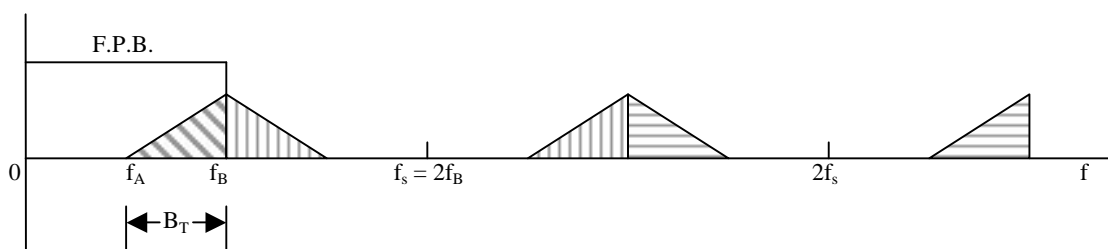
6.3 AMOSTRAGEM DE SINAIS PASSA-FAIXA

Um *sinal passa-faixa* possui espectro estreito, ou seja, possui componentes na faixa de frequências $f_c - W \leq f \leq f_c + W$, e normalmente $f_c \gg W$. É possível amostrar e recuperar um sinal passa-faixa usando uma frequência de amostragem mais baixa que a de Nyquist. As figuras a seguir ilustram a situação.

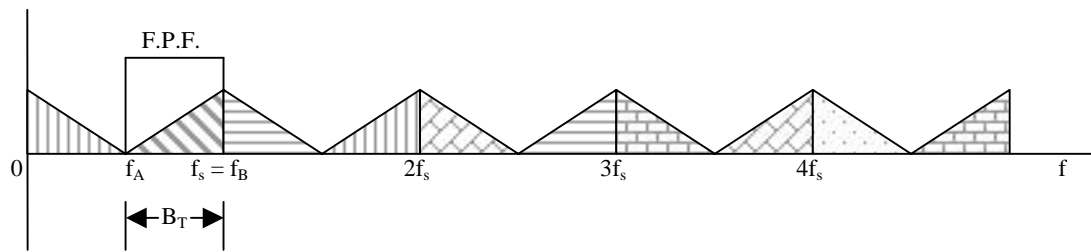
- a) Quando o sinal ocupa toda a faixa de 0 à f_B , o domínio da frequência ficará totalmente preenchido por espectros. A recuperação é realizada com um FPB.



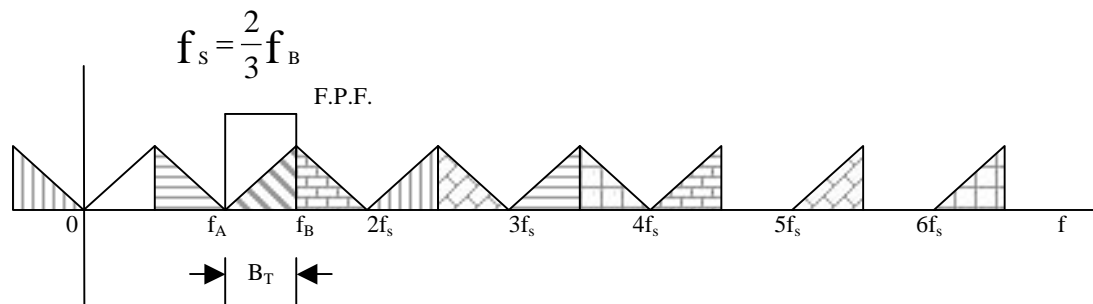
- b) Se o sinal ocupa só a faixa f_A à f_B (sinal passa-faixa) aparecerão *lacunas*.



- c) Se a lacuna for suficiente para acomodar um novo espectro, pode-se usar outro esquema de amostragem. No caso abaixo, pode-se usar $f_s = f_B$ e a recuperação será feita com um filtro FPF.



- d) Sempre que houver espaço para incluir mais um espectro pode-se baixar o valor de f_s .



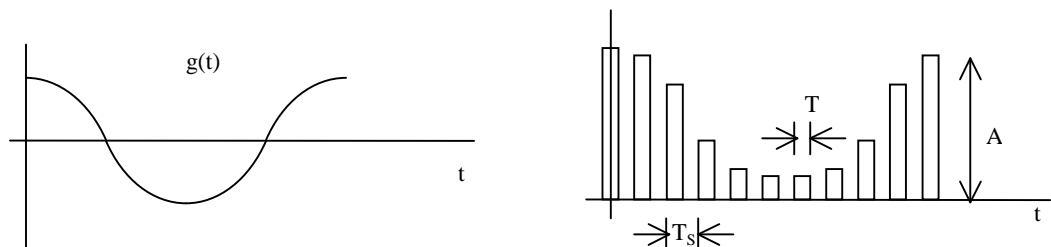
Generalizando: $f_s = \frac{2.f_B}{\text{INT}\left\{\frac{f_B}{B_T}\right\}}$, onde $\text{INT}\{.\}$ significa a parte inteira do argumento.

Ex:

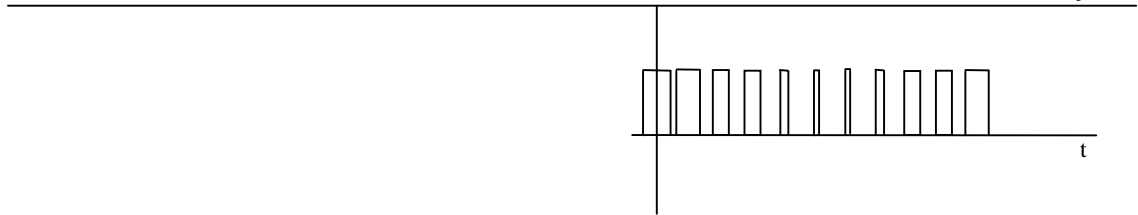
6.4 MODULAÇÃO ANALÓGICA DE PULSOS

Vantagem: A potência média do sinal modulado é proporcional à relação T/T_s .

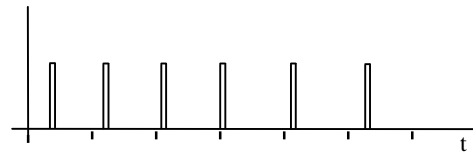
- a) Modulação por Amplitude de Pulso (PAM): A amplitude dos pulsos retangulares regularmente espaçados varia em função dos valores das amostras de um sinal de mensagem contínuo.



