

## 4. Logik 1

17 juli

**Definition.** — **Påstående.** Ett påstående i logiken är en utsaga som är antingen sann eller falsk.

Till exempel är "Jorden är rund" och " $5 \cdot 7 = 99$ " påståenden, men "Venus och Mars" och " $3 + 4$ " är inte det.

1. Vilka av följande är påståenden? Om de är det, är de sanna?

- Solen är blå
- Mattekollo är i juli eller solen är blå
- Påståenden är antingen sanna eller falska

2. Skriv ner ett påståenden som är:

- Sant
- Falskt
- Du inte vet om det är sant eller falskt

3. Är följande påståenden sanna? Vilken roll spelar "inte"?

- Solen är inte blå
- Det regnar inte om det är soligt
- Det regnar om det inte är soligt

**Definition.** — **Negation.** Negationen till ett påstående  $A$ , "inte  $A$ " är sann om  $A$  är falsk och falsk om  $A$  är sann.

4. Kan du skriva följande påstående utan negationen?

- 

5. Är följande påståenden sanna eller falska, vilken roll spelar "och", "eller", och "antingen eller" i dessa? Hur påverkar de sanningsvärdena?

- Matte är kul och programmering är kul
- Solen är blå eller månen är gjord av ost eller blå är en färg
- Antingen solen är ljus, solen är gjord av gas, eller blå är inte en färg

**Definition. — Konjunktion.** En konjunktion är en operator på två eller fler påståenden som skapar ett nytt påstående. De vanligaste konjunktionerna är

- “och” - Som är sann om alla påståendena är sanna
- “eller” - Som är sann om något av påståendena är sanna
- “antingen eller” - Som är sann om exakt ett av påståendena är sanna

6. Med vilka sanningsvärden på  $A, B$  är påståendena sanna?

- $(A \text{ och } (B) \text{ eller } B)$
- $A \text{ och } B$
- $\text{inte } (\text{inte } A \text{ eller inte } B)$
- $A \text{ och } (\text{antingen } A \text{ eller inte } B)$

7. Går det att byta ut det ledande intet?

**Definition. — Slutledningar.** Två andra viktiga operatorer är

- “implicerar” - Som är falsk bara om vänstra värdet är sant och högra värdet är falskt
- “ekvivalent” - Som är sann om värdena är samma

Med sanna implikationer och ekvivalenser kan man härleda fler påståenden som är sanna. Man behöver inte alltid veta om det vänstra är sant för att avgöra om själva implikationen är det.

8. Är följande implikationer och ekvivalenser sanna oavsett sanningsvärdena på  $A, B$ ?

- $A \text{ och } B \text{ implicerar } A$
- $\text{Antingen } A \text{ eller } B \text{ eller } C \text{ implicerar } A \text{ eller } B \text{ eller } C$
- $(A \text{ implicerar } B) \text{ är ekvivalent med } (\text{inte } B \text{ implicerar inte } B)$

9. Är  $x = 2$  ekvivalent med  $x^2 = 4$ ? Eller är det en implikation?

10. Är påståendet “Solen är blå implicerar Jupiter är lila” sant?

11. Är följande påståenden sanna? Vilken roll har “alla” och “det existerar” / “det finns”? Kan man uttrycka dem som varannandra?

- Alla ledare på mattekollo heter Elias
- Det finns en ledare på mattekollo som heter Elias
- Det finns ingen ledare på mattekollo som inte tycker om spelet set

- Alla ledare på mattekollo som tycker om spelet set

**Definition.** — **Kvantor.** En kvantor berättar vilka som följer ett visst påstående. De vanligaste är

- Alla - Där alla specificerade måste uppfylla påståendet för att det ska vara sant
- Existerar - Där minst en av de specificerade måste uppfylla påståendet för att det ska vara sant

12. Vad är konjugatet (motsats påståendet) till följande?

- Alla människor älskar apelsiner
- Det existerar människor som inte älskar appelsiner
- Valentina älskar alla brädspel och det finns ett brädspel som Benjamin inte älskar

**Definition.** — **Notation.** För att göra det lättare att skriva ner har matematiker bestämt viss symboler som betyder samma som orden:

"inte" :  $\neg$                       "och" :  $\wedge$                       "eller" :  $\vee$   
 "antingen eller" :  $\underline{\vee}$     "implicerar" :  $\Rightarrow$     "ekvivalent" :  $\Leftrightarrow$

Dessutom används ofta 1 och 0 för sant och falskt, och ibland kan  $\cdot$  och  $+$  användas för "och" respektive "eller"

13. Skriv om med notation:

- A och (B eller C)
- A implicerar (antingen B eller C)

14. Skriv några egna meningar med notationen. För själva påståendena brukar man sätta in citattecken.

15. — **Extra.** Kan du skapa en tabell över när ett påstående är sant? Gör det för påstående "Om A är sant och (B eller C) är sant" där A, B och C är påståenden vars sanningsvärde du vet.

