数学-数论

ZeitHaum

2023 年 4 月 26 日

目录

1　互质勾股数的生成方法

问题描述：构造以下集合：$S = \{(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)|x > y且x, y \in \mathbb{N}^+\}, S' = \{(a, b, c)|a^2 + b^2 = c^2且a, b, c \in \mathbb{N}^+\}$，求证以下两个命题：

子命题 1. 在不考虑元组内元素顺序的情况下，对于 S 中的任意元素 S_i，都有 $S_i \in S'$.

子命题 2. 在不考虑元组内元素顺序的情况下，对于 S' 中的任意元素 S'_i，都存在 $k \in \mathbb{N}^+$ 使得 $kS'_i \in S$ 注：对于 3 元组 (a, b, c)，定义 $k(a, b, c) = (ka, kb, kc)$。

1.1　证明

对于命题 1，有

$$\begin{aligned}(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 &= (x^4 + y^4 - 2x^2y^2) + 4x^2y^2\\ &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2\\ &= (x^2 + y^2)^2\end{aligned}$$

且显然 $x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2 \in \mathbb{N}^+$，于是子命题 1 得证。
对于命题 2，令 $x = b, y = c - a, k = 2y = 2(c - a)$，
根据三角形性质，显然有 $b > c - a, k\mathbb{N}^+$，
所以 $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2) \in S$.
又

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= b^2 - (c - a)^2\\ &= (c^2 - a^2) - c^2 - a^2 + 2ac\\ &= 2ac - 2a^2\\ &= ka,\end{aligned}$$

$$2xy = kb,$$

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= b^2 + (c-a)^2 \\ &= c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - 2ac \\ &= 2c^2 - 2ac \\ &= kc.\end{aligned}$$

所以 $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2) = (ka, kb, kc) \in S'$, 证毕。

1.2 启示

以上两个定理说明通过 S 的构造方法可以显示的求出所有互质的勾股数，只需枚举 x, y 求得 $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$ 再让每个数除以三个数的最大公因数即可。

2 奇数平方和

求证: 两个奇数的平方和不可能为完全平方数。
证明:
可以通过反证法证明:
假设 a, b 都为奇数，所以 c^2 为偶数。
不妨设 $a = 2p + 1, b = 2q + 1, (p, q \in \mathbb{N})$, 所以

$$a^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1$$

所以 $a^2 \bmod 4 = 1, b^2 \bmod 4 = 1$.
所以 $a^2 + b^2 \bmod 4 = 2$.
又 $a^2 + b^2 = c^2$ 是完全平方数，所以 $a^2 + b^2 \bmod 4 = 0$.
$a^2 + b^2 \bmod 4 = 2$ 和 $a^2 + b^2 \bmod 4 = 0$ 矛盾，因此得证。