Homotopiczna teoria typów

Zeimer

13 stycznia 2019

1. Wstęp
2. Teoria homotopii
3. Teoria typów
4. Interpretacja homotopiczna
5. Równoważności
6. Zbiory i logika

Czym jest HoTT?

- Homotopiczna teoria typów (w skrócie HoTT) to połączenie teorii typów i teorii homotopii.
- Jest kolejnym stadium ewolucji teorii typów.
- Jest syntetyczną teorią homotopii, dającą nam łatwy dostęp do skomplikowanych pojęć topologicznych.
- Jest pomysłem na nowe podstawy matematyki, alternatywne wobec teorii zbiorów.
- Jest bardzo potężnym funkcyjnym językiem programowania.

Innowacje HoTT

- Homotopiczna interpretacja teorii typów, mocno wspomagająca wyobraźnię zarówno w rozumowaniu, jak i pozwalająca dogłębnie zrozumieć różne detale teorii typów.
- Aksjomat uniwalencji $(A \simeq B) \simeq (A = B)$, który głosi, że rzeczy mające tę samą strukturę są identyczne. Rozwiązuje to odwieczny problem nieformalnego utożsamiania poprzez nadużycie języka.
- Wyższe typy induktywne, pozwalające w teorii typów:
  - Zdefiniować wiele niemożliwych dotychczas obiektów, np. typy ilorazowe albo prezentacje obiektów algebraicznych.
  - Konstruktywnie rozwiązać wiele problemów, które dotychczas wymagały logiki klasycznej (konstrukcja liczb rzeczywistych Cauchy'ego)
  - Wyrazić klasyczne pojęcia logiczne (dysjunkcja, kwantyfikator egzystencjalny, aksjomat wyboru) z niemożliwą wcześniej w teorii typów precyzją.

Teoria homotopii 1 - homotopia

- Co to jest homotopia?
- Zgodnie z wikipedią, jeżeli f i g są funkcjami ciągłymi z przestrzeni topologicznej X w przestrzeń topologiczną Y, to $H : X \times [0;1] \to Y$ jest homotopią, gdy jest funkcją ciągłą spełniającą $H(0,x) = f(x) \wedge H(1,x) = g(x)$.
- Jeżeli nieco pogmeramy w symbolach, to możemy to zapisać tak: $H : [0;1] \to (X \to Y)$ jest homotopią, gdy jest ciągła i spełnia $H(0) = f \wedge H(1) = g$.
- Nie przejmuj się, jeżeli definicja cię nie oświeca. Moim zdaniem władowanie jej do nazwy całej teorii jest głupie.

Teoria homotopii 2 - ścieżka

- Bardziej podstawowym pojęciem jest ścieżka.
- Ścieżka w przestrzeni topologicznej X to funkcja ciągła z $[0;1]$ w X.
- Łatwo to sobie wyobrazić: odcinek $[0;1]$ z pewnością jest ścieżką prowadzącą od 0 do 1. Jego obrazem, czyli ścieżką, jest więc pewien ciąły zawijasek, który prowadzi z $f(0)$ do $f(1)$.
- Ostatecznie możemy powiedzieć, że homotopia to ścieżka między funkcjami.
- Teoria homotopii nie jest jednak teorią ścieżek między funkcjami. Jest to raczej po prostu teoria ścieżek.

Teoria homotopii 3 - topologia (algebraiczna)

- Po co to wszystko?
- Topologia jest całkiem użyteczna. Ostatnio popularna robi się topologiczna analiza danych. Zamiast prymitywnie przypasowywać do danych proste (regresja liniowa), ludzie próbują lepiej opisywać kształt danych. Topologia bada kształty, więc pasuje jak ulał.
- Chcemy więc wiedzieć więcej o topologii, np. czy dwie przestrzenie są takie same czy inne. Tutaj wkracza topologia algebraiczna, czyli dziedzina badająca przestrzenie topologiczne za pomocą metod algebraicznych.

Teoria homotopii 4 - grupa podstawowa

- Pętla w punkcie x to ścieżka, która zaczyna się i kończy w punkcie x.
- Grupa podstawowa przestrzeni X w punkcie x to grupa, której nośnikiem jest zbiór wszystkich pętli w punkcie x. Działaniem grupowym jest sklejanie pętli (najpierw pójdź pierwszą pętlą, a potem drugą). Odwrotność to pójście pętlą w przeciwnym kierunku. Element neutralny to stanie w miejscu.
- Grupa podstawowa jest fajna, bo jeżeli przestrzenie są izomorficzne, to ich grupy podstawowe też są. Wobec tego jeżeli grupy podstawowe (w dowolnym punkcie) są różne, to przestrzenie też są różne.

Teoria homotopii 5 - okrąg i liczby całkowite

- Okrąg to taka przestrzeń topologiczna, że... wyobraź sobie, pewnie kiedyś widziałeś okrąg.
- Grupa podstawowa okręgu w dowolnym punkcie jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych z dodawaniem.
- Stanie w miejscu reprezentuje 0.
- n okrążeń zgodnie z ruchem wskazówek zegara reprezentuje liczbę n.
- n okrążeń przeciwnie do ruchu wskazówek zegara reprezentuje liczbę $-n$.

Teoria typów 1 - podstawy

- Teorię typów w ujęciu HoTTowym można opisać jako system formalny, który za pomocą reguł (osądów) opisuje byty zwane typami. Kluczową innowacją HoTT jest interpretacja typów i wymyślone na jej podstawie aksjomaty rzucające światło na naturę kosmosu.
- Reguły dzielą się na ciekawe i nieciekawe.
- Nieciekawe to te, które muszą być, żeby wszystko działało, np. do zamieniania kolejności rzeczy w kontekście.
- Ciekawe to te, które faktycznie opisują typy. Jest ich pięć rodzajów: reguły formacji, wprowadzania, eliminacji, obliczania i unikalności.

