Computability Logic

Zeimer

12 czerwca 2018

Słabe punkty logik

- Logika klasyczna: każda maszyna Turinga kończy pracę lub nie... ale czy da się napisać program (albo zbudować maszynę), która będzie to rozstrzygać? Potrzeba logiki intuicjonistycznej.
- Logika intuicjonistyczna: jeżeli mam 10 zł, to mogę kupić kebaba. Wobec tego za 10 zł mogę kupić dowolną ilość kebabów. Potrzeba logiki liniowej.
- Logika liniowa: być może w Smoleńsku był zamach. Potrzeba logiki modalnej.
- Logika modalna: zawsze lubię placki, więc jutro lubię placki. Potrzeba logiki temporalnej.
- Logika temporalna nie jest bynajmniej logicznym zbawicielem.

Idee stojące za logikami

Jak widać, za każdą logiką stoi jakaś idea, do której ta logika się ogranicza, odrzucając (przynajmniej częściowo) inne.

- Logika klasyczna — prawda.
- Logika intuicjonistyczna — obliczenia.
- Logika liniowa — zasoby.
- Logiki modalne — modalności.
- Logiki temporalne — czasy.

Być jak Sauron

- Rodzi się naturalne pytanie: czy da się stworzyć Jedyny Pierścień, który będzie rządził innymi?
- W sumie moglibyśmy zsumować wszystkie wymienione wyżej logiki i gitara, c'nie?
- Nie do końca, bo musimy jeszcze ustalić, jakie są zależności między różnymi spójnikami, np. liniową implikacją i modalnościami.
- Jeżeli pozbędziemy się idei modalności i czasu, to pewien Gruzin nazwiskiem Japaridze twierdzi, że udało mu się zbudować Jedyny Pierścień.

Semantyka ponad składnią

- Skoro naiwne podejście składniowe ("wrzućmy do jednego wora spójniki z różnych logik i zobaczmy, co wyjdzie") nie zadziała, to pozostaje nam podejście semantyczne.
- Należy zaznaczyć, że Japaridze uważając semantykę za ważniejszą od składni popełnia błąd — semantyka i składnia są równie istotne.

Retoryka i prawda

- Logikę można postrzegać jako pewną grę: oto dwóch retorów przerzuca się argumentami, próbując dowieść swoich racji.
- Jeżeli przyjmiemy, że podzielają oni pewne standardy dotyczące tego, jakie argumenty są przekonujące, to możemy powiedzieć, że zdanie jest prawdziwe, gdy w odpowiadającej mu grze jeden z retorów zawsze jest w stanie przekonać drugiego do swojego zdania niezależnie od tego, jakich ten użyje kontrargumentów.

Obliczenia interaktywne

- Obliczenia klasycznie rozumiane dotyczą funkcji, tj. maszyna dostaje coś na wejściu i ma zwrócić na wyjściu odpowiedź.
- Nie odpowiada to wielu sytuacjom spotykanym w codziennym życiu, np. dialog użytkownika z serwerem.
- Można wprawdzie modelować takie sytuacje za pomocą funkcji, ale daje to marne efekty. Np. serwer nie staje się wolniejszy wraz z każdym zapytaniem, co znaczy, że jego odpowiedzi nie są wynikami funkcji zależącej od historii interakcji z użytkownikiem.
- Jest tak dlatego, że obliczanie funkcji charakteryzuje się niskim poziomem interaktywności — interakcja sprowadza się tu do jednego zapytania i jednej odpowiedzi.

Obliczenia interaktywne 2

- Obliczenia interaktywne również można postrzegać jako pewien rodzaj gry.
- Jeden z graczy podaje na wejściu swoje zapytanie, a drugi oblicza odpowiedź. Każdy z nich może korzystać z poprzednich zapytań i odpowiedzi.
- Możemy powiedzieć, że problem jest obliczalny, jeżeli w odpowiadającej mu grze gracz liczący ma strategię, która zawsze zwraca poprawne rozwiązanie problemu, niezależnie od tego, jakie dane drugi gracz poda na wejściu.
- Zauważmy, że zdania logiki klasycznej są specjalnym przypadkiem problemów obliczeniowych o zerowym stopniu interakcji — są prawdą lub fałszem i nie trzeba tu nic liczyć.

