# Rozwiązania zadań z logik modalnych

Wojciech Kołowski

Zad. 1 Dla danej struktury Kripkego $K = (S, R, L)$ i poniższych formuł wyznacz zbiór światów, w których formuła jest lokalnie spełniona.

Rozwiązanie: zacznijmy od interpretacji reguł lokalnej spełnialności, żeby było nam łatwo odczytywać je z obrazka.

- Dla $\Box$ mamy regułę $K, s \models \Box\varphi$ wtw $(\forall s, s' \in S)(R(s, s') \implies K, s' \models \varphi)$. Językiem obrazkowym: wszystkie strzałki wychodzące z $s$ prowadzą do światów, w których $\varphi$ jest spełnione.
- Dla $\Diamond$ mamy regułę $K, s \models \Diamond\varphi$ wtw $(\exists s' \in S)(R(s, s') \wedge K, s' \models \varphi)$. Językiem obrazkowym: z $s$ wychodzi strzałka do jakiegoś świata, w którym $\varphi$ jest spełnione.
- $\vee$ interpretujemy jako sumę zbiorów światów, $\wedge$ jako przecięcie zbiorów światów, zaś $\neg$ jako dopełnienie zbiorów światów.

Poczyńmy teraz pewne spostrzeżenia, które pomogą nam przekształcać formuły do postaci bardziej przyjaznej obrazkowi.

- Pierwsze głosi, że $p \implies q \equiv \neg p \vee q$. Wynika ono wprost z definicji relacji $\models$ — obydwa te zdania są spełnione, gdy $K, s \not\models \varphi$ lub $K, s \models \psi$.
- Drugie spotrzeżenie głosi, że $\neg\neg p \equiv p$ — również wynika ono wprost z definicji relacji $\models$ (o ile nasza metalogika jest klasyczna — chyba?).
- Mamy też dualności $\neg\Box\varphi \equiv \Diamond\neg\varphi$ oraz $\neg\Diamond\varphi \equiv \Box\neg\varphi$.

Teraż możemy przerysować obrazek w nieco bardziej czytelny sposób. W naszym modelu mamy:

$$
\begin{gathered}
S = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\} \\
R = \{v_0v_1, v_1v_0, v_1v_1, v_0v_2, v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_4\} \\
L(v_0) = L(v_4) = \{p, q\} \\
L(v_1) = \emptyset \\
L(v_2) = \{q\} \\
L(v_3) = \{p\}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{tikzcd}
v_0 = pq \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr] & & v_1 = \emptyset \arrow[loop above] \arrow[dl] \\
& v_2 = q \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
v_3 = p \arrow[rr] & & v_4 = pq \arrow[loop below]
\end{tikzcd}
$$

Po przekształceniu naszych zdań za pomocą powyższych równoważności możemy łatwo odczytać z obrazka zbiory światów, w których są lokalnie spełnione.

(a) $\Box p \implies \Box\Diamond p \equiv \neg\Box p \vee \Box\Diamond p \equiv \Diamond\neg p \vee \Box\Diamond p$

| | |
|---|---|
| $p$ | $v_0, v_3, v_4$ |
| $\neg p$ | $v_1, v_2$ |
| $\Diamond\neg p$ | $v_0, v_1$ |
| $\Diamond p$ | $v_1, v_2, v_3, v_4$ |
| $\Box\Diamond p$ | $v_0, v_2, v_3, v_4$ |
| $\Box p \implies \Box\Diamond p$ | $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$ |

(b) $\Box\Diamond p \implies p \equiv \neg\Box\Diamond p \vee p \equiv \Diamond\Box\neg p \vee p$

| | |
|---|---|
| $\Box\neg p$ | $v_0$ |
| $\Diamond\Box\neg p$ | $v_1$ |
| $\Box\Diamond p \implies p$ | $v_0, v_1, v_3, v_4$ |

(c) $\Diamond\Diamond(p \wedge q)$

| | |
|---|---|
| $q$ | $v_0, v_2, v_4$ |
| $p \wedge q$ | $v_0, v_4$ |
| $\Diamond(p \wedge q)$ | $v_1, v_2, v_3, v_4$ |
| $\Diamond\Diamond(p \wedge q)$ | $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$ |

(d) $p \implies \Box p \vee \Diamond(p \implies q) \equiv \neg p \vee \Box p \vee \Diamond(\neg p \vee q)$

| | |
|---|---|
| $\Box p$ | $v_2, v_3, v_4$ |
| $\neg p \vee q$ | $v_0, v_1, v_2, v_4$ |
| $\Diamond(\neg p \vee q)$ | $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$ |
| $p \implies \Box p \vee \Diamond(p \implies q)$ | $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$ |

