Homotopiczna teoria typów

Zeimer

13 stycznia 2019

1. O co chodzi

Odległe związki

- Homotopiczna teoria typów to połączenie teorii homotopii i teorii typów.
- Teorii typów nie trzeba nikomu przedstawiać.
- Teoria homotopii... TODO.

Teoria typów 1

- Teorię typów w ujęciu HoTTowym można opisać jako system formalny, który za pomocą reguł (osądów) opisuje byty zwane typami. Kluczową innowacją HoTT jest interpretacja typów i wymyślone na jej podstawie aksjomaty rzucające światło na naturę kosmosu.
- Reguły dzielą się na ciekawe i nieciekawe.
- Nieciekawe to te, które muszą być, żeby wszystko działało, np. do zamieniania kolejności rzeczy w kontekście.
- Ciekawe - to te, które faktycznie opisują typy. Jest ich pięć rodzajów: reguły formacji, wprowadzania, eliminacji, obliczania i unikalności.

Teoria typów 2

- Reguły formacji mówią, skąd się biorą typy.
- Reguły wprowadzania mówią, jak zrobić elementy danego typu.
- Reguły eliminacji mówią, jak zrobić coś z elementami danego typu.
- Reguły obliczania mówią, jak reguły eliminacji mają się do reguł wprowadzania.
- Reguły unikalności mówią, jak reguły wprowadzania mają się do reguł eliminacji.

Teoria typów 3

- Przykład: reguły dla typu funkcyjnego. Ćwiczenie: nazwij każdą z reguł.

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U} \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}}{\Gamma \vdash A \to B : \mathcal{U}}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.b : A \to B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : A \to B \quad \Gamma \vdash x : A}{\Gamma \vdash f\ x : B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (\lambda x : A.b)\ a \equiv b[x := a] : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : A \to B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.f\ x \equiv f : A \to B}$$

Teoria typów 4

- wut

Teoria homotopii 1

- Co to jest homotopia?
- Zgodnie z wikipedią, jeżeli f i g są funkcjami ciągłymi z przestrzeni topologicznej X w przestrzeń topologiczną Y, to $H : X \times [0;1] \to Y$ jest homotopią, gdy jest funkcją ciągłą spełniającą $H(0,x) = f(x) \wedge H(1,x) = g(x)$.
- Jeżeli nieco pogmeramy w symbolach, to możemy to zapisać tak: $H : [0;1] \to (X \to Y)$ jest homotopią, gdy jest ciągła i spełnia $H(0) = f \wedge H(1) = g$.
- Nie przejmuj się, jeżeli definicja cię nie oświeca. Moim zdaniem władowanie jej do nazwy całej teorii jest głupie.

Teoria homotopii 2

- Bardziej podstawowym pojęciem jest ścieżka.
- Ścieżka w przestrzeni topologicznej X to funkcja ciągła z $[0; 1]$ w X.
- Łatwo to sobie wyobrazić: odcinek $[0; 1]$ z pewnością jest ścieżką prowadzącą od 0 do 1. Jego obrazem, czyli ścieżką, jest więc pewien ciąły zawijasek, który prowadzi z $f(0)$ do $f(1)$.
- Ostatecznie możemy powiedzieć, że homotopia to ścieżka między funkcjami.
- Teoria homotopii nie jest jednak teorią ścieżek między funkcjami. Jest to raczej po prostu teoria ścieżek.

Teoria homotopii 3

- Po co to wszystko?
- Topologia jest całkiem użyteczna. Ostatnio popularna robi się topologiczna analiza danych. Zamiast prymitywnie przypasowywać do danych proste (regresja liniowa), ludzie próbują lepiej opisywać kształt danych. Topologia bada kształty, więc pasuje jak ulał.
- Chcemy więc wiedzieć więcej o topologii, np. czy dwie przestrzenie są takie same czy inne. Tutaj wkracza topologia algebraiczna, czyli dziedzina badająca przestrzenie topologiczne za pomocą metod algebraicznych.

Teoria homotopii 4

- Pętla w punkcie x to ścieżka, która zaczyna się i kończy w punkcie x.
- Grupa podstawowa przestrzeni X w punkcie x to grupa, której nośnikiem jest zbiór wszystkich pętli w punkcie x. Działaniem grupowym jest sklejanie pętli (najpierw pójdź pierwszą pętlą, a potem drugą). Odwrotność to pójście pętlą w przeciwnym kierunku. Element neutralny to stanie w miejscu.
- Grupa podstawowa jest fajna, bo jeżeli przestrzenie są izomorficzne, to ich grupy podstawowe też są. Wobec tego jeżeli grupy podstawowe (w dowolnym punkcie) są różne, to przestrzenie też są różne.

Teoria homotopii 5

- Okrąg to taka przestrzeń topologiczna, że... wyobraź sobie, pewnie kiedyś widziałeś okrąg.
- Grupa podstawowa okręgu w dowolnym punkcie jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych z dodawaniem.
- Stanie w miejscu reprezentuje 0.
- n okrążeń zgodnie z ruchem wskazówek zegara reprezentuje liczbę n.
- n okrążeń przeciwnie do ruchu wskazówek zegara reprezentuje liczbę $-n$.

Po co HoTT? 1

- HoTT jest też pomysłem na nowe podstawy matematyki (foundations of mathematics).
- Jest teorią typów, więc świetnie nadaje się do formalizacji za pomocą komputerów, czego nie można powiedzieć o teorii zbiorów.
- Jest syntetyczną teorią homotopii, co pozwala łatwo formalizować całkiem ezoteryczną matematykę.
- Jest konstruktywna, co powinno podobać się konstruktywistom. Co więcej, dzięki wyższym typom induktywnym pozwala na konstruktywne rozwiązanie problemów, które dotąd wymagały podejścia klasycznego.

Po co HoTT? 2

- Dopuszcza niektóre klasyczne aksjomaty, co powinno przypaść do gustu klasykom.
- Jednocześnie podaje dobre filozoficzne podstawy (i formalne dowody), by niektóre inne klasyczne aksjomaty odrzucić.
- Z trzeciej strony, pozwala wyrazić w teorii typów niektóre klasyczne aksjomaty, których dotychczas wyrazić nie było można (np. aksjomat wyboru).

Theorem

$$\prod(A:\mathcal{U})(B:A\to\mathcal{U})(R:\Pi x:A, B\ x\to\mathcal{U}),$$
$$(\prod x:A, \sum y:B\ x, R\ x\ y)\to$$
$$\sum f:(\Pi x:A, Bx), \Pi x:A, R\ x\ (f\ x)$$

Pomysły

- O co chodzi z teorią homotopii i topologią algebraiczną? Grupa podstawowa okręgu.
- Hierarchia n-typów: unit, funkcje sortujące, pusty, zbiory, grupoidy, okrąg, uniwersum.

wut

-