- b) Modulação por Duração de Pulso (PDM): A duração dos pulsos individuais varia em função dos valores das amostras do sinal de mensagem contínuo.



c) Modulação por Posição de Pulso (PPM): A posição do pulso, em relação à sua ocorrência na portadora (trem de pulsos), varia em função dos valores das amostras do sinal de mensagem contínuo.



Obs: O sinal modulado deve representar o sinal de mensagem, portanto o espaçamento entre os pulsos no sinal modulado deve satisfazer o teorema da amostragem (pulso = amostra). A demodulação é realizada com FPBs.

6.5 MULTIPLEXAÇÃO

As técnicas de *multiplexação* permitem que um mesmo recurso (meio de transmissão) seja compartilhado por vários processos de comunicação ao mesmo tempo.

6.5.1 Multiplexação por Divisão de Frequência (FDM)

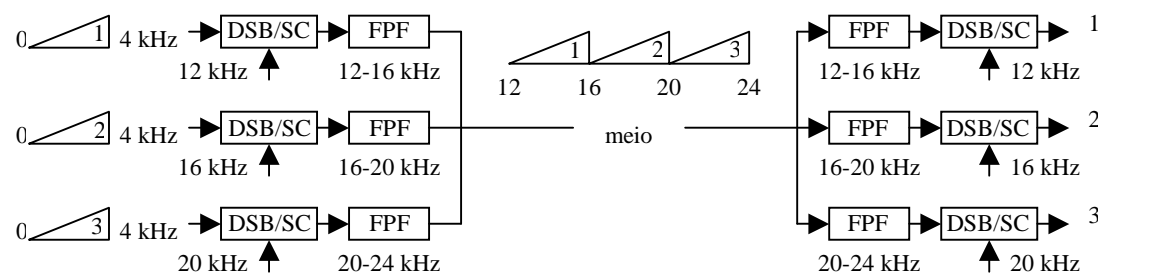
No sistema FDM a faixa de frequências disponível é subdividida em canais de largura de faixa fixa. Cada canal é utilizado por um processo de comunicação. Utiliza tecnologia analógica, e surgiu com o advento da telefonia para multiplexar sinais telefônicos. Como desvantagem os canais podem estar inativos.

a) Canal Telefônico

Possui largura de faixa igual a 4 kHz. Estudos estatísticos mostram que se o sinal de voz for limitado a 4 kHz perde-se de 5% a 10% da inteligibilidade e potência do sinal.

b) Esquema básico (segundo recomendação da ITU-T, *International Telecommunications Union – Telecommunications Standardization Sector*)

Para a multiplexação de 3 canais. Os espectros dos sinais são deslocados para as frequências de 12, 16 e 20 kHz, sendo aproveitados os espectros nas faixas de frequência 12-16, 16-20 e 20-24 kHz (este conjunto é dito *pré-grupo básico*).



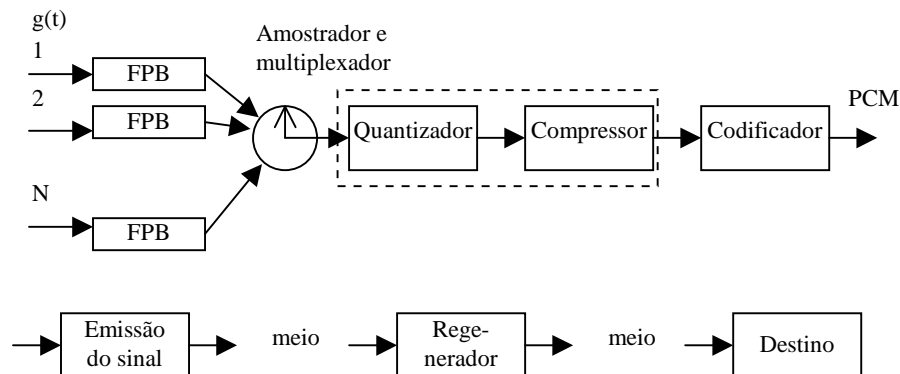
c) FDM de alta capacidade (ITU-T)

Empregam-se sucessivos estágios de agrupamento de sinais multiplexados.

- Grupo básico = 4 pré-grupos-básicos, 12 canais (60k-180k Hz).
- Super grupo básico = 5 grupos-básicos, 60 canais (312k-552k Hz).
- Grupo mestre = 5 Super grupos-básicos, 300 canais (812k-2044k Hz).
- Super grupo mestre = 3 grupos-mestre, 900 canais (8516k-12388k Hz).

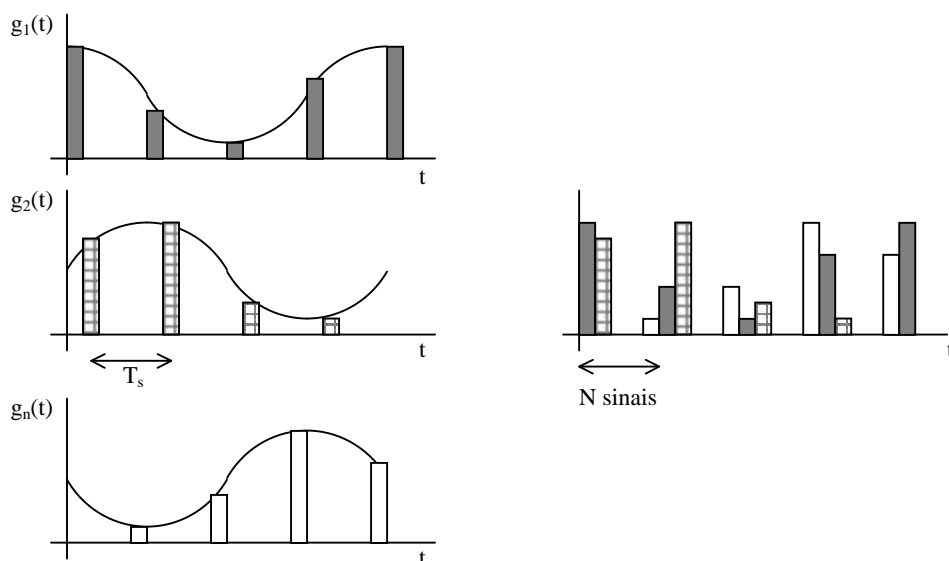
6.5.2 Multiplexação por Divisão de Tempo (TDM)

No sistema TDM o tempo é subdividido em *slots* de largura fixa. Cada slot é utilizado por um processo de comunicação. O sinal multiplexado pode ser, em seguida, convertido em um sinal digital por meio da *modulação por codificação de pulso* (PCM). O sinal digital tem a vantagem de ser regenerado durante ao processo de transmissão e retransmitido, pois o sinal PCM só possui dois níveis (alto e baixo), por isso sua transmissão é mais confiável que no caso analógico.

