Kombinatör Analiz

Tanım 1.1. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^+$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$f(n) = n\,f(n-1)$ ve $f(0)=1$ şeklinde tanımlanan fonksiyona faktöriyel fonksiyon adı verilir.

$$f(n) = n\,f(n-1) = n(n-1)\,f(n-1) = n.(n-1).(n-2).\ldots$$

$$f(n) = n!$$

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}$$

$$\boxed{n! = n(n-1)!}$$

$7.6(5)!$

Örnek: $7! = 7.6! = 42.5! = 210.4! = 840.3! = 2520.2! = 5040.1! = 5040$

$\forall\, m,n \in \mathbb{N}$ için $(mn)! \neq m!\,n!$

Örnek: $(3.2)! \neq 3!\,2!$

$$6! \neq 6.2$$

$$720 \neq 12$$

Örnek: $n! = (2n+4).(n-2)!$ $\quad n=?$

$$n(n-1).\cancel{(n-2)!} = (2n+4)\cancel{(n-2)!}$$

$$n(n-1) = 2n+4$$

$$n^2 - n = 2n+4$$

$$n^2 - 3n - 4 = 0 \quad\to\quad (n-4)(n+1)$$

$\cancel{n=-1}$ $\quad$ $\underline{n=4}$

SAYMA YÖNTEMİ

2

1. Toplama Kuralı

Tanım: Ayrık iki olaydan biri n farklı yolla diğeri m farklı yolla gerçekleşirse bu iki olay n+m farklı yolla gerçekleşir.

Örnek: Bir kafede 4 çeşit çay, 3 çeşit kahve vardır. Bu kafeye gelen biri çay veya kahve içecektir. Kaç farklı şekilde sipariş verilebilir?

Çay ve kahve içme olayları ~~içme~~ ~~olayları~~ ayrıktır.

$4+3=7$

Neden

çay veya kahveden biri tercih edilecek

2. Çarpma Kuralı

Bir olay n farklı yolla, diğer bir olay m farklı yolla yapılabilsin. Bu iki olay aynı anda n·m farklı yolla gerçekleşebilir.

Örnek:

Bir menüde 3 çorba, 2 ana yemek, 3 salata, 5 içecek ve 3 tatlı çeşidi vardır. Bir kişi bir ana yemek ve bir içecek kesin olmak üzere parası sadece bir çeşide daha yetmektedir. Bu kişi kaç farklı şekilde sipariş verebilir. → Çarpma Toplama

2 5 3

Bir ana yemek + Bir içecek + bir salata $= 2.5.3 = 30$

3

Bir ana yemek + Bir içecek + bir tatlı $= 2.5.3 = 30$

3

Bir ana yemek + Bir içecek + bir çorba $= 2.5.3 = +30$

$\overline{\quad 90 \quad}$

Örnek! Sınıf mevcudu = 25

Dersi Dinlemeyen = 15

Dersi Dinleyen = 10

İki kişi tahtaya kaldırılacak

a) İki öğrenci dersi dinlemeyenlerden

b) İki öğrenci dersi dinleyenlerden

c) bir öğrenci dersi dinleyenlerden bir öğrenci de dersi dinlemeyenlerden olmak üzere kaç farklı şekilde gelebilir?

a) $\underset{\text{seçenek}}{\frac{1}{15}} \times \underset{\text{seçenek}}{\frac{2}{14}} = 210$

b) $\frac{1}{10} \times \frac{2}{9} = 90$

c) $\underbrace{\underbrace{\overset{\text{Dersi Dinleyen}}{\frac{1}{10}} \cdot \overset{\text{Dersi Dinlemeyen}}{\frac{2}{15}}}_{150} + \underbrace{\overset{\text{Dersi Dinlemeyen}}{\frac{1}{15}} \cdot \overset{\text{Dersi Dinleyen}}{\frac{2}{10}}}_{150}}_{300}$

3. Permütasyon

4

Tanım: n nesnenin tamamının ya da bir kısmının tekrarlanmaksızın sıralanmasına permütasyon denir.

n tane nesnenin $(n \geq r)$ olmak üzere r'li sıralanışına permütasyon adı verilir. $P(n,r)$ şeklinde gösterilir.

Çarpma kuralına göre n nesnenin r'li sıralanışı

$$n.(n-1).(n-2) \dots (n-r+1) \rightarrow \text{ifade } (n-r)! \text{ ile}$$

çarpılıp bölünüyor.

$$P(n,r) = \frac{n.(n-1).\dots.(n-r+1).(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$r=n \rightarrow P(n,r) = P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Örnek: 25 kişilik sınıftan bir başkan ve bir başkan yardımcısı kaç değişik şekilde seçilebilir.

