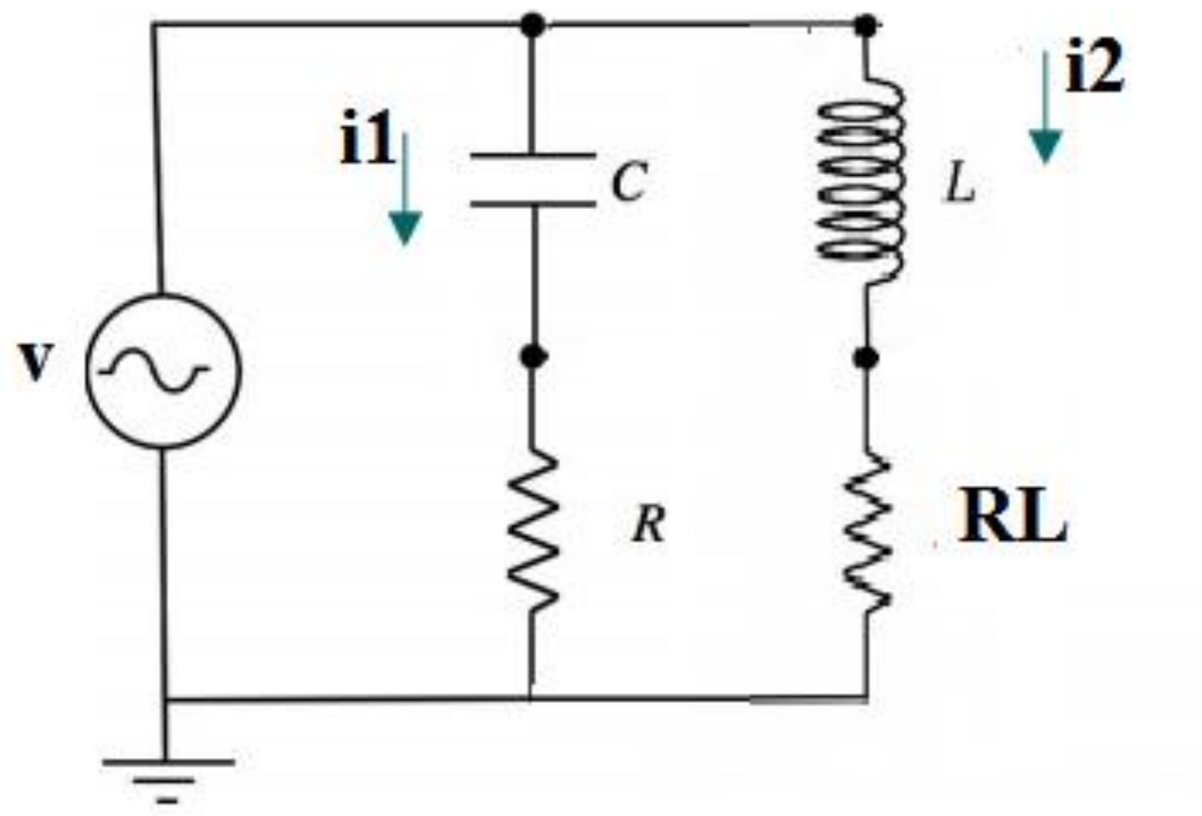
Controlabilidade e observabilidade

Paulo R. Brero de Campos

Circuito RL e RC

- Variáveis de estado: Vc e i2
- Saída: tensão em RL
- Circuito é controlável?



Independência linear de vetores

- Os vetores $\mathbf{x_1, x_2, ..., x_n}$ são ditos **linearmente independentes** se $\mathbf{c_1x_1+c_2x_2+....c_nx_n=0}$ implica em $\mathbf{c_1=c_2=...c_n=0}$.
- onde c_1, c_2, ... c_n, são constantes,
- Por outro lado, os vetores x_1, x_2, ...x_n são ditos linearmente dependentes se x_i pode ser representado como uma combinação linear dos outros vetores x_j

$$\mathbf{x}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_j \mathbf{x}_j$$

Exemplo 1

Os Vetores:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_{3=} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

São linearmente dependentes, uma vez que:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

Exemplo 2

Os Vetores:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_{3=} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

São linearmente independentes, uma vez que:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

Implica:

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

Matriz não singular – determinante é não nulo, isto é n colunas (linhas) são linearmente independentes.

Matriz singular – determinante é zero, isto é n colunas (linhas) são linearmente dependentes.

$$[x_1 \mid x_2 \mid x_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \text{sin}gular$$

$$[y_1 \mid y_2 \mid y_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = não \quad \text{sin}gular$$