**Blocos do TDM :**

Filtros: limitam a largura de espectro dos sinais para evitar o aliasing.

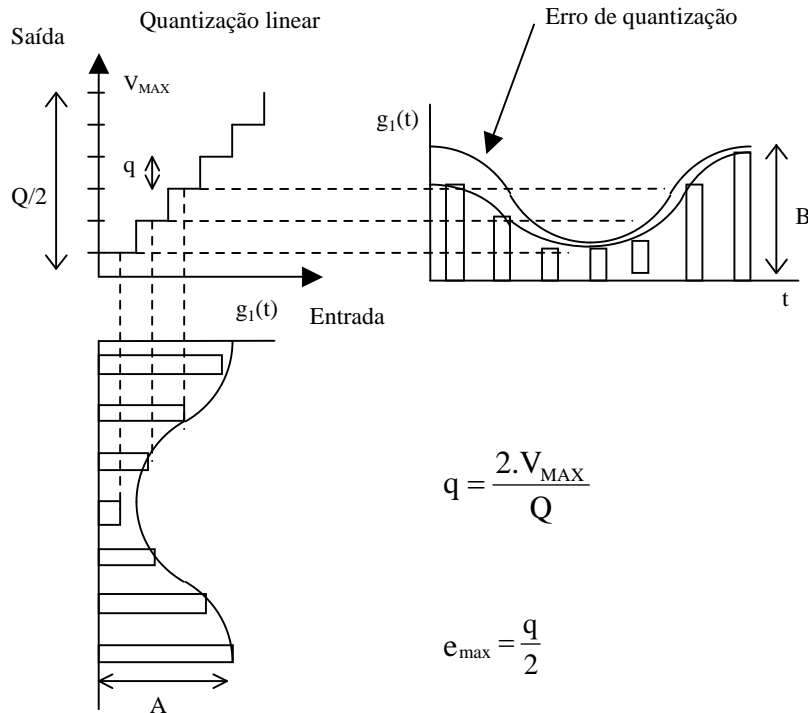
Amostragem / multiplexação: retira amostras dos sinais e as distribui no tempo.



Blocos do PCM :

Quantizador: as amplitudes das amostras de saída assumem um entre Q níveis discretos possíveis. A distância entre os níveis é o intervalo de quantização (q).

Ex: Amplitudes das amostras de entrada $\in \mathbb{R}$; amplitudes das amostras de saída $\in S = \{\dots -1.5, -0.5, +0.5, +1.5, \dots\}$.

**Problemas:**

- 1) A representação das amostras de entrada pelos níveis discretos introduz um *erro de quantização*. Assim o sinal recuperado não é exatamente igual ao sinal original.
- 2) Amostras de pequena amplitude não são bem representadas na saída do quantizador. Isto representa um problema, pois sinais de áudio apresentam uma proporção maior de sinais de baixa amplitude.

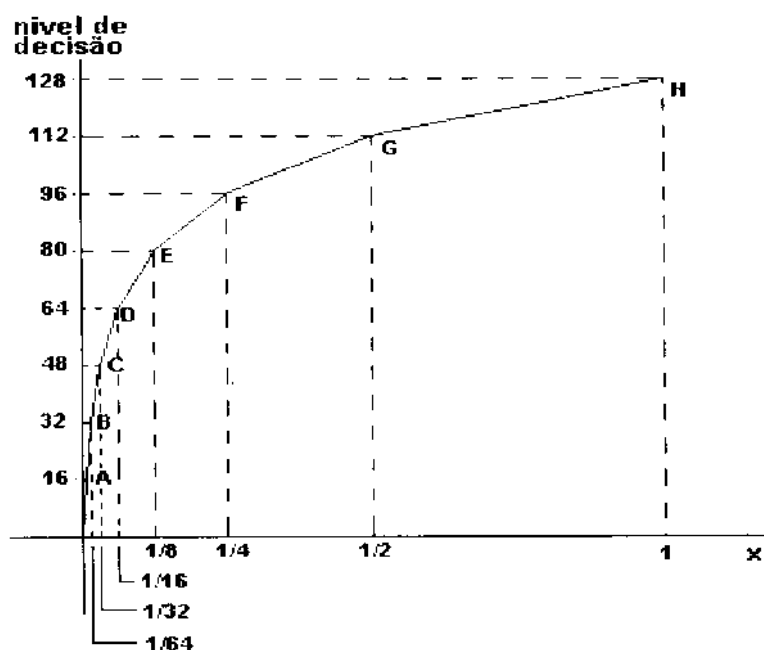
Erro relativo: $e_{rel} = \frac{e_{max}}{A}$ $A \downarrow \Rightarrow e_{rel} \uparrow$

Solução: equalizar o erro relativo para toda a faixa de valores das amostras de entrada, sem elevar significativamente o número de níveis de quantização \rightarrow compressão.

Compressão: Os intervalos de quantização são menores para sinais de baixa amplitude.

$$\frac{q/2}{A} = e_{rel} = cte. \quad A \downarrow \Rightarrow q \downarrow$$

A função de compressão é composta por um conjunto de semi-segmentos. Cada semi-segmento possui o mesmo número de níveis de quantização. Assim obtem-se uma melhor representação para sinais de pequena amplitude.



A figura a seguir ilustra o resultado da quantização de dois sinais com amplitudes diferentes (com e sem compressão). Observa-se à esquerda o processo de *quantização sem compressão*. Embora o sinal de grande amplitude esteja bem representado em níveis quantizados, o mesmo não pode ser afirmado com relação ao sinal de pequena amplitude. Na *quantização com compressão* (não linear) ambos os sinais apresentam bom número de níveis de quantização.

