Ayudantía 3 Comunicaciones Digitales

"Codificación"

Nicolás Araya Caro

Docente:
Diego Dujovne

18 de abril de 2022

codificación de una señal

cuando transmitimos información por cualquier medio. Esta se expone a los efectos del ruido en el canal. Dañando la información a enviar. Una de las principales formas de detección cuando la información sufre daños a causa del ruido es por la paridad de Bits

Paridad

La forma más sencilla de hacer paridad es agregando bits resultantes de una operación matemática entre los bits de datos.

n

Datos	Paridad
k	n - k

La unión de bits de paridad a la información la denominaremos como códigos. Por ejemplo un código de 7 bits con 4 bits de datos (Un código (7,4)) está definido por las siguientes funciones:

$$P_1 = I_1 \oplus I_2 \oplus I_4$$
$$P_2 = I_1 \oplus I_3$$
$$P_3 = I_2 \oplus I_3 \oplus I_4$$

Verificación

Si tomamos el ejemplo anterior, podemos definir las ecuaciones de los bits de paridad como una matriz en donde cada bit es una fila de la matriz. Las columnas corresponde a los datos.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para verificar si un código es válido tendremos que usar un poco de álgebra lineal para que rápidamente hagamos la verificación. Para ello definiremos una matriz de verificación (H):

$$H = P|I = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Generación de Códigos

Entonces un código C es válido, si y solo si, se cumple lo siguiente:

$$C \oplus H^t = \vec{0}$$

De la misma forma que definimos una matriz de verificación, podemos definir una matriz que genere códigos para los datos que queremos enviar:

$$G = I|P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego un vector de datos X , se le asigna un código C:

$$X \oplus G = C$$

Detección de Errores

La cantidad de bits erróneos que se pueden detectar es depende de la distancia de Hamming mínnima entre todos los códigos posibles. El problema es que la cantidad de códigos válidos equivale a 2^k, pero se puede determinar la distancia mínima usando la matriz H: La distancia mínima es igual a la cantidad de columnas linealmente dependientes en H. Existen casos especiales:

- Si H tiene una columna de solo valores 0, la distancia mínima es 1.
- Si H tiene 2 columnas iguales, la distancia mínima es menor o igual a 2.
- Si los códigos son binarios y todas las columnas son distintas y no nulas, la distancia mínima es mayor o igual a 3.

Finalmente, el código es capaz de detectar (d - 1) bits erróneos y corregir (d - 1)/2 bits erróneos, donde d es la distancia mínima. Una de las formas de corregir los bits erróneos es la tabla de síndrome, esta tabla toma el resultado del chequeo de paridad y lo asocia a los bits que provocan ese error. Esto es debido a:

$$mH^t = z$$

Si m es inválido, entonces $z \neq 0$ y hubo una modificación n del mensaje original

$$\begin{aligned} (m_0 + n)H^t &= z \\ m_0H^t + nH^t &= z \\ nH^t &= z \end{aligned}$$

Ejercicio

Se tiene un código (7,4) con la siguiente tabla de generación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la siguiente tabla de síndrome:

Sindrome	Bit Errado
000	0000000
100	1000000
010	0100000
001	0010000
110	0001000
011	0000100
111	0000010
101	0000001

Si se recibe el código 0101101. ¿Es correcto?. si no, ¿se puede corregir? ¿cual sería el codigo correcto en ese caso?

Respuesta

Notar que en la matriz desde izquierda a derecha existe una matriz identidad I de 4x4, lo cual es una matriz extendida de P^t, o sea $G = P^t|I$. Entonces:

$$G = P^t|I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0| & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1| & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1| & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1| & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si transponemos P^t nos queda la matriz P:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si expandimos la Matriz P a $P|I$ obtenemos la matriz de verificación H:

$$H = P|I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1| & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0| & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1| & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, debemos multiplicar el código 0101101 (m) con la matriz H para obtener el código Sindrome de la tabla de síndrome para corregir errores ($mH^t = z$):

$$(0101101)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 011$$

En este caso, el código sindrome que nos genera es 011 el cual nos dice que hay un bit errado, el 0000100. (porque z $\neq$0)

Si corregimos el código 0101101 (m) a 0101001, y realizar el mismo procedimiento obtenemos el siguiente sindrome:

$$(0101001)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 111$$

En este caso, aunque reparemos el bit erróneo, no nos soluciona el código debido a que necesitaríamos modificar más de un bit.

Ejercicio 2

A partir de la siguiente matriz de verificación de paridad, calcule la tabla Sindrome asociada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si se recibe el código 0001111, verifique si es correcto. y si no lo es, establezca cual es la palabra que podría ser transmitida si es posible.

Respuesta

Primero, debemos analizar la matriz H con las reglas de detección de errores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Tiene alguna columna de solo valores 0? No.
- Tiene 2 columnas iguales? No.
- son binarios? si.

Como se cumple la última condición y las primeras 2 no, la distancia (d) mínima es ≥ 3.

continuación

Si decimos que d=3, podemos detectar (d - 1) bits (2 bits) y corregir (d - 1)/2 (1) bits erróneos. Luego, debemos generar la tabla de síndrome con

un código de 3 bits (la distancia d) y posición de bit errado de 7 (por las filas de la matriz H).

continuación 2

La tabla sindrome queda de la siguiente manera: .

Sindrome	pos Bit Errado
000	0000000
110	1000000
011	0100000
111	0010000
101	0001000
100	0000100
010	0000010
001	0000001

Para obtener el código (basta multiplicar la posición bit errado (ej: el 1000000) con la matriz H y genera el código.

Tras obtener la Tabla Sindrome, multiplicamos el código 0001111 con la matriz H:

$$(0001111)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 010$$

Como nos dio 010, necesitamos corregir el bit erróneo basado en la tabla.

modificando el código 0001111 a 0001101, multiplicamos el código modificado con la matriz H:

$$(0001101)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 000$$

Como nos dio 000, El código esta corregido y el mensaje original es

Bibliografía

1 sistemas de comunicacion digitales y analogicos couch 7e