Homotopiczna teoria typów

Zeimer

13 stycznia 2019

Czym jest HoTT?

- Homotopiczna teoria typów (w skrócie HoTT) to połączenie teorii typów i teorii homotopii.
- Jest kolejnym stadium ewolucji teorii typów.
- Jest syntetyczną teorią homotopii, dającą nam łatwy dostęp do skomplikowanych pojęć topologicznych.
- Jest pomysłem na nowe podstawy matematyki, alternatywne wobec teorii zbiorów.
- Jest bardzo potężnym funkcyjnym językiem programowania.
- Podstawowym źródłem wiedzy jest książka `https://homotopytypetheory.org/book/`

Innowacje HoTT

- Homotopiczna interpretacja teorii typów, mocno wspomagająca wyobraźnię zarówno w rozumowaniu, jak i pozwalająca dogłębnie zrozumieć różne detale teorii typów.
- Aksjomat uniwalencji $(A \simeq B) \simeq (A = B)$, który głosi, że rzeczy mające tę samą strukturę są identyczne. Rozwiązuje to odwieczny problem nieformalnego utożsamiania poprzez nadużycie języka.
- Wyższe typy induktywne, pozwalające w teorii typów zdefiniować wiele niemożliwych dotychczas obiektów, np. typy ilorazowe, konstruktywnie rozwiązać wiele problemów, które dotychczas wymagały rozumowań klasycznych oraz wyrazić pojęcia czysto logiczne z niemożliwą wcześniej w teorii typów precyzją.

Teoria typów 1

- Teorię typów w ujęciu HoTTowym można opisać jako system formalny, który za pomocą reguł (osądów) opisuje byty zwane typami. Kluczową innowacją HoTT jest interpretacja typów i wymyślone na jej podstawie aksjomaty rzucające światło na naturę kosmosu.
- Reguły dzielą się na ciekawe i nieciekawe.
- Nieciekawe to te, które muszą być, żeby wszystko działało, np. do zamieniania kolejności rzeczy w kontekście.
- Ciekawe to te, które faktycznie opisują typy. Jest ich pięć rodzajów: reguły formacji, wprowadzania, eliminacji, obliczania i unikalności.

Teoria typów 2

- Reguły formacji mówią, skąd się biorą typy.
- Reguły wprowadzania mówią, jak zrobić elementy danego typu.
- Reguły eliminacji mówią, jak zrobić coś z elementami danego typu.
- Reguły obliczania mówią, jak reguły eliminacji mają się do reguł wprowadzania.
- Reguły unikalności mówią, jak reguły wprowadzania mają się do reguł eliminacji.

Teoria typów 3

- Przykład: reguły dla typu funkcyjnego.
- Ćwiczenie: nazwij każdą z reguł (tzn. która to reguła formacji, która obliczania etc.)

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U} \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}}{\Gamma \vdash A \to B : \mathcal{U}}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.b : A \to B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : A \to B \quad \Gamma \vdash x : A}{\Gamma \vdash f\ x : B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (\lambda x : A.b)\ a \equiv b[x := a] : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : A \to B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.f\ x \equiv f : A \to B}$$

Teoria typów 4

- Każdy typ musi mieć regułę formacji - inaczej nie byłby typem.
- Jednak nie każdy typ musi mieć pozostałe reguły.
- Typ $\mathbf{0}$ nie ma reguły wprowadzania, bo jest pusty i nie ma żadnych elementów.
- Uniwersum nie ma reguły eliminacji.
- Typ $\mathbf{0}$ nie ma także reguły obliczania, co jest oczywiste - nie może jej mieć, skoro nie ma reguły wprowadzania.
- Wiele typów, np. sumy i produkty, nie mają reguły unikalności. W zamian za to mają one zdaniową regułę unikalności, tzn. można udowodnić twierdzenie wyglądające dokładnie jak reguła unikalności.
- Reguła formacji zawsze jest jedna, bo każdy typ można sformować tylko na jeden sposób. Pozostałych reguł może być więcej. Sumy mają 2 reguły wprowadzania, a produkty 2 reguły eliminacji i wobec tego 2 reguły obliczania.

Teoria typów 5

- Formalnie rzeczy definiujemy za pomocą reguł wprowadzania i eliminacji.
- Przykład: funkcję swap : $\Pi A\ B : \mathcal{U}. A \times B \to B \times A$ możemy zdefiniować jako
  swap $:\equiv \lambda A : \mathcal{U}. \lambda B : \mathcal{U}. \lambda x : A \times B. (\pi_2\ x, \pi_1\ x)$
- Zamiast tego często będziemy jednak definiować poprzez dopasowanie do wzorca, jednocześnie pomijając argumenty, które można wywnioskować z kontekstu: swap $(a, b) :\equiv (b, a)$
- Możemy też definiować słownie: niech swap będzie funkcją, która zamienia miejscami elementy pary. Ten sposób będziemy wykorzystywać do dowodzenia twierdzeń.