1. İlk seçilen öğrenci başkan 2. seçilen öğrenci başkan yardımcısı

$\underbrace{\hspace{4cm}}_{\text{sıralama önemli}}$

Başkan seçilen öğrenci başkan yardımcısı olamaz

$\underbrace{\hspace{4cm}}_{\text{Tekrarsız}}$

$$P(25,2) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{25!}{(25-2)!} = \frac{25.24.23!}{23!} = 25.24 = 600$$

Örnek: n öğrenci n ~~tane~~ sıraya kaç farklı şekilde oturabilir.

$$n!$$

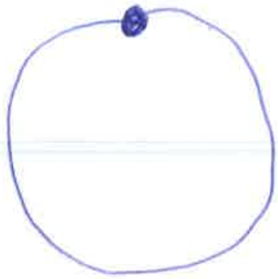
s_1 n

s_2 $n-1$

s_n 1

7.1 Dairesel Permütasyon

Tanım. n tane nesne bir yuvarlak şekil etrafında $(n-1)!$ biçimde sıralanır.



$$\boxed{P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_n, P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_{n-1} \\ P_{n-1}, P_n, P_1, \dots, P_{n-3}, P_{n-2} \\ \vdots \\ P_2, P_3, P_4, \dots, P_n, P_1 \end{array}\right\} \text{n adet aynı}$$

$$\frac{P(n,n)}{n} = \frac{\frac{n!}{(n-n)!}}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Örnek 5 kişilik bir heyet yuvarlak bir masada toplantı yapacaktır.

a) Kaç farklı şekilde otururlar?

b) Başkan ve başkan yardımcısı yan yana olmak üzere kaç farklı şekilde otururlar?

a) $n=5$ $\quad (5-1)! = 4! = 24$

b) $\underbrace{\text{Başkan, Başkan yardımcısı}}_{1}$ $\quad 2 \quad 3 \quad 4$

4 kişi

$n=4$ $\quad (4-1)! = 3! = 6 \longrightarrow 6 \cdot 2 = 12$

Başkan Başkan yardımcısı $= 2! = 2$

4. Kombinasyon

Tanım: n tane farklı elemandan sıra gözetmeksizin bir seferde seçilecek r'li $(r \leq n)$ seçime kombinasyon denir. $C(n,r)$ $\binom{n}{r}$ ile gösterilir.

Teorem 1.1

n elemanlı bir kümenin r'li $(r \leq n)$ kombinasyonları sayısı
$$\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

İspat. n nesneden r tane seçim yapalım ve bunları sıralayalım.

$$C(n,r).P(r,r) = P(n,r)$$

$$C(n,r).P(r,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C(n,r). \frac{r!}{(r-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}} \rightarrow (1)$$

Teorem 1.2. Paskal Kuralı
$$C(n+1,r) = C(n,r-1) + C(n,r) \qquad 1 \leq r \leq n$$

$$C(n,r-1) + C(n,r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{1}{(n-r+1)} + \frac{1}{r}\right] = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \cdot \left[\frac{n+1}{r(n-r+1)}\right]$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = C(n+1,r)$$

Örnek: {A, B, C, D} kümesinin elemanlarından ikişerli sıralı ve sırasız seçimini bulunuz.

Kombinasyon	Permütasyon
AB	AB, BA
AC	AC, CA
AD	AD, DA
BC	BC, CB
BD	BD, DB
CD	CD, DC
↓ Sıralama önemsiz	↓ Sıralama önemli

Örnek: N elemanlı bir kitleden n hacimli bir örnekleme yerine koymaksızın kaç farklı şekilde seçilir?

$$C(N,n)=\frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Örnek: 10 sorulu sınavdan 7 soru cevaplanacaktır. 1 soru
a) Kaç farklı şekilde cevaplanır?
b) Eğer adayın bir ve 2, 3 ve 4, 5 ve 6, 7 ve 8, 9 ve 10 numaralı sorulardan en az birini cevaplanacaksa kaç farklı şekilde sorular cevaplanır.

a) $C(10,7)=\frac{10!}{7!(10-7)!}=\frac{10.9.8}{3!}=\frac{720}{6}=120$

b) $\binom{5}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$

Seçilen 2 çiftin tamamı cevaplanacak — Tamamı cevaplanacak 2 grup — Sadece 1 soru cevaplanacak 3 çift

5. Sıralı ve Sırasız Parçalanmalar

5.1. Sıralı Parçalanmalar

Teorem: Bir A kümesinin n tane elemanı olsun. Bu n elemandan $r_1, r_2, \ldots, r_k$ tanesi aynı özellikte sahip ($r_1+r_2+\cdots+r_k=n$), bu n elemanın farklı sıralanışlarının sayısı:

$$P(n; r_1, r_2, \ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!} \quad \text{olur.}$$

$$P(n; r_1, r_2, \ldots, r_k) = \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-1}}{r_k}$$

Not: Kombinasyon tekrarlı permütasyonun özel halidir. Çünkü seçilenler birbirinin aynı ve seçilmeyenler birbirinin aynı olmak üzere iki gruba ayrılırlar.

