1. Gruppteori 1. Introduktion

20 juli

Definition. En *grupp* G är en mängd M tillsammans med en operator $\star$ så att:

1. För alla två element a, b i M definierar $\star$ ett element $a \star b$ som också är i M.
2. För alla tre element a, b, c i M är $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.
3. Det finns ett *identitets element* e så att för alla a i M så är $a \star e = e \star a = a$.
4. Varje element a i M har en *invers* a^{-1} så att $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$.

1. Motivera att kraven för en grupp uppnås av **(a)** heltalen under addition **(b)** rotationer av en hexagon som bevarar den under sammansättning **(c)** drag på en Rubiks kub under sammansättning.

2. Motivera att kraven på en grupp **inte** uppnås av **(a)** udda heltalen under addition **(b)** heltalen under multiplikation **(c)** heltalen under operationen $a \star b = a \cdot b + 1$.

3. Mängden M består av "klä om strumpan"-operationer:

1. Lämna allt som det är.
2. Ta av och klä på andra foten.
3. Ta av, vänd ut och in och klä på samma fot.
4. Ta av, vänd ut och in och klä på andra foten.

Från början har man en strumpa på en av fötterna och man har två fötter. Visa att M under sammansättning av operationerna är en grupp!

4. Låt mängden $M = \{e, a, b\}$ och operatorn $\star$ uppfylla multiplikationstabellen

$\star$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	b
b	b	a	e

Är $G = (M, \star)$ en grupp?

5. **(Dihedrala grupper).** Den *dihedrala* gruppen D_n är alla rotationer och speglingar av en regelbunden n-hörning som avbildar den på sig själv. I den dihedrala gruppen D_4:

(a) Vilka är de fyra rotationerna i gruppen?

(b) Vilka är de fyra speglingarna?

(c) Vilket är identitetselementet?

6. **(Dihedrala grupper).** Skapa en multiplikationstabell för elementen i D_3!

Definition. Låt a vara ett element i en grupp och i ett heltal. Då är

$$a^i = \begin{cases} \underbrace{a\star\cdots\star a}_{i \text{ gånger}} & \text{om } i > 0 \\ \underbrace{a^{-1}\star\cdots\star a^{-1}}_{i \text{ gånger}} & \text{om } i < 0 \\ e & \text{om } i = 0 \end{cases}$$

7. **(Dihedrala grupper).** Låt S vara en bestämd spegling och R vara den "kortaste" rotationen medurs i D_n. Kan alla element i D_n skrivas på antingen formen R^i eller $S\cdot R^i$ där i är ett heltal?

8. Låt a, b vara element i en grupp. Visa att $(a\star b)^{-1} = b^{-1}\star a^{-1}$.

9. **(Tavla).** Vi vill hänga en tavla med ett snöre (vars ändar är i tavlan) på två spikar. Till skillnad från vanligt, vill vi att om man tar bort någon spik (oavsett vilken) så ska tavlan ramla! Hur gör vi detta?

10. **(Tavla).** Hur gör vi om tavlan ska hänga på n spikar så att tavlan ramlar oavsett vilken spik vi tar bort?

11. Visa att om a, b, c är element i en grupp så innebär $a\star b = a\star c$ att $b = c$.

12. **(Rubiks kub).** Visa att repeterad applicering av ett godtyckligt drag på en Rubiks kub kommer leda tillbaks till var den började.

13. **(Rubiks kub).** Visa att inget drag på en Rubiks kub, om det appliceras repeterat, kommer att gå igenom varje möjlig position.

14. **(Kortlek).** Kan man göra samma slutsatser som vi gjorde om dragen på en Rubiks kuben på en blandning av en kortlek?

Extrauppgifter

15. Visa att identitetselementet är unikt.

16. Visa att varje element har exakt en invers.

17. Visa att snittet av två grupper är en grupp.

18. Hitta två grupper av samma storlek som "beter sig" annorlunda.