

Rozwiązania zadań z logiki klasycznej i operatorów sterowania

Zeimer

15 stycznia 2019

Zad. 1

- (a) Chcemy ze specjalnego przypadku prawa Peirce'a ($P\perp$) oraz prawa eliminacji fałszu ($\perp E$) wyprowadzić prawo Peirce'a (P). W tym celu w systemie z regułami ($P\perp$) oraz ($\perp E$) udowodnimy $\vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \perp, \varphi \vdash \varphi \rightarrow \perp}{\text{Ass}} \quad \frac{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \perp, \varphi \vdash \varphi}{\text{Ass}}}{\frac{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \perp, \varphi \vdash \perp}{\perp E}} \quad \frac{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \perp, \varphi \vdash \psi}{\text{Ass}} \quad \frac{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \perp, \varphi \vdash \psi}{\text{Ass}}}{\frac{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \perp, \varphi \vdash \psi}{\rightarrow I}} \quad \frac{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \perp, \varphi \vdash \psi}{\rightarrow E} \\
 \frac{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \perp \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi}{\text{Ass}} \quad \frac{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \perp \vdash \varphi}{P\perp} \quad \frac{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \perp \vdash \varphi}{\rightarrow I} \\
 \vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi
 \end{array}$$

- (b) Chcemy ze specjalnego przypadku prawa Peirce'a $P\perp$ oraz prawa eliminacji fałszu $\perp E$ wyprowadzić prawo eliminacji podwójnej negacji $\neg\neg E$. W tym celu pokażemy w systemie z tymi regułami, że $\vdash ((\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow \varphi$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp, \varphi \rightarrow \perp \vdash (\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp}{\text{Ass}} \quad \frac{(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp, \varphi \rightarrow \perp \vdash \varphi \rightarrow \perp}{\text{Ass}}}{\frac{(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp, \varphi \rightarrow \perp \vdash \varphi \rightarrow \perp}{\rightarrow E}} \\
 \frac{(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp, \varphi \rightarrow \perp \vdash \perp}{\perp E} \quad \frac{(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp, \varphi \rightarrow \perp \vdash \varphi}{\perp P} \\
 \frac{(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \vdash \varphi}{\rightarrow I} \\
 \vdash ((\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow \varphi
 \end{array}$$

- (c) Chcemy z prawa eliminacji podwójnej negacji $\neg\neg E$ wyprowadzić szczególny przypadek prawa Peirce'a $P\perp$ oraz prawo eliminacji fałszu $\perp E$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\perp, \varphi \rightarrow \perp \vdash \perp}{\neg\neg E} \quad \frac{\perp \vdash \varphi}{\rightarrow I} \\
 \vdash \perp \rightarrow \varphi
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \perp \vdash (\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \varphi}{\text{Ass}} \quad \frac{(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \perp \vdash \varphi \rightarrow \perp}{\text{Ass}}}{\frac{(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \perp \vdash \varphi \rightarrow \perp}{\rightarrow E}} \\
 \frac{(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \perp \vdash \perp}{\neg\neg E} \quad \frac{(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \perp \vdash \varphi}{\rightarrow I} \\
 \vdash ((\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi
 \end{array}$$

Zad. 2

Udowodnijmy najpierw (w systemie z $\neg\neg E$) prawo wyłączonego środka $\varphi \vee \neg\varphi$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \perp, \varphi \vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \perp}{(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \perp, \varphi \vdash \perp} \text{Ass} \quad \frac{\frac{(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \perp, \varphi \vdash \varphi}{(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \perp, \varphi \vdash \varphi \vee \neg\varphi} \text{Ass} \quad \frac{(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \perp, \varphi \vdash \varphi \vee \neg\varphi}{(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \perp, \varphi \vdash \perp} \vee I_1}{(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \perp, \varphi \vdash \perp} \rightarrow E \\
 \frac{\frac{(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \perp, \varphi \vdash \perp}{(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \perp \vdash \neg\varphi} \rightarrow I \quad \frac{(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \perp \vdash \neg\varphi}{(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \perp \vdash \varphi \vee \neg\varphi} \vee I_2}{(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \perp \vdash \varphi \vee \neg\varphi} \rightarrow E \\
 \frac{\frac{(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \perp \vdash \varphi \vee \neg\varphi}{\vdash \varphi \vee \neg\varphi} \text{Ass} \quad \frac{(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \perp \vdash \perp}{\vdash \varphi \vee \neg\varphi} \neg\neg E}{\vdash \varphi \vee \neg\varphi} \neg\neg E
 \end{array}$$

