Homojen Diferensiyel Denklemler

Tanım. Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu n gerçel sayısı için,

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

koşulunu sağlıyorsa, bu fonksiyona n.dereceden homojendir denir.

Örnek. $f(x,y) = x^4 - x^3 y$ fonksiyonunun homojen olduğunu göstererek derecesini bulunuz.

$f(tx,ty) = (tx)^4 - (tx)^3 (ty) = t^4 x^4 - t^4 x^3 y = t^4 (x^4 - x^3 y) = t^4 f(x,y)$ olduğundan, verilen fonksiyon dördüncü dereceden homojen bir fonksiyondur. Homojen fonksiyonlara çoğu kez Euler fonksiyonu da denilir.

Homojen diferensiyel denklemler homojen fonksiyonları bünyesinde barındıran ve $y' = f(\frac{y}{x})$ biçimindeki denklemlerdir. Bu tür diferansiyel denklemlerde $\frac{y}{x} = u$ dönüşümü yapılarak çözüme başlanır.

$$\frac{y}{x} = u \ , \ y = ux \ , \ \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \ , \ \frac{dy}{dx} = f(u)$$

yazılır. Daha sonra denklemin sağ tarafı eşitlenirse ;

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u \ , \ \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln x = Q(u) + \ln c \ , \ x = c.e^{Q(u)}$$

$$u = \frac{y}{x} \ , \ x = c.e^{Q(\frac{y}{x})}$$

Örnek $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}$ diferansiyel denklemini çözün.

Örnek. $y'(x^4 - y^4) = x^3.y$ diferansiyel denklemini çözün.

Örnek $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$ olan diferansiyel denklemi çözünüz.

Homojen Olmayan, Fakat Homojen Hale Getirilebilen Diferansiyel Denklemler

$$(ax+by+c)dx+(ex+fy+g)dy=0 \qquad (1)$$

formundadır. c ve g büyüklükleri (1) in homojen denklem olma şansını yok etmektedir. İki ayrı durum söz konusu olabilir:

$(i)\dfrac{a}{b}\neq\dfrac{e}{f}$ ise

$$\mathrm{x}=\mathrm{X}+\mathrm{h},\ \mathrm{y}=\mathrm{Y}+\mathrm{k}\Rightarrow dx=dX,dy=dY \qquad (2)$$

değişken dönüşümü yapılır; burada h ve k sabit büyüklüklerdir ve (4.1) in homojen olmasını engelleyen c ve g büyüklüklerinin neden olduğu aksamayı ortadan kaldıracak tarzda belirleneceklerdir.

(2) denklemindeki değerleri (1) denkleminde yerine yazalım ve düzenleyelim.

$$[aX+bY+(ah+bk+c)]dX+[eX+fY+(eh+fk+g)]dY=0$$

h ve k sabitleri

$$ah + bk + c = 0$$
$$eh + fk + g = 0$$

eşitliklerini gerçekleyecek tarzda belirlenirse (2) dönüşümü verilen denklemi

$$(aX + bY)dX + (eX + fY)dY = 0$$

haline getirir ki bu da homojen bir diferansiyel denklemdir.

$(ii)\dfrac{a}{b}=\dfrac{e}{f}$ ise, bir başka deyişle $e=ka$, $f=kb$ bağıntılarını gerçekleyen bir k sayısı varsa $ax+by=t \Rightarrow dx=\dfrac{1}{a}\left(dt-bdy\right)$ değişken dönüşümü yapılır. $ex+fy=k(ax+by)$ ilişkisini de dikkate alarak (1) i

$$\left(t+c\right)\frac{1}{a}\left(dt-bdy\right)+\left(kt+g\right)dy=0 \Rightarrow \frac{1}{a}\left(t+c\right)dt=\left[\frac{b}{a}\left(t+c\right)-\left(kt+g\right)\right]dy=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\left(t+c\right)dt}{b\left(t+c\right)-a(kt+g)}=dy$$

formunda yazabiliriz. Bu da değişkenlerine ayrılmış bir diferansiyel denklemdir.

Örnek. $(x+2y-4)dx+(2x-4y)dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Örnek $\dfrac{dy}{dx} = 2.(\dfrac{y+2}{x+y+1})^2$ diferansiyel denklemini çözün.