

Rozwiązania zadań z logiki klasycznej

Wojciech Kołowski

Zad. 1 Która z poniższych formuł jest semantycznie równoważna formule $p \rightarrow q \vee r$?

Rozwiązanie: najpierw musimy ustalić, co autor miał na myśli pisząc “semantycznie równoważna”. Przyjmijmy, że zdania p i q są semantycznie równoważne, co będziemy zapisywać $p \equiv q$, gdy $\vdash p \leftrightarrow q$.

Na mocy równoważności $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ oraz praw de Morgana i oznaczając naszą formułę gwiazdką $(*)$ mamy $(*) \equiv p \rightarrow q \vee r \equiv \neg p \vee q \vee r$. Teraz wystarczy podobnie przekształcić poniższe zdania:

$$(a) \quad q \vee (\neg p \vee r) \equiv \neg p \vee q \vee r$$

$$(b) \quad q \wedge \neg r \rightarrow p \equiv \neg(q \wedge \neg r) \vee p \equiv \neg q \vee \neg \neg r \vee p \equiv p \vee \neg q \vee r$$

$$(c) \quad p \wedge \neg r \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg r) \vee q \equiv \neg p \vee \neg \neg r \vee q \equiv \neg p \vee q \vee r$$

$$(d) \quad \neg q \wedge \neg r \rightarrow p \equiv \neg(\neg q \wedge \neg r) \vee p \equiv \neg \neg q \vee \neg \neg r \vee p \equiv p \vee q \vee r$$

Zdania (a) oraz (c) mają taką samą postać jak $(*)$, są więc jej równoważne, zaś (b) oraz (d) mają inną postać.

Dla wartościowania $\sigma(p) = \sigma(q) = \sigma(r) = 0$ mamy $\hat{\sigma}((*)) = 1$, ale $\hat{\sigma}((d)) = 0$, zatem $(*)$ i (d) nie są równoważne.

Podobnie dla wartościowania $\sigma(p) = 0, \sigma(q) = 1, \sigma(r) = 0$ mamy $\hat{\sigma}((*)) = 1$, ale $\hat{\sigma}((b)) = 0$, a zatem $(*)$ i (b) nie są równoważne.

Zad. 2 Czy spełnialna jest formuła $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$?

Rozwiązanie: rozważmy dowolne wartościowanie σ . Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. Jeżeli $\sigma(q) = 0$, to wtedy $\hat{\sigma}(q \rightarrow r) = 1$, a zatem $\hat{\sigma}((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)) = 1$
2. Jeżeli zaś $\sigma(q) = 1$, to mamy $\hat{\sigma}(p \rightarrow q) = 1$, a więc $\hat{\sigma}((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)) = 1$

Wobec tego formuła $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$ jest tautologią, a zatem jest spełnialna.

Zad. 3 Sprawdź, czy $(\exists x, \phi) \wedge (\exists x, \psi) \implies (\exists x, \phi \wedge \psi)$ jest tautologią.

Rozwiązanie: nie jest. Niech $\phi(n) :\equiv$ “ n jest parzyste” i niech $\psi(n) :\equiv$ “ n jest nieparzyste”. 0 i 1 świadczą o tym, że obie przesłanki implikacji są spełnione. Wobec tego gdyby powyższe zdanie było tautologią, to wtedy istniałaby liczba naturalna, która jest jednocześnie parzysta i nieparzysta, a tak nie jest. Mamy sprzeczność, a zatem powyższa formuła nie jest tautologią.

Zad. 4 Rozpatrzmy formułę $\phi := \forall x \forall y, Q(g(x, y), g(y, y), z)$. Chcemy takie modele M i M' oraz wartościowania I oraz I' , że $M \models_I \phi$, ale $M' \not\models_{I'} \phi$.

Idea jest prosta: w jednym modelu Q będzie zawsze prawdziwe, a w drugim zawsze fałszywe. Zanim przystąpimy do konstrukcji modeli zauważmy, że nasz zbiór symboli funkcyjnych to $F = \{g\}$, zbiór symboli relacyjnych to $R = \{Q\}$, zaś zbiór zmiennych to $V = \{x, y, z\}$. Uwaga: będziemy

używać whitebookowej notacji $I_x^a(y) := \begin{cases} I(y), & x \neq y \\ a, & x = y \end{cases}$.

Robimy model M . Niech $A = \{*\}$ będzie uniwersum modelu. Funkcję g zinterpretujemy jako $g^M := \lambda x. *$, zaś relację Q jako $Q^M := \{(*, *, *)\}$. Niech $I(_) = *$ będzie wartościowaniem.

Z definicji relacji \models mamy $M \models_I \forall x \forall y, Q(g(x, y), g(y, y), z) \equiv$ dla każdego $a \in A$ zachodzi $M \models_I \forall y, Q(g(x, y), g(y, y), z)[I_x^a] \equiv$ dla każdego $a, b \in A$ zachodzi $M \models_I Q(g(x, y), g(y, y), z)[(I_x^a)_y^b]$. Oczywiście musi być $a = b = *$, a zatem $(I_x^a)_y^b = I$. Wobec tego $M \models_I Q(g(x, y), g(y, y), z)[(I_x^a)_y^b] \equiv M \models_I Q(g(x, y), g(y, y), z)[I] \equiv (g^M(x, y)[I], g^M(y, y)[I], z^M[I]) \in Q^M \equiv ((\lambda x. *)(*, *), (\lambda x. *)(*, *), *) \in \{(*, *, *)\} \equiv (*, *, *) \in \{(*, *, *)\}$, co jest prawdą, a zatem faktycznie $M \models_I \forall x \forall y, Q(g(x, y), g(y, y), z)$

Robimy model M' . Niech $A = \{*\}$ będzie uniwersum modelu. Funkcję g interpretujemy tak jako poprzednio jako $g^{M'} := \lambda x. *$ i używamy takiej samej walucji $I'(_) = *$, ale relację Q tym razem interpretujemy jako $Q^{M'} := \emptyset$. Rozumując jak poprzednio dochodzimy do wniosku, że $M' \models_{I'} \forall x \forall y, Q(g(x, y), g(y, y), z) \equiv (*, *, *) \in \emptyset$, co nie jest prawdą, a zatem $M' \not\models_{I'} \forall x \forall y, Q(g(x, y), g(y, y), z)$