(e) $\Diamond\Box\neg q \implies \Diamond\Diamond p \equiv \neg\Diamond\Box\neg q \vee \Diamond\Diamond p \equiv \Box\Diamond q \vee \Diamond\Diamond p$

| | |
|---|---|
| $\Diamond q$ | $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$ |
| $\Box\Diamond q$ | $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$ |
| $\Diamond\Box\neg q \implies \Diamond\Diamond p$ | $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$ |

(f) $\Box p \wedge \Box\neg q$ — ponieważ $\Diamond q$ jest spełniona wszędzie, to $\Box\neg q \equiv \neg\Diamond q$ nie jest spełniona nigdzie, a zatem cała formuła $\Box p \wedge \Box\neg q$ także nie jest spełniona w żadnym świecie.

Zad. 2 Chcemy strukturę $K = (S, R, L)$, gdzie $S$ i $R$ są jak w poprzednim zadaniu, ale $L$ ma być takie, żeby formuła $\Diamond p \implies \Box q$ była globalnie spełniona.

Rozwiązanie: aby implikacja była globalnie spełniona wystarczy aby jej konkluzja była globalnie spełniona. Niech więc $S = \{v_0\}, R = \{v_0 v_0\}, L(\_) = \{q\}$. Wtedy $q$ jest spełnione wszędzie, czyli $\Box q$ także jest spełnione wszędzie, a zatem cała formuła $\Diamond p \implies \Box q$ także jest spełniona wszędzie.

Zad. 3 Chcemy strukturę $K = (S, R, L)$, gdzie $S$ i $R$ są jak w poprzednim zadaniu, ale $L$ ma być takie, żeby formuła $\neg(\Diamond p \vee \Box\neg p)$ była lokalnie spełniona.

Rozwiązanie: zauważmy, że $\Diamond p \equiv \neg\Box\neg p$, a zatem $\neg(\Diamond p \vee \Box\neg p) \equiv \neg(\neg\Box\neg p \vee \Box\neg p)$ — nasza formuła to zaprzeczenie prawa wyłączonego środka, które jest globalnie spełnione, a zatem nie może być lokalnie spełniona w żadnym świecie.

Zad. 4 Chcemy skonstruować strukturę $K = (S, R, L)$, w której lokalnie spełnione jest zdanie $\Box p \wedge \Diamond\Box(q \wedge \Diamond p) \wedge (p \implies \neg q)$.

Rozwiązanie: będziemy konstruować $K$ rozważając każdy człon koniunkcji z osobna idąc od prawej do lewej. Zacznijmy od świata $v_0$, w którym mamy $L(v_0) = \emptyset$. W $v_0$ spełnione są $\neg p$ oraz $\neg q$, a zatem spełnione jest także zdanie $p \implies \neg q$.

Teraz dorzućmy świat $v_1$, dla którego $L(v_1) = \{p, q\}$ i który ma ścieżkę do samego siebie. W $v_1$ spełnione jest $q$ oraz $\Diamond p$, a ponieważ możemy z niego przejść tylko do niego samego, to spełnione jest także $\Box(q \wedge \Diamond p)$. Jeżeli podłączymy do $v_0$ świat $v_1$, to w $v_0$ spełniona będzie formuła $\Diamond\Box(q \wedge \Diamond p)$.

Ponieważ z $v_0$ możemy dojść tylko do $v_1$, a tam lokalnie spełnione jest $p$, to w $v_0$ lokalnie spełnione jest $\Box p$. Voilà! Ostatecznie nasza struktura prezentuje się tak:

$$\begin{gathered} S = \{v_0, v_1\} \\ R = \{v_0 v_1, v_1 v_1\} \\ L(v_0) = \emptyset \\ L(v_1) = \{p, q\} \end{gathered}$$

$$\begin{tikzcd} v_0 = \emptyset \arrow[d] \\ v_1 = pq \arrow[loop below] \end{tikzcd}$$

Zad. 5

(a) Chcemy pokazać $\vdash_K p \implies \Diamond\Diamond\Diamond p$.

Przypomnijmy, że w logice $K$ nie ma żadnych ograniczeń na możliwe ramy. Jeżeli wyobrazimy sobie nasze zdanie, to mówi ono, że w każdym świecie $p$ nie zachodzi lub istnieje ścieżka długości 3 prowadząca do świata, w którym $p$ zachodzi — jest to bardzo podejrzane. Rozważmy model $K = (S, R, L)$, gdzie $S = \{v\}$, $R = \emptyset$ oraz $L(v) = \{p\}$. Ponieważ w $v$ zachodzi $p$, to poprzednik implikacji jest spełniony. Ponieważ $v$ nie jest połączony z żadnym innym światem, to następnik implikacji nie jest spełniony, a zatem $\nvdash_K p \implies \Diamond\Diamond\Diamond p$.

