生成网络

鲁 鹏
北京邮电大学 计算机学院 智能科学与技术中心

本章教学课件参考了斯坦福大学CS231N以及台湾大学机器学习课件，

感谢这两门课程的团队在课程建设方面所做的工作！

今日主题

- 无监督学习
- 产生式模型
  - PixelRNN and PixelCNN
  - Variational Autoencoders (VAE)
  - Generative Adversarial Networks (GAN)

有监督学习 vs 无监督学习

有监督学习

数据: (x, y)， 其中x表示样本, y表示标签

目标: 学习 x -> y的映射

例子： 分类，回归，目标检测，语义分割等等

猫

分类

有监督学习 vs 无监督学习

有监督学习

数据: (x, y)， 其中x表示样本, y表示标签

目标: 学习 x -> y的映射

例子： 分类，回归，目标检测，语义分割等等

狗, 狗, 猫

目标检测

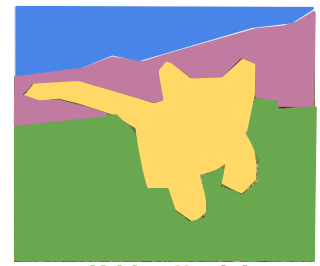
有监督学习 vs 无监督学习

有监督学习

数据: (x, y)， 其中x表示样本, y表示标签

目标: 学习 x -> y的映射

例子： 分类，回归，目标检测，语义分割等等



草地, 猫, 树, 天空

语义分割

有监督学习 vs 无监督学习

无监督学习

数据: x， 其中x为数据

目标: 找出隐含在数据里的模式或者结构

例子： 聚类，降维，特征学习，密度估计等

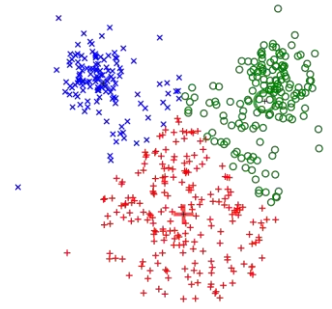
有监督学习 vs 无监督学习

无监督学习

数据: x，其中x为数据

目标: 找出隐含在数据里的模式或者结构

例子：聚类，降维，特征学习，密度估计等



K-means聚类

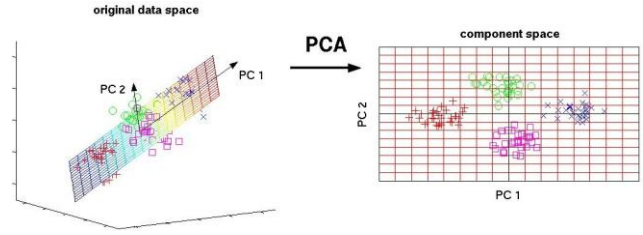
有监督学习 vs 无监督学习

无监督学习

数据: x，其中x为数据

目标: 找出隐含在数据里的模式或者结构

例子：聚类，降维，特征学习，密度估计等



3-d 2-d

主成分分析（降维）

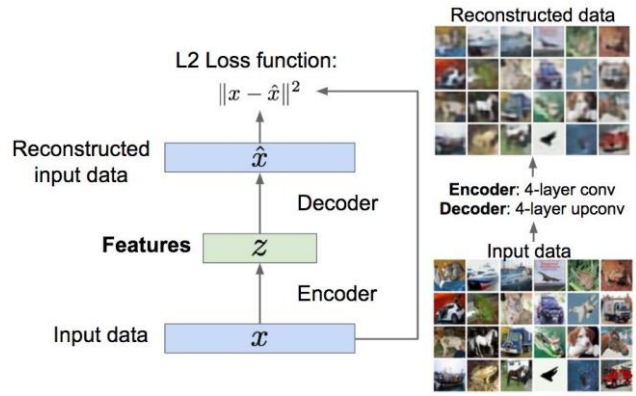
有监督学习 vs 无监督学习

无监督学习

数据: x，其中x为数据

目标: 找出隐含在数据里的模式或者结构

例子：聚类，降维，特征学习，密度估计等



自编码
（特征学习）

有监督学习 vs 无监督学习

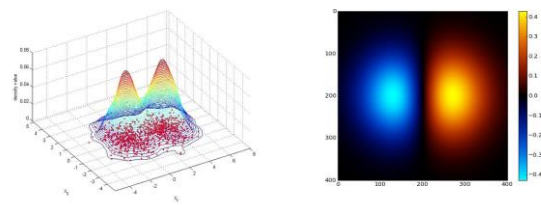
无监督学习

数据: x，其中x为数据

目标: 找出隐含在数据里的模式或者结构

例子：聚类，降维，特征学习，密度估计等

1-d density estimation



2-d 密度估计

有监督学习 vs 无监督学习

有监督学习

数据: (x, y) ,其中x表示样本, y表示标签

目标: 学习 x -> y的映射

例子：分类，回归，目标检测，语义分割等等

无监督学习

数据: x ， 其中x为数据

目标: 找出隐含在数据里的模式或者结构

例子：聚类，降维，特征学习，密度估计等

有监督学习 vs 无监督学习

有监督学习

数据: (x, y) ,其中x表示样本, y表示标签

目标: 学习 x -> y的映射

例子：分类，回归，目标检测，语义分割等等

无监督学习

数据获取成本低

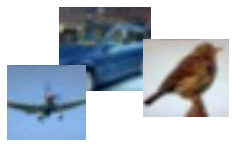
数据: x ， 其中x为数据

目标: 找出隐含在数据里的模式或者结构

例子：聚类，降维，特征学习，密度估计等

产生式模型

给定训练集，产生与训练集同分布的新样本。



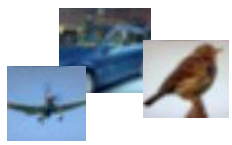
训练数据服从 $p_{data}(x)$

产生样本服从 $p_{model}(x)$

希望学到一个模型$p_{model}(x)$，其与训练样本的分布 $p_{data}(x)$ 相近

产生式模型

给定训练集，产生与训练集同分布的新样本。



训练数据服从 $p_{data}(x)$

产生样本服从 $p_{model}(x)$

希望学到一个模型$p_{model}(x)$，其与训练样本的分布 $p_{data}(x)$ 相近

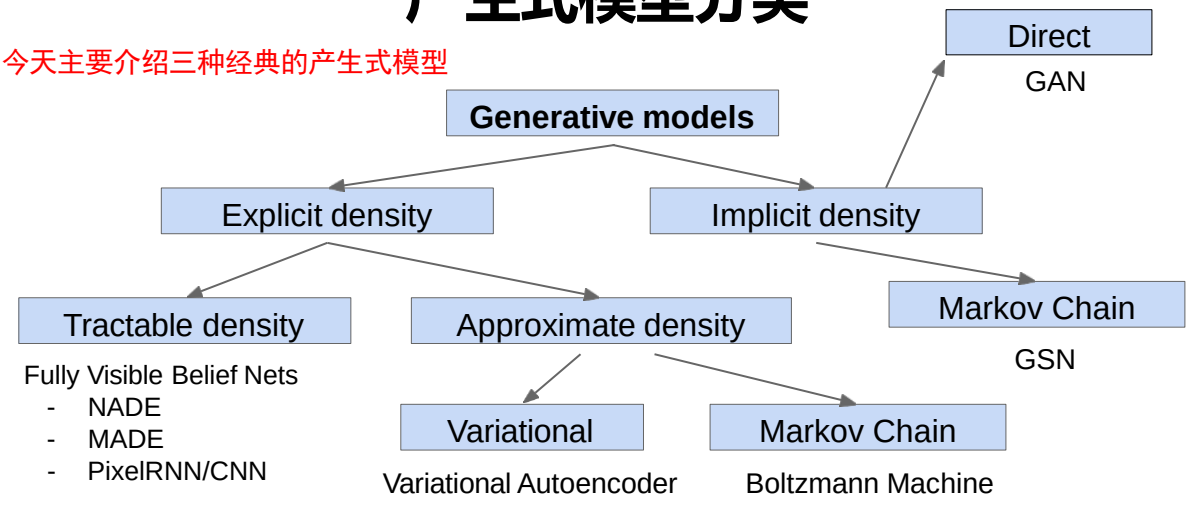
- 无监督学习里的一个核心问题——密度估计问题

几种典型思路:

- 显示的密度估计：显示的定义并求解分布 $p_{model}(x)$
- 隐式的密度估计：学习一个模型 $p_{model}(x)$，而无需显示的定义它

产生式模型分类

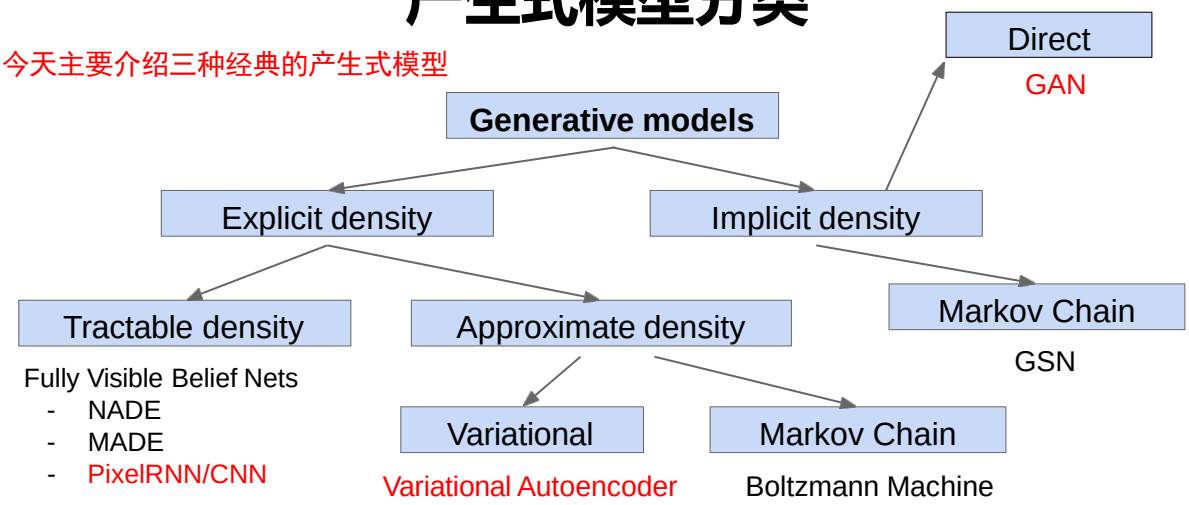
今天主要介绍三种经典的产生式模型



Tutorial on Generative Adversarial Networks, 2017.