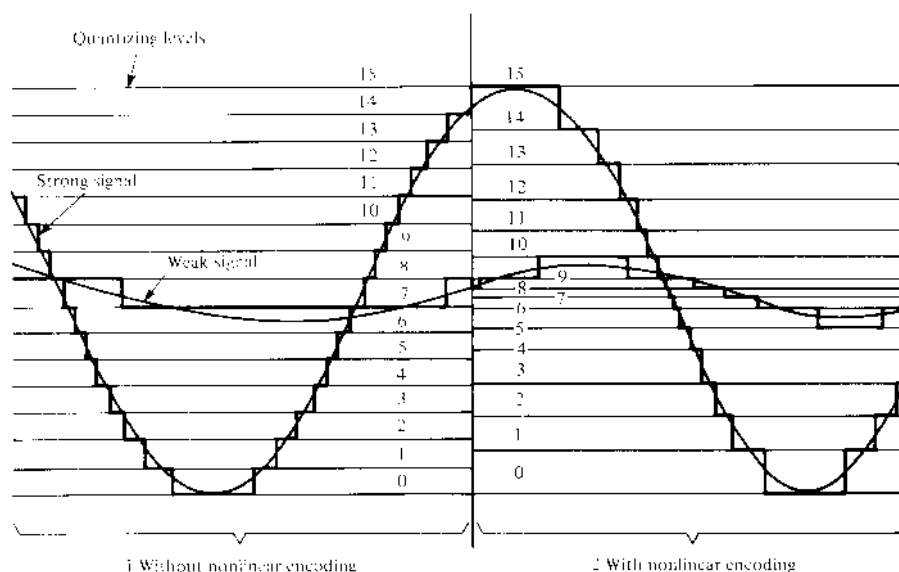


FIGURE 3.13. Effect of nonlinear coding.

Codificação: cada nível de quantização corresponde a uma sequência de v dígitos binários ($v-1$ amplitude, 1 polaridade). Assim, $Q = 2^v$. Esta codificação leva a geração de um sinal digital.

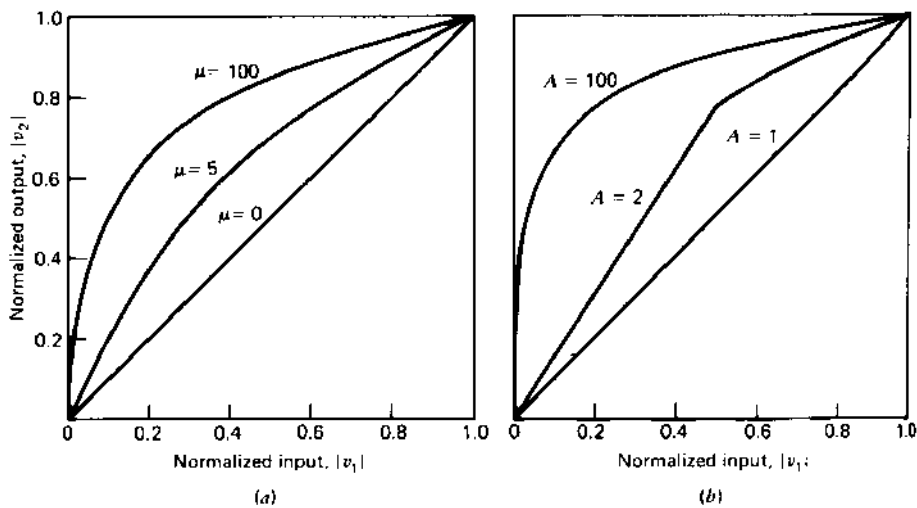
6.5.3 Leis de compressão (ITU-T)

a) O sistema T1 (recomendação G.733) permite multiplexar 24 canais, usa 256 níveis de quantização, opera a uma taxa de 1544 kbps e utiliza a *Lei μ* de compressão dada pela equação abaixo:

$$y = \frac{\log(1 + \mu \cdot x)}{\log(1 + \mu)}, \quad 0 < x < 1 \quad (6.8)$$

b) O sistema E1 (recomendação G.732) permite multiplexar 30 canais, usa 256 níveis de quantização, opera a uma taxa de 2048 kbps e utiliza a *Lei A* de compressão dada pela equação abaixo:

$$y = \begin{cases} \frac{A \cdot x}{1 + \log A}, & 0 < x < \frac{1}{A} \\ \frac{1 + \log(A \cdot x)}{1 + \log A}, & \frac{1}{A} < x < 1 \end{cases} \quad (6.9)$$

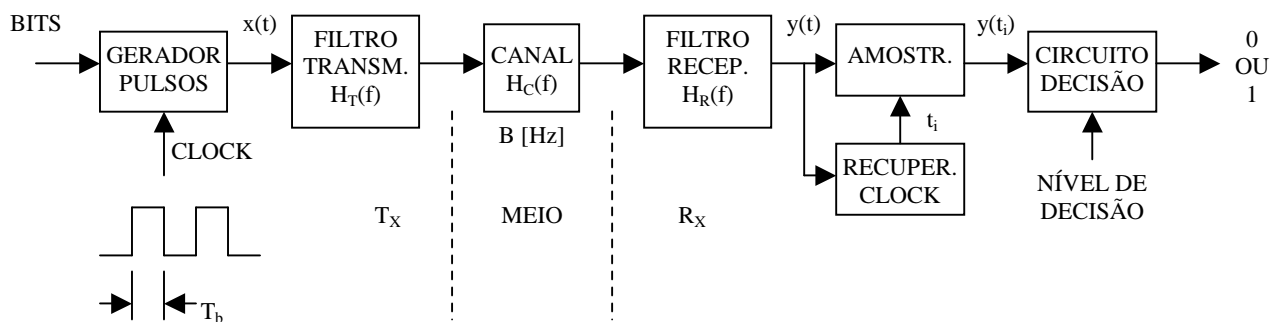


Ex:

7 TRANSMISSÃO DE DADOS EM BANDA BASE

Na transmissão de dados em banda base a informação (bits) é transmitida na forma de um sinal digital. Ao contrário dos procedimentos de modulação, que realizam uma transposição do espectro do sinal através do uso de uma portadora, a transmissão de dados em banda base caracteriza-se pela preservação do espectro na faixa original da informação transmitida.

7.1 MODELO DE SISTEMA DE TRANSMISSÃO DE DADOS



O sinal a ser transmitido é um sinal digital que representa a sequência binária ($b_k \in \{0,1\}$) com duração de bit de T_b segundos. Assume-se que o canal tem largura de faixa, em Hz, igual a B .

