2. Gruppteori 2. Isomorfier

21 juli

Definition. En *isomorfi* φ mellan grupperna G_1 och G_2 är en kartläggning (funktion) så att:

1. **Bijektiv**: Varje element i G_2 antas som värde av φ för exakt ett element i G_1.
2. **Bevarar operatorn**: För alla a, b i G_1 gäller $\varphi(a) \star \varphi(b) = \varphi(a \star b)$.
3. **Bevarar identitet**: För identitetselementen e_1, e_2 i G_1 respektive G_2 gäller att $\varphi(e_1) = e_2$.

1. Låt $\varphi(n) = 2n$.

   a) Är φ en isomorfi från heltalen under addition till de jämna heltalen under addition?

   b) Finns det andra isomorfier som uppfyller (a)?

   c) Är φ en isomorfi från heltalen under multiplikation till de jämna heltalen under multiplikation?

2. Finns det en isomorfi mellan D_n och heltalen modulo $2n$ under addition om **(a)** $n = 3$ **(b)** $n > 3$?

3. Två grupper G_1, G_2 kallas isomorfa, $G_1 \sim G_2$, om det finns en isomorfi mellan dem. Visa att om G_1 är isomorf med G_2 och G_2 är isomorf med G_3 så är G_1 isomorf med G_3.

4. Är D_3 isomorf med S_3, mängden av alla permutationer (omordningar) av 3 element? Vad gäller för D_4 och S_4?

5. En grupp G kallas cyklisk om det finns ett element a så att G är exakt potenserna till a.

   a) Visa att heltalen under addition är cykliska.

   b) Visa att alla cykliska grupper av storlek n är isomorfa.

6. För två grupper G_1, G_2 definieras den direkta produkten $G_1 \times G_2$ som gruppen där:

   1. Elementen är mängden av alla par (a_1, a_2) där a_1, a_2 är element i G_1 respektive G_2.
   2. Operatorn appliceras elementvist enligt $(a_1, a_2) \star (b_1, b_2) = (a_1 \star b_1, a_2 \star b_2)$.

Är **(a)** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \sim \mathbb{Z}_4$ **(b)** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \sim \mathbb{Z}_6$?

7. Är de rationella talen under addition ismorfa med de nollskilda rationella talen under multiplikation?

8. Är heltalen under addition isomorfa med de rationella talen under addition?

9. Är de rationella talen under addition isomorfa med de reella talen under addition?

10. Är de komplexa talen under addition isomorfa med $\mathbb{R}^2$ (punkter i reella talplanet) under addition?

11. Hur kan man definiera produkten på $\mathbb{R}^2$ för att de ska vara ismorfa med de komplexa talen under multiplikation?