Teoria typów 2 - pięć rodzajów reguł

- Reguły formacji mówią, skąd się biorą typy.
- Reguły wprowadzania mówią, jak zrobić elementy danego typu.
- Reguły eliminacji mówią, jak zrobić coś z elementami danego typu.
- Reguły obliczania mówią, jak reguły eliminacji mają się do reguł wprowadzania.
- Reguły unikalności mówią, jak reguły wprowadzania mają się do reguł eliminacji.

Teoria typów 3 - reguły dla funkcji

- Ćwiczenie: nazwij każdą z reguł (tzn. która to reguła formacji, która obliczania etc.)

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U} \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}}{\Gamma \vdash A \to B : \mathcal{U}}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.b : A \to B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : A \to B \quad \Gamma \vdash x : A}{\Gamma \vdash f\ x : B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (\lambda x : A.b)\ a \equiv b[x := a] : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : A \to B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.f\ x \equiv f : A \to B}$$

Teoria typów 4 - ciekawostki o regułach

- Każdy typ musi mieć regułę formacji - inaczej nie byłby typem.
- Jednak nie każdy typ musi mieć pozostałe reguły.
- Typ $\mathbf{0}$ nie ma reguły wprowadzania, bo jest pusty i nie ma żadnych elementów.
- Uniwersum nie ma reguły eliminacji.
- Typ $\mathbf{0}$ nie ma także reguły obliczania, co jest oczywiste - nie może jej mieć, skoro nie ma reguły wprowadzania.
- Wiele typów, np. sumy i produkty, nie mają reguły unikalności. W zamian za to mają one zdaniową regułę unikalności, tzn. można udowodnić twierdzenie wyglądające dokładnie jak reguła unikalności.
- Reguła formacji zawsze jest jedna, bo każdy typ można sformować tylko na jeden sposób. Pozostałych reguł może być więcej. Sumy mają 2 reguły wprowadzania, a produkty 2 reguły eliminacji i wobec tego 2 reguły obliczania.

Teoria typów 5 - cztery style definiowania

- Formalnie rzeczy definiujemy za pomocą reguł wprowadzania i eliminacji.
- Przykład: funkcję swap : $\Pi A\ B : \mathcal{U}. A \times B \to B \times A$ możemy zdefiniować jako
  swap $:\equiv \lambda A : \mathcal{U}. \lambda B : \mathcal{U}. \lambda x : A \times B. (\pi_2\ x, \pi_1\ x)$
- Zamiast tego często będziemy jednak definiować poprzez dopasowanie do wzorca, jednocześnie pomijając argumenty, które można wywnioskować z kontekstu: swap $(a, b) :\equiv (b, a)$
- Możemy też definiować słownie: niech swap będzie funkcją, która zamienia miejscami elementy pary. Ten sposób będziemy wykorzystywać do dowodzenia twierdzeń.
- Ostatnim stylem jest obrazkowy styl definiowania. Nie jest on używany w książce, ale ja postaram się go wykorzystać podczas tej prezentacji, gdyż dobrze działa na wyobraźnię.

Interpretacja typów 1 - zbiory

- Jak interpretować/rozumieć typy?
- Najprostszy sposób każe nam myśleć, że typy to po prostu zbiory.
- W takim ujęciu typ $\mathbb{N}$ to taki worek, w którym jest $0, 1, 2, \ldots$ etc.
- Takie rozumienie było przez długi czas dominujące. Jest ono dość intuicyjne i powszechne przy myśleniu nieformalnym.
- Były też inne dziwne interpretacje, jak (chyba) częściowe relacje równoważności, ale kogo to obchodzi.

Interpretacja typów 2 - grupoidy

- Aż tu nagle w pracy z 1995 zatytułowanej "The groupoid interpretation of type theory" panowie Hofmann i Streicher wpadli na pomysł, żeby zinterpretować typy jako grupoidy.
- Upraszczając, grupoid to graf skierowany, w którym:
  - Każdy wierzchołek ma krawędź do samego siebie.
  - Jeżeli jest krawędź z A do B, to jest krawędź z B do A.
  - Jeżeli jest krawędź z A do B i z B do C, to jest krawędź z A do C.
- Jeszcze bardziej upraszczając: grupoid to kolekcja kropek, między którymi są strzałki spełniające pewne warunki.
- Wymyślenie ciągu dalszego tej bajki zajęło dobre 15 lat.

Interpretacja typów 3 - ω-grupoidy

- Aż tu nagle w okolicach roku 2010 Awodey i Warren (a także Voevodsky, van den Berg i Garner) wpadli na pomysł, żeby zinterpretować typy jako ω-grupoidy.
- ω-grupoid to kolekcja kropek, między którymi są strzałki spełniające warunki jak dla grupoidu. Co więcej, między strzałkami też mogą być strzałki spełniające te warunki. Są też strzałki między strzałkami między strzałkami i tak dalej aż do nieskończoności.
- Jeżeli pomyślimy o naszych "strzałkach" jak o ścieżkach w przestrzeni, to dostajemy homotopiczną interpretację teorii typów. W zasadzie to każdy ω-grupoid jest reprezentacją jakiejś przestrzeni topologicznej.

1.12 Ścieżki 1 - reguły

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash a =_A b : \mathcal{U}_i} \text{=-FORM} \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \mathsf{refl}_a : a =_A a} \text{=-INTRO}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, x{:}A, y{:}A, p{:}x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \\ \Gamma, z{:}A \vdash c : C[z, z, \mathsf{refl}_z / x, y, p] \qquad \Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : A \qquad \Gamma \vdash p' : a =_A b\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, p') : C[a, b, p'/x, y, p]} \text{=-ELIM}$$

$$\frac{\Gamma, x{:}A, y{:}A, p{:}x =_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, z{:}A \vdash c : C[z, z, \mathsf{refl}_z / x, y, p] \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{=_A}(x.y.p.C, z.c, a, a, \mathsf{refl}_a) \equiv c[a/z] : C[a, a, \mathsf{refl}_a / x, y, p]} \text{=-COMP}$$

In $\mathsf{ind}_{=_A}$, x, y, and p are bound in C, and z is bound in c.