$r_1=k \qquad r_1+r_2=n \qquad r_2=n-k$

$$P(n; r_1, r_2) = \frac{n!}{r_1!\, r_2!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Örnek: 7 oyuncak 3 kardeşe yaşları ile orantılı olarak dağıtılıyor. 2 kardeş ikiz. İse kaç farklı şekilde dağıtım yapılır.

ikiz

$$\{(1,1,5); (2,2,3); (3,3,1)\}$$

$$\frac{7!}{1!\,1!\,5!} + \frac{7!}{2!\,2!\,3!} + \frac{7!}{3!\,3!\,1!} = 392$$

Sıra Sırasız Parçalanma

$r_i \neq i=1,2,\ldots,k$ en az iki sayı aynı ise

bu aynı olan

$r_i \neq i=1,2,\ldots,k$'ların sırası önemsiz ise sırasız

parçalanma gerçekleşir.

Örnek: 15 kişi 5 kişilik 3 asansöre binecekler. Kaç farklı şekilde binerler.

$$P(15;5,5,5)=\frac{15!}{5!5!5!}\cdot\frac{1}{3!}=126126$$

6. Binom Teoremi

Teorem $n\in Z^+$ ve $a,b\in R$ için

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \text{ dır.}$$

$\binom{n}{k} \rightarrow$ binom katsayısı

$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \longrightarrow (a+b)^n$ açılımının genel terimi.

Örnek: n elemanlı bir kümenin alt küme sayısının 2^n olduğunu gösteriniz.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$a=1$ $b=1$

$$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k$$

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$$

10

örnek $\left(3x - \frac{1}{x^2}\right)^6 \longrightarrow$ Sabit terim nedir.

$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$a = 3x$

$b = -\frac{1}{x^2}$

$\binom{6}{k} (3x)^{6-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = c\,x^0$

$\binom{6}{k} 3^{6-k} x^{6-k} (-1)^k x^{-2k} = c.x^0$

$\underbrace{\binom{6}{k} 3^{6-k} . (-1)^k}_{c} \; \underbrace{x^{6-k} . x^{-2k}}_{x^0} = c\,x^0$

$x^{6-3k} = x^0 \qquad k = 2$

c'de k=2 yi yerine yaz

$\binom{6}{2} 3^{6-2} (-1)^2 = 1215$

7. Multinomial Teorem

Herbir doğal sayı için

$$(x_1+x_2+\dots+x_n)^r=\sum \frac{r!}{r_1!\,r_2!\dots r_n!}\,x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_2^{r_n}$$

Formulü geçerlidir.

Burada $r_1+r_2+\dots+r_n=r$ denkleminin Z^+ kümesindeki tüm çözümleri için alınır.

Örnek: $(1-x+2x^2)^5$ açılımından x'in artan kuvvetlerine göre düzenlendiğinde 5. terimi nedir?

$x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$1 \quad -x \quad 2x^2$

$$\frac{5!}{3!\,0!\,2!}\,1^3\,(-x)^0\,(2x^2)^2$$

$+$

$$\frac{5!}{2!\,2!\,1!}\,1^2\,(-x)^2\,(2x^2)^1$$

$+$

$$\frac{5!}{1!\,4!\,0!}\,1^1\,(-x)^4\,(2x)^0$$

$=$

$45x^4$

8. Tekrarlı Kombinasyon

n farklı nesneden, sıralama gözetmeksizin tekrarlı olarak $r$li seçimlere tekrarlı kombinasyon denir.

Tekrarlı kombinasyonların sayısı

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

ile elde edilir.

$\boxed{n \leq r \text{ koşulu aranmaz}}$

Örnek $\{1,2,3\}$ kümesinden alınan tekrarlı 2 li seçimlerin kümesi

$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$

6 adettir. $\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$

Örnek $(1-x+2x^2)^5$ açılımında

a) kaç terim vardır

b) açılım x'in kuvvetlerine göre sıralanırsa açılımında kaç terim vardır.

a) $\binom{n+r-1}{r} = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$

b) x e ait en büyük kuvvet $(x^2)^5 = x^{10}$ $\xrightarrow{}$ on

sabit terim ile birlikte on bir terim vardır

3. Gelişim Dağıtım modelleri

	Sıralı	Sırasız
İadeli	n^r	$C(n+r-1,r)$
İadesiz	$P(n,r)$	$C(n,r)$

Örnek: $A=\{a,b,c\}$ kümesindeki iadeli ve iadesiz iki eleman seçilecektir. Bu seçimlerde sıranın önemli olduğu ve olmadığı durumları gösteriniz.

	Sıralı	Sırasız
İadeli	(a,a) (a,b) (a,c) (b,a) (b,b) (b,c) (c,a) (c,b) (c,c)	(a,a) (a,b) (a,c) (b,b) (b,c) (c,c)
İadesiz	(a,b) (a,c) (b,a) (b,c) (c,a) (c,b)	(a,b) (a,c) (b,c)