

Zadanie 12 (problemy z warunkami brzegowymi).

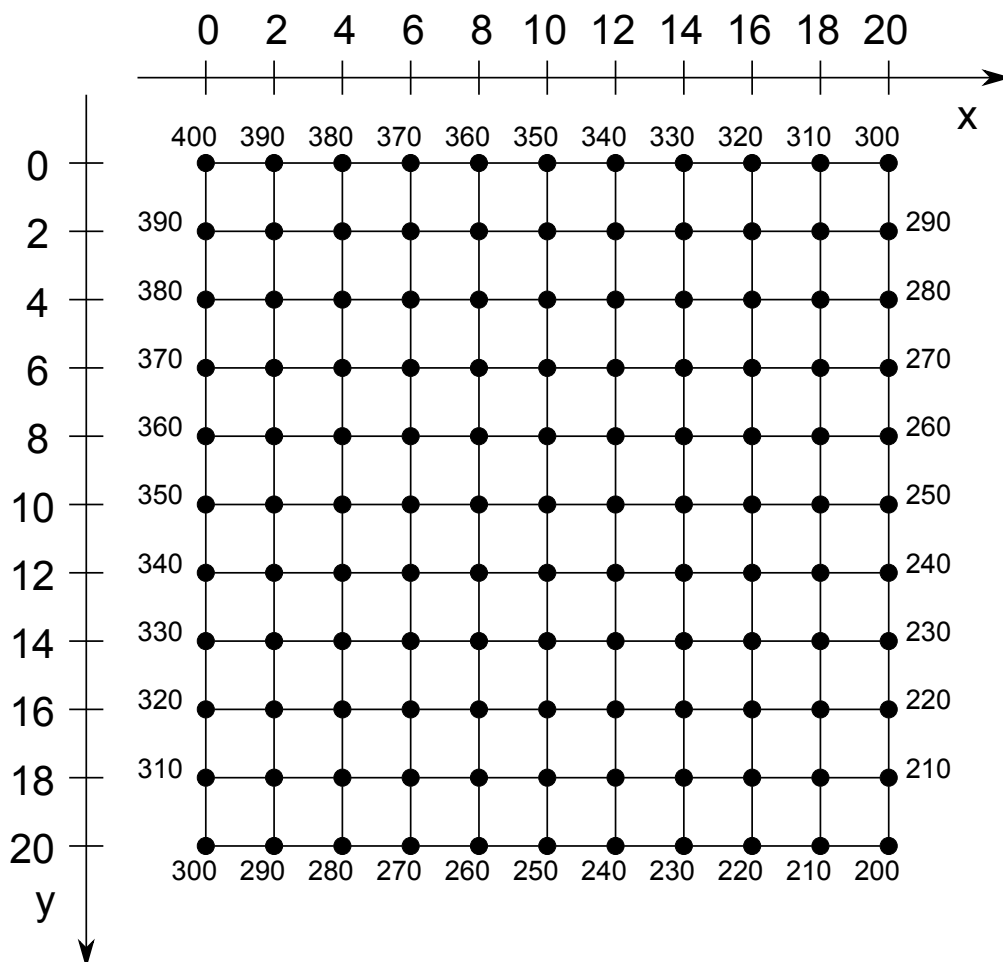
Rozważmy problem wyznaczenia temperatury w cienkiej metalowej płytce o rozmiarach 20×20 . Rozkład temperatury płytki w stanie ustalonym można w przybliżeniu opisać za pomocą następującego cząstkowego równania różniczkowego:

$$0 = \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} + h'(T_a - T(x, y)) \quad (1)$$

gdzie:

- $T(x, y)$ to temperatura w punkcie x, y płytki,
- $T_a = 100$ to (stała) temperatura otoczenia,
- $h' = 0.05$ to (stały) parametr związany z przewodzeniem ciepła przez płytkę.

Na Rysunku 1 przedstawiono siatkę do dyskretnego przybliżenia problemu za pomocą 11×11 węzłów wraz z warunkami brzegowymi Dirichleta (zadany rozkład temperatury na krawędziach płytki).



Rysunek 1: Siatka dla problemu wyznaczania temperatury płytki

Dla powyższej siatki zakłada się, że odległość pomiędzy węzłami w poziomie (Δx) i w pionie (Δy) jest taka sama i wynosi $\Delta x = \Delta y = 2.0$

Równanie (1) opisujące rozkład temperatury płytki należy przybliżyć, zastępując pochodne drugiego rzędu odpowiednimi różnicami skończonymi. Zatem dla skończonych przyrostów Δx oraz Δy otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{T(x - \Delta x, y) - 2T(x, y) + T(x + \Delta x, y)}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \approx \frac{T(x, y - \Delta y) - 2T(x, y) + T(x, y + \Delta y)}{(\Delta y)^2}$$

gdzie:

- $T(x, y)$ to temperatura w danym węźle siatki,
- $T(x - \Delta x, y)$ to temperatura w węźle bezpośrednio na lewo,
- $T(x + \Delta x, y)$ to temperatura w węźle bezpośrednio na prawo,
- $T(x, y - \Delta y)$ to temperatura w węźle bezpośrednio poniżej,
- $T(x, y + \Delta y)$ to temperatura w węźle bezpośrednio powyżej.

Po podstawieniu powyższych przybliżeń do równania (1), po prostych przekształceniach możemy zapisać równania dla wszystkich wewnętrznych węzłów siatki. Otrzymamy układ równań liniowych z 81 niewiadomymi (9×9 węzłów wewnętrznych siatki z Rysunku 1).

Zadania do wykonania:

1. Skonstruować macierz A oraz wektor b opisujący zadany problem (macierz A ma wymiar 81×81 , wektor b ma wymiar 81×1).
2. Znaleźć 81 nieznanych temperatur dla wewnętrznych punktów siatki (rozwiązać układ $Ax = b$).
3. Wykreślić kolorowy rozkład temperatury w stanie ustalonym.