产生式模型分类

今天主要介绍三种经典的产生式模型



Tutorial on Generative Adversarial Networks, 2017.

今日主题

- 无监督学习
- 产生式模型
  - PixelRNN and PixelCNN
  - Variational Autoencoders (VAE)
  - Generative Adversarial Networks (GAN)

PixelRNN 与 PixelCNN

显式的密度模型

利用链式准则将图像 x 的生成概率转变为每个像素生成概率的乘积：

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i | x_1, \ldots, x_{i-1})$$

$p(x)$：图像 x 的似然

$p(x_i | x_1, \ldots, x_{i-1})$：给定已经生成的像素的前提下生成第i个像素的概率

最大化训练数据的似然！

PixelRNN 与 PixelCNN

显式的密度模型

利用链式准则将图像 x 的生成概率转变为每个像素生成概率的乘积：

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i | x_1, \ldots, x_{i-1})$$

图像 x 的似然

给定已经生成的像素的前提下生成第i个像素的概率

需要定义像素的产生顺序

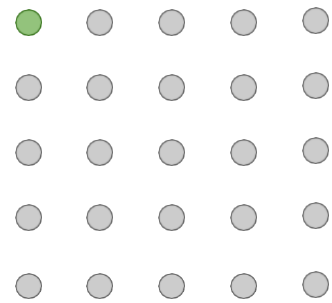
这个分布会很复杂，但是可以使用神经网络来建模！

最大化训练数据的似然！

PixelRNN

从图像左上角开始产生像素

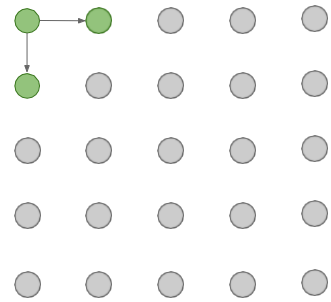
将像素生成看成一个序列生成的问题，利用RNN（LSTM）的序列描述能力来生成新的像素。



PixelRNN

从图像左上角开始产生像素

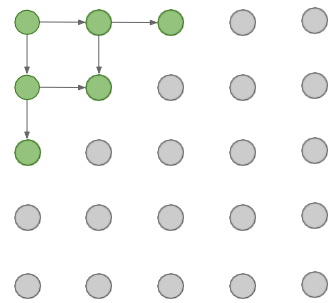
将像素生成看成一个序列生成的问题，利用RNN（LSTM）的序列描述能力来生成新的像素。



PixelRNN

从图像左上角开始产生像素

将像素生成看成一个序列生成的问题，利用RNN（LSTM）的序列描述能力来生成新的像素。

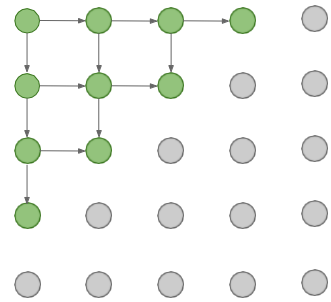


PixelRNN

从图像左上角开始产生像素

将像素生成看成一个序列生成的问题，利用RNN（LSTM）的序列描述能力来生成新的像素。

缺陷: 序列生成整张图片太慢了！

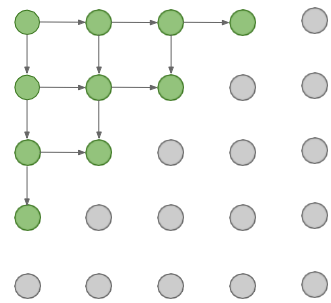


PixelRNN [van der Oord et al. 2016]

从图像左上角开始产生像素

将像素生成看成一个序列生成的问题，利用RNN（LSTM）的序列描述能力来生成新的像素。

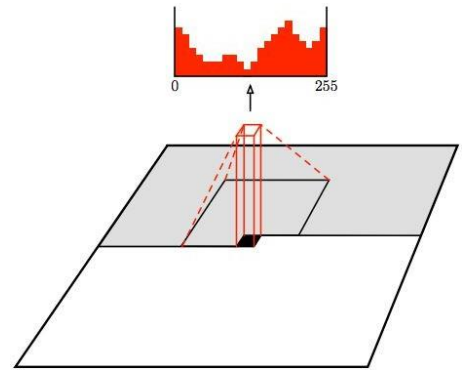
缺陷: 序列生成整张图片太慢了！



PixelCNN [van der Oord et al. 2016]

依然是从图像左上角开始产生像素

基于已生成的像素，利用CNN来生成新的像素

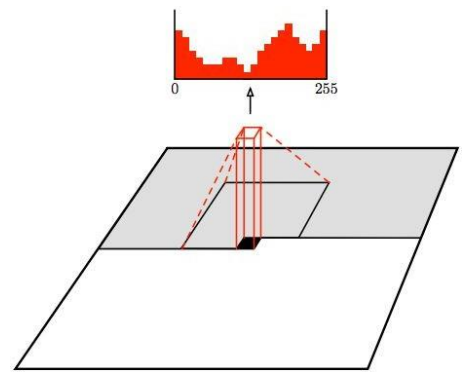


PixelCNN [van der Oord et al. 2016]

每个像素点使用Softmax loss

依然是从图像左上角开始产生像素

基于已生成的像素，利用CNN来生成新的像素



训练：最大化训练数据的似然

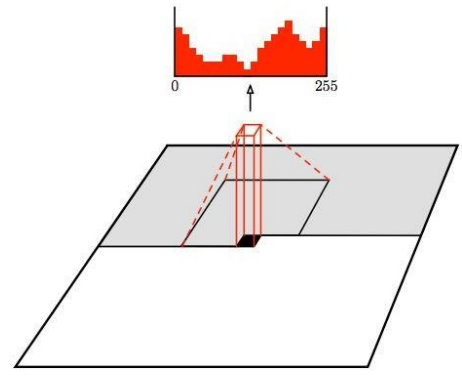
$$p(x) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i | x_1, ..., x_{i-1})$$

PixelCNN [van der Oord et al. 2016]

每个像素点使用Softmax loss

依然是从图像左上角开始产生像素

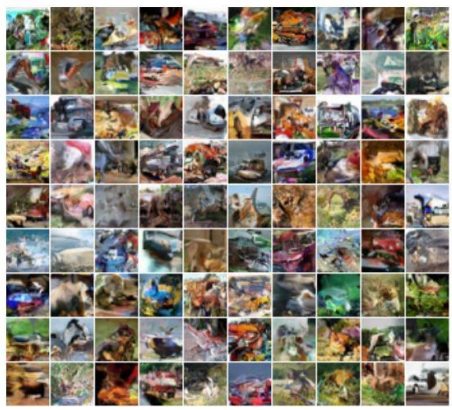
基于已生成的像素，利用CNN来生成新的像素



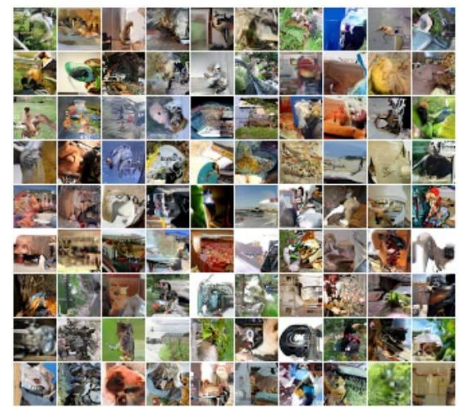
相对于PixelRNN， PixelCNN训练更快
(由于上下文信息已知，在训练时可以并行卷积)

图像的产生过程还是逐像素的序列生成
=> 依然很慢

模型生成结果展示



32x32 CIFAR-10



32x32 ImageNet

PixelRNN 与 PixelCNN

优点:

- 似然函数可以精确计算
- 利用似然函数的值可以有效地评估模型性能

缺点:

- 序列产生 => 慢

今日主题

- 无监督学习
- 产生式模型
  - PixelRNN and PixelCNN
  - Variational Autoencoders (VAE)
  - Generative Adversarial Networks (GAN)

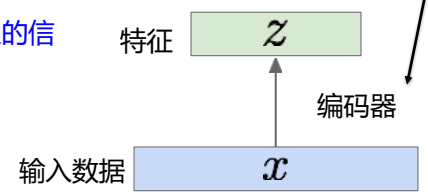
自编码器

无监督的特征学习，其目标是利用无标签数据找到一个有效地低维的特征提取器。

z 的维度一般小于 x 的维度
(特征降维)

Q: 特征降维有什么作用?