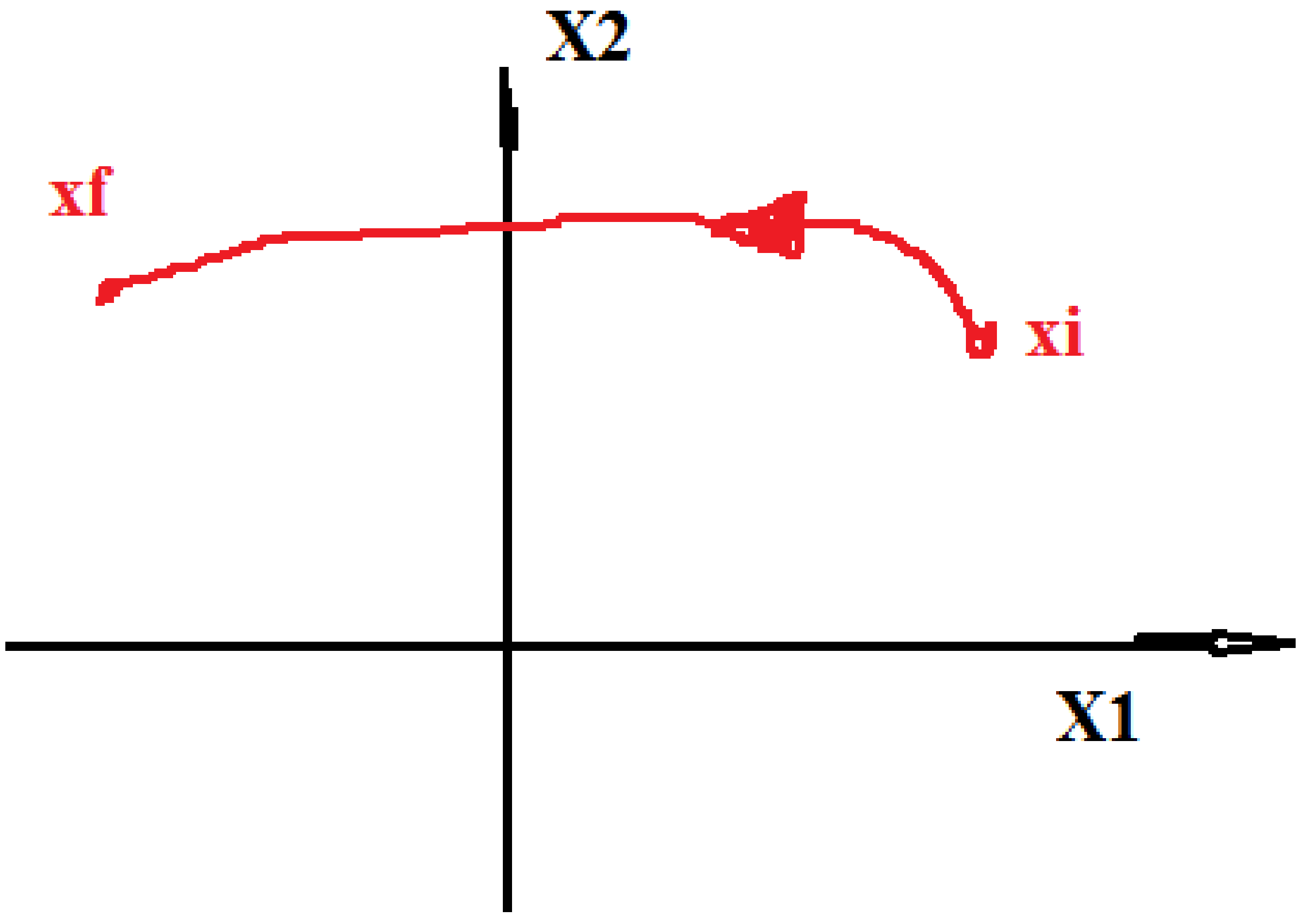
Controlabilidade

- Dado um sistema: $dx/dt=Ax+Bu$
- Este sistema é dito de estado controlável em $t=t_0$ se é possível construir um sinal de controle não-limitado que transferirá um estado inicial para qualquer estado final em um intervalo de tempo finito $t_0 <= t <= t_1$.
- Se todo estado é controlável, então o sistema é dito de estado completamente controlável.

Condição para controlabilidade

- Os vetores **B, AB**, ..., $\mathbf{A}^{n-1}\,\mathbf{B}$ devem ser linearmente independentes ou a matriz formada por estes vetores
- $[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\,\mathbf{B}]$
- deve ter característica n (Rank n) (Posto n).

Plano de fase



Exemplo 3: considere o sistema descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

Como

$$\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema não é de estado completamente controlável.

Exemplo 4: considere o sistema descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

Para este caso:

$$\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

É não singular.

Então o sistema é completamente controlável.

Observabilidade

- O sistema é dito se completamente observável se todo estado inicial x(0) pode ser determinado a partir da observação de y(t) durante um intervalo de tempo finito.
- O sistema é completamente observável se toda transição do estado afeta cada elemento do vetor de saída.

Condição para Observabilidade

- O sistema é completamente observável se a matriz

- $[\mathbf{C'} \mid \mathbf{A'C'} \mid \ldots \mid (\mathbf{A'})^{n-1}\mathbf{C'}]$

- tem Post n (Rank n), tem n vetores-colunas linearmente independentes.

- **Exemplo 5:** considere o sistema descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Para este caso, o posto da matriz é 2:

$$[C' | A'C'] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Então o sistema é completamente controlável.

Exemplo 6: considere o sistema descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Verifique se o sistema é controlável e observável:

O posto da matriz é 2:

$$\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Então o sistema é completamente controlável.

- Para testar a observabilidade, examine o posto de [C’ | A’C’]

$$[C' | A'C'] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- O posto é 2. Portanto o sistema é completamente observável.

De forma geral:

$C\overline{O}$ – subsistema controlável
e não observável

$\overline{C}O$ – subsistema não controlável
e observável

$\overline{C}\,\overline{O}$ – subsistema não controlável
e não observável

CO – subsistema controlável
e observável