Teoria homotopii 1

- Co to jest homotopia?
- Zgodnie z wikipedią, jeżeli f i g są funkcjami ciągłymi z przestrzeni topologicznej X w przestrzeń topologiczną Y, to $H : X \times [0; 1] \rightarrow Y$ jest homotopią, gdy jest funkcją ciągłą spełniającą $H(0, x) = f(x) \wedge H(1, x) = g(x)$.
- Jeżeli nieco pogmeramy w symbolach, to możemy to zapisać tak: $H : [0; 1] \rightarrow (X \rightarrow Y)$ jest homotopią, gdy jest ciągła i spełnia $H(0) = f \wedge H(1) = g$.
- Nie przejmuj się, jeżeli definicja cię nie oświeca. Moim zdaniem władowanie jej do nazwy całej teorii jest głupie.

Teoria homotopii 2

- Bardziej podstawowym pojęciem jest ścieżka.
- Ścieżka w przestrzeni topologicznej X to funkcja ciągła z $[0; 1]$ w X.
- Łatwo to sobie wyobrazić: odcinek $[0; 1]$ z pewnością jest ścieżką prowadzącą od 0 do 1. Jego obrazem, czyli ścieżką, jest więc pewien ciały zawijasek, który prowadzi z $f(0)$ do $f(1)$.
- Ostatecznie możemy powiedzieć, że homotopia to ścieżka między funkcjami.
- Teoria homotopii nie jest jednak teorią ścieżek między funkcjami. Jest to raczej po prostu teoria ścieżek.

Teoria homotopii 3

- Po co to wszystko?
- Topologia jest całkiem użyteczna. Ostatnio popularna robi się topologiczna analiza danych. Zamiast prymitywnie przypasowywać do danych proste (regresja liniowa), ludzie próbują lepiej opisywać kształt danych. Topologia bada kształty, więc pasuje jak ulał.
- Chcemy więc wiedzieć więcej o topologii, np. czy dwie przestrzenie są takie same czy inne. Tutaj wkracza topologia algebraiczna, czyli dziedzina badająca przestrzenie topologiczne za pomocą metod algebraicznych.

Teoria homotopii 4

- Pętla w punkcie x to ścieżka, która zaczyna się i kończy w punkcie x.
- Grupa podstawowa przestrzeni X w punkcie x to grupa, której nośnikiem jest zbiór wszystkich pętli w punkcie x. Działaniem grupowym jest sklejanie pętli (najpierw pójdź pierwszą pętlą, a potem drugą). Odwrotność to pójście pętlą w przeciwnym kierunku. Element neutralny to stanie w miejscu.
- Grupa podstawowa jest fajna, bo jeżeli przestrzenie są izomorficzne, to ich grupy podstawowe też są. Wobec tego jeżeli grupy podstawowe (w dowolnym punkcie) są różne, to przestrzenie też są różne.

Teoria homotopii 5

- Okrąg to taka przestrzeń topologiczna, że... wyobraź sobie, pewnie kiedyś widziałeś okrąg.
- Grupa podstawowa okręgu w dowolnym punkcie jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych z dodawaniem.
- Stanie w miejscu reprezentuje 0.
- n okrążeń zgodnie z ruchem wskazówek zegara reprezentuje liczbę n.
- n okrążeń przeciwnie do ruchu wskazówek zegara reprezentuje liczbę $-n$.

Interpretacja typów 1

- Jak interpretować/rozumieć typy?
- Najprostszy sposób każe nam myśleć, że typy to po prostu zbiory.
- W takim ujęciu typ $\mathbb{N}$ to taki worek, w którym jest $0, 1, 2, \ldots$ etc.
- Takie rozumienie było przez długi czas dominujące. Jest ono dość intuicyjne i powszechne przy myśleniu nieformalnym.
- Były też inne dziwne interpretacje, jak (chyba) częściowe relacje równoważności, ale kogo to obchodzi.

Interpretacja typów 2

- Aż tu nagle w pracy z 1995 zatytułowanej "The groupoid interpretation of type theory" panowie Hofmann i Streicher wpadli na pomysł, żeby zinterpretować typy jako grupoidy.
- Upraszczając, grupoid to graf skierowany, w którym:
  - Każdy wierzchołek ma krawędź do samego siebie.
  - Jeżeli jest krawędź z A do B, to jest krawędź z B do A.
  - Jeżeli jest krawędź z A do B i z B do C, to jest krawędź z A do C.
- Jeszcze bardziej upraszczając: grupoid to kolekcja kropek, między którymi są strzałki spełniające pewne warunki.
- Wymyślenie ciągu dalszego tej bajki zajęło dobre 15 lat.

