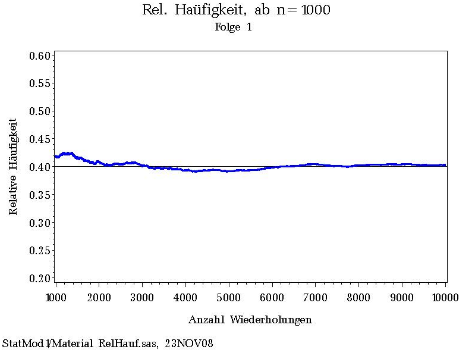
Inhalt von Abschnitt 5

Dieses Kapitel beschäftigt sich in erster Linie mit "Grenzwertsätzen" für Folgen von ZVn:

- Gesetz der großen Zahlen
- Verteilungskonvergenz
- Zentraler Grenzwertsatz.

Darüber hinaus werden momenterzeugende Funktionen (MeF), ein manchmal nützliches Hilfsmittel, besprochen. Abschluss bildet ein kurzes Kapitel über Simulation und Erzeugen von Zufallszahlen.

Betrachte eine Bernoullikette der Länge n mit Erfolgswahrscheinlichkeit π. Mit h_n bezeichne den durchschnittlichen Anteil erzielter Erfolge, $h_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$. Die folgende Grafik zeigt das Ergebnis eines Zufallsexperiments mit wachsenden n.



Definition 5.1 (Unabhängig, identisch verteilt (iid))

Sei X eine diskrete oder stetige ZV mit $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ und Verteilungsfunktion F. Der zu X gehörende Zufallsvorgang werde $n-$mal unabhängig wiederholt, $X_1, \ldots, X_n$ stellen die entsprechenden ZVn dar. Diese ZVn sind dann unabhängig und haben dieselbe Verteilung wie X ($\mathcal{L}(X_i) = \mathcal{L}(X)$ für $i = 1, \ldots, n$). Man sagt dann

$X_1, \ldots, X_n$ sind *unabh. identisch verteilt (uiv, iid) wie X*,
oder
$X_1, \ldots, X_n$ sind *unabhängige Wiederholungen von X*.

Die nach der Durchführungen erhaltenen Ergebnisse $x_1, \ldots, x_n$ sind *Realisierungen* von $X_1, \ldots, X_n$.

Das Gesetz der großen Zahlen (GGZ)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ iid ZVn mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Das arithmetische Mittel

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$

gibt den durchschnittlichen Wert von X bei n Versuchen wieder. Nach Durchführung wird $\overline{x}_n = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$ als Realisierung von $\overline{X}_n$ beobachtet.

Erwartungswert und Varianz des arithmetischen Mittels

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mu, \quad \mathbb{V}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Formal lässt sich die oben beschriebene Tatsache, dass sich mit steigendem n die Verteilung von $\overline{X}_n$ immer stärker um den Erwartungswert konzentriert, im Gesetz der großen Zahlen fassen:

Definition 5.2 (Gesetz der großen Zahlen)

Für beliebig kleines $c > 0$ gilt

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \leq c) \to 1 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Man sagt: $\overline{X}_n$ konvergiert nach Wahrscheinlichkeit gegen μ.

Satz 5.3 (Theorem von Bernoulli)

Die relative Häufigkeit, mit der ein Ereignis A bei n unabhängigen Wiederholungen eines Zufallsvorgangs eintritt, konvergiert nach Wahrscheinlichkeit gegen $P(A)$.

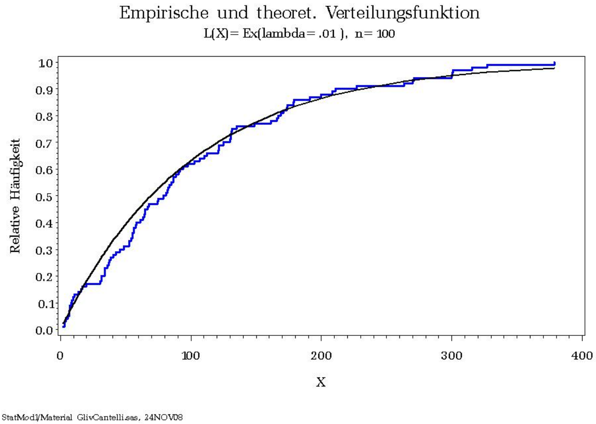
Hauptsatz der Statistik

Satz 5.4 (Hauptsatz der Statistik (Satz von Glivenko-Cantelli))