Powyższe reguły opisują rodzinę typów, która zazwyczaj nazywana bywa typem identycznościowym (ang. identity type), ale zgodnie z interpretacją homotopiczną będę go nazywał typem ścieżek.

1.12 Ścieżki 2 - interpretacja reguł

- Reguła formacji: jeżeli mamy typ A i dwa jego elementy a, b, to możemy sformować typ $a =_A b$. Jest to typ, którego elementami są ścieżki z a do b. Jeżeli mamy element tego typu, to a i b są równe.
- Reguła wprowadzania: każda rzecz jest równa sama sobie. Ścieżka poświadczająca ten fakt nazywa się refl. Jest to skrót od ang. reflexivity, czyli zwrotność.
- Reguła eliminacji: C jest tutaj rodziną typów zależącą od ścieżki $p : x = y$. Reguła głosi, że żeby zdefiniować element $C(x, y, p)$ wystarczy mieć element $C(x, x, \mathrm{refl}_x)$.
- Reguła obliczania: chodzi o to, że jeżeli wyeliminujemy element $C(z, z, \mathrm{refl}_z)$, to dostaniemy go spowrotem, tylko po odpowiednim podstawieniu.

1.12 Ścieżki 3 - indukcja po ścieżkach

- Reguła eliminacji dla ścieżek nosi nazwę indukcji po ścieżkach (ang. path induction).
- Zaprezentowany powyżej wariant precyzyjniej nazywa się unbased path induction. Polega na zastąpieniu dwóch obiektów a, b i ścieżki p przez generyczny obiekt z i ścieżkę refl_z.
- Inny wariant nosi nazwę based path induction. Polega on na zastąpieniu obiektu b przez obiekt a oraz ścieżki $p : a = b$ przez ścieżkę refl_a.
- Oba warianty są równoważne. Dowód: HoTT Book, podrozdział 1.12.2.

1.12 Ścieżki 4 - interpretacja indukcji po ścieżkach

- Tak jak indukcję na liczbach naturalnych możemy zobrazować za pomocą domina, tak indukcję po ścieżkach możemy wyobrażać sobie jako ściągnięcie/zwinięcie ścieżki $p : a = b$ do ścieżki trywialnej.
- W wariancie unbased oba końce ścieżki p są wolne. Wybieramy jakiś punkt z na ścieżce i ciągniemy oba końce w jego kierunku. Ostatecznie dostajemy ścieżkę refl_z.
- W wariancie based lewy koniec ścieżki p jest sztywny, a prawy jest wolny. Chwytamy więc prawy koniec b i ciągniemy go po ścieżce w kierunku lewego końca a. Ostatecznie dostajemy ścieżkę refl_a.
- Zauważmy, że jeżeli oba końce ścieżki są sztywne, to nie możemy robić indukcji - spróbuj pociągnąć linę okręconą wokół latarni. O tym, czy koniec jest sztywny czy wolny, decyduje to, czy jest skwantyfikowany uniwersalnie czy nie.

1.12 Ścieżki 5 - wątpliwości i ciekawostki

- Reguła eliminacji dla typu bool intuicyjnie mówi, że jedynymi elementami typu bool są true oraz false.
- Czy więc indukcja po ścieżkach mówi, że jedyną ścieżką jest refl?
- Zanim odpowiemy, garść ciekawostek.
- Indukcja po ścieżkach nie jest HoTTową innowacją. Jedynie nazwa jest nowa. W teorii typów bywa często nazywana J.
- Zdanie mówiące, że każda ścieżka jest trywialna, nazywa się "Aksjomat K".
- Związek z facetami w czerni jest przypadkowy.
- Inne zdanie, mówiące że jest tylko jedna ścieżka, nazywa się w ang. UIP, co jest skrótem od "Uniqueness of Identity Proofs".
- To właśnie badanie nad tego typu zagadnieniami doprowadziły do homotopicznej interpretacji teorii typów.

1.12 Ścieżki 6 - rozwianie wątpliwości

- Indukcja po ścieżkach nie głosi, że jest tylko jedna ścieżka.
- Formalna różnica jest taka, że typ bool jest generowany induktywnie, podczas gdy w przypadku ścieżek, które są rodziną typów, to cała rodzina jest generowana induktywnie, a nie pojedynczy typ $x = y$.
- Parafrazując, nie można w tym przypadku rozważać samych ścieżek w oderwaniu od ich końców.
- Nie możemy zatem udowodnić, że każda ścieżka $p : x = x$ jest trywialna.
- Ale możemy udowodnić, że każda ścieżka razem z jej końcami jest trywialna: zachodzi $(x, y, p) = (x, x, \mathrm{refl}_x)$, gdzie równość jest w typie $\Sigma x\ y : A, x = y$. Odpowiada to indukcji po ścieżkach w wersji unbased.
- Podobnie dla ustalonego $a : A$ możemy pokazać, że $(x, p) = (a, \mathrm{refl}_a)$ w typie $\Sigma x : A, a = x$. Odpowiada to indukcji po ścieżkach w wersji based.

1.12 Ścieżki 7 - skąd się biorą ścieżki

- Póki co wiemy, że jest ścieżka trywialna.
- Wiemy też, że indukcja po ścieżkach nie wyklucza istnienia innych ścieżek.
- Rodzi się jednak pytanie: skąd się biorą ścieżki?
- Cztery główne źródła ścieżek, które zobaczymy w przyszłości, to:
  - Aksjomat ekstensjonalności dla funkcji - ścieżki powstają z homotopii.
  - Aksjomat uniwalencji - ścieżki powstają z równoważności.
  - Wyższe typy induktywne - możemy wrzucić do typu dowolne ścieżki.
  - Struktura ω-grupoidu - powyższe trzy rodzaje (potencjalnie) nietrywialnych ścieżek mogą ze sobą oddziaływać za pośrednictwem struktury ω-grupoidu, tworząc jeszcze więcej nietrywialnych ścieżek.

