Solução da equação de estado invariante no tempo

Controle 2

Prof. Paulo Roberto Brero de Campos

0.1 Introdução

As duas notações podem ser usadas para representar um vetor: $\mathbf{x}$ e $\vec{\mathbf{x}}$

Será considerado o caso da equação homogênea ($u = 0$).

0.2 Solução da equação de estado homogênea

0.2.1 Caso escalar

Inicialmente será feita a análise para o caso escalar.

$$\dot{x} = ax \tag{1}$$

Para resolver esta equação será suposta a solução $x(t)$ na forma:

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_k t^k + ... \tag{2}$$

Substituindo esta possível solução na equação 1, obtém-se:

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + ... + kb_k t^{k-1} + ... = a(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_k t^k + ...) \tag{3}$$

Equacionando os coeficientes de iguais potências de t:

$b_1 = ab_0$

$b_2 = \frac{1}{2}ab_1 = \frac{1}{2}a^2b_0$

$b_3 = \frac{1}{3}ab_2 = \frac{1}{3X2}a^3b_0$

$\vdots$

$b_k = \frac{1}{k!}a^kb_0$

O valor de b_0 é determinado substituindo-se $t = 0$ na equação 2:

$x(0) = b_0$

Assim, a solução $x(t)$ pode ser escrita como:

$$x(t) = (1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + ... + \frac{1}{k!}a^kt^k + ...)x(0) = e^{at}x(0) \tag{4}$$

0.2.2 Caso matricial

Considere a equação de estado:

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} \tag{5}$$

Por analogia com o caso escalar:

$\vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{b}}_0 + \vec{\mathbf{b}}_1t + \vec{\mathbf{b}}_2t^2 + ... + \vec{\mathbf{b}}_kt^k + ...$

Substituindo esta possível solução na equação 5, obtém-se:

$\vec{\mathbf{b}}_1 + 2\vec{\mathbf{b}}_2t + 3\vec{\mathbf{b}}_3t^2 + ... + k\vec{\mathbf{b}}_kt^{k-1} + ... = A(\vec{\mathbf{b}}_0 + \vec{\mathbf{b}}_1t + \vec{\mathbf{b}}_2t^2 + ... + k\vec{\mathbf{b}}_kt^k + ...)$

Equacionando os coeficientes de iguais potências de t:

$\vec{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{A}\vec{\mathbf{b}}_0$

$\vec{\mathbf{b}}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{A}\vec{\mathbf{b}}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\vec{\mathbf{b}}_0$

$\vec{\mathbf{b}}_3 = \frac{1}{3}\mathbf{A}\vec{\mathbf{b}}_2 = \frac{1}{3X2}\mathbf{A}^3\vec{\mathbf{b}}_0$

$\vdots$

$\vec{\mathbf{b}}_k = \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\vec{\mathbf{b}}_0$

Substituindo $t = 0$, obtém-se:

$\vec{\mathbf{x}}(0) = \vec{\mathbf{b}}_0$

A solução $\vec{\mathbf{x}}(t)$ pode ser escrita como:

$\vec{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + ... + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^2)\vec{\mathbf{x}}(0)$

A expressão entre parênteses é uma matriz nxn. Comparando com o caso escalar, chamamos esta matriz de matriz exponencial:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + ... + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^2 \tag{6}$$

A solução pode ser escrita como:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = e^{\mathbf{A}t}\vec{\mathbf{x}}(0) \tag{7}$$

Exercício: pesquisar as propriedades da Matriz Exponencial

0.3 Solução da equação de estados homogênea pela transformada de Laplace

0.3.1 Caso escalar

Inicialmente será considerado o caso escalar:

$\dot{x} = ax$

Aplicando da transformada de Laplace:

$sX(s) - x(0) = aX(s)$

Resolvendo para X(s):

$X(s) = \frac{x(0)}{s-a}$

A transformada Inversa de Laplace é:

$x(t) = e^{at}x(0)$

0.3.2 Caso matricial

Esta mesma abordagem pode ser usada para o caso matricial:

$\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}(t)$

Aplicando a transformada de Laplace nos dois lados da equação:

$s\vec{\mathbf{X}}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{X}}(s)$

Reescrevendo:

$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\vec{\mathbf{X}}(s) = \vec{\mathbf{x}}(0)$

Pré-multiplicando os dois lados da equação por $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$:

Resulta em:

$\vec{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\vec{\mathbf{x}}(0)$

A transformada inversa de Laplace resulta em:

$\vec{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{L}^{-1}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\vec{\mathbf{x}}(0)$

Note que a transformada inversa de Laplace fornece:

$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}] = e^{\mathbf{A}t}$

Matriz de Transição de Estados A matriz $e^{\mathbf{A}t}$ é denominada Matriz de Transição de Estados.

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}] \quad (8)$$

0.3.3 Autovalores de uma matriz A

Os autovalores de uma matriz $\mathbf{A}$ são as raízes da equação característica:

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}| = 0 \quad (9)$$

Eles são chamados de raízes características.

Os autovalores no domínio do tempo, correspondem aos polos no domínio da frequência.

