

4. Logik 1

17 juli

Definition. — **Påstående.** Ett påstående i logiken är något som antingen är sant eller falskt.

Definition. — **Negation.** Negationen till ett påstående är falskt när det ursprungliga påståendet är sant och vice versa. Negationen blir alltså ett eget påstående.

Definition. — **Språklig konjunktion.** En språklig konjunktion sätter ihop två påståenden och skapar ett nytt. Några vanliga är:

- “och” - Som är sann om alla påståendena är sanna
- “eller” - Som är sann om något av påståendena är sanna
- “antingen eller” - Som är sann om exakt ett av påståendena är sanna

1. Är dessa påståenden?

- a) Cirklar har inga hörn och kvadrater har 3 hörn
- b) 1, 2, 3, 4 och några andra tal
- c) Antingen är Python ett programmeringsspråk eller så är Java det

2. Är dessa påståenden sanna eller falska?

- a) Man ska vara på sitt rum från 22:00 och frukost serveras 07:00
- b) Mattekollo är inte i september eller oktober
- c) Påståenden är antingen sanna eller falska

3. Skriv ner ett påståenden som du inte vet om det är sant eller falskt.

4. Vad är negationen till “Fredrik älskar alla robotar”?

5. Kan man använda färre “inte”? Påståenden är samma om de alltid är sanna samtidigt.

- a) Det finns inga brädspel som Valentina inte älskar
- b) Inte alla jämna tal delas inte av tre
- c) $x \neq 2$ och $x \geq 2$

6. Kan man förenkla dessa påståenden?

a) x är större än 2 eller mindre än -2 och definitivt större än 3

b) Mattekollo hålls antingen i Linköping eller någon annanstans i Sverige

7. Är negationen till "Idag är tisdag och klockan är efter 8:00" att "Idag är inte tisdag och klockan är inte efter 8:00"?

8. Vad är påståendet som bestämmer om du tror att du kommer gilla ett brädspel? Lägg till minst en av varje konjunktion!

9. — **Extra.** Det finns två till vanliga konjunktioner, "om" och "om och endast om". När borde dessa konjunktioner vara sanna? Vad låter rimligt? Är dessa påståenden sanna?

a) Om ett tal är delbart på 6 är det delbart med 2 och 3

b) Om det är jullov är det inte Mattekollo

c) Om och endast om det regnar ska man använda paraply

10. — **Extra.** Är "Denna mening är falsk" ett påstående?

11. — **Extra.** Om vi har två påståenden, vilka är alla kombinationer av sant och falskt? När är konjunktionen "och" sann?

12. — **Extra.** För att göra logik lättare att skriva kan man använda symboler istället. Då brukar man skriva påståenden som en bokstav, till exempel kan man låta A vara påståendet "Det är söndag". Sedan kan man ersätta "inte" med \neg , "och" med \wedge och "eller" med \vee . Prova att skriva några påståenden med dessa symboler.

5. Logik 2

18 juli

Definition. — Slutledning. En slutledning innebär att man vet att ett påstående, konsekvensen, är sant om ett annat påstående, villkoret, är sant. Slutledningen i sig är falsk bara om villkoret är sant men inte konsekvensen.

Definition. — Sanningstabell. En sanningstabell berättar exakt när ett påstående är sant. Varje rad motsvarar ett fall och varje kolumn ett påstående. De kan till exempel se ut såhär:

“Det regnar”	“William är inne”	“William är inne om det regnar”
F	F	S
F	S	S
S	F	F
S	S	S

1. Varför är slutledningen “Det är sommarlov om det är Mattekollo” sann även under sportlovet?
2. Är slutledningarna garanterat sanna?
 - a) Eftersom Julia är en ledare på Mattekollo och Julia tycker om astronomi finns det ledare på Mattekollo som gillar astronomi.
 - b) Eftersom Harry gillar schack och schack är ett brädspel gillar Harry alla brädspel.
3. Vad är sanningstabellen för “Antingen är det lektioner eller så är det (frukost eller lunch)”?
4. Låt X och Y vara påståenden. Vad blir sanningstabellen för X om Y respektive inte X om inte Y .

Notera! Människor talar alltid sanning och varulvar ljugar alltid!

5. Efter en fullmåne under Mattekollo inser du att några av ledarna är varulvar! Du träffar Lisa och Sebastian. Sebastian påstår att de båda är människor, men Lisa påstår att Sebastian är en varulv? Vem är vad, och varför?

6. Du springer vidare och träffar Erik och Tobias. Erik säger att man stoppar ledare från att vara varulvar genom att ge dem kaffe. Tobias påstår att Erik är en varulv om och endast om han själv är det.