Operacje na ścieżkach 1 - definicje

Definition (Lemat 2.1.1 - ścieżka odwrotna)

$(-)^{-1} : \Pi A : \mathcal{U}.\Pi x\ y : A.x = y \to y = x$

$\mathsf{refl}_x^{-1} :\equiv \mathsf{refl}_x$

Definition (Lemat 2.1.2 - sklejanie ścieżek)

$\cdot : \Pi A : \mathcal{U}.\Pi x\ y\ z : A.x = y \to y = z \to x = z$

$\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x :\equiv \mathsf{refl}_x$

Equality	Homotopy	∞-Groupoid
reflexivity	constant path	identity morphism
symmetry	inversion of paths	inverse morphism
transitivity	concatenation of paths	composition of morphisms

Operacje na ścieżkach 2 - właściwości

Theorem (Lemat 2.1.4 - właściwości operacji na ścieżkach)

Niech $A : \mathcal{U}$ będzie typem, $a, b, c, d : A$ punktami, zaś $p : a = b, q : b = c, r : c = d$ ścieżkami. Wtedy:

- $refl_x \cdot p = p$
- $p \cdot refl_y = p$
- $p \cdot p^{-1} = refl_x$
- $p^{-1} \cdot p = refl_y$
- $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$

Ćwiczenie: udowodnij.

Prostujcie ścieżki Pana

- Zauważmy, że cała wyższogrupoidowa struktura typów wynika wprost z indukcji po ścieżkach.
- Zauważmy też, że powyższe właściwości operacji na ścieżkach są wyrażone za pomocą ścieżek między ścieżkami.
- Tak naprawdę, to te właściwości są operacjami, które biorą na wejściu ścieżki i zwracają ścieżki między ścieżkami.
- Wobec tego można domniemywać, że te właściwości same spełniają jakieś właściwości, które są wyrażane przez ścieżki jeszcze wyższego rzędu...
- ... i tak do nieskończoności.
- Katolicy bywają zachęcani do tego, żeby "prostować ścieżki Pana". Atoli zachęcam ja was: prostujcie ω-grupoid Pana (oczywiście za pomocą indukcji po ścieżkach).

Aplikacja funkcji do ścieżki 1 - definicja

Definition (Lemat 2.2.1 - aplikacja funkcji do ścieżki)

$\mathrm{ap} : \Pi A\ B : \mathcal{U}.\Pi f : A \to B.x =_A y \to f(x) =_B f(y)$
$\mathrm{ap}_f(\mathrm{refl}_x) :\equiv \mathrm{refl}_{f(x)}$

Klasycznie powyższą definicję moglibyśmy odczytać jako twierdzenie mówiące, że wszystkie funkcje zachowują równość.

W interpretacji homotopicznej twierdzenie to (które jednocześnie definiuje pewną funkcję) głosi, że funkcje zachowują ścieżki.

Zauważ też, że również tutaj nie wyczerpujemy tematu. Funkcje zachowują nie tylko ścieżki jednowymiarowe, ale także np. pięciowymiarowe pętle. Podobnie zachowują się funkcje zależne, o których tutaj milczymy.

Aplikacja funkcji do ścieżki 2 - właściwości

Lemma 2.2.2. *For functions $f : A \to B$ and $g : B \to C$ and paths $p : x =_A y$ and $q : y =_A z$, we have:*

(i) $\mathsf{ap}_f(p \cdot q) = \mathsf{ap}_f(p) \cdot \mathsf{ap}_f(q)$.

(ii) $\mathsf{ap}_f(p^{-1}) = \mathsf{ap}_f(p)^{-1}$.

(iii) $\mathsf{ap}_g(\mathsf{ap}_f(p)) = \mathsf{ap}_{g \circ f}(p)$.

(iv) $\mathsf{ap}_{\mathsf{id}_A}(p) = p$.

Proof. Left to the reader. □

Ćwiczenie: udowodnij.

Transport 1 - definicja

Definition (Lemat 2.3.1 - transport)

$\mathsf{transport} : \Pi A : \mathcal{U}.\Pi B : A \to \mathcal{U}.\Pi x\ y : A.x = y \to P(x) \to P(y)$
$\mathsf{transport}(\mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{id}_{P(x)}$

Notacja: $p_* :\equiv \mathsf{transport}(p)$

Powyższe klasycznie można odczytać jako jedną stronę równoważności, której Leibniz użył do zdefiniowania równości: "dwie rzeczy są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same właściwości".

Homotopicznie sprawa jest nieco ciekawsza: jeżeli mamy ścieżkę $p : x =_A y$ i jakiś obiekt typu $P(x)$, to możemy go przenieść (czyli właśnie przetransportować) do typu $P(y)$ wzdłuż ścieżki p.

Transport 2 - właściwości

Lemma 2.3.9. *Given $P : A \to \mathcal{U}$ with $p : x =_A y$ and $q : y =_A z$ while $u : P(x)$, we have*

$$q_*(p_*(u)) = (p \cdot q)_*(u).$$

Lemma 2.3.10. *For a function $f : A \to B$ and a type family $P : B \to \mathcal{U}$, and any $p : x =_A y$ and $u : P(f(x))$, we have*

$$\mathsf{transport}^{P \circ f}(p, u) = \mathsf{transport}^{P}(\mathsf{ap}_f(p), u).$$

Lemma 2.3.11. *For $P, Q : A \to \mathcal{U}$ and a family of functions $f : \prod_{(x:A)} P(x) \to Q(x)$, and any $p : x =_A y$ and $u : P(x)$, we have*

$$\mathsf{transport}^{Q}(p, f_x(u)) = f_y(\mathsf{transport}^{P}(p, u)).$$

Ćwiczenie: udowodnij.

Aplikacja funkcji zależnej do ścieżki

Definition (Lemat 2.3.4)

$\mathsf{apd} : \Pi A : \mathcal{U}.\Pi P : A \to \mathcal{U}.\Pi f : (\Pi x : A.P(x)).\Pi p : x = y.p_*(f(x)) = f(y)$

$\mathsf{apd}_f(\mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{f(x)}$

Aplikacja funkcji zależnych do ścieżek jest analogiczna do aplikacji funkcji niezależnych do ścieżek, ale jest mały twist - musimy użyć transportu, bo wyniki funkcji dla x i y żyją w różnych typach.

