Moment Çıkaran Fonksiyon (1)

X rastgele değişkeninin sıfır civarındaki momentlerini hesaplarken moment çıkaran fonksiyon kullanılır.

Olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak yeni fonksiyon elde edilir. Elde edilen fonksiyondan momentler hesaplanır.

Tanım: X rastgele bir değişken ve t parametre

$$E\left[e^{tX}\right] = M_X(t)$$

$-h^2 < t < h^2$ ise

$$M_X(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} e^{x_i t} \cdot P(x_i) & \text{Kesikli R.D.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} f(x)\, dx & \text{Sürekli R.D.} \end{cases}$$

$M_X(t)$ yerine bundan sonra $M(t)$ kullanılacaktır.

Örnek:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{x}{10}, & x = 1,2,3,4 \\ 0, & \text{D.d.} \end{cases}$$

$$M(t) = E\left[e^{tx}\right] = \sum_{i=1}^{4} e^{tx}\left(\frac{x}{10}\right)$$

$$= e^{1t}\left(\frac{1}{10}\right) + e^{2t}\left(\frac{2}{10}\right) + e^{3t}\left(\frac{3}{10}\right) + e^{4t}\left(\frac{4}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{10} e^{t}\left[1 + 2e^{t} + 3e^{2t} + 4e^{3t}\right]$$

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} h \cdot e^{-hx} & 0 \leq x \\ 0 & \text{D.d} \end{cases}$$

$t < h$

$$M(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot h e^{-hx} dx = h \int_0^{\infty} e^{x(t-h)} dx$$

$$= h \cdot \frac{1}{(t-h)} \cdot e^{x(t-h)} \Big|_0^{\infty}$$

$$= h\left(\frac{1}{t-h}\right)(0-1)$$

$$= \frac{h}{h-t}$$

2

Moment çıkaran fonksiyonun özellikleri

1. Moment çıkaran fonksiyonun 1. türevinde $t=0$ konursa

$$M'(t=0)=\frac{d(M(t))}{dt}\Big|_{t=0}=E(X)=m$$

$$M''(t=0)=\frac{d^2(M(t))}{dt^2}\Big|_{t=0}=E(X^2)$$

$$M^{(n)}(t=0)=\frac{d^n(M(t))}{dt^n}\Big|_{t=0}=E(X^n)$$

Örnek

$$P(X)=\begin{cases}0{,}25 & x=0,1,2,3\\ 0 & d.d\end{cases}$$

X in 1. 2. 3. momentlerini bulunuz.

$$M(t)=E(e^{tx})=\sum_{x=0}^{3}e^{tx}.(0{,}25)=e^{0t}.0{,}25+e^{1t}(0{,}25)+e^{2t}(0{,}25)+e^{3t}(0{,}25)$$

$M(t)=0{,}25(1+e^{t}+e^{2t}+e^{3t})$

$M'(t)=0{,}25(e^{t}+2e^{2t}+3e^{3t})$ $\quad E(X)=M'(0)=1{,}5$

$M''(t)=0{,}25(e^{t}+4e^{2t}+9e^{3t})$ $\quad E(X^2)=M''(0)=3{,}5$

$M'''(t)=0{,}25(e^{t}+8e^{2t}+27e^{3t})$ $\quad E(X^3)=M'''(0)=9$

Örnek:

$$F(x) = \begin{cases} x.e^{-x} & 0 \leq x \\ 0 & \text{d.d.} \end{cases}$$

Varyansı bulunuz. (Moment çıkaran fonksiyon yoluyla)

a) $M(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} . x e^{-x} dx = \int_0^\infty x e^{(t-1)x} dx$

$u = x \quad dV = e^{(t-1)} dx \to dx = du$

$V = \frac{1}{t-1} e^{(t-1)x}$

$uV - \int V du$

$x . \frac{1}{t-1} e^{(t-1)x} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{t-1} e^{(t-1)x} dx$

$t < 1 \quad \lim_{x \to \infty} x.e^{(t-1)x} \to 0$

$M(t) = -\left(\frac{1}{t-1} \cdot \left(-\frac{1}{t-1}\right) \cdot e^{(t-1)x}\right) \Big|_0^\infty$

$M(t) = \frac{1}{(t-1)^2} - 0 = \frac{1}{(t-1)^2} \quad t \neq 1$

$M'(t) = \left[(t-1)^{-2}\right]' = -2 \frac{1}{(t-1)^3} \Rightarrow M'(0) = 2 = E(X) = \mu$

$M''(t) = \frac{6}{(t-1)^4} \; ; \; M''(0) = 6 = E(X^2)$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 6 - 2^2 = 2$

Özellik 2

X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $M_x(t)$ olsun. a ve b sabit bir sayı olmak üzere $Y=aX+b$ değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_y(t)=E(e^{tY})=E\left[e^{t(aX+b)}\right]=e^{tb}E(e^{aXt})=\underline{e^{tb}\cdot M_x(at)}$$

Özellik 3

Moment çıkaran fonksiyonlar tektir. İki rastgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonları aynı ise bu değişkenlerin dağılımları aynıdır.