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion $F(x)$. Dann gilt für die zu unabhängigen und identisch wie X verteilten $X_1, \ldots, X_n$ gebildete Verteilungsfunktion $F_n(x)$

$$P(\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \leq c) \to 1 \quad \textit{für } n \to \infty.$$

In der folgenden Grafik ist eine empirische und eine theoretische Verteilungsfunktion für exponentialverteilte ZVn dargestellt.



Satz 5.5 (Zentraler Grenzwertsatz)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ *iid ZVn mit* $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ *und* $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2 > 0$.
Dann konvergiert die Verteilungsfunktion $F_n(z) = P(Z_n \leq z)$ *der standardisierten Summe*

$$Z_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

für $n \to \infty$ *an jeder Stelle* $z \in \mathbb{R}$ *gegen die Verteilungsfunktion* $\Phi(z)$ *der Standardnormalverteilung:*

$$F_n(z) \to \Phi(z).$$

Wir schreiben dafür kurz $Z_n \overset{a}{\sim} N(0,1)$.

Für den eingangs betrachteten Spezialfall einer binomialverteilten Variable $H_n = X_1 + \ldots + X_n \sim B(n, \pi)$ mit unabhängigen Bernoulli-Variablen $X_i \sim B(1, \pi)$, $\mathbb{E}(X_i) = \pi$, $\mathbb{V}(X_i) = \pi(1-\pi)$ erhält man:

Satz 5.6 (Grenzwertsatz von de Moivre)

Für $n \to \infty$ konvergiert die Verteilung der standardisierten absoluten Häufigkeit

$$\frac{H_n - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}$$

gegen eine Standardnormalverteilung. Für großes n gilt

$$H_n \overset{a}{\sim} N(n\pi, n\pi(1-\pi)),$$

d.h. die $B(n, \pi)$-Verteilung lässt sich durch eine Normalverteilung mit $\mu = n\pi$, $\sigma^2 = n\pi(1-\pi)$ approximieren.

Für die relative Häufigkeit $\hat{\pi}_n = H_n/n$ gilt entsprechend

$$\hat{\pi}_n = H_n/n \overset{a}{\sim} N(\pi, \pi(1-\pi)/n).$$

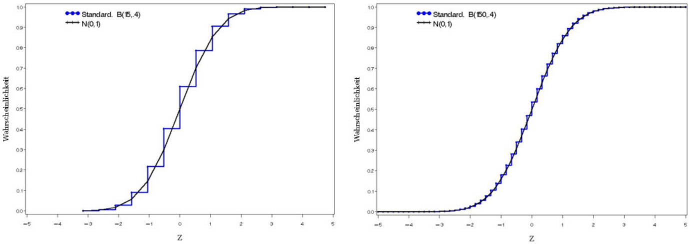


Figure: Verteilungsfunktionen: $N(0,1)$ und standardisierte $B(n=15,\pi=0.4)$ bzw. $B(n=150,\pi=0.4)$ Verteilung

Approximation von Verteilungen

Dieser Abschnitt fasst einige Möglichkeiten zur Approximation von diskreten und stetigen Verteilungen durch in der Regel einfacher handhabbare Verteilungen zusammen.

Besonders wichtig ist die Approximation der Binomialverteilung durch eine Normalverteilung sowie die Approximation von Quantilen stetiger Verteilungen, insbesondere der Chi-Quadrat und Student-Verteilung, durch Quantile der Normalverteilung.

Die theoretische Grundlage liefert in vielen Fällen der zentrale Grenzwertsatz.