Homotopie 1 - definicje i właściwości

Definition 2.4.1. Let $f, g : \prod_{(x:A)} P(x)$ be two sections of a type family $P : A \to \mathcal{U}$. A **homotopy** from f to g is a dependent function of type

$$(f \sim g) :\equiv \prod_{x:A} (f(x) = g(x)).$$

Note that a homotopy is not the same as an identification $(f = g)$. However, in §2.9 we will introduce an axiom making homotopies and identifications "equivalent".

The following proofs are left to the reader.

Lemma 2.4.2. *Homotopy is an equivalence relation on each dependent function type $\prod_{(x:A)} P(x)$. That is, we have elements of the types*

$$\prod_{f:\prod_{(x:A)} P(x)} (f \sim f)$$

$$\prod_{f,g:\prod_{(x:A)} P(x)} (f \sim g) \to (g \sim f)$$

$$\prod_{f,g,h:\prod_{(x:A)} P(x)} (f \sim g) \to (g \sim h) \to (f \sim h).$$

Ćwiczenie: udowodnij.

Homotopie 2 - intuicja

- Klasycznie (czyli płasko) $f \sim g$ możemy czytać jako "f i g są ekstensjonalnie równe".
- HoTTowym odpowiednikiem ekstensjonalnej równości jest homotopia, która intuicyjnie znaczy, że dla każdego elementu dziedziny wyniki funkcji f i g są połączone ścieżką w przeciwdziedzinie.
- To pojęcie homotopii różni się jednak od tego zaprezentowanego w pierwszych slajdach, gdyż homotopie i ścieżki między funkcjami nie są a priori tym samym - nie da się tego pokazać w podstawowej wersji naszej teorii.
- Dlatego w bliskiej przyszłości będziemy dążyć do tego, żeby załatać tę sytuację za pomocą aksjomatu ekstensjonalności.

Równoważności 1 - bardzo poważny filozoficzny problem

- Rozważmy dwa poniższe typy (tak naprawdę powinniśmy też podać reguły eliminacji i obliczania, ale nie są one istotne dla przykładu).
- Niech $\mathbb{N} :\equiv 0 \mid S\ \mathbb{N}$ i niech $\mathbb{N}' :\equiv 0' \mid S'\ \mathbb{N}'$
- Rodzi się pytanie: czy $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}'$ to to samo, czy coś innego?
- Odpowiedź klasyczna: istnieje oczywista bijekcja $\mathbb{N} \cong \mathbb{N}'$. Na mocy nadużycia języka będziemy utożsamiać $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}'$, tzn. traktować je tak, jakby $\mathbb{N} = \mathbb{N}'$ mimo, że formalnie tak nie jest.
- Odpowiedź HoTTowa: istnieje oczywista równoważność $e : \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}'$. Wobec tego na mocy aksjomatu uniwalencji mamy ścieżkę $\mathrm{ua}(e) : \mathbb{N} = \mathbb{N}'$.
- Pozostaje nam sformułować pojęcie równoważności i podać aksjomat uniwalencji, łączący równoważności ze ścieżkami w uniwersum.

Równoważności 2 - pomysły

Jak więc zdefiniować równoważność? Przyjrzyjmy się tradycyjnym pojęciom o podobnym charakterze:

- Bijekcja - funkcja będąca surjekcją i injekcją.
- Bijekcja v2 - dla każdego elementu przeciwdziedziny istnieje dokładnie jeden element dziedziny.
- Izomorfizm - morfizm mający obustronną odwrotność.

2.4 Równoważności 3 - kwaziodwrotność

Definition

$$\mathrm{qinv} : \Pi A\ B : \mathcal{U}.(A \to B) \to \mathcal{U}$$
$$\mathrm{qinv}(f) :\equiv \sum_{g:B\to A} g \circ f \sim \mathrm{id}_A \times f \circ g \sim \mathrm{id}_B$$

Funkcję mającą odwrotność (wraz z dowodami na to, że faktycznie jest to odwrotność) będziemy nazywać kwaziodwrotnością.

Ćwiczenio-przykład. Pokaż, że kwaziodwrotnościami są następujące funkcje:

- $\mathrm{id}_A : A \to A$
- $(p \cdot -) : y = z \to x = z$
- $(- \cdot q) : x = y \to x = z$
- $\mathrm{transport}(p, -) : P(x) \to P(y)$

Równoważności 4 - co poszło nie tak

Dlaczego nazwaliśmy funkcje mające odwrotność kwaziodwrotnościami, a nie izomorfizmami? Okazuje się, że są one wadliwe. Jeżeli narysujemy odpowiednio plastyczny rysunek, to ujrzymy uzasadnienie dla poniższego twierdzenia:

Theorem (Twierdzenie 4.1.1 - *qinv* to pętle)

$$\Pi A\ B : \mathcal{U}.\Pi f : A \to B.qinv(f) \to (qinv(f) = \Pi x : A.x = x)$$

Twierdzenie to głosi, że jeżeli funkcja f jest kwaziodwrotnością, to typ qinv(f) jest równy typowi funkcji zależnych, które każdemu punktowi przyporządkowują jakąś pętlę. Dlaczego twierdzenie to nas niepokoi? Jak już wiemy, pętli w danym punkcie może być wiele. Mimo, że dana funkcja może mieć tylko jedną odwrotność, to dowodów tego faktu (czyli odpowiednich par ścieżek) może być wiele. Wobec tego funkcja może być kwaziodwrotnością na wiele sposobów.

Równoważności 5 - pobożne życzenia

- Chcielibyśmy, żeby definicja równoważności isequiv spełniała następujące warunki:
  - $\mathrm{qinv}(f) \longrightarrow \mathrm{isequiv}(f)$
  - $\mathrm{isequiv}(f) \longrightarrow \mathrm{qinv}(f)$
  - $\Pi e_1\ e_2 : isequiv(f), e_1 = e_2$
- Parafrazując: isequiv to niemal to samo co qinv, ale każda funkcja może być równoważnością na co najwyżej jeden sposób.

