

# Homotopiczna teoria typów

Zeimer

13 stycznia 2019

# 1 O co chodzi

# Czym jest HoTT?

- Homotopiczna teoria typów (w skrócie HoTT) to połączenie teorii typów i teorii homotopii.
- Jest kolejnym stadium ewolucji teorii typów.
- Jest syntetyczną teorią homotopii, dającą nam łatwy dostęp do skomplikowanych pojęć topologicznych.
- Jest pomysłem na nowe podstawy matematyki, alternatywne wobec teorii zbiorów.
- Jest bardzo potężnym funkcyjnym językiem programowania.
- Podstawowym źródłem wiedzy jest książka <https://homotopytypetheory.org/book/>

# Teoria typów 1

- Teorię typów w ujęciu HoTTowym można opisać jako system formalny, który za pomocą reguł (osądów) opisuje byty zwane typami. Kluczową innowacją HoTT jest interpretacja typów i wymyślone na jej podstawie aksjomaty rzucające światło na naturę kosmosu.
- Reguły dzielą się na ciekawe i nieciekawe.
- Niekawne to te, które muszą być, żeby wszystko działało, np. do zamieniania kolejności rzeczy w kontekście.
- Ciekawe to te, które faktycznie opisują typy. Jest ich pięć rodzajów: reguły formacji, wprowadzania, eliminacji, obliczania i unikalności.

## Teoria typów 2

- Reguły formacji mówią, skąd się biorą typy.
- Reguły wprowadzania mówią, jak zrobić elementy danego typu.
- Reguły eliminacji mówią, jak zrobić coś z elementami danego typu.
- Reguły obliczania mówią, jak reguły eliminacji mają się do reguł wprowadzania.
- Reguły unikalności mówią, jak reguły wprowadzania mają się do reguł eliminacji.

## Teoria typów 3

- Przykład: reguły dla typu funkcyjnego. Ćwiczenie: nazwij każdą z reguł.

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U} \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}}{\Gamma \vdash A \rightarrow B : \mathcal{U}}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A. b : A \rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash x : A}{\Gamma \vdash f \ x : B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (\lambda x : A. b) \ a \equiv b[x := a] : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : A \rightarrow B}{\Gamma \vdash \lambda x : A. f \ x \equiv f : A \rightarrow B}$$

# Teoria homotopii 1

- Co to jest homotopia?
- Zgodnie z wikipedią, jeżeli  $f$  i  $g$  są funkcjami ciągłymi z przestrzeni topologicznej  $X$  w przestrzeń topologiczną  $Y$ , to  $H : X \times [0; 1] \rightarrow Y$  jest homotopią, gdy jest funkcją ciągłą spełniającą  $H(0, x) = f(x)$  i  $H(1, x) = g(x)$ .
- Jeżeli nieco pogmeramy w symbolach, to możemy to zapisać tak:  $H : [0; 1] \rightarrow (X \rightarrow Y)$  jest homotopią, gdy jest ciągła i spełnia  $H(0) = f$  i  $H(1) = g$ .
- Nie przejmuj się, jeżeli definicja cię nie oświeca. Moim zdaniem władowanie jej do nazwy całej teorii jest głupie.

## Teoria homotopii 2

- Bardziej podstawowym pojęciem jest ścieżka.
- Ścieżka w przestrzeni topologicznej  $X$  to funkcja ciągła z  $[0; 1]$  w  $X$ .
- Łatwo to sobie wyobrazić: odcinek  $[0; 1]$  z pewnością jest ścieżką prowadzącą od 0 do 1. Jego obrazem, czyli ścieżką, jest więc pewien ciągły zawijasek, który prowadzi z  $f(0)$  do  $f(1)$ .
- Ostatecznie możemy powiedzieć, że homotopia to ścieżka między funkcjami.
- Teoria homotopii nie jest jednak teorią ścieżek między funkcjami. Jest to raczej po prostu teoria ścieżek.