A: 希望降维后的特征仅保留数据中有意义的信息

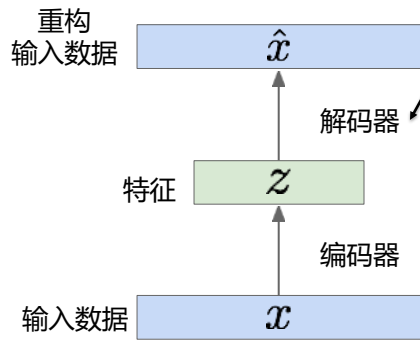


早先方法: Linear + nonlinearity (sigmoid)
卷积神经网络流行之前: Deep, fully-connected
卷积神经网络流行后： ReLU CNN

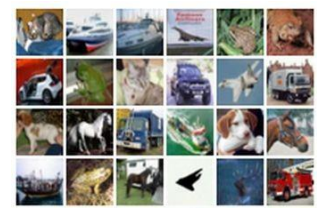
自编码器

如何学习?

自编码利用重构损失来训练低维的特征表示



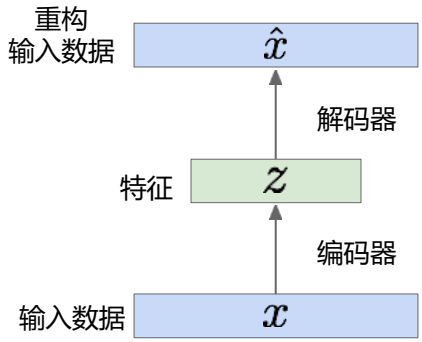
早先方法: Linear + nonlinearity (sigmoid)
卷积神经网络流行之前: Deep, fully-connected
卷积神经网络流行后： ReLU CNN



自编码器

如何学习?

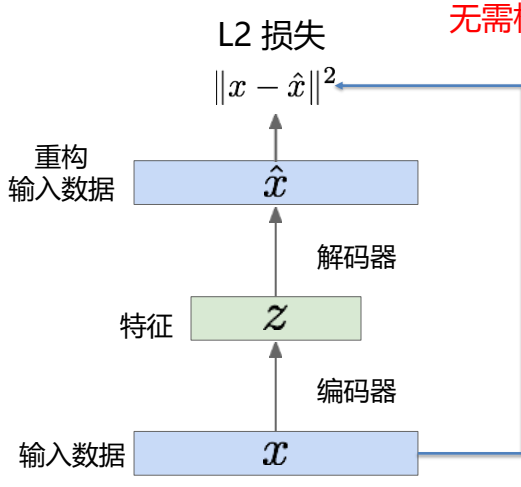
自编码利用重构损失来训练低维的特征表示



自编码器

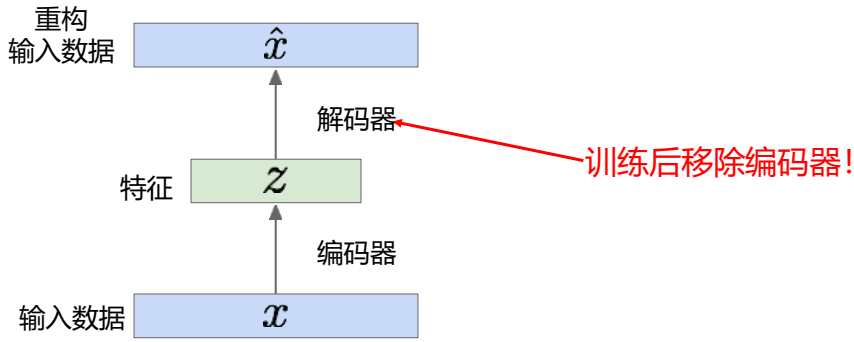
如何学习?

无需标签!



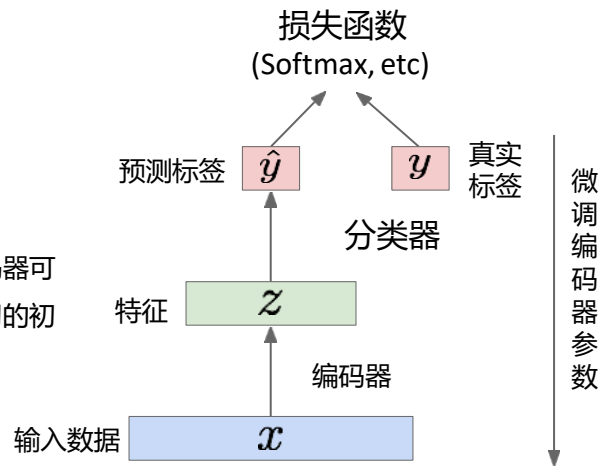
自编码器

如何学习?



自编码器

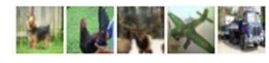
如何学习?



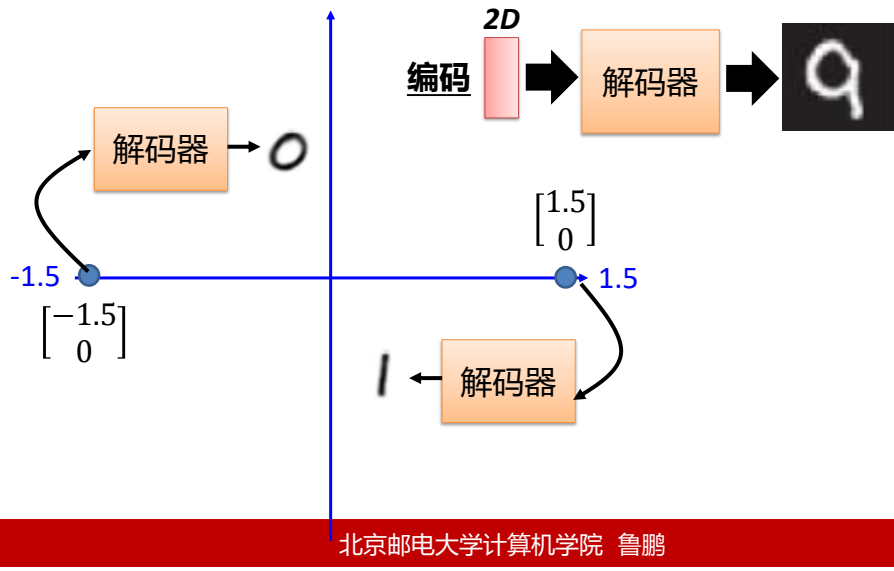
已训练完毕的编码器可以作为**有监督学习**的初始特征提取模型。

鸟 飞机
狗 鹿 卡车

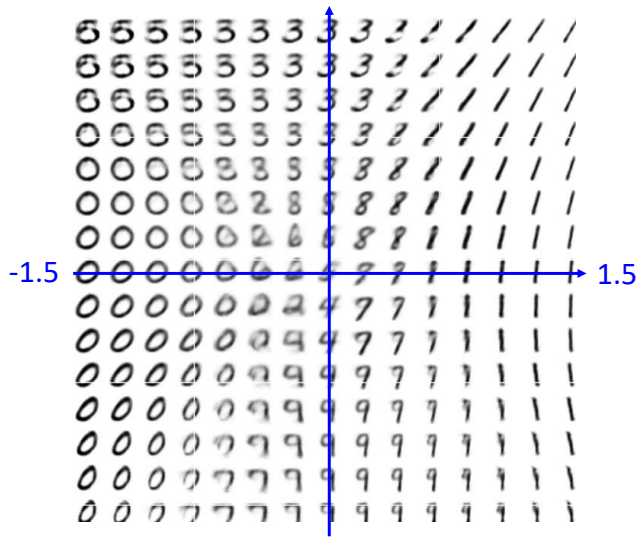
利用少量有标签数据，训练最终的网络



自编码器

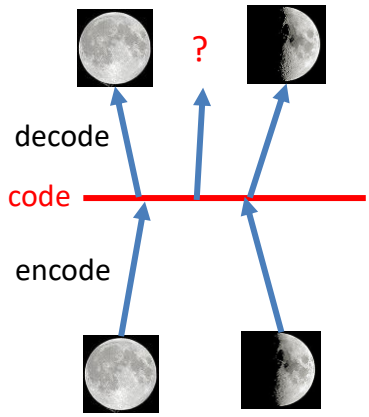

2D
编码
解码器
解码器
解码器
-1.5
1.5
$\begin{bmatrix} -1.5 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \end{bmatrix}$

自编码器

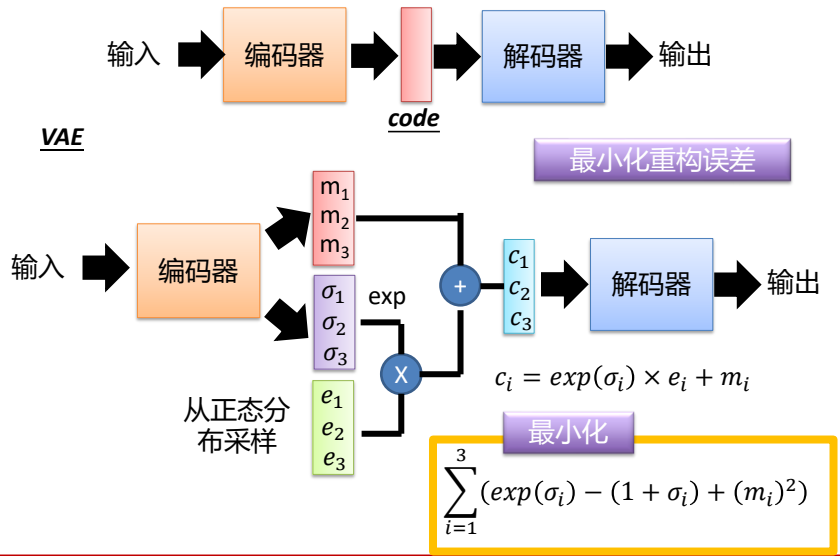

-1.5
1.5

Why VAE?