Após o gerador de pulsos o sinal é dado por:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot g(t - k \cdot T_b) \quad (7.1)$$

onde:

$g(t)$ corresponde à forma de cada pulso; e a_k corresponde à amplitude.

$$a_k = \begin{cases} +a, & \text{se } b_k = 1 \\ -a, & \text{se } b_k = 0 \end{cases}$$

Por exemplo:



O sinal recebido é da forma:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \cdot p(t - k \cdot T_b) \quad (7.2)$$

onde:

$A_k \cdot p(t)$ é a resposta obtida ao se aplicar $a_k \cdot g(t)$ à conexão em série de filtros $H_T(f)$, $H_C(f)$ e $H_R(f)$.

Pode-se escrever:

$$A_k \cdot P(f) = a_k \cdot G(f) \cdot H_T(f) \cdot H_C(f) \cdot H_R(f) \quad (7.3)$$

No caso em que $B < \frac{1}{T_b}$ ocorre uma dispersão temporal do pulso, por exemplo:



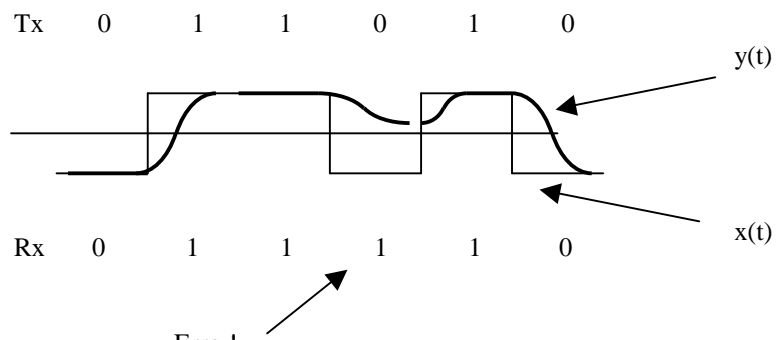
O sinal $y(t)$ é amostrado em $t = i \cdot T_b$, resultando em:

$$\begin{aligned} y(t_i) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \cdot p[(i - k) \cdot T_b] \\ &= A_i + \sum_{k=-\infty; k \neq i}^{\infty} A_k \cdot p[(i - k) \cdot T_b] \end{aligned} \quad (7.4)$$

onde A_i é o i -ésimo bit transmitido; e o segundo termo (Σ) é o efeito residual de todos os demais bits transmitidos, este efeito é chamado *Interferência Intersimbólica* (ISI).

Os instantes de amostragem são determinados em função do *signal de relógio* extraído do sinal recebido. A decisão é realizada comparando-se as amostras com um *nível de decisão*. Em função do grau de ISI podem ocorrer erros de decisão, uma vez que a ISI pode reduzir a excursão de $y(t)$.

Exemplo
onde $B < 1/T_b$.



O objetivo é dimensionar os filtros $H_T(f)$ e $H_R(f)$ de modo a minimizar a ISI.

7.2 FORMATAÇÃO DE PULSO (SHAPING)

O controle da ISI é feito pela determinação da forma (*shape*) de $p(t)$, ou no domínio de frequência atuando sobre $P(f)$.

Soluções:

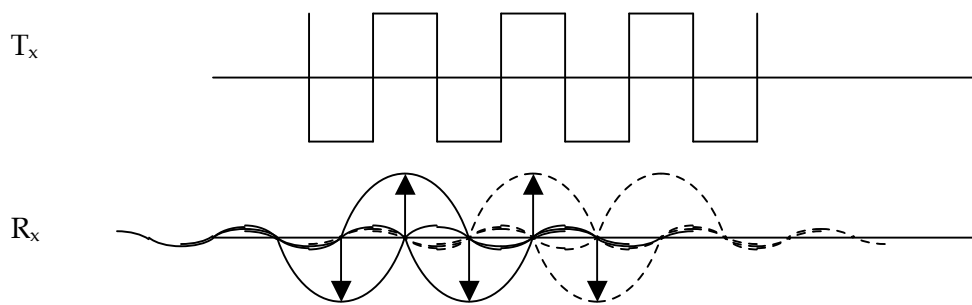
a) A ISI é desprezível se $B \gg \frac{1}{T_b}$, $\forall p(t)$.

b) Pulso sinc

Um pulso que produz ISI nula é:

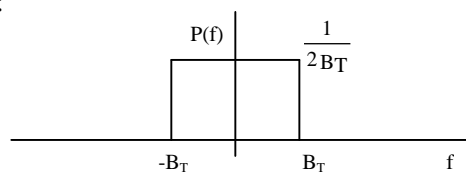
$$p(t) = \text{sinc}(2.B_T.t) \quad \text{com } B_T = \frac{1}{2T_b} \quad (7.5)$$

Neste caso $p(t)$ tem amplitude máxima no ponto de amostragem e amplitude nula nos instantes de amostragem adjacentes (*critério de Nyquist para ISI nula*). Este pulso possui a menor largura de espectro possível para a ISI nula.



Entretanto existem duas *dificuldades práticas*:

i) Requer que:



Isto é irrealizável !

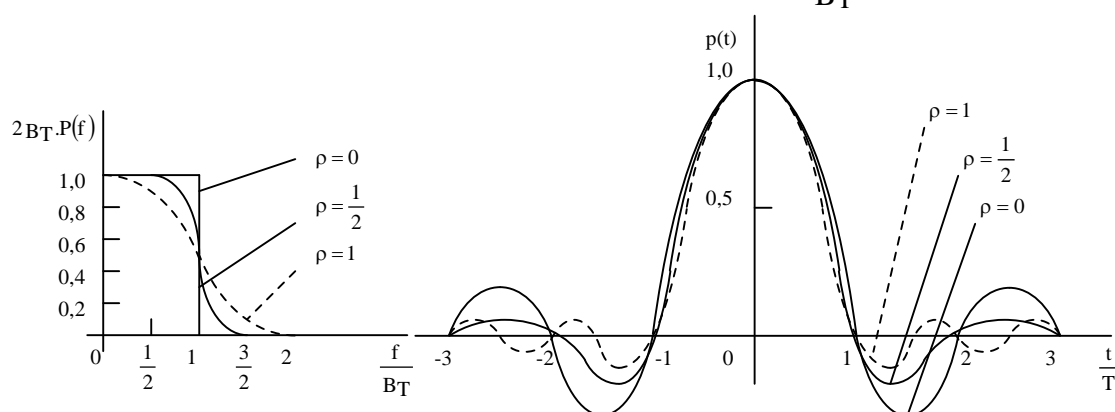
ii) Não ha margem de erro para os instantes de amostragem, ou seja, exige sincronismo perfeito.