Interpretacja typów 3

- Aż tu nagle w okolicach 2010 roku Awodey i Warren (a także trochę Voevodsky) wpadli na pomysł, żeby zinterpretować typy jako ω-grupoidy.
- ω-grupoid to kolekcja kropek, między którymi są strzałki spełniające warunki jak dla grupoidu. Co więcej, między strzałkami też mogą być strzałki spełniające te warunki. Są też strzałki między strzałkami między strzałkami i tak dalej aż do nieskończoności.
- Jeżeli pomyślimy o naszych "strzałkach" jak o ścieżkach w przestrzeni, to dostajemy homotopiczną interpretację teorii typów. W zasadzie to każdy ω-grupoid jest reprezentacją jakiejś przestrzeni topologicznej.

Innowacje HoTT w przykładach - interpretacja

- Dlaczego w teorii typów (np. w rachunku konstrukcji) nie da się udowodnić, że dla każdego typu A i elementu $x : A$ oraz dowodu równości $p : x = x$ zachodzi $p = refl_x$?
- Odpowiedź klasyczna: bo istnieją modele, w których tak nie jest.
- Odpowiedź HoTTowa: nie każda ścieżka jest trywialna.
- Mimo, że taka odpowiedź jest jedynie parafrazą pytania, to zaspokaja ona wyobraźnię i sprawia, że tajemniczy dotychczas fakt staje się banalny i oczywisty.

Innowacje HoTT w przykładach - uniwalencja 1

- Rozważmy dwa poniższe typy (tak naprawdę powinniśmy też podać reguły eliminacji i obliczania, ale nie są one istotne dla przykładu).
- Niech $\mathbb{N} :\equiv 0 \mid S\ \mathbb{N}$ i niech $\mathbb{N}' :\equiv 0' \mid S'\ \mathbb{N}'$
- Rodzi się pytanie: czy $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}'$ to to samo, czy coś innego?
- Odpowiedź klasyczna: istnieje oczywisty izomorfizm $\mathbb{N} \cong \mathbb{N}'$. Na mocy nadużycia języka będziemy utożsamiać $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}'$, tzn. traktować je tak, jakby $\mathbb{N} = \mathbb{N}'$ mimo, że formalnie tak nie jest.
- Odpowiedź HoTTowa: istnieje oczywista równoważność $e : \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}'$. Wobec tego na mocy aksjomatu uniwalencji mamy ścieżkę $\mathrm{ua}(e) : \mathbb{N} = \mathbb{N}'$.

Innowacje HoTT w przykładach - uniwalencja 2

- Aksjomat uniwalencji nie tylko usuwa nieprzyjemny filozoficzny smrodek, ale daje nam też nowe sposoby rozumowania.
- Przykład: każda równoważność jest monomorfizmem.
- Dowód klasyczny: każda równoważność ma odwrotność. Użyj jej.
- Dowód HoTTowy: każda równoważność pochodzi od jakiejś ścieżki. Na mocy indukcji po ścieżkach możemy założyć, że ścieżka ta jest trywialna, a zatem nasza równoważność jest identycznością.

Innowacje HoTT w przykładach - logika 1

- Znaczenie klasycznej dysjunkcji jest inne, niż konstruktywnej. Klasycznie $P \vee Q$ znaczy, że zachodzi P lub Q lub oba na raz, ale nie wiemy, które. Konstruktywnie $P \vee Q$ znaczy, że zachodzi P lub Q i wiemy, z którym przypadkiem mamy do czynienia

Innowacje HoTT w przykładach - logika 1

Theorem (Aksjomat wyboru)

$$\prod(A:\mathcal{U})(B:A\to\mathcal{U})(R:\Pi x:A, B\ x\to\mathcal{U}),$$
$$(\prod x:A,\sum y:B\ x, R\ x\ y)\to$$
$$\sum f:(\Pi x:A, B\ x), \Pi x:A, R\ x\ (f\ x)$$

Dowód.

Na tablicy. $\square$

Powyższe twierdzenie jest problematyczne, gdyż wygląda jak aksjomat wyboru, ale nie ma tutaj żadnego wybierania.

Pomysły

- Hierarchia n-typów: unit, funkcje sortujące, pusty, zbiory, grupoidy, okrąg, uniwersum.

wut

-