数学-恒等式

ZeitHaum

2023 年 4 月 12 日

目录

1 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}\binom{n}{i}$

差分法证明，记右式为 $f(n)$，左式为 $g(n)$。

$$\begin{aligned}
f(n+1)-f(n) &= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}\binom{n+1}{i}-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}\binom{n}{i}\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}(\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1})-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}\binom{n}{i}\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}\binom{n}{i-1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}\binom{n}{n+1}\\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}+0\\
&= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{i}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}
\end{aligned}$$

通过差分将上式化为比较简单的式子，接下来处理每一项中的 $\frac{1}{i+1}$ 部分，注意到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} &= \frac{1}{i+1}\frac{n!}{(n-i)!i!}\\
&= \frac{n!}{(n-i)!(i+1)!}\\
&= \frac{(n+1)!}{(n-i)!(i+1)!}\frac{1}{n+1}\\
&= \binom{n+1}{i+1}\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

代回，得

$$
\begin{aligned}
f(n+1)-f(n) &= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} \\
&= \sum_{0}^{n+1}(-1)^i\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1} \\
&= \frac{1}{n+1}(\sum_{1}^{n+2}(-1)^{i-1}\binom{n+1}{i}-1+1) \\
&= \frac{1}{n+1}(\sum_{1}^{n+1}(-1)^{i-1}\binom{n+1}{i}+(-1)^{-1}\binom{n+1}{0}+1) \\
&= \frac{1}{n+1}(\sum_{0}^{n+1}(-1)^{i-1}\binom{n+1}{i}+1) \\
&= \frac{1}{n+1}(-\sum_{0}^{n+1}\binom{n+1}{i}(-1)^i1^{n+1-i}+1) \\
&= \frac{1}{n+1}(-(-1+1)^{n+1}+1) \\
&= \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}
$$

因此有 $f(n+1)-f(n)=g(n+1)-g(n)$.

考虑 $n=1$ 时，$f(1)=g(1)=1$.

所以 $f(n)=g(n)$。

QED.