c) Espectro cosseno deslocado (Nyquist)

O espectro $P(f)$ abaixo supera as dificuldades citadas:

$$P(f) = \begin{cases} \frac{1}{2B_T}, & |f| < f_1 \\ \frac{1}{4B_T} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi(|f| - f_1)}{2(B_T - f_1)} \right] \right\}, & f_1 < |f| < 2B_T - f_1 \\ 0, & |f| > 2B_T - f_1 \end{cases} \quad (7.7)$$

As frequências f_1 e $2B_T - f_1$ são determinadas pela taxa de transmissão e por um parâmetro de projeto chamado *fator de roll-off* (que determina o excesso de espectro em relação à solução ideal). O fator de roll-off é dado por: $\rho = 1 - \frac{f_1}{B_T}$.



$$\text{No domínio do tempo: } p(t) = \text{sinc}(2 \cdot B_T \cdot t) \cdot \frac{\cos(2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot B_T \cdot t)}{1 - (4 \cdot \rho \cdot B_T \cdot t)^2} \quad (7.8)$$

onde o termo em *sinc* assegura o critério de Nyquist, e o termo em *coseno* reduz os erros produzidos por variações no instante de amostragem.

Observa-se que a *largura de espectro* de $P(f)$, para um dado ρ , é igual a:

$$B = 2 \cdot B_T - f_1 = (1 + \rho) \cdot B_T \quad (7.9)$$

$$\text{sabendo que: } B_T = \frac{1}{2 \cdot T_b} \quad \text{e} \quad r_b = \frac{1}{T_b}$$

$$\text{encontra-se: } B = \left(\frac{1 + \rho}{2} \right) \cdot r_b \quad (7.10)^*$$

Capacidade de Canal - Corresponde à máxima taxa de transmissão, em bps, que teoricamente pode ser alcançada em um canal limitado em faixa de frequência, e é dada por:

$$C \triangleq \max(r_b) \quad \therefore \quad C = 2 \cdot B \quad (7.11)^*$$

Ex:

7.3 REPRESENTAÇÃO DE SINAIS DIGITAIS (CÓDIGOS DE LINHA)

De modo a transmitir dígitos binários através do canal banda base é necessário representá-los por pulsos elétricos. No caso mais simples, existe uma correspondência um-para-um entre bits e pulsos elétricos. Se os pulsos têm sempre a mesma polaridade o sinal produzido é dito *unipolar*. Na representação *polar*, um estado lógico é representado por um nível de tensão positivo e o outro estado por um nível de tensão negativo. A *taxa de transmissão* de dados de um sinal é a taxa, em bits por segundo, com que os dados são transmitidos. A duração ou *tempo de bit* é a quantidade de tempo que o transmissor emprega para transmitir o bit. A *taxa de sinalização* corresponde à taxa na qual o nível do sinal é alterado (e é expressa em *bauds*). Tal taxa depende de como é realizada a codificação digital.

Muitos fatores estão relacionados à correta interpretação do sinal recebido. Entre eles estão: a relação sinal-ruído, a taxa de transmissão, e a largura de faixa do sistema. Em termos gerais, um aumento na taxa de transmissão aumenta a *taxa de erro de bit* (i.e., a probabilidade de que um bit seja trocado); um aumento na relação sinal-ruído diminui a taxa de erro de bit; um aumento na largura de faixa permite um aumento na taxa de transmissão.

Existe outro fator diretamente ligado ao desempenho do sistema, a *técnica de codificação de linha*; i.e., o mapeamento entre bits e pulsos elétricos. Na escolha de uma técnica de codificação de linha para uma particular aplicação normalmente levam-se em conta os *fatores específicos* listados a seguir:

a) *Espectro do Sinal*: Muitos aspectos estão relacionados ao espectro do sinal. Por exemplo, a ausência de componentes em altas frequências implica em menos largura de faixa para a transmissão. A ausência de componente contínua é desejada (assim um acoplamento AC pode ser realizado por meio de transformadores, produzindo excelente isolamento elétrica e reduzindo a interferência). Um sinal capaz de concentrar a potência transmitida no centro do espectro será menos influenciado por efeitos de distorção que normalmente ocorrem nas bordas (em frequência) de um canal de comunicação.

b) *Recuperação de Relógio*: Faz-se necessário a determinação do posicionamento de cada bit (tempos de início e fim) para a sua correta recuperação. O uso de um sinal de relógio em separado é anti-econômico. Assim deve existir um mecanismo de sincronização baseado na codificação do próprio sinal transmitido. Sem tal mecanismo a transmissão de uma longa sequência de 1's (ou 0's) estará sujeita a uma perda de sincronismo, acarretando erros de detecção.

c) *Detecção de Erros*: Algumas técnicas permitem a detecção de erros, de forma automática, sem a introdução de bits adicionais (redundância) na sequência transmitida. Esta detecção de erros está baseada na violação das regras de geração do sinal.

d) *Imunidade ao Ruído*: O desempenho em termos de transmissão pode ser medido com base na curva de probabilidade de erro de bit (BER) versus a relação sinal-ruído. Algumas técnicas exibem melhor desempenho frente ao ruído que outras.

e) *Complexidade*: De forma geral, quanto mais elaborado é o mapeamento usado para a obtenção do sinal a ser transmitido, mais elevada é a complexidade e o custo do sistema.

7.3.1 Famílias de Códigos de Linha

a) Não Retorno a Zero

É o caso mais simples de codificação PCM. Utiliza dois níveis de tensão para representar os dígitos binários. O nível de tensão é constante durante o intervalo de duração do bit, não existe transição (não retorna a zero). O NRZ-L é usado extensivamente em lógica digital. Pode-se considerar que um nível de tensão nulo representa o bit 1, e positivo representa o bit 0 (*unipolar*). O NRZI (*NRZ Invert on ones*) é uma variação do NRZ, onde uma transição no início do tempo de bit indica um bit 1 na sequência original (ausência de transição indica o bit 0). O NRZI é um exemplo de *codificação diferencial*, onde o sinal é decodificado pela comparação da polaridade dos pulsos adjacentes (é mais seguro detectar uma transição do que comparar uma amostra de sinal a uma referência).

Vantagens: simplicidade, largura de espectro reduzida.