Rzut okiem na termy i ich reguły typowania pozwala stwierdzić, że termem odpowiadającym temu dowodowi jest (anotacje typów pozwolę sobie pominąć) $EM_\varphi \equiv \Delta x.x(\iota_2(\lambda y.x(\iota_1 y)))$, zaś rzut okiem na reguły redukcji \rightarrow_Δ pozwala stwierdzić, że term ten jest w postaci normalnej (reguły 1 i 3 nie pasują, zaś w regule 2 nie jest spełniona przesłanka dotycząca zmiennej wolnej).

Chcemy teraz znormalizować term $\lambda t.\lambda f.\text{case}(EM_\varphi, x_1.t, x_2.f)$. Normalizujemy więc:

$$\begin{aligned}
 \lambda t.\lambda f.\text{case}(EM_\varphi, x_1.t, x_2.f) &\equiv \lambda t.\lambda f.\Delta k.(\Delta x.x(\lambda x_1.\lambda x_2.(\lambda y.x(\lambda z_1.\lambda z_2.z_1 y))))(\lambda x_1.kt)(\lambda x_2.kf) \rightarrow_\Delta \\
 &\lambda t.\lambda f.\Delta k.(\Delta z.(\lambda w.z(w(\lambda x_1.kt)))(\lambda x_1.\lambda x_2.x_2(\lambda y.(\lambda w.z(w(\lambda x_1.kt)))(\lambda z_1.\lambda z_2.y))))(\lambda x_2.kf) \rightarrow_\beta \\
 \lambda t.\lambda f.\Delta k.(\Delta z.(\lambda w.z(w(\lambda x_1.kt)))(\lambda x_1.\lambda x_2.x_2(\lambda y.z(\lambda z_2.kt))))(\lambda x_2.kf) &\rightarrow_\beta^* \lambda t.\lambda f.\Delta k.(\Delta z.z(\lambda x_2.x_2(\lambda y.z(\lambda z_2.kt))))(\lambda x_2.kf) \rightarrow_\Delta \\
 &\lambda t.\lambda f.\Delta k.\Delta w.(\lambda a.w(a(\lambda x_2.kf)))(\lambda x_2.x_2(\lambda y.(\lambda a.w(a(\lambda x_2.kf)))(\lambda z_2.kt)))) \rightarrow_\beta^* \\
 \lambda t.\lambda f.\Delta k.\Delta w.(\lambda a.w(a(\lambda x_2.kf)))(\lambda x_2.x_2(\lambda y.w(kt))) &\rightarrow_\beta \lambda t.\lambda f.\Delta k.\Delta w.w((\lambda x_2.x_2(\lambda y.w(kt)))(\lambda x_2.kf)) \rightarrow_\beta \\
 \lambda t.\lambda f.\Delta k.\Delta w.w((\lambda x_2.kf)(\lambda y.w(kt))) &\rightarrow_\beta \lambda t.\lambda f.\Delta k.\Delta w.w(kf) \rightarrow_\Delta \lambda t.\lambda f.\Delta k.kf \rightarrow_\Delta \lambda t.\lambda f.f
 \end{aligned}$$

Jak widać, wychodzi funkcja stale zwracająca drugi argument (czyli fałsz).