直接理由

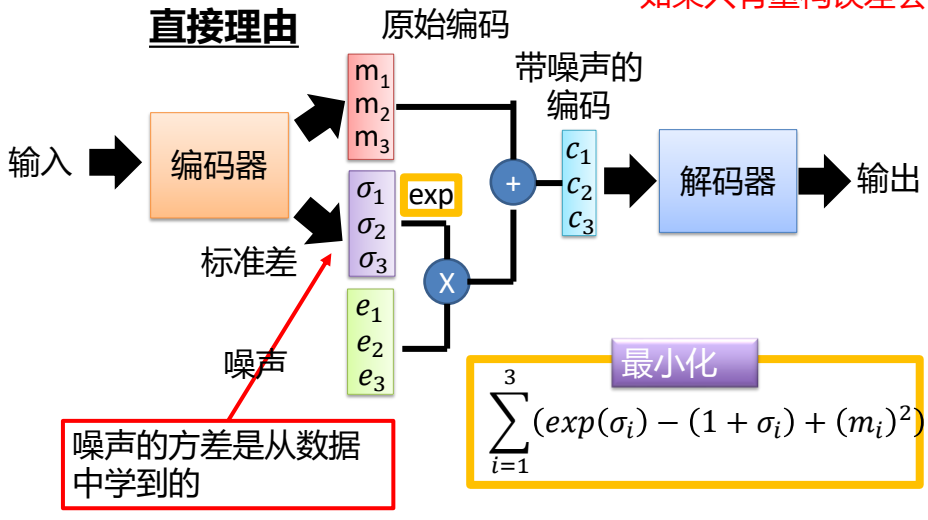


变分自编码器



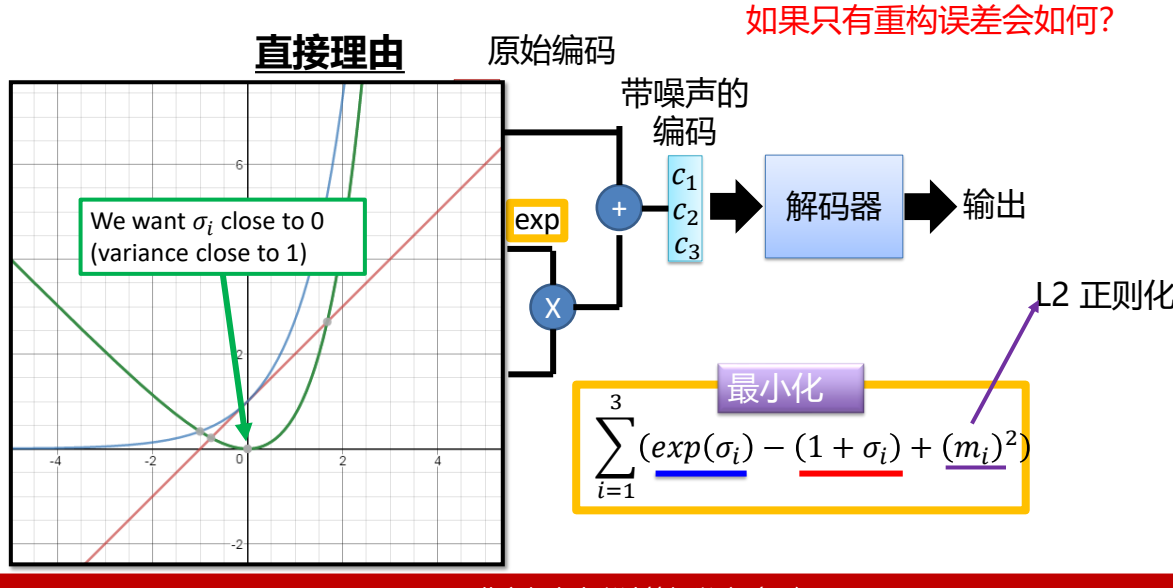
变分自编码器

如果只有重构误差会如何?

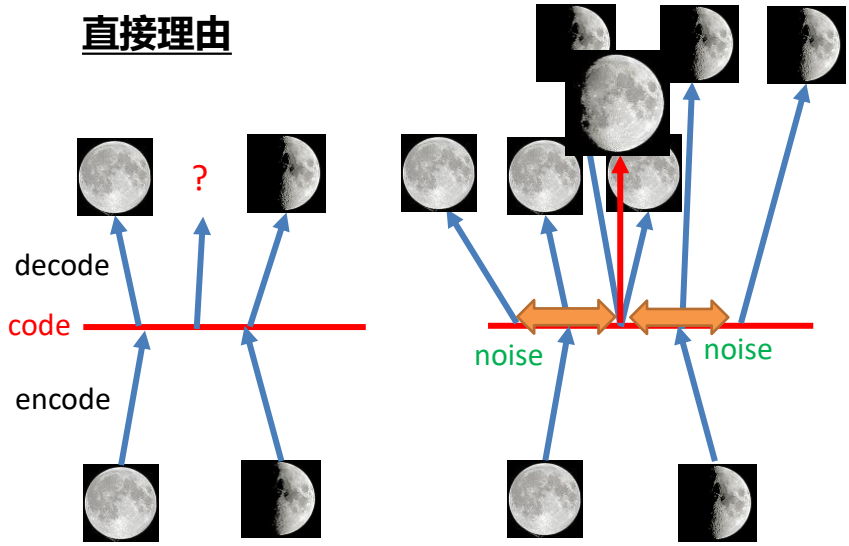


变分自编码器

如果只有重构误差会如何?



Why VAE?



变分自编码器(推导篇)

高斯混合模型

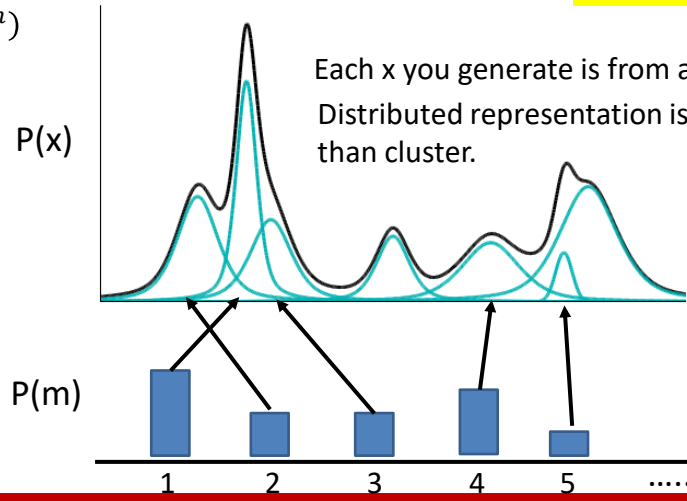
如何采样?

$m \sim P(m)$ (多项式分布)

m 是整数

$x|m \sim N(\mu^m, \Sigma^m)$

$$P(x) = \sum_m P(m)P(x|m)$$

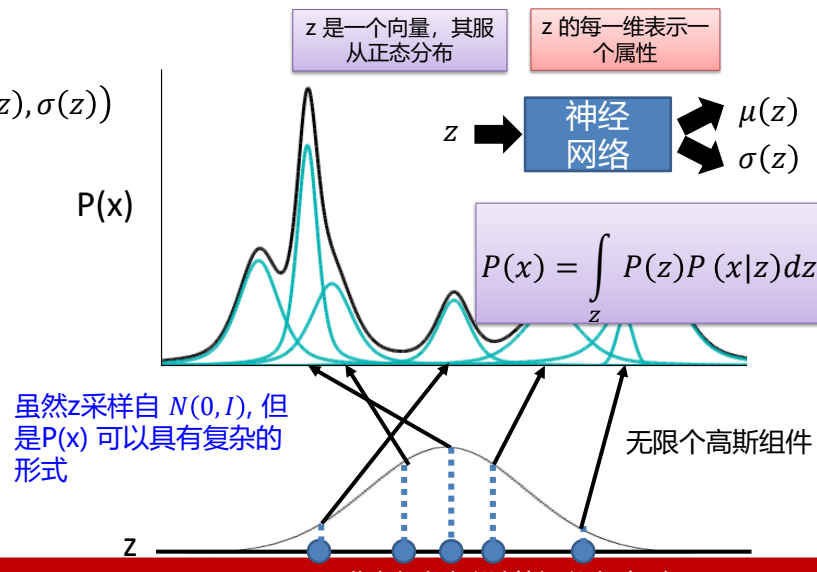


变分自编码器(推导篇)

VAE

$z \sim N(0, I)$

$x|z \sim N(\mu(z), \sigma(z))$



极大似然估计

$$P(x) = \int_z P(z)P(x|z)dz$$

$$L = \sum_x logP(x)$$

最大化观测 x 的似然

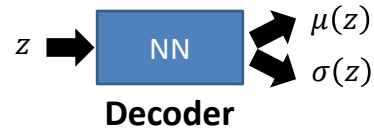
P(z) 正态分布

$x|z \sim N(\mu(z), \sigma(z))$

$\mu(z), \sigma(z)$ 为待估计的参数

优化解码器参数使

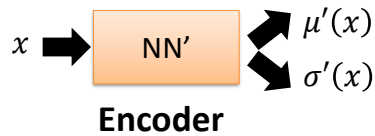
得似然函数 L 最大



Decoder

我们需要另一个分布q(z|x)

$$z|x \sim N(\mu'(x), \sigma'(x))$$



Encoder

极大似然估计

$$P(x) = \int_z P(z)P(x|z)dz$$

$$L = \sum_x logP(x)$$

最大化观测 x 的似然

P(z) 正态分布

$x|z \sim N(\mu(z), \sigma(z))$

$\mu(z), \sigma(z)$ 为待估计的参数

$$logP(x) = \int_z q(z|x)logP(x)dz$$

q(z|x) 可以是任何分布

$$= \int_z q(z|x)log\left(\frac{P(z,x)}{P(z|x)}\right)dz = \int_z q(z|x)log\left(\frac{P(z,x)}{q(z|x)}\frac{q(z|x)}{P(z|x)}\right)dz$$

$$= \int_z q(z|x)log\left(\frac{P(z,x)}{q(z|x)}\right)dz + \int_z q(z|x)log\left(\frac{q(z|x)}{P(z|x)}\right)dz$$