Game semantics

- Odpowiednią semantyką dla naszej logiki są zatem gry.
- Jednym z graczy w naszych grach będzie maszyna, reprezentująca wykonywanie obliczeń. Drugim będzie środowisko, którego celem będzie uprzykrzanie maszynie liczenia przez zadawanie głupich pytań i podawanie dziwnych danych.
- Aby całość nie była oszukana, nakładamy na maszynę obowiązek grania jedynie według strategii algorytmicznych. Środowisko może stosować dowolne strategie.

Game semantics 2

- Teoria gier, jako studium kooperacji i konfliktów, bardzo przydatne w ekonomii, może wydawać się dobrym narzędziem do myślenia o świecie rzeczywistym.
- Faktycznie, gry o charakterze formalnym dobrze opisują różne pojedyncze zjawiska zachodzące w świecie.
- Japaridze myli się jednak twierdząc, że logika jest najpełniejszym, spójnym, naturalnym, adekwatnym i wygodnym narzędziem do kierowania swoimi poczynaniami w życiu.

Dualność: problemy i zasoby

- A co z zasobami?
- Nasze gry możemy interpretować jako problemy obliczeniowe, które maszyna musi rozwiązać.
- Jeżeli maszyna rozwiązuje problem, to środowisko może się jej przyglądać i wyciągać wnioski z tego procederu.
- Podobnie gdybyśmy zamienili graczy stronami i to środowisko musiało rozwiązać problem, maszyna mogłaby skorzystać z tego rozwiązania.
- Prowadzi nas to do sformułowania pewnej dualności: to co dla jednego z graczy jest problemem, dla drugiego gracza jest zasobem.

CoL i inne logiki

- Przez skupienie się na ideach prawdy, obliczeń i zasobów CoL jest powiązana z logikami klasyczną, intuicjonistyczną i liniową.
- CoL jest konserwatywnym rozszerzeniem logiki klasycznej.
- Pewien fragment CoL jest podobny do logiki liniowej, ale występują różnie. Ogólnie zdania logiki afinicznej są słuszne w CoL, ale nie na odwrót.
- Pewien fragment CoL jest bardzo podobny do logiki intuicjonistycznej, ale występują różnice.
- Wynika to z różnego podejścia tych logik: semantycznego w przypadku CoL i syntaktycznego w przypadku logiki liniowej oraz intuicjonistycznej.

Ekumenizm logiczny

- Logika klasyczna wszystkie wystąpienia zdania P traktuje jako ten sam zasób, zaś logika liniowa każde wystąpienie P traktuje jako osobny zasób. CoL pozwala wyrazić całe spektrum możliwości.
- O ile logika klasyczna i intuicjonistyczna pozostają w konflikcie, o tyle CoL ma charakter ekumeniczny: mamy i jedno i drugie...
- ... i jeszcze więcej: w ramach bonusu CoL jest również konserwatywnym rozszerzeniem logiki IF (*independence friendly logic*).

Pojęcia

- Gra to drzewko, które nazywamy *gamestructure* (w wesołym tłumaczeniu: wydmuszkowa gra) i oznaczamy **Lr**.
- Wierzchołek drzewa to *run* (oznaczany Γ, Δ).
- Wierzchołek w skończonej odległości od korzenia to pozycja (oznaczana Φ, Ψ, Ξ, Ω).
- Wierzchołki są utożsamiane z prowadzącymi do nich ciągami ruchów. $\langle\rangle$ to pozycja pusta.
- Nazwa krawędzi (α, β, γ) to ruch.
- Nazwa krawędzi wraz z informacją o graczu, który wykonuje ruch ($\color{green}\alpha, \beta, \gamma$ dla maszyny i $\color{red}\alpha, \beta, \gamma$ dla środowiska) to kolorowy ruch. W czarno-białym świecie oznaczane $\top\alpha, \top\beta, \top\gamma$ dla maszyny i $\bot\alpha, \bot\beta, \bot\gamma$ dla środowiska.