# Teoria homotopii 3

- Po co to wszystko?
- Topologia jest całkiem użyteczna. Ostatnio popularna robi się topologiczna analiza danych. Zamiast prymitywnie przypasowywać do danych proste (regresja liniowa), ludzie próbują lepiej opisywać kształt danych. Topologia bada kształty, więc pasuje jak ulał.
- Chcemy więc wiedzieć więcej o topologii, np. czy dwie przestrzenie są takie same czy inne. Tutaj wkracza topologia algebraiczna, czyli dziedzina badająca przestrzenie topologiczne za pomocą metod algebraicznych.

## Teoria homotopii 4

- Pętla w punkcie  $x$  to ścieżka, która zaczyna się i kończy w punkcie  $x$ .
- Grupa podstawowa przestrzeni  $X$  w punkcie  $x$  to grupa, której nośnikiem jest zbiór wszystkich pętli w punkcie  $x$ . Działaniem grupowym jest sklejanie pętli (najpierw pójść pierwszą pętlą, a potem drugą). Odwrotność to pójście pętlą w przeciwnym kierunku. Element neutralny to stanie w miejscu.
- Grupa podstawowa jest fajna, bo jeżeli przestrzenie są izomorficzne, to ich grupy podstawowe też są. Wobec tego jeżeli grupy podstawowe (w dowolnym punkcie) są różne, to przestrzenie też są różne.

## Teoria homotopii 5

- Okrąg to taka przestrzeń topologiczna, że... wyobraź sobie, pewnie kiedyś widziałeś okrąg.
- Grupa podstawowa okręgu w dowolnym punkcie jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych z dodawaniem.
- Stanie w miejscu reprezentuje 0.
- $n$  okrążeń zgodnie z ruchem wskazówek zegara reprezentuje liczbę  $n$ .
- $n$  okrążeń przeciwnie do ruchu wskazówek zegara reprezentuje liczbę  $-n$ .

# Innowacje HoTT

- Homotopiczna interpretacja teorii typów, mocno wspomagająca wyobraźnię zarówno w rozumowaniu, jak i pozwalająca dogłębnie zrozumieć różne detale teorii typów.
- Aksjomat uniwalencji ( $A \simeq B$ )  $\simeq$  ( $A = B$ ), który głosi, że rzeczy mające tę samą strukturę są identyczne. Rozwiązuje to odwieczny problem nieformalnego utożsamiania poprzez nadużycie języka.
- Wyższe typy induktywne, pozwalające w teorii typów zdefiniować wiele niemożliwych dotychczas obiektów, np. typy ilorazowe, konstruktywnie rozwiązać wiele problemów, które dotychczas wymagały rozumowań klasycznych oraz wyrazić pojęcia czysto logiczne z niemożliwą wcześniej w teorii typów precyzją.

# Innowacje HoTT w przykładach 1

- Dlaczego w teorii typów (np. w rachunku konstrukcji) nie da się udowodnić, że dla każdego typu  $A$  i elementu  $x : A$  oraz dowodu równości  $p : x = x$  zachodzi  $p = refl_x$ ?

# Innowacje HoTT w przykładach 2

- Niech typ  $\mathbb{N}$  będzie zdefiniowany przez następujące reguły:
- Niech  $\text{nat} : \equiv 0 \mid S \text{ nat}$
- Niech  $\text{nat}' : \equiv 0' \mid S' \text{ nat}'$

## Innowacje HoTT w przykładach 3

### Theorem

$$\prod (A : \mathcal{U}) (B : A \rightarrow \mathcal{U}) (R : \prod x : A, B\ x \rightarrow \mathcal{U}), \\ (\prod x : A, \sum y : B\ x, R\ x\ y) \rightarrow \\ \sum f : (\prod x : A, B\ x), \prod x : A, R\ x\ (f\ x)$$

- wuut

# Pomysły

- Hierarchia n-typów: unit, funkcje sortujące, pusty, zbiory, grupoidy, okrąg, uniwersum.



wut

