1. Gruppteori 1. Introduktion

20 juli

Definition. En *grupp* G är en mängd M tillsammans med en operator $\star$ så att:

1. **Stängd**: För alla två element a, b i M definierar $\star$ ett element $a \star b$ som också är i M.
2. **Associativ**: För alla tre element a, b, c i M är $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.
3. **Identitet**: Det finns ett *identitets element* e så att för alla a i M så är $a \star e = e \star a = a$.
4. **Invers**: Varje element a i M har en *invers* a^{-1} så att $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$.

1. Motivera att kraven för en grupp uppnås av **(a)** heltal under addition **(b)** drag på en rubikskub under sammansättning **(c)** *permutationer* (omordningar) av 4 objekt under sammansättning.

2. Motivera att kraven på en grupp **inte** uppnås av **(a)** udda heltalen under addition bold **(b)** heltalen under multiplikation **(c)** projektioner av planet på en linje under sammansättning.

3. **(Dihedrala grupper).** Den *dihedrala* gruppen D_n är alla rotationer och speglingar av en regelbunden n-hörning som avbildar den på sig själv. I den dihedrala gruppen D_4:

   (a) Vilka är de fyra rotationerna i gruppen?

   (b) Vilka är de fyra speglingarna?

   (c) Vilket är identitetselementet?

4. **(Dihedrala grupper).** För den dihedrala gruppen D_3 låt S_1, S_2, S_3 representera de 3 speglingarna (bestäm i vilken ordning) och R_0, R_1, R_2 de tre rotationerna $(0, 120°, 240°$ medurs). Skapa en multiplikationstabell av elementen!

5. **(Dihedrala grupper).** Låt S vara en bestämd spegling och R vara en $\frac{360°}{n}$ rotation i D_n. Kan man beskriva alla element som $S^i \star R^j$? Med potenser menar vi elementet applicerat på sig självt så många gånger.

6. Låt a, b vara element i en grupp. Visa att $(a \star b)^{-1} = a^{-1} \star b^{-1}$.

7. **(Tavla).** Vi vill hänga en tavla med ett snöre (vars ändar är i tavlan) på två spikar. Tillskillnad från vanligt, vill dock att om man tar bort någon spik (oavsett vilken) så ska tavlan ramla! Hur gör vi detta?

8. **(Tavla).** Hur gör vi om tavlan ska hänga på n spikar så att tavlan ramlar oavsett vilken spik vi tar bort?

9. Visa att om a, b, c är element i en grupp så innebär $a \star b = a \star c$ att $b = c$.

10. **(Rubiks kub).** Visa att repeterad applicering av ett godtyckligt drag på en Rubiks Kub kommer leda tillbaks till var den började.

Definition. Låt a vara ett element i en grupp och i ett heltal. Då är

$$a^i = \begin{cases} \underbrace{a \star \cdots \star a}_{i \text{ gånger}} & \text{om } i > 0 \\ \underbrace{a^{-1} \star \cdots \star a^{-1}}_{i \text{ gånger}} & \text{om } i < 0 \\ e & \text{om } i = 0 \end{cases}$$

11. **(Rubiks kub).** Visa att inget drag på en Rubiks Kub, om det appliceras repeterat, kommer att gå igenom varje möjlig position. Tips! $a^i \star a^j = a^j \star a^i$.

12. **(Kortlek).** Kan man göra samma slutsatser som vi gjorde om dragen på en Rubiks Kuben på en blandning av en kortlek?

13. Visa att identitetselemenet är unikt.

14. Visa att inversen är unik.

15. Visa att snittet av två grupper är en grupp.