Równoważności 6 - definicje

Niech $A, B : \mathcal{U}$ będą typami, a $f : A \to B$ funkcją.

Definition (Równoważność 1)

$$\mathsf{isequiv}(f) :\equiv \left(\sum_{g : B \to A} f \circ g \sim \mathsf{id}_B \right) \times \left(\sum_{h : B \to A} h \circ f \sim \mathsf{id}_A \right)$$

Definition (Równoważność 2)

$$\mathsf{isequiv}(f) :\equiv \sum_{g : B \to A} \sum_{\eta : g \circ f \sim \mathsf{id}_A} \sum_{\epsilon : f \circ g \sim \mathsf{id}_B} \prod_{x : A} \mathsf{ap}_f(\eta(x)) = \epsilon(\mathsf{ap}_f(x))$$

Równoważności 7 - wybór

Żeby uzyskać definicję isequiv, możemy "ulepszyć" definicję qinv. Możemy to zrobić na dwa sposoby:

- Rozdzielamy odwrotność na dwie osobne. Wtedy każda z nich ma swój osobny dowód, że jest odwrotnością i gitara gra.
- Dodajemy dodatkową ścieżkę, która zapewnia, że ścieżki dowodzące odwrotności dobrze się ze sobą zachowują.

Druga definicja zdaje się być korzystniejsza w użyciu, bo łatwiej wyjąć z niej odwrotność. Dużo łatwiej jest też dostrzec, że spełnia ona dwa pierwsze pożądane przez nas warunki. Tego, że spełnia trzeci, nie będziemy dowodzić, bo to nudne.

Równoważności 8 - więcej definicji

Definition (Równoważność 3)

$$\mathrm{isequiv}(f) :\equiv \prod_{y:B} \mathrm{isContr}\left(\sum_{x:A} f(x) = y\right)$$

Definition (Równoważność 4)

$\mathrm{isequiv}(f) :\equiv ||\mathrm{qinv}(f)||$

Możliwe są jeszcze dwie inne definicje równoważności, których jednak nie wybierzemy, gdyż zawierają nieznane nam pojęcia.

- Nr 3 odpowiada naszej definicji bijekcji v2: dla każdego elementu przeciwdziedziny istnieje dokładnie jeden element dziedziny (ale musimy zapisać to bardziej homotopicznie).
- Nr 4 to coś w stylu: qinv nie działa, więc ulepszymy go czarami tak, żeby jednak działał.

Równoważności 9 - refleksja

- Oczywiście wszystkie 4 definicje są równoważne.
- Skąd jednak biorą się problemy? Klasyczna definicja izomorfizmu okazała się za słaba, zaś definicję bijekcji v2 również trzeba było odpowiednio stuningować.
- Definicja: zbiór (czasem nazywany też h-zbiorem) to typ, w którym wszystkie ścieżki są trywialne.
- Powód tego jest prosty: klasyczne definicje pochodzą ze świata teorii zbiorów, w którym to świecie wszystko jest h-zbiorem. Wobec tego definicje trzeba nieco unowocześnić.
- "Stare" definicje są mimo wszystko poprawne dla h-zbiorów w HoTT.

Wielkie odkrycie 1 - injekcja to surjekcja

- W ramach ciekawostki dokonajmy pewnego wesołego odkrycia: injekcja to surjekcja.
- Klasycznie f jest surjekcją, gdy $\forall y \in B. \exists x \in A. f(x) = y$
- Klasycznie f jest injekcją, gdy $\forall x\ y \in A. f(x) = f(y) \implies x = y$
- Przeformułujmy tę definicję na taką bardziej homo, wciskając tam więcej ścieżek: f jest injekcją, gdy $\Pi x\ y : A. \Pi q : f(x) = f(y). \Sigma p : x = y. \mathrm{ap}_f(p) = q$
- Klasyczną surjekcję możemy rozumieć jako 0-surjekcję, tzn. surjekcję na punktach, zaś klasyczną injekcję jako 1-surjekcję, tzn. surjekcję na ścieżkach między punktami.
- Jak więc widać, klasyczna bijekcja to surjekcja na poziomach 0 i 1. A co z wyższymi?
- Próba pogłębienia tej obserwacji prowadzi do ciekawego twierdzenia.

Wielkie odkrycie 2 - wesoła charakteryzacja równoważności

Niech $A, B : \mathcal{U}$ będą typami, a $f : A \to B$ funkcją.

Definition (Surjekcja - nieco inaczej niż w książce)

f jest surjekcją, gdy $\Pi y : B.\Sigma x : A.f(x) = y$

Definition (Zanurzenie)

f jest zanurzeniem, gdy dla każdego $x, y : A$ funkcja $\mathrm{ap}_f : x = y \to f(x) = f(y)$ jest równoważnością.

Theorem (Wesoła charakteryzacja równoważności)

f jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy jest surjekcją i zanurzeniem.

Wielkie odkrycie 3 - wnioski

- f jest równoważnością, gdy jest surjekcją na wszystkich poziomach - na punktach, ścieżkach między punktami, ścieżkach między ścieżkami etc.
- Stąd wnioskujemy, że klasyczne definicje okazują się za słabe, gdyż dotyczą tylko poziomów 0 i 1 (czyli punktów i ścieżek), a my mamy do czynienia z potencjalnie nieskończenie wieloma poziomami.

2.5-2.8 Wyższogrupoidowa struktura typów 1 - wprowadzenie

- W klasycznej matematyce mamy twierdzenia mówiące, kiedy jakieś obiekty są równe, np. $(a, b) = (a', b') \iff a = a' \wedge b = b'$.
- W HoTT mamy podobnie wyglądające twierdzenia: $(a, b) = (a', b') \simeq a = a' \times b = b'$.
- Zgodnie jednak z interpretacją homotopiczną są one dużo ogólniejsze od swoich klasycznych przodków, gdyż charakteryzują one przestrzenie ścieżek w danym typie.

