3. Gruppteori 3. Delgrupper & sidoklasser

22 juli

1. Hitta en delgrupp av permutationsgruppen S_4 som är isomorf med "klä om strumpan"-gruppen.

2. Gruppen G består av mängden $\{e, \pi, \tau\}$ och operatorn $\star$ som uppfyller multiplikationstabellen

$\star$	e	π	τ
e	e	π	τ
π	π	τ	e
τ	τ	e	π

Hitta en isomorfi från G till en delgrupp av S_3.

3. Hitta en isomorfi från den dihedrala gruppen D_4 till en delgrupp av permutationsgruppen S_8.

Sats 3.1. **(Cayleys sats).** Varje grupp är isomorf med en delgrupp till någon permutationsgrupp S_n.

4. Låt G vara gruppen i problem 2. Visa att $f(x) = \pi$ permuterar elementen i G.

5. Bevisa Cayleys sats konstruktivt.

6. Hitta alla grupper av storlek **(a)** 3 **(b)** 4.

Definition. Låt $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ vara en delgrupp av G. För varje element a i G definierar vi *sidoklassen* $a \star H = \{a \star h_1, a \star h_2, \ldots, a \star h_n\}$.

7. Vilka är sidoklasserna till delgruppen av rotationer i den dihedrala gruppen D_4?

8. Vilka är sidoklasserna till delgruppen av $(\{e, S\}, \star$ i den dihedrala gruppen D_4 om S är en specifik spegling?

9. Observera gruppen av heltal under addition. Vilka är sidoklasserna till delgruppen av tal delbara med 7?

10. Låt M vara en delgrupp till G med k element. Hur många element har $a \star M$?

11. Finns det något element som inte är i någon sidoklass?

12. Visa att om två sidoklasser båda innehåller ett visst element så sammanfaller de.

13. **(Lagranges sats).** Visa att för en ändlig grupp G och en delgrupp H måste storleken av H dela storleken av G.