Para casa: estudar sobre invariância dos autovalores

0.4 Solução da equação de estado não homogênea

0.4.1 Caso escalar

Será visto inicialmente para o caso escalar.

$\dot{x} = ax + bu$

Que pode ser escrita como:

$\dot{x} - ax = bu$

Multiplicando os dois lados da equação por e^{-at}

$e^{-at}[\dot{x} - ax] = e^{-at}bu$

Note que:

$e^{-at}[\dot{x} - ax] = \frac{d[e^{-at}x(t)]}{dt}$

Reescrevendo:

$\frac{d[e^{-at}x(t)]}{dt} = e^{-at}bu$

Integrando esta equação entre 0 e t, resulta:

$e^{-at}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$

Ou

$x(t) = e^{at}x(0) + e^{at}\int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$

$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$

0.4.2 Caso matricial

Para o caso matricial:

$\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}$

Que pode ser escrita como:

$\dot{\vec{\mathbf{x}}} - \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}$

Multiplicando os dois lados da equação por $e^{-\mathbf{A}t}$

$e^{-\mathbf{A}t}[\dot{\vec{\mathbf{x}}} - \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}$

Note que:

$e^{-\mathbf{A}t}[\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x}] = \frac{d[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)]}{dt}$

Reescrevendo:

$\frac{d[e^{-\mathbf{A}t}\vec{\mathbf{x}}(t)]}{dt} = e^{-\mathbf{A}t}\vec{\mathbf{B}}u$

Integrando esta equação entre 0 e t, resulta:

$e^{-\mathbf{A}t}\vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}(\tau)d\tau$

Ou

$\vec{\mathbf{x}}(t) = e^{\mathbf{A}t}\vec{\mathbf{x}}(0) + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}(\tau)d\tau$

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = e^{\mathbf{A}t}\vec{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}(\tau)d\tau \tag{10}$$

Para o caso de tempo inicial diferente de zero, obtém-se a forma mais geral:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\vec{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}(\tau)d\tau \tag{11}$$

0.5 Solução da equação de estados não homogênea pela transformada de Laplace

Considere a equação de estado:

$\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}$

A solução da equação de estado pode ser obtida aplicando a transformada de Laplace:

$s\vec{\mathbf{X}}(s) - \vec{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}\mathbf{(s)}$

Que pode ser escrito como:

$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\vec{\mathbf{X}}(s) = \vec{\mathbf{x}}(0) + \mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}\mathbf{(s)}$

Pré-multiplicando os dois termos por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, obtém-se:

$\vec{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\vec{\mathbf{x}}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}\mathbf{(s)}$

0.5.1 Função de transferência

Considere as equações dinâmicas:

$\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}$

$\mathbf{y} = \mathbf{C}\vec{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\vec{\mathbf{u}}$

Calculando a transformada de Laplace, obtém-se:

$s\vec{\mathbf{X}}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{B}\vec{\mathbf{U}}(s)$

$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\vec{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{D}\vec{\mathbf{U}}(s)$

Considerando as condições iniciais nulas, colocando em evidência e isolando $\mathbf{X}(s)$:

$\vec{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\vec{\mathbf{U}}(s)$

Substituindo na equação de saída:

$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\vec{\mathbf{U}}(s)$

Finalmente:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{12}$$

0.5.2 Exemplo 1

Considere as equações dinâmicas:

Obtenha a solução para $t = 2s$, considerando uma entrada degrau unitário e as condições inciais: $\mathbf{x}(0) = [.3 \quad .4]'$

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{B} = [1 \quad 1]'$

$\mathbf{C} = [1 \quad 0]$

Calculando:

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}$$

Calculando a inversa da matriz:

$(sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)}$

Adj - é a matriz adjunta, que é a transposta da matriz de cofatores de $(sI - A)$

Det - é o determinante de $(sI - A)$

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{\mathbf{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{det(sI-A)} & 0 \\ 0 & \frac{s+2}{det(sI-A)} \end{pmatrix}$$

Resultando:

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{\mathbf{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

Calculando a transformada inversa de Laplace, obtém-se a matriz de transição de estados:

$$\mathbf{e^{At}} = \mathcal{L}^{\mathbf{-1}}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{\mathbf{-1}} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-1t} \end{pmatrix}$$

Aplicando os dados na equação de estado:

$\vec{\mathbf{x}}(t) = e^{\mathbf{A}t}\vec{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}(\tau)d\tau$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-1t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-1(t-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3e^{-2t} \\ 0,4e^{-1t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2(t-\tau)}d\tau \\ e^{-1(t-\tau)}d\tau \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3e^{-2t} \\ 0,4e^{-1t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau \\ e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,005494 \\ 0,0541 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,4908 \\ 0,8647 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4963 \\ 0,9188 \end{pmatrix}$$

0.6 Resolução de equação de estado no tempo discreto

0.6.1 Solução da equação de estado de tempo discreto

Inicialmente será mostrado como obter a solução de forma recursiva, no tempo.