(b) Chcemy pokazać $\vdash_T p \implies \Diamond\Diamond\Diamond p$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ass}
\UnaryInfC{$p \vdash_T p$}
\RightLabel{$R_\Diamond$}
\UnaryInfC{$p \vdash_T \Diamond p$}
\RightLabel{$R_\Diamond$}
\UnaryInfC{$p \vdash_T \Diamond\Diamond p$}
\RightLabel{$R_\Diamond$}
\UnaryInfC{$p \vdash_T \Diamond\Diamond\Diamond p$}
\RightLabel{$R_\implies$}
\UnaryInfC{$\vdash_T p \implies \Diamond\Diamond\Diamond p$}
\end{prooftree}
$$

(c) Chcemy pokazać $\vdash_K \Diamond(p \vee q) \implies \Diamond p \vee \Diamond q$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ass}
\UnaryInfC{$p \vdash_K p, q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ass}
\UnaryInfC{$q \vdash_K p, q$}
\RightLabel{$L_\vee$}
\BinaryInfC{$p \vee q \vdash_K p, q$}
\RightLabel{$L_\Diamond$}
\UnaryInfC{$\Diamond(p \vee q) \vdash_K \Diamond p, \Diamond q$}
\RightLabel{$R_\vee$}
\UnaryInfC{$\Diamond(p \vee q) \vdash_K \Diamond p \vee \Diamond q$}
\RightLabel{$R_\implies$}
\UnaryInfC{$\vdash_K \Diamond(p \vee q) \implies \Diamond p \vee \Diamond q$}
\end{prooftree}
$$

(d) Chcemy pokazać $\vdash_T \Box(p \vee q) \implies \Box p \vee \Box q$.

Zdanie to jest bardzo podejrzane. Jego poprzednik głosi, że z każdego świata możemy dojść do takiego, gdzie spełnione jest $p$ lub $q$, zaś następnik, że z każdego świata możemy dojść do świata spełniającego $p$ lub do świata spełniającego $q$. Kontrprzykład nasuwa się sam:

$$
\begin{tikzcd}
v_0 = p \arrow[loop above] \arrow[r, leftrightarrow] & v_1 = q \arrow[loop above]
\end{tikzcd}
$$

W powyższym modelu zdanie $\Box(p \vee q)$ jest globalnie spełnione, ale zdania $\Box p$ i $\Box q$ nie są spełnione nigdzie, więc zdania $\Box(p \vee q) \implies \Box p \vee \Box q$ nie da się dowieść w logice $T$.

(e) Chcemy pokazać $\vdash_T \Box p \implies \Box\Diamond\Box p$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$p \vdash_T \Box p$}
\RightLabel{$R_\Diamond$}
\UnaryInfC{$p \vdash_T \Diamond\Box p$}
\RightLabel{$R_\Box$}
\UnaryInfC{$\Box p \vdash_T \Box\Diamond\Box p$}
\RightLabel{$R_\implies$}
\UnaryInfC{$\vdash_T \Box p \implies \Box\Diamond\Box p$}
\end{prooftree}
$$

Próba zastosowania jedynych słusznych reguł zawiodła. Spróbujmy więc skonstruować model, w którym jest świat, w którym poprzednik implikacji jest spełniony, a następnik nie. Musimy pamiętać jedynie, że w logice $T$ rama musi być zwrotna.

$$\begin{tikzcd} v_0 = p \arrow[loop above] \arrow[r] & v_1 = p \arrow[loop above] \arrow[r] & v_2 = \emptyset \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Przyjrzyjmy się światowi $v_0$. Gdziekolwiek się nie ruszymy, lądujemy w świecie spełniającym $p$, a zatem w $v_0$ zachodzi $\Box p$. Nie zachodzi jednak $\Box\Diamond\Box p$: jeżeli ruszymy się do $v_1$, to gdziekolwiek byśmy nie poszli ($v_1$ lub $v_2$), zawsze możemy dojść do świata $v_2$, w którym nie zachodzi ani $p$, ani $\Box p$. Ostatecznie konkludujemy, że $\nvdash_T \Box p \implies \Box\Diamond\Box p$.

(f) Chcemy pokazać $\vdash_{S_5} \Box p \implies \Box\Diamond\Box p$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, \Box p \vdash_{S_5} \Box p}\ \text{Ass}}{p, \Box p \vdash_{S_5} \Diamond\Box p}\ R_\Diamond}{\Box p \vdash_{S_5} \Box\Diamond\Box p}\ R_\Box}{\vdash_{S_5} \Box p \implies \Box\Diamond\Box p}\ R_\implies$$