16. Om och endast om  $x$  är udda och  $y$  är udda är  $x \cdot y$  udda. Kan detta påstående formuleras med notation?

17. Översätt följande påstående till text: " $\text{William gillar logik} \wedge \text{Ergo är logik}$ "  
 $\Rightarrow$  "William gillar Ergo"

## 5. Logik 2

18 juli

### 5.1 Slutledningar, Sanningstabeller och Pussel

**Definition.** — Slutledning.

1. Är följande slutledningar sanna?

- Eftersom Julia är en ledare på mattekollo och Julia tycker om astronomi existerar det en ledare på mattekollo som gillar astronomi.
- Eftersom schack är ett brädspel och Harry gillar vissa brädspel tycker Harry om schack.

2. Varför är följande slutledningar falska?

•

Notera! Människor talar alltid sanning och valvur ljuger alltid! Både människor och valvur är personer!

3. Du kommer in i en by och två personer, Alice och Bob, pratar med dig. Alice säger att exakt en av dem är en valvur och Bob säger att båda är människor. Vad är dem?

4. Du fortsätter att bekanta dig med byborna och stöter på, Alex och Britta. Du undrar vilken väg som är bäst till bergen, sjövägen eller skogsvägen. Britta säger snabbt att sjövägen är bäst. Men då påstår Alex att exakt en av dem är en valvur. Vilken väg är bäst?

**Definition.** — Sanningstabell. En sanningstabell är ett sätt att lättare analysera och undersöka logiska påståenden som beror av sanningsvärdet på andra påståenden. Man skriver då en rad för varje möjlig kombination av sant och falskt för dessa värden, och vad påståendet (eller påståendena) skulle ha för sanningsvärde. Exempelvis kan sanningstabellen för  $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$  se ut så här:

$A$	$B$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

5. Vad blir sanningstabellen för  $A \vee B$ ?

6. Skriv en sanningsstabell över följande påståenden, bestäm själv vilka 3 variabler som blir A, B, C:

- 

7. När berget syns och skogen tunnar ut syns Alva och Bror. Bror påstår att Alva är olik honom medan Alva påstår att Bror är en människa. Låt  $A$  vara påståendet "Alva är en människa" och  $B$  vara påståendet "Bror är en människa". Påståendet "Puzzlet stämmer" kan då skrivas som:

$$(A \vee B \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow A).$$

Varför då? Kan man använda en sanningsstabell på detta påstående? Vad stämmer?

8. En varulv fdfasf dafdf Lös genom att själv bestämma, och beskriv som ett påstående. Kan det lösas med en sanningsstabell?

9. Följande problem kan lösas med en stor sanningsstabell, men kan man göra den lite mindre?

10. En sats, kan vi bevisa den? Vilka är de tydliga stegen och implikationerna.

11. Kan man använda föregående (sanna) slutledningar på dessa problem?

12. Lite olika kluringar

- Vi gör en tabell över vad som gäller i alla fall
- Göra några enklare pussel själv
- Kan vi göra ett matematiskt påstående av dem, då kan vi göra sanningsstabeller!
- Kan vi göra vissa enklare, genom att använda att och och eller inte alltid förändras?
- Kopplar även till matematiska påståenden, visa den enklaste saken
- Fokusera hela tiden på att strukturerat bevisa kluringar
- Extra uppgifter: Några svårare pussel + Bevis

## 6. Logik 3

19 juli

### 6.1 Mängdlära

**Definition. — Mängd.** En mängd är en samling "saker" där ordning och antal inte spelar någon roll. Dessa sakers mängden innehåller kallas element. En mängd noteras normalt antingen med alla sina element inom måsvingar, till exempel  $\{1, -2, 10, \frac{1}{7}, \sqrt{2}\}$  eller {blå, hatt, pannkakor}, eller som en regel, till exempel mängden av alla färger.

1. Är  $\{1, 2, 3\}$  samma som  $\{3, 1, 1, 2\}$ ?
2. Är  $\{\sqrt{2}, 1\}$  samma som  $\{\sqrt{2}, \{1\}\}$ ?
3. Vad är mängden av alla element  $x$  som uppfyller påståendet " $x > 2 \wedge x < 5$ "?

**Definition. — Element.** Om  $A$  är en mängd och  $a$  ett element i  $A$  skriver man att  $a \in A$  där  $\in$  översätts till "element i".

4. Stämmer det att:
  - $2 \in \{1, 3, 5\}$
  - $2 \in$  mängden av alla jämna tal

**Definition. — Mängdoperationer.** En mängdoperator tar en eller flera mängder och skapar en ny. Några av de vanligaste är

Operation	Symbol	Innehåller alla element som
Union	$A \cup B$	Är i A eller B
Snitt	$A \cap B$	Är i A och B
Differens	$A \setminus B$	Är i A och inte är i B
Komplement	$A^C$	Inte är i A

Notera! Komplement fungerar bara om det finns en tydlig mängd som alla är del av.