2.5-2.8 Wyższogrupoidowa struktura typów 2 - plan

- Jakkolwiek sprawa brzmi prosto, zróżnicowanie w tej materii jest spore.
- Za chwilę zobaczymy charakteryzację ścieżek w typach banalnych oraz w typach negatywnych (czyli takich, w których kluczowa jest reguła eliminacji).
- Później zobaczymy, że niektórych pożądanych charakteryzacji nie da się udowodnić i załatamy je aksjomatami.
- Następnie zobaczymy sposób pozwalający charakteryzować ścieżki w typach pozytywnych (czyli takich, w których kluczowe są reguły wprowadzania).
- HoTT pozwala nam jednak zdefiniować typy, dla których charakteryzacja ścieżek jest (częściowo) otwartym problemem badawczym, np. n-wymiarowe kule, torusy, podwieszenia i inne skomplikowane przestrzenie.

2.5-2.8 Wyższogrupoidowa struktura typów 3 - typy banalne i negatywne

Theorem (Ścieżki między elementami typu pustego)

$\Pi x\ y : \mathbf{0}.(x = y) \simeq \mathbf{0}$

Theorem (2.8 Ścieżki między elementami typu unit)

$\Pi x\ y : \mathbf{1}.(x = y) \simeq \mathbf{1}$

Theorem (2.5.1 Ścieżki między parami)

$\Pi A\ B : \mathcal{U}.\Pi a\ a' : A.\Pi b\ b' : B.((a, b) = (a', b')) \simeq a = a' \times b = b'$

Theorem (2.7.2 Ścieżki między parami zależnymi)

$$\Pi A : \mathcal{U}.\Pi B : A \to \mathcal{U}.\Pi w\ w' : \textstyle\sum_{x:A} B(x).$$
$$(w = w') \simeq \sum_{p:pr_1(w)=pr_1(w')} p_*(pr_2(w)) = pr_2(w')$$

2.5-2.8 Wyższogrupoidowa struktura typów 4 - interpretacja

- Nie ma ścieżek między punktami typu $\mathbf{0}$. Jest to dość oczywiste, bo ścieżki muszą być między punktami, a punktów nie ma.
- Między elementami $\mathbf{1}$ jest dokładnie jedna ścieżka.
- Ścieżki między parami to pary ścieżek.
- Ścieżki między parami zależnymi to zależne pary ścieżek.

2.9 Ekstensjonalność 1 - aksjomat ekstensjonalności

Jeżeli dwie funkcje są równe, to są też homotopiczne (czyli ekstensjonalnie równe).

Definition (2.9.2)

$$\mathsf{happly} : \Pi A\ B : \mathcal{U}.\Pi f\ g : A \to B.f = g \to \Pi x : A.f(x) = g(x)$$
$$\mathsf{happly}(\mathsf{refl}_f) = \lambda x : A.\mathsf{refl}_{f(x)}$$

Jednak implikacji w drugą stronę (ani tym bardziej równoważności) nie da się pokazać. Wobec tego wprowadzamy aksjomat:

Definition (2.9.3 Aksjomat ekstensjonalności dla funkcji)

Funkcja happly jest równoważnością.

Corollary (Ładny wzorek)

$$(f = g) \simeq \Pi x : A.f(x) = g(x)$$

2.9 Ekstensjonalność 2 - rozbicie na reguły

Zauważmy, że charakteryzacje ścieżek możemy rozbić na reguły przypominające reguły opisujące typy, w których te ścieżki żyją. Jest to prawdą nie tylko dla aksjomatu ekstensjonalności, ale też np. dla twierdzeń charakteryzujących ścieżki między parami.

Corollary (Reguły opisujące ścieżki między funkcjami)

$$\mathit{funext} : \Pi A\ B : \mathcal{U}.\Pi f\ g : A \to B.(\Pi x : A.f(x) = g(x)) \to f = g$$
$$\mathit{happly}(\mathit{funext}(h), x) = h(x)$$
$$\mathit{funext}(\lambda x : A.\mathit{happly}(p, x)) = p$$

2.9 Ekstensjonalność 3 - interpretacja

- Reguła formacji dla $f = g$ pochodzi bezpośrednio z induktywnej definicji ścieżek.
- Reguła wprowadzania to funext: żeby zrobić ścieżkę $f = g$, wystarczy nam homotopia.
- Reguła eliminacji to happly: jeżeli mamy ścieżkę $f = g$, to możemy uzyskać ścieżkę $f(x) = g(x)$ dla dowolnego x należącego do dziedziny.
- Reguła obliczania mówi, że jeżeli zaaplikujemy do $x : A$ ścieżkę zrobioną z homotopii $h : \Pi x : A.f(x) = g(x)$ za pomocą funext, to dostaniemy $h(x)$.
- Reguła unikalności mówi, że każda ścieżka między funkcjami pochodzi od ekstensjonalności zaaplikowanej do odpowiedniej homotopii.

2.9 Ekstensjonalność 4 - charakteryzacja operacji

Możemy scharakteryzować nie tylko ścieżki między funkcjami, ale także operacje na tych ścieżkach.

Theorem (Charakteryzacja operacji na ścieżkach między funkcjami)

$refl_f = funext(\lambda x : A.refl_{f(x)})$
$p^{-1} = funext(\lambda x : A.happly(p, x)^{-1})$
$p \cdot q = funext(\lambda x : A.happly(p, x) \cdot happly(q, x))$

Intuicja jest prosta:

- Funkcja bierze argument i zwraca wynik.
- Ścieżka między funkcjami to funkcja biorąca argument i zwracająca ścieżkę między wynikami.
- Operacja na ścieżkach między funkcjami pochodzi na mocy ekstensjonalności od funkcji biorącej argument i wykonującej operację na ścieżkach między wynikami.

2.9 Ekstensjonalność 5 - charakteryzacja transportu

Możemy też scharakteryzować transport w rodzinach typów postaci $\lambda x : X.A(x) \to B(x)$.

