TAM DİFERENSİYEL DENKLEMLER

TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Birinci mertebeden bir adi lineer diferansiyel denklemin $G(x, y, y') = 0$ veya $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ şeklinde yazılabildiği gibi, çok yaygın olarak

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

şeklinde de yazılabilir. Eğer varsa, bu diferansiyel denklemin çözümü

$$F(x, y) = c \tag{2}$$

şeklinde bir fonksiyon olması gerekir. Öyle ise, diferansiyel denklemin çözümünü bulmak demek bu fonksiyonu bulmak demektir. Burada F(x,y) genel olarak bir kapalı fonksiyondur.

Bir örnek verilmek istenirse , $F(x,y)=x^2+3xy-y^2=c$ fonksiyonu,

$\left(2x+3y\right)dx+\left(3x-2y\right)dy=0$ diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. Burada c, sıfır dahil pozitif ve negatif bütün reel değerleri alabilir.

Şimdi (1) denklemine geri dönelim. Çözümü bulmak üzere böyle bir diferansiyel denklem verilmiş olsun. Burada M ve N, x ve y değişkenlerinin verilen fonksiyonları olup, x-y düzlemi içinde bulunan dikdörtgen şeklinde bir D bölgesi içinde sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bu fonksiyonların birinci mertebeden kısmi türevleri de aynı D bölgesi içinde sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda, eğer herhangi bir $F(x,y)=c$ fonksiyonu bulunabilirse, öyle ki, bu fonksiyon aynı bölge içinde tarif edilmiş, sürekli ve tek değerli bir fonksiyon olup x ve y 'ye göre kısmi türevleri (1) diferansiyel denkleminin $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonlarını vermektedir; o zaman, adı geçen (1) numaralı diferansiyel denkleme **tam diferansiyel denklem** denir. Böyle bir denklemde, $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ ifadesi de $F(x,y)$ fonksiyonun bir **tam diferansiyeli** olur.

Diğer taraftan, bir $F(x,y)=c$ fonksiyonunun tam diferansiyeli, tarif olarak,

$$dF(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0 \tag{3}$$

şeklinde yazıldığından, (1) denklemi bir tam diferansiyel denklemse ve $F(x,y)=c$ bu denklemin aranan genel çözümü ise,

$M(x,y)=\dfrac{\partial F}{\partial x}$ ve $N(x,y)=\dfrac{\partial F}{\partial y}$ yazılır. Burada M'nin y'ye göre ve N'nin de x'e göre tekrar kısmi türevleri alınırsa,

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ ve $\dfrac{\partial N}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ elde edilir. Bu eşitliklerin sağ tarafları birbirine eşit olduğundan sol tarafları da birbirine eşit olur. O zaman, bir tam diferansiyel denklem için,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{4}$$

olduğu görülür.

Çok açıktır ki, yukarıda bulunan ifadenin tersi de doğrudur. Şu halde, (4) bağıntısı varsa (1) denklemi bir tam diferansiyel denklemdir.

Tam diferansiyel denklemler daima çözülebilir diferansiyel denklemlerdir ve genel çözümleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$F(x, y) = c$ fonksiyonu, (1) numaralı tam diferansiyel denklemin bir genel çözümü olsun. Şimdi, bu fonksiyonun nasıl bulunduğunu görelim

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \tag{5}$$

dir. Her iki tarafın x'e göre kısmi integrali alındığında,

$$F(x, y) = \int M(x, y)\partial x + \phi(y) \tag{6}$$

elde edilir. Burada $\phi(y)$ integrasyon sabitidir ve yalnız y'nin bir fonksiyonudur. Şimdi de (6) bağıntısının y'ye göre kısmi türevi alınırsa,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)\partial x\right] + \frac{d\phi}{dy} \tag{7}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) \tag{8}$$

olduğundan, bu değer (7) denkleminde yerine konursa

$$N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)\partial x\right] + \frac{d\phi}{dy} \tag{9}$$

elde edilir. Burada gerekli kısaltmalar yapıldığında,

$\dfrac{d\phi}{dy} = \varphi(y)$ elde edilir. Bu son denklemin y' ye göre normal integrali alınarak $\phi(y)$ fonksiyonu bulunur. $\phi(y)$ nin bu değeri (6) denkleminde yerine konursa, verilen diferansiyel denklemin $F(x, y) = c$ genel çözümü bulunmuş olur.

Örnek. $(2x+e^y)dx+xe^y dy=0$ diferansiyel denklemi çözünüz.

Üç değişkenli durum

Çözümünü aradığımız diferansiyel denklem

$M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + K(x,y,z)dz = 0$ formunda olsun. Bu diferansiyel denklem, türevi alınabilen bir $F(x,y,z) = C$ fonksiyonunun tam diferansiyeli olabilir. Yani bu verilen diferansiyel denklem ile $F(x,y,z) = C$ fonksiyonunun arasında

$dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz = Mdx + Ndy + Kdz$ ilişkisi, dolayısıyla

$$F_x = M, \; F_y = N, \; F_z = K \tag{11}$$

İlişkileri var olabilir. *F'* nin ikinci mertebeden kısmi türevlerinin sürekli olması durumunda (6.11) den

$F_{yx} = M_y, \; F_{zx} = M_z, \; F_{xy} = N_x, \; F_{zy} = N_z, \; F_{xz} = K_x, \; F_{yz} = K_y$ ve dolayısıyla

$$M_y = N_x, \; M_z = K_x, \; N_z = K_y \tag{12}$$

ilişkilerine ulaşabiliriz. Bu bize $M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + K(x,y,z)dz = 0$ formundaki bir diferansiyel denklemin bir tam diferansiyel denklem olabilmesi için bir ölçüt verecektir.

Bu ölçütü farklı bir yoldan da ifade edebiliriz.

$\vec{A}(x,y,z)=M(x,y,z)\vec{i}+N(x,y,z)\vec{j}+K(x,y,z)\vec{k}$ vektörünü ele alalım. Bu vektörün rotasyonelinin sıfır olabilmesi

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ M & N & K\end{vmatrix}=\left(K_y-N_Z\right)\vec{i}+\left(M_z-K_x\right)\vec{j}+\left(N_x-M_y\right)\vec{k}=0\;\Rightarrow$$

$$K_y=N_z,\;\; M_z=K_x,\;\; N_x=M_y$$

Bağıntıların gerçekleşmesi ile, yani (12) ile verilen ilişkilerin gerçekleşmesi ile olanaklıdır.

İki değişkenli bir tam diferansiyel denklemi çözebilmek için izlenen yöntemlerin paralelleri, üç değişkenli bir tam diferansiyel denklemi çözebilmek için geçerlidir. Bu yöntemlerin nasıl kullanıldığına aşağıda ele alınacak olan örneklerle açıklık getirilecektir.

Örnek. $yzdx + xzdy + xydz = 0$ diferansiyel denkleminin tam diferansiyel denklem olduğunu gösterelim ve çözümünü bulalım.

Örnek $(e^{-x}+2y)dy=(ye^{-x}-\sin x)dx$ denkleminin çözümünü bulun.

Örnek $(x+\sin y)dx+(x\cos y+y)dy=0$ denkleminin çözümünü bulun.