2. Gruppteori 2. Isomorfier

21 juli

Definition. En *isomorfi* φ mellan grupperna G_1 och G_2 är en kartläggning (funktion) så att:

1. Varje element i G_2 antas som värde av φ för exakt ett element i G_1.
2. För alla a, b i G_1 gäller $\varphi(a) \star \varphi(b) = \varphi(a \star b)$.
3. För identitetselementen e_1, e_2 i G_1 respektive G_2 gäller att $\varphi(e_1) = e_2$.

1. Gruppen G_1 av "klä om strumpan"-operationer (från förra lektionen), består av operationerna: "Gör inget", "byt fot", "vänd ut och in", "vänd och byt fot". Gruppen G_2 består istället av mängden $\{e, a, b, c\}$ och operatorn $\star$ som uppfyller multiplikationstabellen

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Hitta en isomorfi mellan G_1 och G_2.

2. Hitta på en grupp som är isomorf med både G_1 och G_2 från förra uppgiften. Ju skummare desto bättre!

3. Låt $\varphi(n) = 2n$. Är φ en isomorfi från heltalen under addition till de jämna heltalen under addition? Vilka andra sådana isomorfier finns det?

4. Grupperna G_1, G_2 kallas isomorfa om det finns en isomorfi mellan dem. Visa att om G_1 är isomorf med G_2 och G_2 är isomorf med G_3 så är G_1 isomorf med G_3.

Definition. En grupp G kallas *cyklisk* om det finns ett element a i G så att G är exakt potenserna till a.

5. **(Cykliska grupper).** Visa att heltalen modulo n under addition är cykliska.

6. **(Cykliska grupper).** Visa att alla cykliska grupper av storlek n är isomorfa med varandra och inga andra.

7. **(Cykliska grupper).** Låt a vara ett element i G_1 och φ vara en isomorfi från G_1 till G_2. Visa att $a^n = e_1$ är ekvivalent $\varphi(a)^n = e_2$.

Definition. För två grupper G_1, G_2 definieras den *direkta produkten* $G_1 \times G_2$ som gruppen där:

1. Elementen är mängden av alla par (a_1, a_2) där a_1, a_2 är element i G_1 respektive G_2.

2. Operatorn appliceras elementvist enligt $(a_1, a_2) \star (b_1, b_2) = (a_1 \star b_1, a_2 \star b_2)$.

8. **(Direkta produkten).** Låt $\mathbb{Z}_n$ vara heltalen modulo n. Är **(a)** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \sim \mathbb{Z}_4$ **(b)** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \sim \mathbb{Z}_6$?

9. **(Direkta produkten).** Vilka krav ställs på n och m om $\mathbb{Z}_{n \cdot m} \sim \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$?

10. **(Direkta produkten).** Låt φ vara en isomorfi från $\mathbb{Z}_{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$ till $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$. **(a)** Beräkna $\varphi(11^{-1})$ där 11^{-1} är den multiplikativa inversen till 11 i $\mathbb{Z}_{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$. **(b)** Beskriv hur man skulle kunna beräkna 11^{-1}.

11. Är de rationella talen under addition isomorfa med de nollskilda rationella talen under multiplikation?

12. Är heltalen under addition isomorfa med de rationella talen under addition?

13. Är de rationella talen under addition isomorfa med de reella talen under addition?

14. Är de komplexa talen under addition isomorfa med $\mathbb{R}^2$ (punkter i reella talplanet) under addition?

15. Hur kan man definiera produkten på $\mathbb{R}^2$ för att de ska vara isomorfa med de komplexa talen under multiplikation?