- 5.
6. Stämmer dessa påståenden?
7. Vad är mängden av alla objekt ur A som uppfyller påstandet:
8. Mängden A innehåller alla personer som uppfyller påstående a, samma för B och b, vilken mängd innehåller objekten som uppfyller:

- A och B
- A eller B
- Antingen A eller B

9. Vad blir mängdoperationerna som uppfyller:

10. Hur många element uppfyller påståendet?

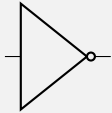
11. — **Extra.** Typiska mängdproblem

- Vad är en mängd + exempel
- Vad kan vi göra för operationer på mängder?
- Påståenden om element
- Hur konjunktioner agerar på mängden av element som möter påståendet
- Extrauppgifter: Beräkna antalet element i dessa mängder. Skapa dessa mängder, Venn diagram

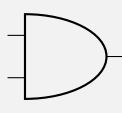
## 7. Logik 4

20 juli

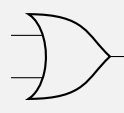
**Definition.** — **Krets.** En logisk krets är ett annat sätt att visualisera logiska påståenden. Påståendena beror på några variabler  $x_1, x_2, \dots, x_n$  och använder konjunktioner och negationer för att skapa ett nytt påstående. Noderna är



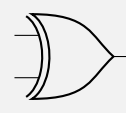
“inte”



“och”



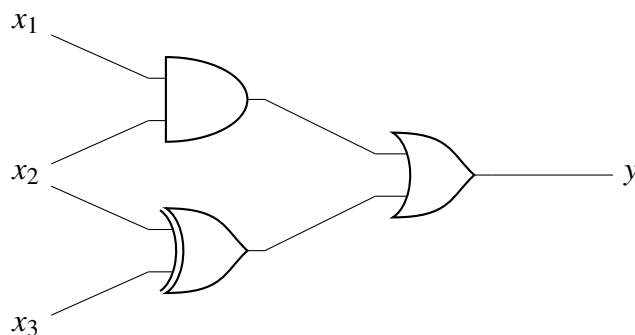
“eller”



“antingen eller”

och de kopplas ihop genom att dra en linje från den högra outputen på en nod till den vänstra inputen.

1. När är följande krets sann?



2. Rita upp en egen krets för påståendet

$$(A \wedge \neg B) \vee ((A \wedge \neg B) \vee B).$$

Obs! Man kan använda samma output på flera inputs!

3. I en masugn måste man bestämma huruvida värmen ska vara på eller av. I en förenklad model säger vi att värmen ska vara på om temperaturen är under 1000° eller om den är inställd på “maximal effekt”. Så klart måste värmen vara avstängd om “Nödstopp” knappen är av. Skapa en logisk krets för detta.

4. Tänk dig nu en krets som fungerar som minne, kan du skapa en krets där man kan få välja vilken utav två minnes värden man kan ta?

5. Nu vill vi ha en krets som givet ett binärt tal ger värdet som sparas i det minnet!

6. Istället för att addera vill vi nu subtrahera. Vad händer om vi använder modulo, och ser på de mycket stora som negativa. Funkar detta med din additions-krets?



## Att bygga en miniräknare

7. Ställ upp dessa additioner med binära tal:

- $1_2 + 10_2$
- $101_2 + 1010_2$
- $111_2 + 1_2$

Vi vill addera två binära tal  $x$  och  $y$  till  $z$ . Låt  $x_i$  vara påståendet "Den  $i$ :te siffran i  $x$  är  $i$ " och samma för  $y$  och  $z$ .

8. Bestäm  $z_1$  givet  $x_1, y_1$  med en sanningstabell och sedan logisk krets. Bestäm även om en etta "bärs över" till nästa siffra.

9. Bestäm  $z_n$  och huruvida en etta "bärs över" till nästa siffra givet  $x_n, y_n$  samt om en bars över från det lägre talet.

10. Skapa en symbol för din tidigare krets, en förkortning där bara input och output syns men logiken blir samma som tidigare. Sätt ihop dessa till att kunna beräkna addition av två fyra bitars tal.

11. Skapa nu en symbol för hela additions kretsen. Kan man skapa en krets som givet en input, en inställning, antingen ger summan av talen eller bitvis xor, till exempel  $x_3$  och  $y_3$  ger xor till  $z_3$ .

12. — **Extra.** Hittills har vi bara jobbat med positiva tal, men hur gör man med negativa tal? En tanke var att ha en extra bit (sann eller falsk) som säger om det är positivt eller negativt, men dettavar jobbigt att räkna med. Ett alternativ var att använda modulo.

Låt oss räkna med max 4 siffror. Om vi skulle behöva en femte kastar vi den. Liknar detta att räkna i modulo 16? Vad händer om vi skulle se på 15 som -1, 14 som -2 ...? Prova att ställa upp!

### 7.1 Extra

13. — **Extra.**