$KL(q(z|x)||P(z|x))$ ≥ 0

$$\geq \int_z q(z|x)log\left(\frac{P(x|z)P(z)}{q(z|x)}\right)dz$$

下界L_b

极大似然估计

P(z) 正态分布

$x|z \sim N(\mu(z), \sigma(z))$

$\mu(z), \sigma(z)$ 为待估计的参数　核心目的

$$P(x) = \int_z P(z)P(x|z)dz$$

$$L = \sum_x logP(x)$$

Maximizing the likelihood of the observed x

$$L_b = \int_z q(z|x)log\left(\frac{P(z,x)}{q(z|x)}\right)dz = \int_z q(z|x)log\left(\frac{P(x|z)P(z)}{q(z|x)}\right)dz$$

$$= \underbrace{\int_z q(z|x)log\left(\frac{P(z)}{q(z|x)}\right)dz}_{-KL(q(z|x)||P(z))} + \int_z q(z|x)logP(x|z)dz$$

$z|x \sim N(\mu'(x), \sigma'(x))$

Connection with Network

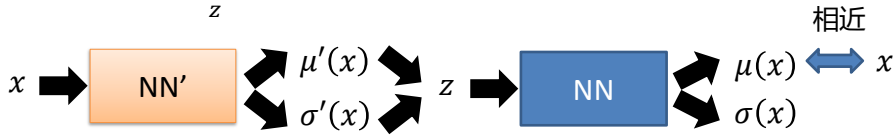
最小化 $KL(q(z|x)||P(z))$

Minimize

$$\sum_{i=1}^{3}(exp(\sigma_i) - (1+\sigma_i) + (m_i)^2)$$

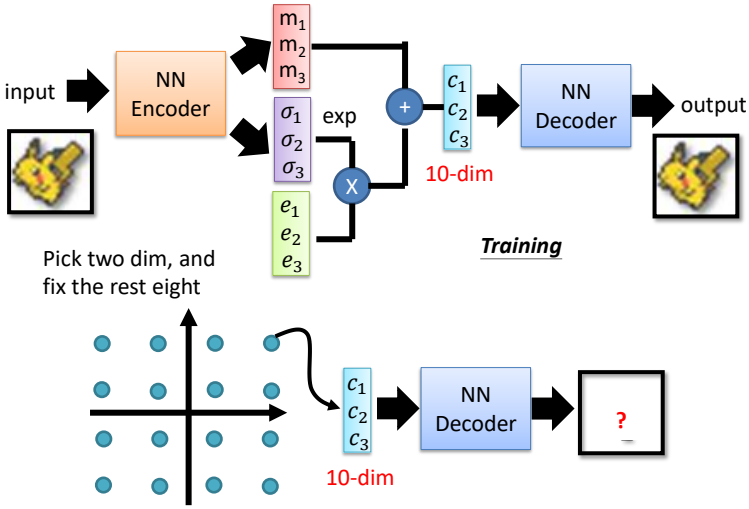
最大化

$$\int_z q(z|x)logP(x|z)dz = E_{q(z|x)}[logP(x|z)]$$



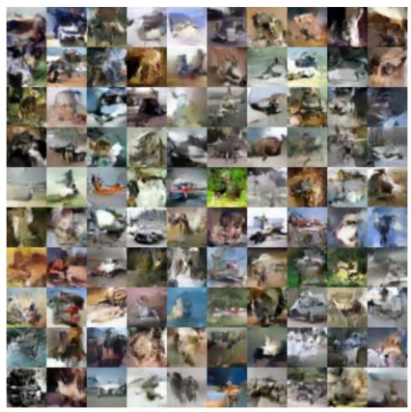
自编码结构

变分自编码器



Pokémon Creation

变分自编码器

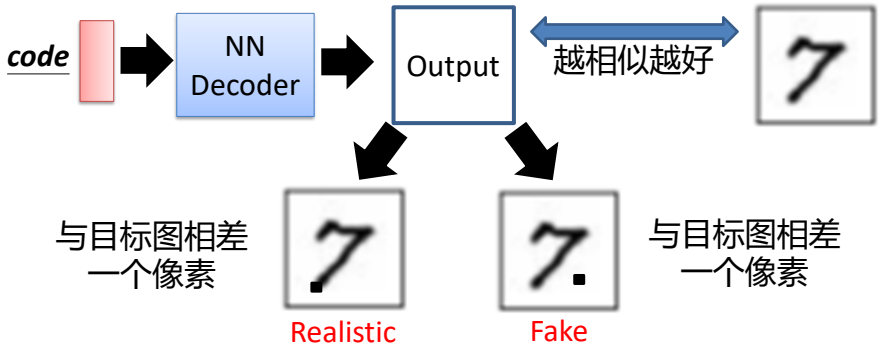


32x32 CIFAR-10

Labeled Faces in the Wild

变分自编码器存在的问题

- VAE 并没有真的在尝试模仿真实图片



VAE 貌似仅记住了存在的图像，而不是产生新的图像

变分自编码（VAE）总结

基于典型自编码器拓展成的概率框架=> 可以产生新的样本

定义一个难以计算的密度函数=> 通过推导来优化一个下边界

优点:

- 产生式模型里的一种主要方法
- 可以计算 q(z|x)，这个特征表示可以用在其他的许多任务中。

缺点:

- 最大化似然函数的下边界能够有效地工作，但是模型本身没有PixelRNN/PixelCNN那样好评估
- 与最新的技术（GANs）相比，产生的样本较模糊，质量较低

今日主题

- 无监督学习
- 产生式模型
  - PixelRNN and PixelCNN
  - Variational Autoencoders (VAE)
  - Generative Adversarial Networks (GAN)

2019: BigGAN

Brock et al., 2019

生成对抗网络（GAN）

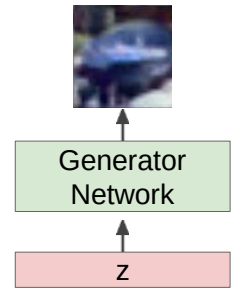
问题: 希望从训练样本分布中采样新数据，但这个分布不仅维度高而且还很复杂，难以直接实现。

解决方案: 对一个简单的分布采样，比如均匀分布；然后，学习一种映射将其变换到训练样本分布

Q: 用什么方法能够实现这个复杂的映射?

A: 神经网络!

输出: 采样自训练样本分布的图像



输入: 随机噪声

Ian Goodfellow et al., "Generative Adversarial Nets", NIPS 2014

训练GAN: 两个玩家的游戏

生成网络: 期望能够产生尽量真实的图片，进而骗过判别器

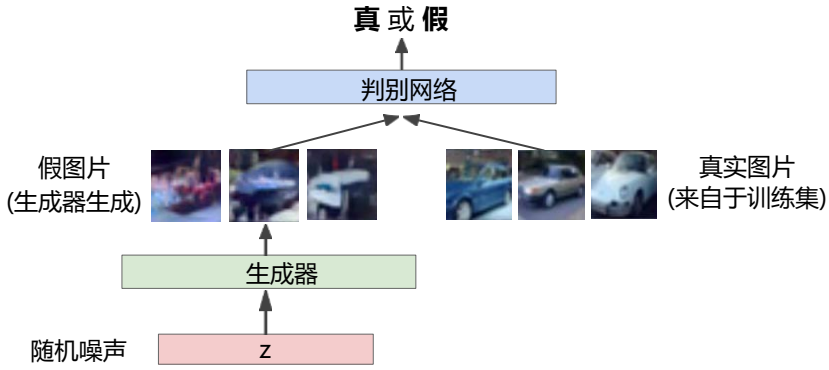
判别网络: 期望能够准确的区分真假图片

Ian Goodfellow et al., "Generative Adversarial Nets", NIPS 2014

生成对抗网络（GAN）

生成网络: 期望能够产生尽量真实的图片，进而骗过判别器

判别网络: 期望能够准确的区分真假图片



Ian Goodfellow et al., "Generative Adversarial Nets", NIPS 2014

训练GAN: 两个玩家的游戏

生成网络: 期望能够产生尽量真实的图片，进而骗过判别器

判别网络: 期望能够准确的区分真假图片

采用 **minimax 的方式联合训练**

Minimax objective function:

$$\min_{\theta_g} \max_{\theta_d} \left[\mathbb{E}_{x \sim p_{data}} \log D_{\theta_d}(x) + \mathbb{E}_{z \sim p(z)} \log(1 - D_{\theta_d}(G_{\theta_g}(z))) \right]$$

Ian Goodfellow et al., "Generative Adversarial Nets", NIPS 2014

训练GAN: 两个玩家的游戏

生成网络: 期望能够产生尽量真实的图片，进而骗过判别器

判别网络: 期望能够准确的区分真假图片

采用 **minimax 的方式联合训练**

判别器输出真实图片的似然，其值在(0,1) 之间

Minimax objective function:

$$\min_{\theta_g}\max_{\theta_d}\left[\mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\log \underbrace{D_{\theta_d}(x)}_{\text{判别器对真实样本 x 的打分}}+\mathbb{E}_{z\sim p(z)}\log\left(1-\underbrace{D_{\theta_d}(G_{\theta_g}(z))}_{\text{判别器对生成样本G(z) 的打分}}\right)\right]$$