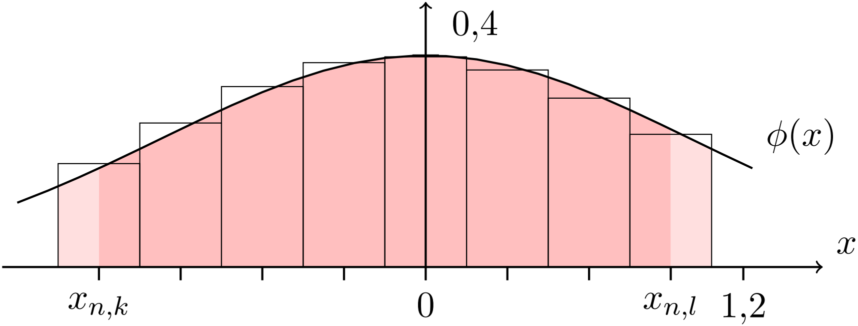
Normalverteilungs-Approximation der Binomialverteilung

Sei $X \sim B(n, \pi)$-verteilt. Falls $n\pi$ und $n(1-\pi)$ groß genug sind (Faustregel: $n\pi \geq 5$, $n(1-\pi) \geq 5$ oder auch $n\pi(1-\pi) \geq 9$), gilt

$$P(X \leq l) \approx \Phi\left(\frac{l + 0{,}5 - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}\right)$$

$$P(k \leq X \leq l) \approx \Phi\left(\frac{l + 0{,}5 - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - 0{,}5 - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}\right)$$

$$P(X = k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - 0{,}5 - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}\right)$$



Stetigkeitskorrektur im Fall $X \sim B(50, \pi = 0.3)$ mit
$x_{n,j} = \frac{j - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}$.

- Binomial- und Poissonverteilung
  Für $n \to \infty$ und $\pi \to 0$

$$B(n, \pi) \overset{a}{\sim} Po(\mu = n\pi),$$

  insbesondere

$$\binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k} \to e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}.$$

- Poisson- und Normalverteilung
  Sei $X \sim Po(\mu)$ und $\mu \geq 10$. Dann gilt

$$P(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - \mu}{\sqrt{\mu}}\right).$$

Ungleichung von Tschebyscheff

Bei metrischen ZVn ist man oft an den Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse der Form

$$\{\mu - c < X < \mu + c\} = \{|X - \mu| < c\}, \, c > 0$$

oder den Komplementärereignissen $\{|X - \mu| \geq c\}$ interessiert.

Dabei kann man $\mu = \mathbb{E}(X)$ als "Sollwert" interpretieren, und $\{|X - \mu| \leq c\}$ heißt, dass X um maximal $\pm c$ vom Sollwert μ entfernt ausfällt. Zur Berechnung von $P(|X - \mu| \leq c)$ benötigt man i.A. die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X.

Die Ungleichung von Tschebyscheff ermöglicht es, diese Wahrscheinlichkeit allein bei Kenntnis der Varianz abzuschätzen.

Satz 5.7 (Ungleichung von Tschebyscheff)

Für eine Zufallsvariable X mit $\mathbb{E}(X) = \mu$ und $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ gelten für beliebiges $c > 0$ folgende Ungleichungen:

$$P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

und

$$P(|X - \mu| < c) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2}.$$

Momenterzeugende Funktionen

Momenterzeugende Funktionen (MeF, englisch. moment generating functions (mgf)) sind ein wichtiges Hilfsmittel der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Falls sie "existieren", bestimmen sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung eindeutig.

Definition 5.8 (Momenterzeugende Funktion)

Sei X eine ZV. Als momenterzeugende Funktion (MeF) von X bezeichnet man die Funktion

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_k} e^{tx_k} P(X = x_k), & X \text{ diskret,} \\ \\ \displaystyle\int e^{tx} f(x) \mathrm{d}x, & X \text{ stetig.} \end{cases}$$

Hier betrachten wir nur solche Verteilungen, für die $M(t) < \infty$ für t aus einem Intervall $[-t_0, t_0]$. Für solche Verteilungen bestimmt die MeF eindeutig die Verteilung.

Der Name MeF leitet sich daraus her, dass die Momente der Verteilung durch sukzessives Differenzieren der MeF und Auswertung in $t = 0$ gewonnen werden können:

$$\begin{aligned} M'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbb{E}(e^{tX}) \\ &\overset{(*)}{=} \mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tX}\right) \\ &= \mathbb{E}(Xe^{tX}) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} M'(0) &= \mathbb{E}(X) \\ M''(0) &= \mathbb{E}(X^2) \\ &\vdots \\ M^{(n)}(0) &= \mathbb{E}(X^n) \end{aligned}$$

$(*)$: Wir setzen voraus, dass Vertauschen von Summation bzw. Integration und Differentiation zulässig ist.

