3. Gruppteori 3. Delgrupper & sidoklasser

22 juli

Definition. Gruppen H kallas en delgrupp till gruppen G om elementen i H är en delmängd av elementen i G och grupperna har samma operator. Vi skriver då $H \leq G$.

1. Hitta alla delgrupper till heltalen.

2. Är mängden av alla **(a)** speglingar **(b)** rotationer en delgrupp av D_n?

3. Hitta 4 delgrupper till dragen på en Rubiks Kub som har olika storlek.

4. Låt G vara en cyklisk grupp av storlek n. Visa att för varje faktor till n finns en delgrupp av den storleken.

5. Låt φ vara en ismorfi från gruppen G_1 till gruppen G_2 och låt H vara en delgrupp till G_1. Visa att $\varphi(H)$, mängden av värden φ antar i H, är en delgrupp till G_2

Definition. Låt $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ vara en delgrupp av G. För varje element a i G definierar vi sidoklassen $a \star H = \{a \star h_1, a \star h_2, \ldots, a \star h_n\}$.

6. Vilka är sidoklasserna till delgruppen av rotationer i den dihedrala gruppen D_4?

7. Observera gruppen av heltal under addition. Vilka är resklasserna till delgruppen av tal delbara med 7?

8. Låt M vara en delmängd till G med k element. Hur många element har aM för olika element a i G?

9. Låt G vara alla punkter i planet under vektoraddition och H vara en rät linje genom origo. Vilka är sidoklasserna till H?

10. Låt H vara en delgrupp till gruppen G. Finns det något element a i G som inte är i någon sidoklass?

11. Låt H vara en delgrupp till gruppen G och a, b element i G. Visa att aH och bH är samma om och endast om ab^{-1} är i H.

12. Låt H vara en delgrupp till gruppen G och a, b element i G. Visa att aH och bH antingen inte delar något element är samma.