Ian Goodfellow et al., "Generative Adversarial Nets", NIPS 2014

训练GAN: 两个玩家的游戏

生成网络: 期望能够产生尽量真实的图片，进而骗过判别器

判别网络: 期望能够准确的区分真假图片

采用 **minimax 的方式联合训练**

判别器输出真实图片的似然，其值在(0,1) 之间

Minimax objective function:

$$\min_{\theta_g}\max_{\theta_d}\left[\mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\log \underbrace{D_{\theta_d}(x)}_{\text{判别器对真实样本 x 的打分}}+\mathbb{E}_{z\sim p(z)}\log\left(1-\underbrace{D_{\theta_d}(G_{\theta_g}(z))}_{\text{判别器对生成样本G(z) 的打分}}\right)\right]$$

- 判别器 (θ_d) 希望**最大化目标函数**使得D(x)接近于1（真实样本），而 D(G(z)) 接近于0 （假样本）
- 生成器 (θ_g) 希望最小化目标函数使得 D(G(z)) 尽量接近于1 ，即希望判别器认为生成器产生的图像 G(z) 为真实图片。

Ian Goodfellow et al., "Generative Adversarial Nets", NIPS 2014

训练GAN: 两个玩家的游戏

Minimax 目标函数:

$$\min_{\theta_g} \max_{\theta_d} \left[\mathbb{E}_{x \sim p_{data}} \log D_{\theta_d}(x) + \mathbb{E}_{z \sim p(z)} \log(1 - D_{\theta_d}(G_{\theta_g}(z))) \right]$$

交替完成:

1. **Gradient ascent** on discriminator

$$\max_{\theta_d} \left[\mathbb{E}_{x \sim p_{data}} \log D_{\theta_d}(x) + \mathbb{E}_{z \sim p(z)} \log(1 - D_{\theta_d}(G_{\theta_g}(z))) \right]$$

2. **Gradient descent** on generator

$$\min_{\theta_g} \mathbb{E}_{z \sim p(z)} \log(1 - D_{\theta_d}(G_{\theta_g}(z)))$$

Ian Goodfellow et al., "Generative Adversarial Nets", NIPS 2014

训练GAN: 两个玩家的游戏

Minimax 目标函数:

$$\min_{\theta_g} \max_{\theta_d} \left[\mathbb{E}_{x \sim p_{data}} \log D_{\theta_d}(x) + \mathbb{E}_{z \sim p(z)} \log(1 - D_{\theta_d}(G_{\theta_g}(z))) \right]$$

交替完成:

1. **Gradient ascent** on discriminator

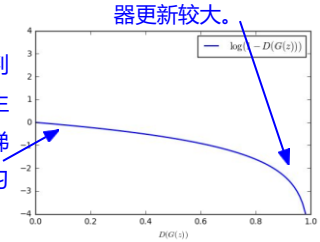
$$\max_{\theta_d} \left[\mathbb{E}_{x \sim p_{data}} \log D_{\theta_d}(x) + \mathbb{E}_{z \sim p(z)} \log(1 - D_{\theta_d}(G_{\theta_g}(z))) \right]$$

2. **Gradient descent** on generator

$$\min_{\theta_g} \mathbb{E}_{z \sim p(z)} \log(1 - D_{\theta_d}(G_{\theta_g}(z)))$$

实际上, 直接优化生成器的这个目标函数并不是很有效!

相反，当生成样本较好时，判别器输出值都会大，生成器损失函数在此处得梯度很大，生成器更新较大。



生成样本非常糟糕时，判别器输出值都会很小，生成器损失函数在此处得梯度很小，使得生成器学习得非常慢。

Ian Goodfellow et al., "Generative Adversarial Nets", NIPS 2014

训练GAN: 两个玩家的游戏

Minimax 目标函数:

$$\min_{\theta_g}\max_{\theta_d}\left[\mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\log D_{\theta_d}(x)+\mathbb{E}_{z\sim p(z)}\log(1-D_{\theta_d}(G_{\theta_g}(z)))\right]$$

交替完成:

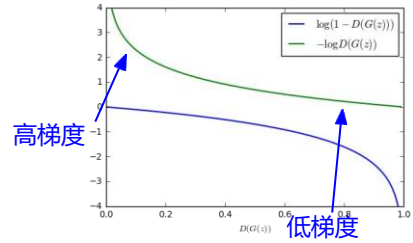
1. **Gradient ascent** on discriminator

$$\max_{\theta_d}\left[\mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\log D_{\theta_d}(x)+\mathbb{E}_{z\sim p(z)}\log(1-D_{\theta_d}(G_{\theta_g}(z)))\right]$$

2. **Instead: Gradient ascent** on generator, different objective

$$\max_{\theta_g}\mathbb{E}_{z\sim p(z)}\log(D_{\theta_d}(G_{\theta_g}(z)))$$

真实中很好用，大家几乎都这么用!

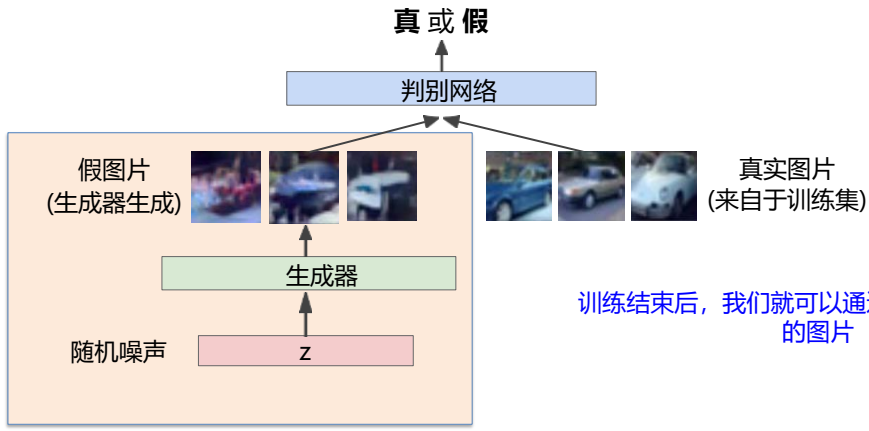


Ian Goodfellow et al., "Generative Adversarial Nets", NIPS 2014

生成对抗网络（GAN）

问题: 希望从训练样本分布中采样新数据，但这个分布不仅维度高而且还很复杂，难以直接实现。

解决方案: 对一个简单的分布采样，比如均匀分布；然后，学习一种映射将其变换到训练样本分布

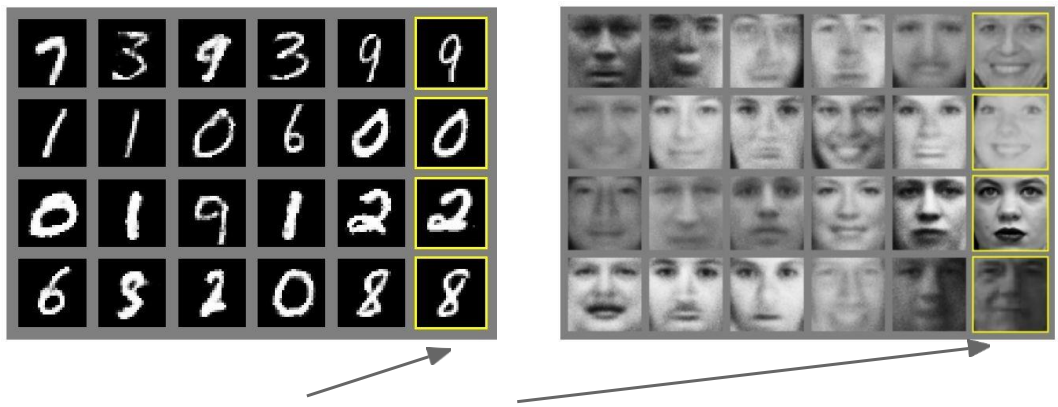


训练结束后，我们就可以通过生成器来生成新的图片

Ian Goodfellow et al., "Generative Adversarial Nets", NIPS 2014

生成对抗网络（GAN）

产生的样本



在训练样本中找到的最近邻

Ian Goodfellow et al., “Generative Adversarial Nets”, NIPS 2014

生成对抗网络（GAN）

产生的样本(CIFAR10)

在训练样本中找到的最近邻

Ian Goodfellow et al., “Generative Adversarial Nets”, NIPS 2014

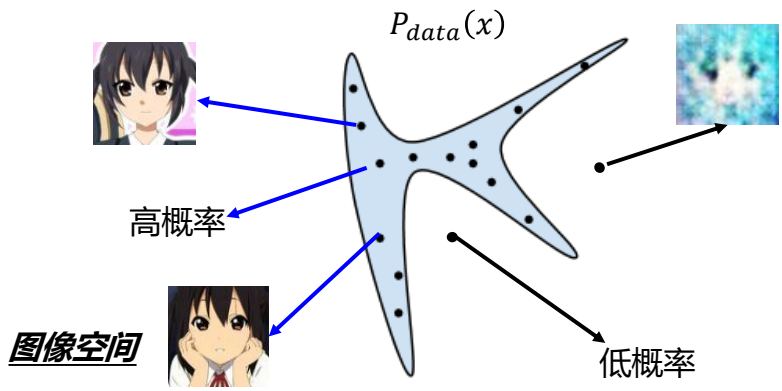
生成对抗网络（GAN）

GAN背后的数学故事！

Generation

x: 图像(高维向量)

- 我们的目标是找到数据分布 $P_{data}(x)$



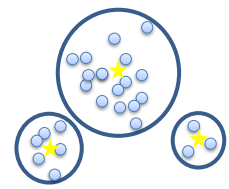
极大似然估计

- **给定数据分布 $P_{data}(x)$** (可以对其采样获得数据.)
- **我们能够得到一个分布 $P_G(x;\theta)$，其由参数 θ 所决定**
  - **目标：**确定参数 θ 使得 $P_G(x;\theta)$ 与 $P_{data}(x)$ 相似
  - 比如 $P_G(x;\theta)$ 为高斯混合模型, θ 则表示高斯分布的矩阵与协方差矩阵