Beispiele

Beispiel 5.9 (MeF einer $B(n, \pi)$-Verteilung)

Sei $X \sim B(n, \pi)$

$$M(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\pi e^t)^k (1-\pi)^{n-k} = \left(\pi e^t + (1-\pi)\right)^n .$$

Daraus folgt

- $M'(t) = n(\pi e^t + 1 - \pi)^{n-1} \pi e^t$
  $\Rightarrow M'(0) = \mathbb{E}(X) = n\pi.$
- $M''(t) = n(n-1)(\pi e^t + 1 - \pi)^{n-2} (\pi e^t)^2 + n(\pi e^t + 1 - \pi)\pi e^t$
  $\Rightarrow M''(0) = \mathbb{E}(X^2) = n(n-1)\pi^2 + n\pi$
- $\Rightarrow \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = n\pi(1-\pi).$

Beispiel 5.10 (MeF einer $Po(\mu)$-Verteilung)

Sei $X \sim Po(\mu)$

$$M(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{tk} e^{-\mu} \mu^k}{k!} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu e^t)^k}{k!}$$
$$= e^{-\mu} e^{\mu e^t} = e^{\mu(e^t - 1)}.$$

Daraus folgt

- $M'(t) = \mu e^t \cdot e^{\mu(e^t-1)}$
  $\Rightarrow M'(0) = \mathbb{E}(X) = \mu.$
- $M''(t) = \mu e^t e^{\mu(e^t-1)}(1 + \mu e^t)$
  $\Rightarrow M''(0) = \mathbb{E}(X^2) = \mu(1 + \mu)$
- $\Rightarrow \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mu.$

Beispiel 5.11 (MeF einer $Ex(\lambda)$-Verteilung)

Sei $X \sim Ex(\lambda)$, sei $t < \lambda$

$$M(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

Daraus folgt

- $M'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}$
  $\Rightarrow M'(0) = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.
- $M''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}$
  $\Rightarrow M''(0) = \mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$
- $\Rightarrow \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Beispiel 5.12 (MeF einer $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung)

Sei zunächst $X \sim N(0,1)$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-x^2/2} \mathrm{d}x \\ &= e^{t^2/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \mathrm{d}x}_{=1} = e^{t^2/2}. \end{aligned}$$

Sei nun $Z = \mu + \sigma X$, d.h. $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \mathbb{E}\left(e^{t(\mu+\sigma X)}\right) = e^{t\mu} \cdot \mathbb{E}\left(e^{t\sigma X}\right) \\ &= e^{t\mu} \cdot M_X(\sigma t) = e^{t\mu} \cdot e^{(t\sigma)^2/2}. \end{aligned}$$

Beispiel 5.12 (MeF einer $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung – Forts.)

Daraus folgt

- $M'_Z(t) = (\mu + \sigma^2 t) e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$
  $\Rightarrow M'_Z(0) = \mathbb{E}(Z) = \mu.$
- $M''_Z(t) = (\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2) e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$
  $\Rightarrow M''_Z(0) = \mathbb{E}(Z^2) = \sigma^2 + \mu^2$
- $\Rightarrow \mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 = \sigma^2.$

MeF von Summen unabh. Zufallsvariablen

Satz 5.13

Seien $X_1, \ldots, X_n$ *unabh. ZVn mit* $M_{X_i}(t) < \infty$ *auf dem Intervall* $[-t_0, t_0]$

$$\Rightarrow M_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t).$$

Beispiel 5.14 (Summe unabhängiger Binomialverteilungen)

Seien X, Y stu., $\mathcal{L}(X) = B(n, \pi)$, $\mathcal{L}(Y) = B(m, \pi)$,
$\mathcal{L}(X + Y) = ?$

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= M_X(t) \cdot M_Y(t) \\ &= \left(\pi e^t + (1-\pi)\right)^n \left(\pi e^t + (1-\pi)\right)^m \\ &= \underbrace{\left(\pi e^t + (1-\pi)\right)^{n+m}}_{\text{MeF einer } B(n+m,\pi)\text{-Verteilung}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(X + Y) = B(n + m, \pi)$ (Eindeutigkeit)

Simulation von Zufallszahlen

Um Zufallsexperimente auf dem Rechner nachzubilden (zu simulieren), muss man Realisationen von Zufallsvariablen erzeugen können, die bestimmten, gewünschten Wahrscheinlichkeitsverteilungen folgen. Basis dafür bilden (Pseudo-) Zufallszahlengeneratoren, die jede Programmiersprache zur Verfügung stellt.

