4. Gruppteori 4. Lagranges sats

24 juli

Definition. Låt $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ vara en delgrupp av G. För varje element a i G definierar vi *sidoklassen* $a \star H = \{a \star h_1, a \star h_2, \ldots, a \star h_n\}$.

1. Låt M vara en delgrupp till G med k element. Hur många element har $a \star M$?
2. Finns det något element som inte är i någon sidoklass?
3. Visa att om två sidoklasser båda innehåller ett visst element så sammanfaller de.

Sats 4.1. **(Lagranges sats)** Storleken av en ändlig grupp delas av storleken av dess delgrupper.

4. Bevisa Lagranges sats.
5. Hitta de två delgrupperna till $\mathbb{Z}_{29}$.
6. Visa att alla grupper av primtals storlek är cykliska.
7. Visa att om storleken av två delgrupper är relativt prima så är deras snitt $\{e\}$.
8. Visa att $a^{|G|} = e$ för elementet a i gruppen G med $|G|$ stycken element.

Sats 4.2. **(Eulers sats).** För två positiva och relativt prima heltal a, n gäller att $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$ där $\phi(n)$ är antalet tal mindre än n som är relativt prima till n.

9. Bevisa Eulers sats.

Extrauppgifter

Jobba på uppgifterna från tidigare blad. Det finns även ett blad om gruppverkan och Burnsides lemma om man önskar.