Dla typu $X : \mathcal{U}$, rodzin typów $A, B : X \to \mathcal{U}$, elementów $x_1, x_2 : X$, funkcji $f : A(x_1) \to B(x_1)$ oraz ścieżki $p : x_1 = x_2$ mamy:

Theorem (Charakteryzacja transportu dla funkcji)

$$transport^{\lambda x:X.A(x)\to B(x)}(p, f) =$$
$$\lambda a : A(x_2).transport^{B}(p, f(transport^{A}(p^{-1}, a)))$$

Interpretacja twierdzenia jest łatwa: chcemy zrobić funkcję typu $A(x_2) \to B(x_2)$. Bierzemy więc element $a : A(x_2)$, transportujemy go ścieżka p w tył do typu $A(x_1)$, używamy funkcji f by dostać element typu $B(x_1)$ i transportujemy go wzdłuż p do typu $B(x_2)$.

2.10 Uniwalencja 1 - aksjomat uniwalencji

Jeżeli dwa typy są równe, to są też równoważne.

Definition (2.10.2)

idtoeqv : $\Pi A\ B. A = B \to A \simeq B$
$\mathrm{idtoeqv}(p) = \mathrm{transport}^{\mathrm{id}_{\mathcal{U}}}(p)$
Słownie: idtoeqv to specjalny przypadek transportu. Trzeba jeszcze przez indukcję po ścieżkach pokazać, że jest to równoważność.

Podobnie jak w przypadku ekstensjonalności dla funkcji, w drugą stronę implikacji pokazać się nie da i stąd aksjomat.

Definition (2.10.3 Aksjomat uniwalencji)

Funkcja idtoeqv jest równoważnością.

Corollary (Ładne wzorki)

$(A = B) \simeq (A \simeq B)$ *lub równoważnie* $(A = B) = (A \simeq B)$

2.10 Uniwalencja 2 - reguły i charakteryzacje

Corollary (Reguły opisujące ścieżki między typami)

$$ua : \Pi A\ B : \mathcal{U}.(A \simeq B) \to A = B$$
$$idtoeqv(ua(e)) = e$$
$$ua(idtoeqv(p)) = p$$

Theorem (Charakteryzacja operacji na ścieżkach między funkcjami)

$$refl_f = ua(id_A)$$
$$p^{-1} = ua(idtoeqv(p)^{-1})$$
$$p \cdot q = ua(idtoeqv(q) \circ idtoeqv(p))$$

Dla rodziny typów $B : A \to \mathcal{U}$, punktów $x, y : A$, ścieżki $p : x = y$ i elementu $u : B(x)$ mamy:

Theorem (Charakteryzacja transportu dla typów)

$$transport^{\lambda X:\mathcal{U}.X}(p, f) = idtoeqv(ap_B(p))(u)$$

Filozoficzna interpretacja równoważności i aksjomatów

- Jak widać, równoważność $A \simeq B$ możemy zinterpretować jako zestaw czterech reguł opisujących typ A (albo B) po prostu ją rozpakowując.
- Funkcja $f^{-1} : B \to A$ to reguła wprowadzania dla A.
- Funkcja $f : A \to B$ to reguła eliminacji.
- Homotopia będąca świadkiem $f(f^{-1}(x)) = x$ to (zdaniowa) reguła obliczania.
- Homotopia będąca świadkiem $f^{-1}(f(x)) = x$ to (zdaniowa) reguła unikalności.
- Dzięki

Innowacje HoTT w przykładach - uniwalencja 2

- Aksjomat uniwalencji nie tylko usuwa nieprzyjemny filozoficzny smrodek, ale daje nam też nowe sposoby rozumowania.
- Przykład: każda równoważność jest monomorfizmem.
- Dowód klasyczny: każda równoważność ma odwrotność. Użyj jej.
- Dowód HoTTowy: każda równoważność pochodzi od jakiejś ścieżki. Na mocy indukcji po ścieżkach możemy założyć, że ścieżka ta jest trywialna, a zatem nasza równoważność jest identycznością.

2.14 Przykład: równość struktur

- todo

Hierarchia n-typów

- Hierarchia n-typów: unit, funkcje sortujące, pusty, zbiory, grupoidy, okrąg, uniwersum.

Metoda encode-decode dla liczb naturalnych

- todo - przenieść to w miejsce, gdzie już wiadomo, co to zbiory

3.11 Kontraktowalność

- todo

3.3 Zdania

- todo

3.1 Zbiory

- todo

3.7 Trunkacja

- todo

3.4 Logika klasyczna i intuicjonistyczna

- todo

Innowacje HoTT w przykładach - logika 1

- Znaczenie klasycznej dysjunkcji jest inne, niż konstruktywnej. Klasycznie $P \vee Q$ znaczy, że zachodzi P lub Q lub oba na raz, ale nie wiemy, które. Konstruktywnie $P \vee Q$ znaczy, że zachodzi P lub Q i wiemy, z którym przypadkiem mamy do czynienia

3.8 Aksjomat Wyboru

-

Innowacje HoTT w przykładach - logika 2

Theorem (Aksjomat wyboru)

$$\prod(A:\mathcal{U})(B:A\to\mathcal{U})(R:\Pi x:A,B\ x\to\mathcal{U}),$$
$$(\prod x:A,\sum y:B\ x,R\ x\ y)\to$$
$$\sum f:(\Pi x:A,B\ x),\Pi x:A,R\ x\ (f\ x)$$

Dowód.

Na tablicy. □

Powyższe twierdzenie jest problematyczne, gdyż wygląda jak aksjomat wyboru, ale nie ma tutaj żadnego wybierania.

3.9 Zasada unikalnego wyboru

-

wut

-

Bibliografia

- Podstawowym źródłem wiedzy jest książka https://homotopytypetheory.org/book/
- Jakaś prezentacja: http://www.cs.nott.ac.uk/~psztxa/talks/edinburgh-13.pdf
- Filozoficzne wynurzenia: https://www.researchgate.net/publication/280671356_Does_Homotopy_Type_Theory_Provide_a_Foundation_for_Mathematics
- Wesoły papiur o trunkacji i topologicznych rzeczach: https://arxiv.org/pdf/1610.03346.pdf