Gleichverteilte Zufallszahlen

Basis für viele Verfahren stellt die stetige Gleichverteilung $U(0,1)$ auf dem Intervall $[0,1]$ dar:

U gleichverteilt auf $[0,1]$:

$$f_U(u) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leq u \leq 1 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & \text{falls } u < 0 \\ u, & \text{falls } 0 \leq u \leq 1 \\ 1, & \text{falls } u > 1. \end{cases}$$

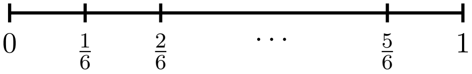
Beispiel 5.15 (Erzeugen von Bernoulli-verteilten ZVn)

Simuliere Bernoulli-Experiment mit gegebener Wahrscheinlichkeit π.

- Erzeuge Pseudozufallszahl $u \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} &\text{falls } u \leq \pi \Rightarrow \text{"Erfolg"} && (X_i = 1) \\ &\text{falls } u > \pi \Rightarrow \text{"Misserfolg"} && (X_i = 0). \end{aligned}$$

Beispiel 5.16 (Würfeln mit Wahrsch. $(\frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{6})$)

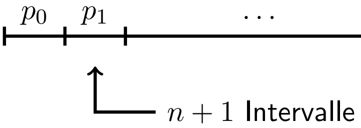


- Erzeuge Pseudozufallszahl u aus $[0, 1]$

$$\frac{j-1}{6} \leq u < \frac{j}{6} \quad \Rightarrow \text{"Augenzahl"} = j,\ j = 1, \ldots, 6.$$

Beispiel 5.17 (Binomialverteilung $B(n, \pi)$)

1. n-faches Wiederholen des Bernoulli-Experiments
2. Verallgemeinerung des Würfelbeispiels



$$\text{Intervalllänge} \mathrel{\hat{=}} P(X = k) = \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k}$$

Methode basierend auf der Quantilsfunktion F^{-1}

Satz 5.18

Sei U stetig gleichverteilt auf $[0,1]$, X eine ZV mit stetig-diffbarer Verteilungsfunktion F_X, so dass F_X^{-1} existiert.
Dann gilt:

$$\mathcal{L}(F_X^{-1}(U)) = \mathcal{L}(X).$$

Anwendung: u sei Pseudozufallszahl in $[0,1]$
$\Rightarrow F_X^{-1}(u)$ ist Realisation von X

[Methoden basierend auf dem allgemeineren Begriff der Quasi-Inversen, der auch auf Verteilungsfunktionen mit Sprungstellen angewendet werden kann, werden hier nicht behandelt.]

Beispiel 5.19 (Realisierung einer exponentialverteilten ZV)

- Sei $X \sim Ex(\lambda)$ mit bekanntem $\lambda > 0$

$$\Rightarrow \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F^{-1}(u) = -\frac{\log(1-u)}{\lambda}$$

- $u \in [0, 1]$ Realisierung einer stetig gleichverteilten U. Dann ist

$$x = F^{-1}(u) = -\frac{\log(1-u)}{\lambda}$$

Realisierung von $X \sim Ex(\lambda)$.

Beispiel 5.20 (Realisierung einer Weibull-verteilten ZV)

- Sei $\mathcal{L}(X) = W(\gamma, \lambda)$

$$\Rightarrow \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x^\gamma}$$

$$F^{-1}(u) = \left(-\frac{\log(1-u)}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

- Mit $u \in [0,1]$ Realisierung einer auf $[0,1]$ gleichverteilten ZV ist

$$F^{-1}(u) = \left(-\frac{\log(1-u)}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Realisierung einer $W(\gamma, \lambda)$-verteilten ZV.