Pojęcia 2

- *Content* to funkcja $\mathbf{Wn} : \mathbf{Lr} \to \{\top, \bot\}$. Mówi on, który gracz wygrywa grę w danej pozycji: jeśli $\mathbf{Wn}(\Gamma) = \top$, to wygrywa maszyna. W przeciwnym wypadku wygrywa środowisko.
- Gra stała (*constant game*) to para $(\mathbf{Lr}, \mathbf{Wn})$, gdzie pierwszy komponent to *gamestructure*, a drugi — *content*. Gry stałe uogólniają zdania znane z logiki klasycznej.
- Gra stała jest *strict*, gdy dla każdej pozycji co najwyżej jeden gracz możę wykonać ruch. Gra, która nie jest *strict*, jest *free*.
- Co ciekawe, większość ciekawych gier jest *free*. Motywacja: jeżeli gramy w dwie gry na raz, to ruchy w obu grach mogą być w dowolnej kolejności.
- Strategie dla gier *free* nie mogą być funkcjami z pozycji w ruchy.

Pojęcia 3

- Gra jest skończonej długości (*finite depth*) gdy długość gałęzi jest ograniczona przez liczbę $d \in \mathbb{N}$.
- Gra jest *perifinite-depth* gdy długość gałęzi jest skończona (ale może być nieograniczona).
- Gra jest skończonej szerokości (*finite breadth*), gdy ma skończoną ilość liści (pozycji końcowych).
- Gra jest skończona (*finite*), gdy ma skończoną liczbę pozycji.
- Gra elementarna (*elementary game*) to gra o głębokości 0.
- Istnieją dokładnie dwie elemenarne gry stałe: $\top$ (prawda, problem trywialny) i $\perp$ (fałsz, problem nierozwiązywalny).

Przykład

- Z niedostatku technologicznego przykład jest niewidzialny (gra odpowiadająca obliczaniu następnika).

Dlaczego obliczenia interaktywne

- Wiele problemów ma więcej niż jedno rozwiązanie, np. problem "oblicz liczbę większą od n".
- Wiele problemów może na tym samym poziomie mieć różny kolor pozycji. Np. dla niektórych wejść funkcja częściowa jest niezdefiniowana.
- Więcej niż 2 poziomy to gry bardziej interaktywne.

Pojęcia 4

- Gry nie muszą być stałe — mogą zależeć od zmiennych. Zapis: $G(x)$.
- Jeżeli $G(x)$ jest grą, x zmienną, a c stałą, to $G(c)$ jest instancją gry $G(x)$.
- Gra $G(x)$ jest elementarna, jeżeli wszystkie jej instancje są elementarne.
- Gry stałe to np. szachy (bez remisów), warcaby etc.
- Gry niestałe to gry karciane — zależą one od początkowej permutacji kart.
- Pozycja jest unilegalna (*unilegal*) gdy jest legalna we wszystkich instancjach gry.
- Gra $G(x)$ jest unistrukturalna (*unistructural*) gdy wszystkie pozycje wszystkich jej instancji są unilegalne. Intuicja: dla każdej stałej c drzewko $G(c)$ ma taki sam kształt.

Pojęcia 5

- Gra stała jest statyczna, gdy zwycięstwo zależy od strategii, a nie od szybkości. Jeżeli gra nie jest statyczna, to jest dynamiczna.
- Gra jest statyczna, jeżeli wszystkie jej instancje są statyczne.
- Wszystkie operacje na grach, z którymi się zapoznamy, zachowują statyczność.

Teza (Church-Turing-Japaridze)

- Gry statyczne dobrze formalizują intuicyjne pojęcie interaktywnego (niezależnego od szybkości) problemu obliczeniowego.
- Istnienie strategii wygrywającej dobrze formalizuje intuicyjne pojęcie algorytmicznego rozwiązania interaktywnego problemu obliczeniowego.

Bibliografia

- Niestety zabrakło mi czasu, żeby dokończyć prezentację. Odsyłam w związku z tym do poniższej publikacji:
- A Survey of Computability Logic (gdyby komuś nie działał link, to dostępna jest pod adresem https://arxiv.org/pdf/1612.04513.pdf)