Representação de sistemas no espaço de estados

Controle 2

Prof. Paulo Roberto Brero de Campos

0.1 Introdução

A teoria de controle convencional é extremamente limitada. Ela só é válida para sistemas lineares, invariantes no tempo, tendo apenas uma entrada e uma saída.

Ela não serve para sistemas variantes no tempo, sistemas não lineares e sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

Portanto os métodos do lugar das raízes e de respostas em frequência não se aplicam a sistemas não lineares, estocásticos, etc.

A teoria de controle moderno foi desenvolvida em torno de 1960 e pode ser aplicada a qualquer sistema. Ela é essencialmente uma abordagem no domínio do tempo, utilizando o conceito de estado.

0.2 Definição de estado

Segundo Kalman, o estado de um sistema é uma estrutura matematicamente constituída por um conjunto de n variáveis $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, ...$x_n(t)$, chamadas variáveis de estado, tal que os valores iniciais $x_i(t_0)$, deste conjunto e os sinais de entrada $u_j(t)$, são suficientes para descrever univocamente a resposta do sistema para $t \geq t_0$.

Existe um conjunto mínimo de variáveis de estado que se torna necessário para representar um sistema exatamente.

O conceito de estado está associado à memória (armazenadores de energia) do sistema. Separam o futuro do passado, contendo toda a informação histórica importante para determinar o seu comportamento futuro em respeito a qualquer entrada.

Variáveis de estado – representam o menor conjunto de variáveis que determinam o estado do sistema dinâmico.

Vetor de estado – se n variáveis de estado são necessárias para descrever completamente o comportamento de um dado sistema, então as n variáveis de estado podem ser consideradas como as n componentes de um vetor $\overline{x}(t)$. Este vetor é chamado vetor de estado.

Espaço de estados – o espaço n-dimensional cujos eixos de coordenadas são os eixos $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, ...$x_n(t)$ é chamado de um espaço de estados.

Exemplo: no circuito abaixo, o comportamento dinâmico do sistema é completamente definido para $t \geq t_0$ se os valores iniciais da corrente $i(t_0)$, a tensão no capacitor $v_c(t_0)$ e a tensão de entrada $v(t)$ para $t \geq t_0$ forem conhecidos. Assim, o estado do circuito para $t \geq t_0$ é completamente determinado por $i(t)$, $v_c(t)$ e a tensão de entrada $v(t)$ para $t \geq t_0$. Portanto, $i(t)$ e $v_c(t)$ são um conjunto de variáveis de estado para este circuito.

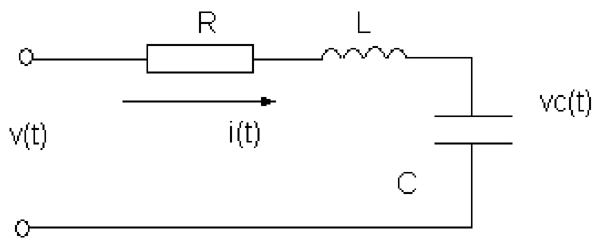

Figura 1: Circuito RLC

As equações que descrevem o funcionamento deste circuito são:

$L\frac{di}{dt} + Ri + v_c = v$

que pode ser escrito como: $\dot{i} = \frac{di}{dt} = \frac{-Ri}{L} - \frac{v_c}{L} + \frac{v}{L}$

e

$C\frac{dv}{dt} = i$

que pode ser escrito como: $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{i}{c}$

Estas duas equações podem ser colocadas na forma de uma matriz, resultando na representação do espaço de estados.

$$\begin{pmatrix} \dot{i} \\ \dot{v_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ v_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} v$$

Fisicamente o estado representa interações energéticas.

Matematicamente representa derivadas nas equações diferenciais ou pólos nas funções de transferência.

0.3 Representação de sistemas no espaço de estados

Um sistema dinâmico pode ser descrito por equações diferenciais ordinárias em que o tempo é a variável independente.

Usando-se a notação matricial, uma equação diferencial de ordem n pode ser representada por uma equação matricial diferencial de primeira ordem.