从 $P_{data}(x)$ 采样样本 $\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$

计算 $P_G(x^i;\theta)$ 产生这些样本的似然

$$L = \prod_{i=1}^{m} P_G(x^i;\theta)$$



通过极大似然估计，我们可以求取 θ^*

最大化似然=最小化KL散度

$$\theta^* = arg\max_\theta \prod_{i=1}^{m} P_G(x^i;\theta) = arg\max_\theta log\prod_{i=1}^{m} P_G(x^i;\theta)$$

$$= arg\max_\theta \sum_{i=1}^{m} logP_G(x^i;\theta)$$

从 $P_{data}(x)$ 采样 $\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$

$$\approx arg\max_\theta E_{x\sim P_{data}}[logP_G(x;\theta)]$$

$$= arg\max_\theta \int_x P_{data}(x)logP_G(x;\theta)dx - \int_x P_{data}(x)logP_{data}(x)dx$$

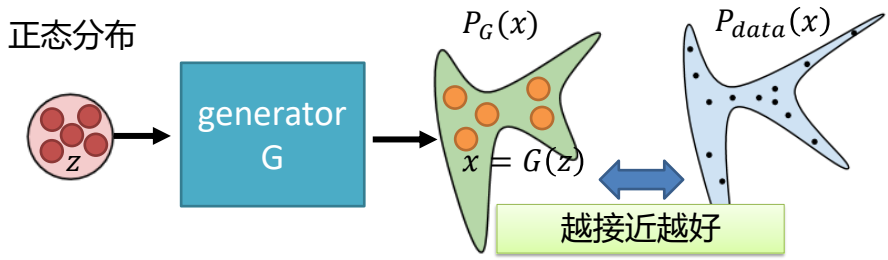
$$= arg\min_\theta KL(P_{data}||P_G)$$

如何定义一个通用的 P_G？

产生器（Generator）

x: 图像(高维向量)

- 利用神经网络来构建产生器 G, 网络输出定义了一个密度分布 P_G



$$G^* = arg \min_G Div(P_G, P_{data})$$

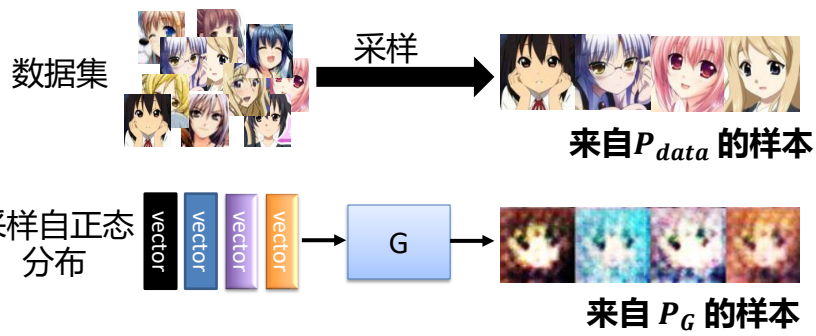
DIV如何计算?

Div 表示P_G 与 P_{data} 的散度

判别器（Discriminator）

$$G^* = arg \min_G Div(P_G, P_{data})$$

虽然不知道 P_G 和 P_{data} 的分布, 但是，可以得到它们的采样数据。



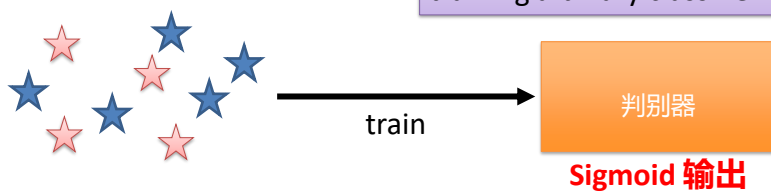
Discriminator

$$G^* = arg \min_G Div(P_G, P_{data})$$

: 采样自 P_{data} 的样本

: 采样自 P_G 的样本

Using the example objective function is exactly the same as training a binary classifier.



Sigmoid 输出

Example Objective Function for D

$$V(G,D) = E_{x\sim P_{data}}[logD(x)] + E_{x\sim P_G}[log(1-D(x))]$$

(G is fixed)

训练: $D^* = arg \max_D V(D,G)$

最大化红框中的目标函数等价于最小化JS散度

[Goodfellow, et al., NIPS, 2014]

Discriminator

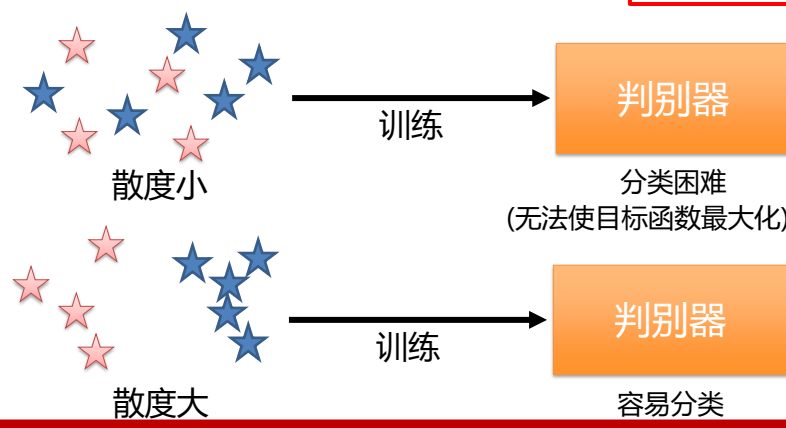
$$G^* = arg \min_G Div(P_G, P_{data})$$

: 采样自 P_{data} 的样本

: 生成器 P_G 生成的样本

训练:

$$D^* = arg \max_D V(D,G)$$



$$\max_D V(G,D)$$

$$V = E_{x\sim P_{data}}[logD(x)] + E_{x\sim P_G}\left[log\left(1-D(x)\right)\right]$$

- 给定 G, 我们的目标是最大化下式来寻找最优化的 D*

$$V = E_{x\sim P_{data}}[logD(x)] + E_{x\sim P_G}\left[log\left(1-D(x)\right)\right]$$

$$= \int_x P_{data}(x)logD(x)\,dx + \int_x P_G(x)log\left(1-D(x)\right)dx$$

$$= \int_x \left[P_{data}(x)logD(x) + P_G(x)log\left(1-D(x)\right)\right]dx$$

假设 D(x) 可以取任何函数

- 给定 x, 最大化下式可获得最优的判别器 D*

$$P_{data}(x)logD(x) + P_G(x)log\left(1-D(x)\right)$$

$$\max_D V(G,D)$$

$$V = E_{x\sim P_{data}}[logD(x)] + E_{x\sim P_G}\left[log\left(1-D(x)\right)\right]$$

- 给定 x, 最大化下式可获得最优的判别器 D*

$$P_{data}(x)logD(x) + P_G(x)log\left(1-D(x)\right)$$

a D b D

- 求取最优 D*，需要最大化: $f(D) = alog(D) + blog(1-D)$

$$\frac{df(D)}{dD} = a\times\frac{1}{D} + b\times\frac{1}{1-D}\times(-1) = 0$$

$$a\times\frac{1}{D^*} = b\times\frac{1}{1-D^*} \quad a\times(1-D^*) = b\times D^* \quad a - aD^* = bD^* \quad a = (a+b)D^*$$

$$D^* = \frac{a}{a+b} \Rightarrow 0 < D^*(x) = \frac{P_{data}(x)}{P_{data}(x)+P_G(x)} < 1$$

$$\max_D V(G,D)$$

$$\max_D V(G,D) = V(G,D^*) \quad D^*(x) = \frac{P_{data}(x)}{P_{data}(x)+P_G(x)}$$

$$V = E_{x\sim P_{data}}[logD(x)] + E_{x\sim P_G}[log(1-D(x))]$$

$$= E_{x\sim P_{data}}\left[log\frac{P_{data}(x)}{P_{data}(x)+P_G(x)}\right] + E_{x\sim P_G}\left[log\frac{P_G(x)}{P_{data}(x)+P_G(x)}\right]$$

$$= \int_x P_{data}(x) log \frac{\frac{1}{2}P_{data}(x)}{\frac{P_{data}(x)+P_G(x)}{2}} dx + 2log\frac{1}{2} - 2log2 + \int_x P_G(x) log \frac{\frac{1}{2}P_G(x)}{\frac{P_{data}(x)+P_G(x)}{2}} dx$$

$$\max_D V(G,D)$$

$$\max_D V(G,D) = V(G,D^*) \quad D^*(x) = \frac{P_{data}(x)}{P_{data}(x)+P_G(x)}$$

$$\mathrm{JSD}(P \parallel Q) = \frac{1}{2}D(P \parallel M) + \frac{1}{2}D(Q \parallel M) \qquad M = \frac{1}{2}(P+Q)$$

$$= -2log2 + \int_x P_{data}(x) log \frac{P_{data}(x)}{(P_{data}(x)+P_G(x))/2} dx + \int_x P_G(x) log \frac{P_G(x)}{(P_{data}(x)+P_G(x))/2} dx$$