$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$

$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$

A solução pode ser obtida de forma recursiva:

$\mathbf{x}(1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}\mathbf{u}(0)$

$\mathbf{x}(2) = \mathbf{G}\mathbf{x}(1) + \mathbf{H}\mathbf{u}(1) = \mathbf{G}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{u}(0) + \mathbf{H}\mathbf{u}(1)$

$\mathbf{x}(3) = \mathbf{G}\mathbf{x}(2) + \mathbf{H}\mathbf{u}(2) = \mathbf{G}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^2\mathbf{H}\mathbf{u}(0) + \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{u}(1) + \mathbf{H}\mathbf{u}(2)$

$\vdots$

Repetindo este processo, obtém-se:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-j-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(j) \tag{13}$$

A matriz de transição de estado é definida por:

$$\mathbf{\Phi}(k) = \mathbf{G}^k \tag{14}$$

0.6.2 Abordagem por transformada Z

Considere o sistema discreto descrito pela equação:

$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$

Calculando a transformada Z nos dois lados da equação:

$\mathbf{z}\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{G}\mathbf{X}(z) + \mathbf{H}\mathbf{U}(z)$

Colocando X(z) em evidência:

$(z\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}\mathbf{U}(z)$

Pré-multiplicando os dois lados por $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$:

$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z)$

Calculando a transformada Z inversa:

$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z]\mathbf{x}(0) + \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z)]$

Comparando esta equação com a equação 8, é possível notar que:

$\mathbf{G}^k = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z]$

A equação característica é dada por:

$|z\mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0$

0.7 Discretização de equações de estado de tempo contínuo

Dada a equação de estado que representa um sistema contínuo, na forma:

$\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}$

Na figura 1 é mostrado um sistema dinâmico discretizado com p entradas e q saídas.

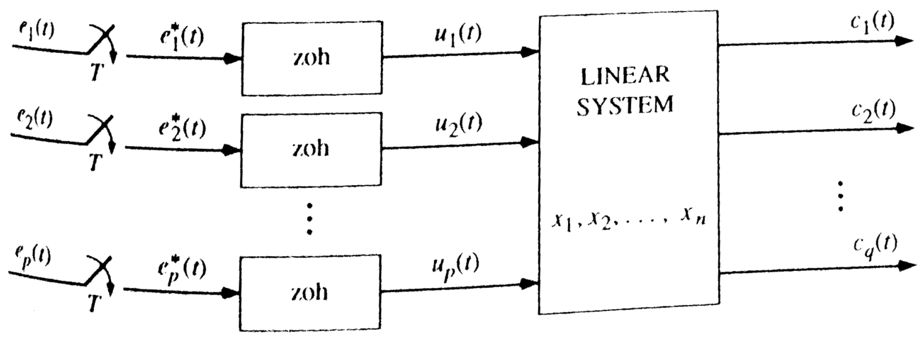

Figura 1: Sistema discretizado no espaço de estados

A solução da equação de estado para um sistema contínuo é dada na forma:

$\vec{\mathbf{x}}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\vec{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}(\tau)d\tau$

Ela pode ser discretizada considerando que $u(t)$ será constante durante o intervalo $k \leq t \leq (k+1)$.

A integral será entre dois intervalos consecutivos $t_0 = kT$ e t=$(k+1)T$. Assim, o estado final será calculado para $(k+1)T$.

$\vec{\mathbf{x}}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}((k+1)T-kT)}\vec{\mathbf{x}}(kT) + [\int_{kT}^{((k+1)T)} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)}\mathbf{B}d\tau]\vec{\mathbf{u}}(kT)$

Fazendo uma mudança de variável com relação ao termo integral: $((k+1)T-\tau) = \lambda$ resulta:

$\vec{\mathbf{x}}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T}\vec{\mathbf{x}}(kT) + [\int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda}\mathbf{B}d\lambda]\vec{\mathbf{u}}(kT)$

Assim, o sistema contínuo pode ser discretizado através das equações:

$$\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}T} \tag{15}$$

$$\mathbf{H} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda}\mathbf{B}d\lambda \tag{16}$$

E a equação de estado é:

$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$

0.7.1 Exemplo 2

Discretize o sistema dado no exemplo 1, com T=0,1s e supondo um segurador de ordem zero na entrada.

Do exemplo 1, a partir da matriz de transição de estados, obtém-se:

$$\mathbf{G} = \mathbf{e}^{\mathbf{AT}} = \begin{pmatrix} e^{-2T} & 0 \\ 0 & e^{-1T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8187 & 0 \\ 0 & 0,9048 \end{pmatrix}$$

O termo relativo à entrada é calculado a partir de:

$$\mathbf{H} = \int_0^T \begin{pmatrix} e^{-2\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-1\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda = \begin{pmatrix} 0,0906 \\ 0,09516 \end{pmatrix}$$

Finalmente a equação pode ser escrita como:

$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$

$$\overline{x}(k+1)T = \begin{pmatrix} 0,8187 & 0 \\ 0 & 0,9048 \end{pmatrix} \overline{x}(k) + \begin{pmatrix} 0,0906 \\ 0,09516 \end{pmatrix} \overline{u}(k)$$

Figura 2: Equação de estado discreta