Dado um sistema representado pela seguinte equação diferencial:

$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = u$

Esta equação pode ser escrita como:

$\dddot{y} = -a_1\ddot{y} - a_2\dot{y} - a_3 y + u$

E pode ser representada de forma gráfica como sendo:

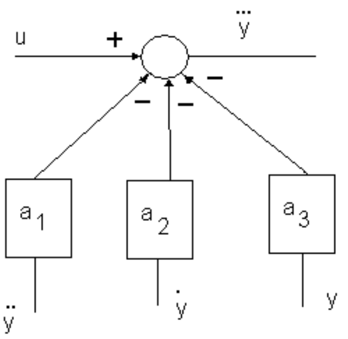

Figura 2: Somatório equação diferencial

Integrando $\dddot{y}$, obtém-se $\ddot{y}$ e assim por diante, conforme mostrado na figura 3.

As saídas dos integradores representam as variáveis de estado do sistema. Os integradores são os armazenadores de energia. As variáveis de estado são: $\ddot{y}, \dot{y}, y$.

Definindo:

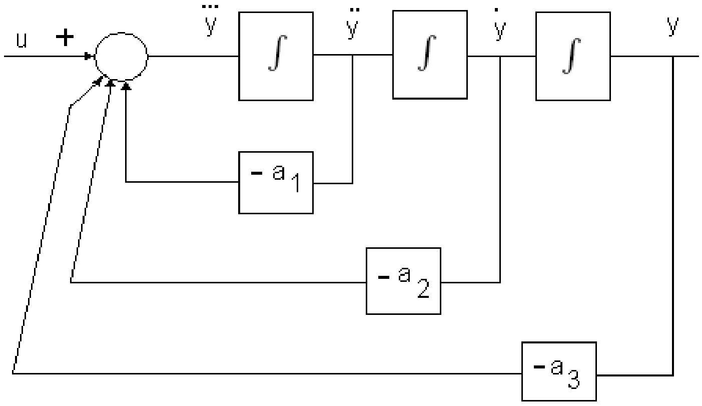

Figura 3: Diagrama de simulação

$x_1 = y$

$x_2 = \dot{y} = \dot{x_1}$

$x_3 = \ddot{y} = \dot{x_2}$

Reescrevendo a equação diferencial:

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = x_3$$
$$\dot{x_3} = -a_1 x_3 - a_2 x_2 - a_3 x_1 + u$$

Definindo:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{pmatrix}$$

Escrevendo na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

De forma geral as equações dinâmicas de um sistema são compostas pela equação de estado e pela equação de saída:

Equação de estado:

$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t)$

Equação de saída

$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t)$

onde:

x(t) – vetor de estado

y(t) – vetor de saída

u(t) – vetor de entrada

A – matriz do sistema

B – matriz de entrada

C – matriz de saída

D – matriz direta

0.4 Exemplos - representação no espaço de estados

0.4.1 Exemplo 1

Considere um sistema de primeira ordem, cuja função de transferência é dada a seguir:

$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a}{s+b}$

Ela pode ser escrita como:

$Y(s)(s+b) = U(s)a$

Resultando em: $sY(s) + bY(s) = aU(s)$

Retornando ao domínio do tempo, tem-se:

$\dot{y}(t) + by(t) = au(t)$

Isolando o termo de mais alta derivada, obtém-se:

$\dot{y}(t) = -by(t) + au(t)$

A partir da equação diferencial, isolando o termo de mais alta derivada, é possível desenhar o diagrama de simulação, mostrado na figura 4.

A variável de estado é definida como $x = y$. Assim, a equação de estado e a equação de saída podem ser escrita como:

$\dot{x}(t) = -bx(t) + au(t)$

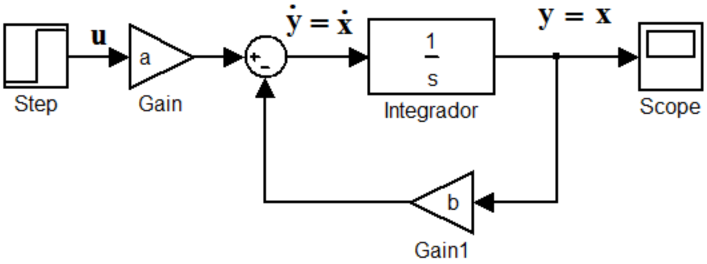

Figura 4: Diagrama de simulação

$y = x$

0.4.2 Exemplo 2

Dada a função de transferência:

$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+a}{s+b}$

Se for usado o método do exemplo 1, aparecerá uma derivada do sinal de entrada. Para evitar isto, esta equação será escrita de outra forma. Dividindo o polinômio do numerador pelo polinômio do denominador, obtém-se: $\frac{s+a}{s+b} = 1 + \frac{a-b}{s+b}$

Ela pode ser escrita como:

$\frac{Y(s)}{U(s)} = 1 + \frac{a-b}{s+b}$

$Y(s) = U(s) + U(s)\frac{a-b}{s+b}$

Cujo diagrama de simulação é mostrado na figura 5.