Skapa en sanningstabell med påståendena “Erik är människa” “Tobias är människa” “Erik talar sanning” “Tobias talar sanning” “Människor talar alltid san-

ning, varulvar ljuger alltid". Kan denna berätta vem som är vad? Är kaffe räddningen?

7. På väg in i köket möter du Harry, Elias, och William. Du tycker dig höra Harry säga "Elias är varulv", Elias säga "William är varulv" och William säga "Harry är varulv". Kan du ha hört rätt?

8. — **Extra.** Du stöter på Julia. Hon håller två kaffepaket, ett smakar gott och ett illa, men du vet inte vilket som är vilket. Du får ställa en fråga för att lista ut vilket kaffepaket du ska ta. Vilken fråga?

9. Är påståendet "Benjamin är varulv och Valentina är Varulv" negationen till "Benjamin är människa eller Valentina är människa"? Två påståenden är samma om de har samma sanningstabell.

10. Innan du hinner sätta igång kaffemaskinen kommer de sista Mattekolloledarna fram. Fredrik säger "Alla Mattekolloledare dricker kaffe" medan Kevin säger att "William dricker inte kaffe". Kan båda vara varulvar? Är det rimligt att ställa upp en sanningstabell där man undersöker varje ledares kaffe vanor individuellt?

11. — **Extra.** När dagen är räddad och alla ledare återigen är lika snälla som de brukar börjar lektionerna igen! Du får välja någon sats och bevisa den så tydligt som möjligt. Försök göra det tydligt vilka slutledningar du gör!

6. Logik 3

19 juli

6.1 Mängdlära

Definition. — **Mängd.** En mängd är en samling element där ordning och antal inte spelar någon roll. Dessa element kan vara vad som helst till exempel färgen blå eller talet 2.

Man kan definiera en mängd antingen genom att lista upp dess element inom måsvingar, till exempel {flygplan, hatt, pannkaka}, eller genom en regel för elementen, till exempel mängden av alla färger.

Definition. — **Mängdoperationer.** En mängdoperator tar en eller flera mängder och skapar en ny. Några av de vanligaste är

Operation	Symbol	Innehåller alla element som
Union	$M \cup N$	Är i M eller N
Snitt	$M \cap N$	Är i M och N
Komplement	M^C	Inte är i M

Notera! Komplement fungerar bara om det finns en universalmängd som berättar vad alla relevanta element är, den är oftast intuitiv.

1. Är {1, 2, 3} samma som {3, 1, 1, 2}?
2. Är {blå, röd} samma som {blå, {röd}}?
3. Skriv upp mängden av alla heltal x som uppfyller påståendet " $x > 2$ och $x < 5$ ".
4. Om universalmängden är {Mattekollo, UVS och Kodsport}, vad blir då:

- a) {Mattekollo, Kodsport} \cup {Kodsport}
- b) {UVS, Mattekollo}^C
- c) {Mattekollo, UVS} \cap {UVS, Kodsport} \cap {Kodsport, Mattekollo}

OBS! UVS = Ung Vetenskapssport.

5. Vi har mängden av alla heltal som är delbara med 7. Vad blir dess komplement? (Universalmängden är alla heltal)
6. Du har mängden av alla tidigare Mattekollodeltagare M och mängden av alla Mattekolloledare N . Hur skapar man mängden av alla som är Mattekolloledare och tidigare varit deltagare?

7. Vi har mängden vars element uppfyller påståendet "Elementet är rött" och den vars element uppfyller påståendet "Elementet är ett klädesplagg". Vilket påstående uppfyller deras snitt?

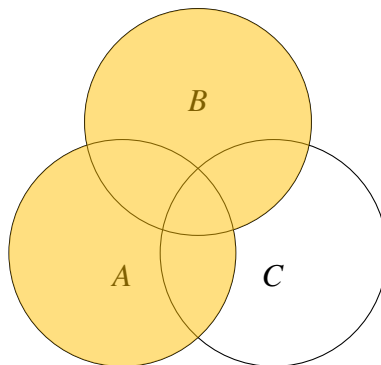
8. Finns det en koppling mellan mängdoperationerna och påståendet deras element uppfyller? Dessa beror kanske särskilt på de konjunktionerna?

9. Stämmer det att $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$ för alla mängder A, B, C ? Använd en sanningstabell!

10. — **Extra.** Det är 9 dagar på Mattekollo, 7 dagar har lektioner, 2 är måndagar, och en är varken måndag eller har lektioner. Hur många måndagar har lektioner? Hur många element uppfyller påståendet?

11. — **Extra.** Hur många element är i $(A \cup B) \cap C$ om A = mängden av alla tal delbara på 2, B = mängden av alla tal delbara med 5 och C = mängden av alla tal från 0 till 20.