Markov Eşitsizliği

X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu bilinmiyorsa bu değişkene ait olasılıkları hesaplamada kullanılır.

Teorem

$X>0$ c sabit bir sayı

$P(X>c)\leq \frac{E(X)}{c}$ → Markov eşitsizliği

Örnek: X bir çocuk tiyatrosunda rastgele seçilen çocukların yaşlarını gösteren rastgele değişkendir. Bu değişkenin ortalaması $E(X)=5,5$ ise bir çocuğun yaşının en az 17 olma olasılığı nedir?

$P(X>17)\leq \frac{5,5}{17}=0,32$

↓

Bu olasılık çok düşük olmalıdır. Bu Markov eşitsizliğinin zayıf yanıdır. Chebyshev eşitsizliği kullanılabilir.

5

Chebysha Eşitsizliği

$K>1$ bir veri setinin ortalamadan k sapma uzaklığındaki aralığına düşen değerlerin oranı en az $1-\frac{1}{k^2}$'dir.

$\bar{x} \mp 2s \rightarrow 1-\frac{1}{4} = 0{,}75 < p$

$\bar{x} \mp 3s \rightarrow 1-\frac{1}{3^2} = \frac{8}{9} = 0{,}89 < p$

Teorem

X, ortalaması M varyansı σ^2 olan negatif olmayan değerler alan ve bir olasılık dağılımına sahip olduğu bilinen rastgele bir değişken ise

$k>0$ için

$$P(|X-M| \geq k.\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

veya

$$P(|X-M| < k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

Örnek

Bir sınıftaki öğrencilerin istatistik dersi not ortalaması 70 ve standart sapması 4 ise, 58 ile 82 arasında not alan öğrencilerin oranı en az kaçtır?

$$P(|X-M| < k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

$$P(58 < x < 82) = P(58-70 < x < 82-70)$$

$$= P(|X-70| \leq 12) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

$k.\sigma = 12$

$k.4 = 12$

$k=3$

$$= P(|X-70| < 12) \geq 1-\frac{1}{9}$$

$$P(|X-70| < 12) \geq \frac{8}{9} = 0{,}89$$

Büyük Sayılar Kanunu

Zayıf büyük sayılar kanunu olarak bilinen teorem en çok kullanılan istatistik teoremlerindendir.

Teorem

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ $n \to \infty$ Dağılımları aynı

$$\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \to \mu$$

Ortalaması bilinmeyen bir yığından çekilen örnekteki birim sayısı arttırıldığında örnek ortalaması yığın ortalamasına yaklaşacaktır. $\varepsilon > 0$ ve çok küçük bir sayı ise

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\bar{X}-\mu|<\varepsilon\right)=1$$

Veya

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\bar{X}-\mu|\geq\varepsilon\right)=0$$

İspat: $\bar{X}=\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}=\dfrac{n \cdot \mu}{n}=\mu$

$$E(\bar{X})=E\left(\frac{X_1}{n}\right)+E\left(\frac{X_2}{n}\right)+\cdots+E\left(\frac{X_n}{n}\right)=\frac{\mu}{n}+\cdots+\frac{\mu}{n}=n\frac{\mu}{n}=\mu$$

$$Var(\bar{X})=Var\left(\frac{X_1}{n}\right)+Var\left(\frac{X_2}{n}\right)+\cdots+Var\left(\frac{X_n}{n}\right)=\frac{\sigma^2}{n^2}+\cdots+\frac{\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n^2}\cdot n=\frac{\sigma^2}{n}$$

$\forall \varepsilon>0$ için

$$P\left(|\bar{X}-\mu|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{Var(\bar{X})}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\bar{X}-\mu|\geq\varepsilon\right)=0$$

Soru1. $P(X) = \begin{cases} cx^2 & x = 1,2,3 \\ 0 & \text{D.D.} \end{cases}$

fonksiyon olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

C kaçtır.

$P(X>2) = ?$

Soru2.

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{D.d.} \end{cases}$$

a) k nedir?

b) $P(0{,}5 \leq X \leq 0{,}9) = ?$

c) $F(X) = ?$

d) $P(X \leq 0{,}3 \mid X \leq 0{,}5)$ olasılığı kaçtır?

Soru 3. Bir grup ev kadınının televizyon seyretme süresi bir günde ortalama 3 saattir. Standart sapması ise 0.5 saattir

2 ile 4 saat arası TV seyretme olasılığı