Note que a saída Y é dado pela soma do sinal de entrada mais a variável de estado x. As equações dinâmicas são representadas como:

$\dot{x}(t) = -bx(t) + (a-b)u(t)$

$y = x + u$

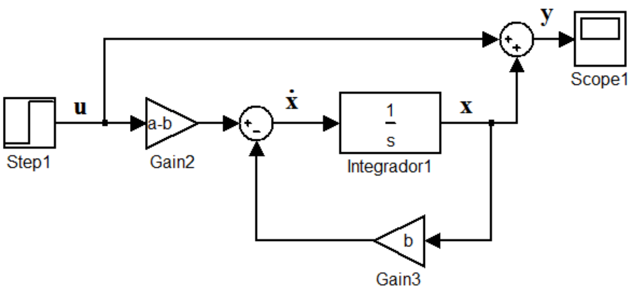

Figura 5: Diagrama de simulação

0.5 Exercícios

Dada a função de transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+3)(s+4)}$$

Represente a função de transferência no espaço de estados de duas formas diferentes:

1)Escreva a função de transferência na forma de frações parciais, e a partir disto represente no espaço de estados.

2) Escreva a função de transferência na forma de produtos, e depois represente no espaço de estados.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}\frac{(s+1)}{(s+3)}\frac{(s+2)}{(s+4)}$$

OBS: os exercícios 1 e 2 foram representações sobre o mesmo sistema, mas obtivemos representações diferentes no espaço de estados. Por que?

0.6 Não unicidade do conjunto de variáveis de estado

Um conjunto de variáveis de estado não é único para um dado sistema.

Suponha $x_1, x_2, ...x_n$ um conjunto de variáveis de estados. Então podemos considerar como outro conjunto de variáveis de estado qualquer conjunto de funções.

$\hat{x}_1 = f_1(x_1, x_2, ...x_n)$

$\hat{x}_2 = f_2(x_1, x_2, ...x_n)$

...

$\hat{x}_n = f_n(x_1, x_2, ...x_n)$

Portanto se $\mathbf{x}$ é um vetor de estado, então, $\hat{\mathbf{x}}$, onde: $\hat{\mathbf{x}} = P\mathbf{x}$ é também um vetor de estado, desde que P seja não singular (determinante $\neq 0$).

Exemplo: dado x_1 e x_2, podemos obter

$\hat{x}_1 = x_1 - x_2$

$\hat{x}_2 = x_1 + x_2$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$detP = 2 \neq 0$

0.7 Autovalores de uma matriz A

Os autovalores de uma matriz **A** são as raízes da equação característica:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \qquad (1)$$

Eles são chamados de raízes características.

Os autovalores no domínio do tempo, correspondem aos polos no domínio da frequência.

Para casa: estudar sobre invariância dos autovalores

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$$

A equação característica é dada por:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

Os autovalores de A são as raízes da equação característica: $\lambda = -1; \lambda = -2; \lambda = -3.$

Os autovalores equivalem aos polos no plano S.

0.7.1 Função de transferência

Considere as equações dinâmicas:

$\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\vec{\mathbf{u}}$

$\mathbf{y} = \mathbf{C}\vec{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\vec{\mathbf{u}}$

Calculando a transformada de Laplace, obtém-se:

$s\vec{\mathbf{X}}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{B}\vec{\mathbf{U}}(s)$

$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\vec{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{D}\vec{\mathbf{U}}(s)$

Considerando as condições iniciais nulas, colocando em evidência e isolando $\mathbf{X}(s)$:

$\vec{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\vec{\mathbf{U}}(s)$

Substituindo na equação de saída:

$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\vec{\mathbf{U}}(s)$

Finalmente a função de transferência é dada por:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{2}$$