2. Gruppteori 2. Isomorfier

21 juli

Definition. En *isomorfi* φ mellan grupperna G_1 och G_2 är en kartläggning (funktion) så att:

1. Varje element i G_2 antas som värde av φ för exakt ett element i G_1.
2. För alla a, b i G_1 gäller $\varphi(a) \star \varphi(b) = \varphi(a \star b)$.
3. För identitetselementen e_1, e_2 i G_1 respektive G_2 gäller att $\varphi(e_1) = e_2$.

1. Gruppen G_1 av "klä om strumpan"-operationer (från förra lektionen), består av operationerna: "gör inget", "byt fot", "vänd ut och in", "vänd ut och in och byt fot". Gruppen G_2 består istället av mängden $\{e, a, b, c\}$ och operatorn $\star$ som uppfyller multiplikationstabellen

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Hitta en isomorfi mellan G_1 och G_2.

2. Visa att D_3 är isomorf med permutationsgruppen S_3, mängden av alla omordningar av 3 element.

3. Motivera att gruppen av rotationer av en kub är isomorf med permutationsgruppen S_4.

Definition. En grupp G kallas *cyklisk* om det finns ett element a i G så att mängden till G är exakt potenserna till a.

4. **(Cykliska grupper).** Visa att heltalen modulo n under addition är cykliska.

5. Grupperna G_1, G_2 kallas isomorfa om det finns en isomorfi mellan dem. Visa att om G_1 är isomorf med G_2 och G_2 är isomorf med G_3 så är G_1 isomorf med G_3.

6. **(Cykliska grupper).** Visa att alla cykliska grupper av storlek n är isomorfa med varandra och inga andra.

Definition. Låt $H = (M_H, \star)$ och $G = (M_G, \star)$ vara grupper. H är en *delgrupp* till G om M_H är en delmängd till M_G.

7. Är mängden av alla **(a)** speglingar **(b)** rotationer en delgrupp av D_n?

8. Hitta 4 delgrupper till dragen på en Rubiks Kub som har olika storlek.

9. Låt φ vara en isomorfi från G_1 till G_2 och och $H_1 = (\{a_1, \ldots, a_n\}, \star)$ vara en delgrupp till G_1. Visa att $H_2 = (\{\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)\}, \star)$ är en delgrupp till G_2.

10. Hitta en delgrupp av S_4 som är isomorf med "klä om strumpan"-gruppen.

Extra uppgifter

Definition. För två grupper G_1, G_2 definieras den *direkta produkten* $G_1 \times G_2$ som gruppen där:

1. Elementen är mängden av alla par (a_1, a_2) där a_1, a_2 är element i G_1 respektive G_2.
2. Operatorn appliceras elementvist enligt $(a_1, a_2) \star (b_1, b_2) = (a_1 \star b_1, a_2 \star b_2)$.

11. **(Direkta produkten).** Låt $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ under addition. Vad är inversen till $(2, 0)$?

12. **(Direkta produkten).** Låt $\mathbb{Z}_n$ vara heltalen modulo n. Är **(a)** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ isomorf med $\mathbb{Z}_4$ **(b)** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ isomorf med $\mathbb{Z}_6$?

13. **(Direkta produkten).** Visa att $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ under addition är isomorf med "klä om strumpan"-gruppen.

14. Är de rationella talen under addition isomorfa med de nollskilda rationella talen under multiplikation?

15. Är heltalen under addition isomorfa med de rationella talen under addition?

16. Är de rationella talen under addition isomorfa med de reella talen under addition?