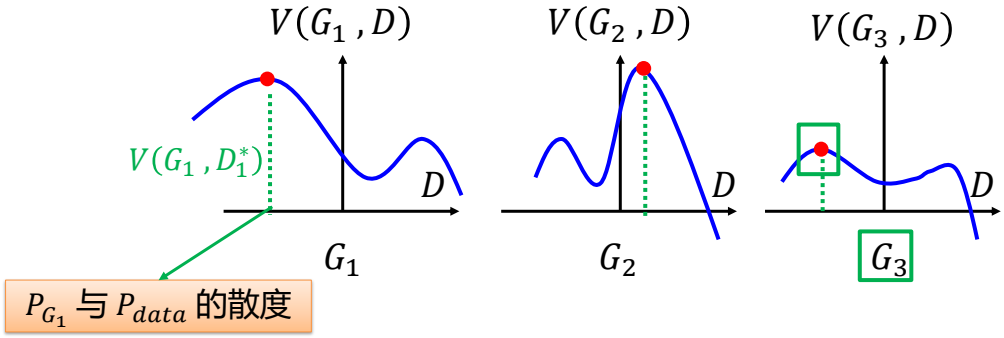
$$= -2\log2 + \mathrm{KL}\left(\mathrm{P_{data}}||\frac{\mathrm{P_{data}}+\mathrm{P_G}}{2}\right) + \mathrm{KL}\left(\mathrm{P_G}||\frac{\mathrm{P_{data}}+\mathrm{P_G}}{2}\right)$$

$$= -2log2 + 2JSD(P_{data}||P_G)$$ Jensen-Shannon divergence

$$G^* = arg \min_G \max_D V(G,D)$$

$$D^* = arg \max_D V(D,G)$$

最大化红框中的目标函数等价于最小化JS散度



[Goodfellow, et al., NIPS, 2014]

$$G^* = arg \min_G \max_D V(G,D)$$

$$D^* = arg \max_D V(D,G)$$

最大化红框中的目标函数等价于最小化JS散度

- 初始化生成器与判别器
- 每轮迭代完成:

  Step 1: 固定生成器 G, 更新判别器 D

  Step 2: 固定判别器 D, 更新生成器 G

Algorithm

$$G^* = arg \min_G \max_D V(G,D)$$

$L(G)$

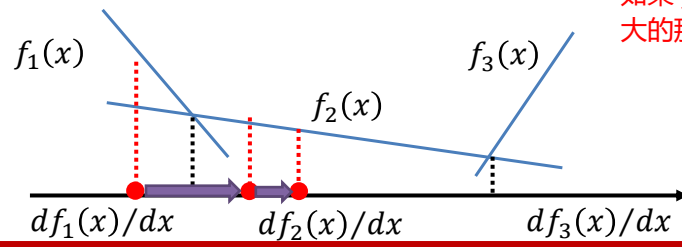
- 最小化损失函数 $L(G)$ 来获得最优的 G

$$\theta_G \leftarrow \theta_G - \eta \, \partial L(G)/\partial \theta_G$$

θ_G defines G

$$f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\} \qquad \frac{df(x)}{dx} =? \; df_i(x)/dx$$

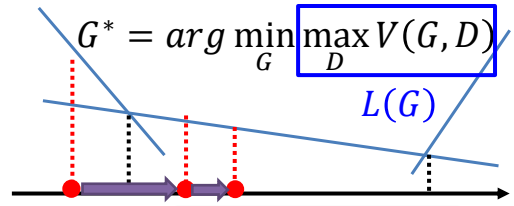
如果 $f_i(x)$ 是最大的那一个



Algorithm

$$G^* = arg \min_G \max_D V(G,D)$$

$L(G)$



- 给定 G_0
- 寻找 D_0^* 使得 $V(G_0, D)$ 最大化

使用梯度上升法

$V(G_0, D_0^*)$ 为 $P_{data}(x)$ 与 $P_{G_0}(x)$ 的JS散度

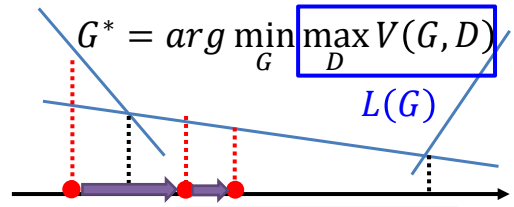
- $\theta_G \leftarrow \theta_G - \eta \, \partial V(G, D_0^*)/\partial \theta_G$ ➡ Obtain G_1 减小JS散度(?)
- 寻找 D_1^* 使得 $V(G_1, D)$ 最大化

$V(G_1, D_1^*)$ 为 $P_{data}(x)$ 与 $P_{G_1}(x)$ 的JS散度

- $\theta_G \leftarrow \theta_G - \eta \, \partial V(G, D_1^*)/\partial \theta_G$ ➡ Obtain G_2 减小JS散度(?)
- ……

Algorithm

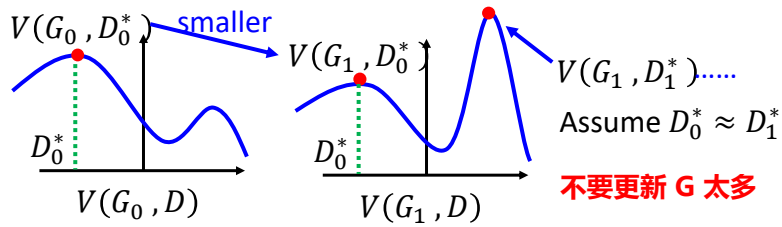
$G^* = arg \min_G \max_D V(G,D)$



- 给定 G_0
- 寻找 D_0^* 使得 $V(G_0, D)$ 最大化 **使用梯度上升法**

$V(G_0, D_0^*)$ 为 $P_{data}(x)$ 与 $P_{G_0}(x)$ 的JS散度

- $\theta_G \leftarrow \theta_G - \eta \partial V(G, D_0^*)/\partial \theta_G$ ⇒ Obtain G_1 减小JS散度(?)



Assume $D_0^* \approx D_1^*$

不要更新 G 太多

In practice ...

$V = E_{x \sim P_{data}}[logD(x)] + E_{x \sim P_G}[log(1 - D(x))]$

- 给定生成器 G, 如何计算 $\max_D V(G,D)$
  - 从$P_{data}(x)$采样样本 $\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$
  - 从生成器 $P_G(x)$ 产生样本 $\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^m\}$

最大化 $\tilde{V} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} logD(x^i) + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} log\left(1 - D(\tilde{x}^i)\right)$

=

两类分类器

D 是一个二分类器（ sigmoid 后输出）

从 $P_{data}(x)$ 采样 $\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ ⇒ 正样本

利用 $P_G(x)$ 生成 $\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^m\}$ ⇒ 负样本

最小化 Cross-entropy

Algorithm

初始化判别器 D 与生成器 G 的参数 θ_d 和 θ_g

仅能找到下边界 $\max_D V(G,D)$

- 每轮迭代需要完成:

学习判别器 D

- 从分布 $P_{data}(x)$ 采样 m 个样本 $\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$
- 从先验 $P_{prior}(z)$ 采样 m 个噪声样本 $\{z^1, z^2, \dots, z^m\}$
- 利用产生器产生样本 $\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^m\}$, $\tilde{x}^i = G(z^i)$
- 更新判别器参数 θ_d 以最大化下式

重复执行 k 次

  - $\tilde{V} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} logD(x^i) + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} log\left(1 - D(\tilde{x}^i)\right)$
  - $\theta_d \leftarrow \theta_d + \eta \nabla \tilde{V}(\theta_d)$

学习生成器 G

- 从先验 $P_{prior}(z)$ 采样 m 个噪声样本 $\{z^1, z^2, \dots, z^m\}$
- 更新生成器参数 θ_g 以最小化

仅执行 1次

  - $\tilde{V} = \cancel{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} logD(x^i)} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} log\left(1 - D\left(G(z^i)\right)\right)$
  - $\theta_g \leftarrow \theta_g - \eta \nabla \tilde{V}(\theta_g)$

Objective Function for Generator in Real Implementation

$$V = \cancel{E_{x \sim P_{data}}[logD(x)]}$$

$$+E_{x \sim P_G}\left[log\left(1 - D(x)\right)\right]$$

初始时非常慢

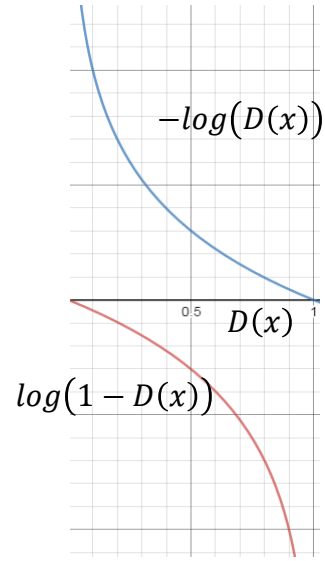
最小最大化 GAN (MMGAN)

$$V = E_{x \sim P_G}\left[-log\left(D(x)\right)\right]$$

实际上的实现:

将来自 P_G 的样本 x 标记为正样本

Non-saturating GAN (NSGAN)



GAN总结

- 不需要显示的密度函数定义
- 采用了游戏理论方法：利用2个玩家的博弈，来学习训练数据的分布。

- 优点:
  - 优雅，目前最好的生成效果

- 缺点:
  - 很难训练，非常不稳定
  - 无法计算出样本或者隐变量的概率，如 p(x)，p(z|x)

- 领域热点:
  - 更好的损失函数，更稳定的训练方法（Wasserstein GAN，LSGAN等等，）
  - 条件GANs（Conditional GANs），将 GANs 应用于多种任务。

GAN的学习资源

1. CS 236: Deep Generative Models (Stanford)

2. CS 294-158： Deep Unsupervised Learning (Berkeley)

3. Machine Learning(台湾大学):
   http://speech.ee.ntu.edu.tw/~tlkagk/courses_ML20.html

今日主题

- 无监督学习（完）
- 产生式模型（完）
  - PixelRNN and PixelCNN
  - Variational Autoencoders (VAE)
  - Generative Adversarial Networks (GAN)