Desvantagens: componente contínua, falta de capacidade de sincronização.

b) Multinível Binário

Este código utiliza mais de dois níveis de tensão. No caso do AMI (*Alternative Mark Inversion*) bipolar, o bit 0 é representado pelo nível zero, e o bit 1 é representado por um pulso positivo ou negativo (ou seja, altera-se sequencialmente a polaridade do sinal na representação do bit 1). No caso do código *Pseudo-Ternário* o bit 1 é representado pelo nível zero, alterando-se a polaridade do sinal na representação do bit 0.

Vantagens: não existe componente contínua, largura de espectro reduzida, detecção de erro (a eliminação ou adição de um pulso viola a regra da alteração de polaridade).

Desvantagens: existe perda de sincronismo para sequência longa de 0's (AMI) e 1's (pseudo-ternário).

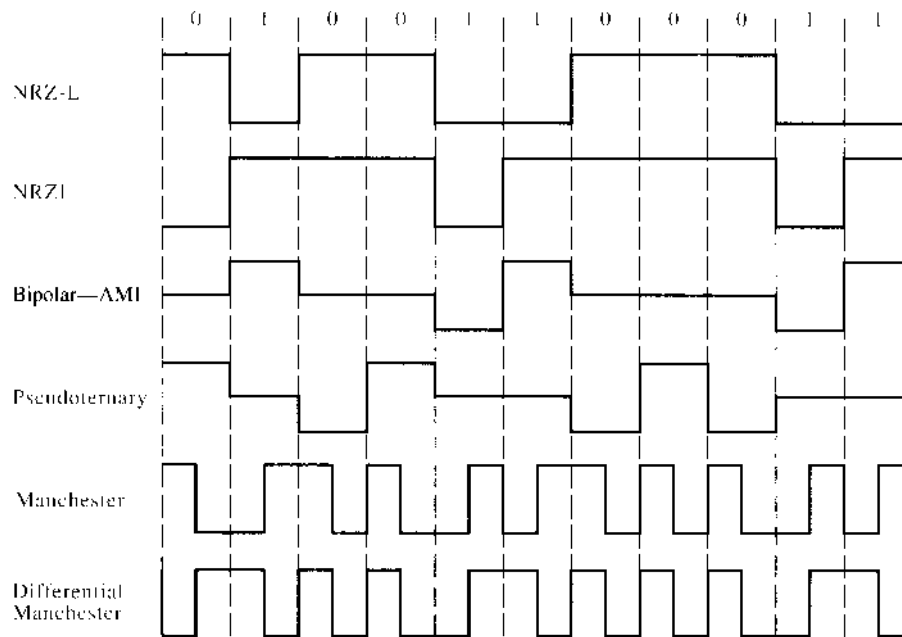
c) Bi-fase

Supera as limitações dos códigos NRZ. No código *Manchester* uma transição ascendente representa o bit 1, e uma transição descendente representa o bit 0. As transições ocorrem no centro de cada tempo de bit. No *Manchester Diferencial* a codificação do bit 0 é representada pela presença de transição no início do tempo de bit (bit 1 ausência de transição).

Vantagens: não existe componente contínua, detecção de erro (pela ausência de uma transição esperada), não existe perda de sincronismo.

Desvantagens: largura de espectro é duas vezes maior se comparada ao NRZ (devido à taxa de sinalização maior).

Aplicação: Manchester é padronizado IEEE 802.3 (LAN CSMA/CD em cabo coaxial e par trançado - Ethernet), Manchester Diferencial é padronizado IEEE 802.5 (LAN Token Ring em par trançado aterrado).



d) Técnicas com Substituição

As elevadas taxas de sinalização das técnicas Bi-fase são indesejadas para aplicações de longa distancia. Uma abordagem diferente consiste em substituir sequências que resultariam em níveis constantes de tensão por sequências capazes de manter o sincronismo. Tais sequências devem ser reconhecidas no receptor e trocadas pela sequência original (sem alteração na taxa de bits).

A codificação HDB3 (*High-Density Bipolar - 3 zeros*) corresponde a um sinal digital multinível com regra de alternância de polaridade como no AMI. No HDB3, sequências de quatro zeros são substituídas por sequências contendo 1 ou 2 pulsos, 000V ou B00V, onde B é um pulso positivo ou negativo e V é uma *violação* à regra alternância de polaridade. Para assegurar que violações sucessivas tenham polaridades opostas em modo a eliminar a componente contínua usa-se a *regra de codificação*.

Regra de Codificação

Polaridade do pulso precedente (no sinal de linha)	Número de bits 1 após última substituição (na sequência binária)	
	Ímpar	Par
–	000 >	+ 00 +
+	000 <	– 00 –

Regra de Decodificação

000V	0000
B00V	0000

O código B8ZS (*Bipolar with 8-Zeros Substitution*) é baseado no AMI bipolar e segue a seguinte regra onde sequências de oito zeros são substituídas.

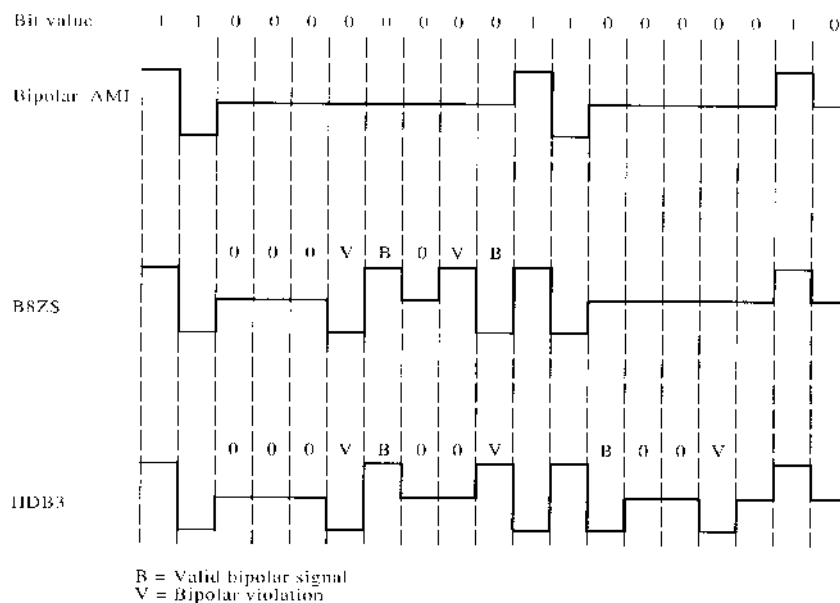
Polaridade do pulso precedente (no sinal de linha)	Substituição
+	000 + - 0 - +
-	000 - + 0 + -

Nesta técnica sempre ocorrem duas violações de polaridade. O receptor reconhece o padrão e o substitui com zeros.