12. — **Extra.** Ett Venndiagram används illustrerar hur mängder hör ihop. Varje mängd ritas som en cirkel så att de överlappar om mängderna har något element gemensamt mängderna har något element gemensamt. Sedan färgar man i den mängd man menar. Venndiagrammet för mängden $A \cup B$ blir

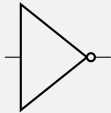


Rita ett Venndiagram för $(A \cap B) \cup C$. Kan man visa uppgift 9 med dessa?

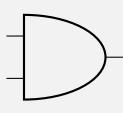
7. Logik 4

20 juli

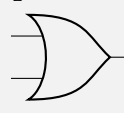
Definition. — Krets. En logisk krets är ett annat sätt skriva påståenden. Man låter några påståenden representeras med variabler, och använder sedan konjunktioner och negationer för att skapa ett nytt påstående. Noderna är



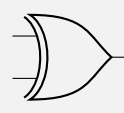
“inte”



“och”



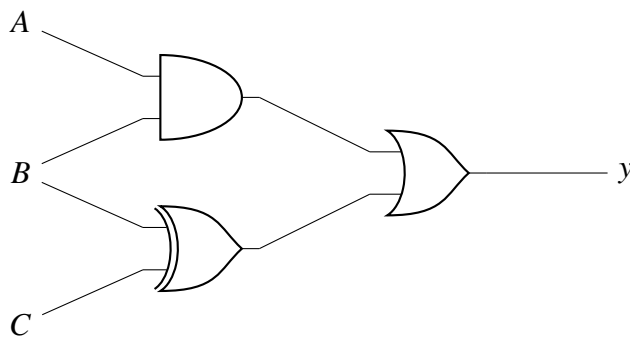
“eller”



“antingen eller”

De kopplas ihop genom att dra en linje från det högra utvärdet på en nod till det vänstra invärdet.

1. Vilka av påståendena A, B, C ska vara sanna för att y ska vara sann?



2. Rita upp en egen krets för påståendet “Antingen A och B eller C ”.
3. I en masugn måste man bestämma huruvida värmen ska vara på eller av. I en förenklad model säger vi att värmen ska vara på om temperaturen är under 1000° eller om den är inställd på “maximal effekt”. Så klart måste värmen vara avstängd om “Nödstopp” knappen är aktiverad. Skapa en logisk krets för detta.

Att bygga en miniräknare

4. Ställ upp additionerna med binära tal:

a) $1_2 + 11_2$

b) $101_2 + 1010_2$

c) $111_2 + 1_2$

5. Vi vill beräkna summan av två ensiffriga binära tal. Vi har påståendena “Ena talet är 1_2 ” och “Andra talet är 1_2 ” (istället för 0_2). Hur kan man skriva påståendena “Andra siffran i summan är 1_2 ” respektive “Första siffran i summan är 1_2 ”. Rita en krets för dessa!

6. Nu vill vi bestämma en godtycklig siffra i det binära talet. Vi vet siffrorna på samma position för talet och har påstående för att dessa är ettor. Vi har också ett påstående för om det finns en "minnesetta" från siffran innan. Rita en krets för om siffran och för om den leder till en "minnesetta".

7. Skapa en symbol för din tidigare krets, en förkortning där bara invärde och utvärde syns men logiken blir samma som tidigare. Sätt ihop dessa till att kunna beräkna summan av två stycken fyra bitars tal.

8. — **Extra.** Positiva tal är bra, men det är trevligt med negativa tal också. Om vi bara har 4 siffror räknar vi i modulo 16. Detta gör att $15 \equiv -1 \pmod{16}, \dots, 8 \equiv -8$. Blir $3 + 15 \equiv 3 - 1 \pmod{16}$? Hur kan vi skriva negativa tal i vår dator? Fungerar det med vår krets?

9. — **Extra.** Logiska kretsar kan inte spara någon information, men i datorer vill vi kunna göra detta. Låt oss utvärdera samma krets flera gånger, men låta ett av invärdena vara i stil med "Utvärdet y var sann förra gången kretsen utvärderades". Invärdet till kretsen påverkas alltså av utvärdet förra gången. Notera att vi fortfarande har vanliga logiska kretsar, men kan ha "minne".

För att förtydliga notationen kan vi skriva vårt par av invärde och utvärde som en symbol (kanske en kvadrat?). För att förenkla kan vi göra att invärdet (det värde minnet ger ifrån sig) är samma som förra utvärderingen om utvärdet (det värde minnet fick in) var falskt, och motsatsen om det var sant.

Vad kan vi skapa med detta? Kanske en binär räknare som ökar varje utvärdering? Eller ett stort lager av minne där vi kan välja vilken vi får ut?