Homotopiczna teoria typów

Zeimer

13 stycznia 2019

Odległe związki

- Homotopiczna teoria typów to połączenie teorii homotopii i teorii typów.
- Teorii typów nie trzeba nikomu przedstawiać.
- Teoria homotopii... TODO.

Teoria typów 1

- Teorię typów w ujęciu HoTTowym można opisać jako system formalny, który za pomocą reguł (osądów) opisuje byty zwane typami. Kluczową innowacją HoTT jest interpretacja typów i wymyślone na jej podstawie aksjomaty rzucające światło na naturę kosmosu.
- Reguły dzielą się na ciekawe i nieciekawe.
- Nieciekawe to te, które muszą być, żeby wszystko działało, np. do zamieniania kolejności rzeczy w kontekście.
- Ciekawe - to te, które faktycznie opisują typy. Jest ich pięć rodzajów: reguły formacji, wprowadzania, eliminacji, obliczania i unikalności.

Teoria typów 2

- Reguły formacji mówią, skąd się biorą typy.
- Reguły wprowadzania mówią, jak zrobić elementy danego typu.
- Reguły eliminacji mówią, jak zrobić coś z elementami danego typu.
- Reguły obliczania mówią, jak reguły eliminacji mają się do reguł wprowadzania.
- Reguły unikalności mówią, jak reguły wprowadzania mają się do reguł eliminacji.

Teoria typów 3

- Przykład: reguły dla typu funkcyjnego. Ćwiczenie: nazwij każdą z reguł.

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U} \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}}{\Gamma \vdash A \to B : \mathcal{U}}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.b : A \to B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : A \to B \quad \Gamma \vdash x : A}{\Gamma \vdash f\ x : B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (\lambda x : A.b)\ a \equiv b[x := a] : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : A \to B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.f\ x \equiv f : A \to B}$$

Po co HoTT? 1

- HoTT jest też pomysłem na nowe podstawy matematyki (foundations of mathematics).
- Jest teorią typów, więc świetnie nadaje się do formalizacji za pomocą komputerów, czego nie można powiedzieć o teorii zbiorów.
- Jest syntetyczną teorią homotopii, co pozwala łatwo formalizować całkiem ezoteryczną matematykę.
- Jest konstruktywna, co powinno podobać się konstruktywistom. Co więcej, dzięki wyższym typom induktywnym pozwala na konstruktywne rozwiązanie problemów, które dotąd wymagały podejścia klasycznego.

Po co HoTT? 2

- Dopuszcza niektóre klasyczne aksjomaty, co powinno przypaść do gustu klasykom.
- Jednocześnie podaje dobre filozoficzne podstawy (i formalne dowody), by niektóre inne klasyczne aksjomaty odrzucić.
- Z trzeciej strony, pozwala wyrazić w teorii typów niektóre klasyczne aksjomaty, których dotychczas wyrazić nie było można (np. aksjomat wyboru).

Theorem

$$\prod(A:\mathcal{U})(B:A\to\mathcal{U})(R:\Pi x:A, B\ x\to\mathcal{U}),$$
$$(\prod x:A, \sum y:B\ x, R\ x\ y)\to$$
$$\sum f:(\Pi x:A, Bx), \Pi x:A, R\ x\ (f\ x)$$

Pomysły

- O co chodzi z teorią homotopii i topologią algebraiczną? Grupa podstawowa okręgu.
- Hierarchia n-typów: unit, funkcje sortujące, pusty, zbiory, grupoidy, okrąg, uniwersum.

wut

-