Rozwiązania zadań z logiki klasycznej

Zeimer

Zad. 1 Która z poniższych formuł jest semantycznie równoważna formule $p \to q \vee r$?

Rozwiązanie: najpierw musmy ustalić, co autor miał na myśli pisząc "semantycznie równoważna". Przyjmijmy, że zdania p i q są semantycznie równoważne, co będziemy zapisywać $p \equiv q$, gdy $\vdash p \leftrightarrow q$.

Na mocy równoważności $p \to q \equiv \neg p \vee q$ oraz praw de Morgana i oznaczając naszą formułę gwiazdką $(*)$ mamy $(*) \equiv p \to q \vee r \equiv \neg p \vee q \vee r$. Teraz wystarczy podobnie przekształcić poniższe zdania:

(a) $q \vee (\neg p \vee r) \equiv \neg p \vee q \vee r$

(b) $q \wedge \neg r \to p \equiv \neg(q \wedge \neg r) \vee p \equiv \neg q \vee \neg\neg r \vee p \equiv p \vee \neg q \vee r$

(c) $p \wedge \neg r \to q \equiv \neg(p \wedge \neg r) \vee q \equiv \neg p \vee \neg\neg r \vee q \equiv \neg p \vee q \vee r$

(d) $\neg q \wedge \neg r \to p \equiv \neg(\neg q \wedge \neg r) \vee p \equiv \neg\neg q \vee \neg\neg r \vee p \equiv p \vee q \vee r$

Zdania (a) oraz (c) mają taką samą postać jak $(*)$, są więc jej równoważne, zaś (b) oraz (d) mają inną postać.

Dla wartościowania $\sigma(p) = \sigma(q) = \sigma(r) = 0$ mamy $\hat{\sigma}((*)) = 1$, ale $\hat{\sigma}((\text{d})) = 0$, zatem $(*)$ i (d) nie są równoważne.

Podobnie dla wartościowania $\sigma(p) = 0, \sigma(q) = 1, \sigma(r) = 0$ mamy $\hat{\sigma}((*)) = 1$, ale $\hat{\sigma}((\text{b})) = 0$, a zatem $(*)$ i (b) nie są równoważne.

Zad. 2 Czy spełnialna jest formuła $(p \to q) \vee (q \to r)$?
Rozwiązanie: rozważmy dowolne wartościowanie σ. Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. Jeżeli $\sigma(q) = 0$, to wtedy $\hat{\sigma}(q \to r) = 1$, a zatem $\hat{\sigma}((p \to q) \vee (q \to r)) = 1$

2. Jeżeli zaś $\sigma(q) = 1$, to mamy $\hat{\sigma}(p \to q) = 1$, a więc $\hat{\sigma}((p \to q) \vee (q \to r)) = 1$

Wobec tego formuła $(p \to q) \vee (q \to r)$ jest tautologią, a zatem jest spełnialna.

Zad. 3 Sprawdź, czy $(\exists x, \varphi) \wedge (\exists x, \psi) \implies (\exists x, \varphi \wedge \psi)$ jest tautologią.

Rozwiązanie: nie jest. Niech $\varphi(n) :\equiv$ "n jest parzyste" i niech $\psi(n) :\equiv$ "n jest nieparzyste". 0 i 1 świadczą o tym, że obie przesłanki implikacji są spełnione. Wobec tego gdyby powyższe zdanie było tautologią, to wtedy istniałaby liczba naturalna, która jest jednocześnie parzysta i nieparzysta, a tak nie jest. Mamy sprzeczność, a zatem powyższa formuła nie jest tautologią.

Zad. 4 Rozpatrzmy formułę $\varphi :\equiv \forall x \forall y, Q(g(x,y), g(y,y), z)$. Chcemy takie modele M i M' oraz wartościowania I oraz I', że $M \models_I \varphi$, ale $M' \not\models_{I'} \varphi$.

Idea jest prosta: w jednym modelu Q będzie zawsze prawdziwe, a w drugim zawsze fałszywe. Zanim przystąpimy do konstrukcji modeli zauważmy, że nasz zbiór symboli funkcyjnych to $F = \{g\}$, zbiór symboli relacyjnych to $R = \{Q\}$, zaś zbiór zmiennych to $V = \{x, y, z\}$. Uwaga: będziemy używać whitebookowej notacji $I_x^a(y) :\equiv \begin{cases} I(y), x \neq y \\ a, x = y \end{cases}$.

Robimy model M. Niech $A = \{*\}$ będzie uniwersum modelu. Funkcję g zinterpretujemy jako $g^M :\equiv \lambda x.*$, zaś relację Q jako $Q^M :\equiv \{(*,*,*)\}$. Niech $I(\_) = *$ będzie wartościowaniem.

Z definicji relacji $\models$ mamy $M \models_I \forall x \forall y, Q(g(x,y), g(y,y), z) \equiv$ dla każdego $a \in A$ zachodzi $M \models_I \forall y, Q(g(x,y), g(y,y), z)[I_x^a] \equiv$ dla każdego $a, b \in A$ zachodzi $M \models_I Q(g(x,y), g(y,y), z)[(I_x^a)_y^b]$. Oczywiście musi być $a = b = *$, a zatem $(I_x^a)_y^b = I$. Wobec tego $M \models_I Q(g(x,y), g(y,y), z)[(I_x^a)_y^b] \equiv M \models_I Q(g(x,y), g(y,y), z)[I] \equiv (g^M(x,y)[I], g^M(y,y)[I], z^M[I]) \in Q^M \equiv ((\lambda x.*)(*,*), (\lambda x.*)(*,*), *) \in \{(*,*,*)\} \equiv (*,*,*) \in \{(*,*,*)\}$, co jest prawdą, a zatem faktycznie $M \models_I \forall x \forall y, Q(g(x,y), g(y,y), z)$

Robimy model M'. Niech $A = \{*\}$ będzie uniwersum modelu. Funkcję g interpretujemy tak jako poprzednio jako $g^{M'} :\equiv \lambda x.*$ i używamy takiej samej waluacji $I'(\_) = *$, ale relację Q tym razem interpretujemy jako $Q^{M'} :\equiv \emptyset$. Rozumując jak poprzednio dochodzimy do wniosku, że $M' \models_{I'} \forall x \forall y, Q(g(x,y), g(y,y), z) \equiv (*,*,*) \in \emptyset$, co nie jest prawdą, a zatem $M' \not\models_{I'} \forall x \forall y, Q(g(x,y), g(y,y), z)$