Vantagens: não existe componente contínua, não existe perda de sincronismo, espectro de potência concentrado e centralizado.

Desvantagens: maior complexidade do codificador/decodificador.

Aplicação: o HDB3 é usado nas interfaces elétricas digitais com taxas de 2048 kbps (sistema E1) até 34.368 kbps.



Ex:

7.3.2 Densidade Espectral de Potência de um Sinal Digital

Um sinal elétrico, carregando uma sequência aleatória de bits, tem um comportamento no domínio da frequência que depende do *formato do pulso* transmitido e da *probabilidade* de ocorrência dos bits 0's e 1's na sequência digital. Este sinal elétrico pode ser representado por uma sequência de pulsos elétricos que ocorrem com uma taxa de $1/T$ Hz (ou seja, um pulso a cada T segundos):

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot g(t - n.T)$$

onde $\{a_n\}$ é uma sequência de valores relacionados à informação a ser transmitida, e $g(t)$ é o formato de cada pulso. Como a sequência $\{a_n\}$ é aleatória, $v(t)$ corresponde a um sinal aleatório.

O procedimento para calcular a DEP de $v(t)$ corresponde a determinar a auto-correlação de $v(t)$ e então sua TF, que fornecerá:

$$S_v(f) = \frac{1}{T} S_a(f) |G(f)|^2$$

onde $G(f)$ é o espectro de $g(t)$, e $S_a(f)$ é a DEP da sequência $\{a_n\}$:

$$S_a(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a(k) e^{-j2\pi f k T}$$

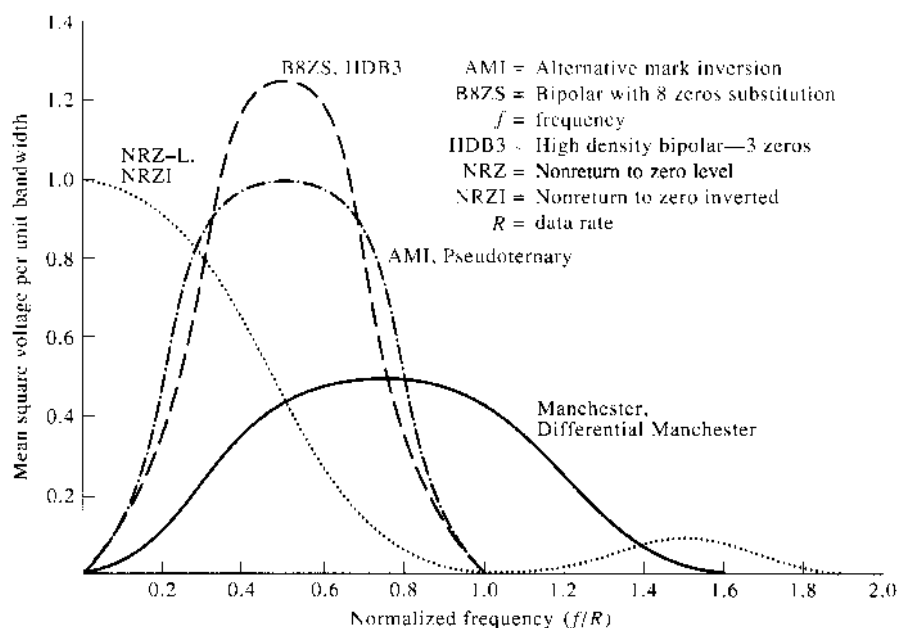
com $R_a(k) = E(a_n^* a_{n+k})$ a auto-correlação da sequência $\{a_n\}$.

Caso os valores na sequência $\{a_n\}$ sejam descorrelacionados então:

$$S_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(f - \frac{k}{T} \right)$$

onde \bar{a}_n é o valor médio de $\{a_n\}$, e $\sigma_a^2 = R_a(0) - (\bar{a}_n)^2$ é a variância de $\{a_n\}$.

Ambos $G(f)$ e $S_a(f)$ podem ser projetados para controlar a forma da DEP do sinal transmitido. A figura a seguir mostra as densidades normalizadas com relação à amplitude, e a frequência normalizada com relação à taxa de transmissão ($1/T$), para os principais códigos de linha. A normalização permite a comparação direta entre processos com diferentes valores de amplitude e taxas de transmissão.



MINI FORMULÁRIO

$$\exp(\pm j) = \cos(\) \pm j.\text{sen}(\)$$

$$\cos(\) = \frac{1}{2} [\exp(j) + \exp(-j)]$$

$$\text{sen}(\) = \frac{1}{2j} [\exp(j) - \exp(-j)]$$

$$\cos(\) \cos(\) = \frac{1}{2} [\cos(\ -) + \cos(\ +)]$$

$$\text{sen}(\) \text{sen}(\) = \frac{1}{2} [\cos(\ -) - \cos(\ +)]$$

$$\text{sen}(\) \cos(\) = \frac{1}{2} [\text{sen}(\ -) + \text{sen}(\ +)]$$

$$\text{sen}(\ \pm) = \text{sen}(\) \cos(\) \pm \text{sen}(\) \cos(\)$$

$$\cos(\ \pm) = \cos(\) \cos(\) \mp \text{sen}(\) \text{sen}(\)$$

BIBLIOGRAFIA

1. HAYKIN, Simon. **Introdução aos sistemas de comunicação**. 2. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2008.
2. HAYKIN, Simon. **An introduction to analog and digital communications**. New York: John Wiley & Sons, 1989.
3. LATHI, B. P. **Sistemas de comunicação**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1979.
4. CARLSON, A. Bruce. **Sistemas de comunicação: uma introdução aos sinais e ruído em comunicação elétrica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1981.
5. LATHI, B. P. **Modern digital and analog communication systems**. 3rd ed. New York: Oxford, 1998.
6. SCHWARTZ, Mischa. **Transmissão de informação, modulação e ruído**. 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1979.
7. HAYKIN, Simon. **Communication systems**. 3th. ed. New York: J. Wiley, 1994.
8. PROAKIS, John G; SALEHI, Masoud. **Communication systems engineering**. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.

RECEPTOR AM SUPER-HETERÓDINO

