4. Gruppteori 4. Lagranges sats

23 juli

Definition. Låt $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ vara en delgrupp av G. För varje element a i G definierar vi *sidoklassen* $a \star H = \{a \star h_1, a \star h_2, \ldots, a \star h_n\}$.

1. Låt M vara en delgrupp till G med k element. Hur många element har $a \star M$?

2. Finns det något element som inte är i någon sidoklass?

3. Visa att om två sidoklasser till samma delgrupp båda innehåller ett visst element så sammanfaller de.

Sats 4.1. **(Lagranges sats)** Storleken av en delgrupp delar storleken av gruppen.

4. Bevisa Lagranges sats.

5. Hitta de två delgrupperna till $\mathbb{Z}_{29}$.

6. Visa att alla grupper av primtals storlek är cykliska.

7. Visa att om storleken av två delgrupper är relativt prima så är deras snitt $\{e\}$.

Definition. **(Ordning).** *Ordningen* av ett element a är det minsta heltal n så att $a^n = e$.

8. Vad är ordningen av vardera element i "klä om strumpan"-gruppen?

9. Vilket element i permutationsgruppen S_5 har högst ordning?

10. Låt a vara ett element i gruppen av heltal modulo n under addition. Vilka möjliga ordningar kan a ha?

11. Visa att för ett element a så implicerar $a^n = e$ att ordningen av a delar talet k.

12. Visa att för ett element a i en grupp G med n stycken element så måste $a^n = e$.

Sats 4.2. **(Eulers sats).** För två positiva och relativt prima heltal a, n gäller att $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$ där $\varphi(n)$ är antalet tal mindre än eller lika med n som är relativt prima till n.

13. Visa att heltalen med en multiplikativ invers modulo n är exakt de element som är relativt prima med n.

14. Bevisa Eulers sats.

Extrauppgifter

Jobba på uppgifterna från tidigare blad. Det finns även ett blad om gruppverkan och Burnsides lemma om man önskar.