Zadanie 7 (filtr Kalmana).

1 Treść zadania

W pliku zamieszczono wyniki pomiaru trajektorii samolotu bezzałogowego wykonane przez satelitę działającego w podczerwieni. Plik zawiera położenia samolotu (p_x, p_y) w kolejnych chwilach czasu mierzone co jedną sekundę (czas potrzebny na wykonanie kolejnego zdjęcia i przetworzenia obrazu).

Należy:

1. Zaimplementować filtr Kalmana, który wyznaczy trajektorię samolotu.
2. Korzystając z filtru dokonać predykcji gdzie znajdzie się samolot za 5 sekund od ostatniego wyznaczonego położenia.
3. Przedstawić na wspólnym wykresie pomiary trajektorii (oznaczone znacznikiem 'x'), wyznaczoną trajektorię (oznaczoną linią ciągłą) oraz przewidywaną trajektorię (oznaczoną linią przerywaną i zakończoną znacznikiem 'o')

2 Niezbędne minimum teoretyczne

Pierwsza z sekcji poniżej to opis prostego kinematycznego modelu poruszającego się samolotu. Właściwe równania, które należy zaimplementować znajdują się w sekcji 2.2.

2.1 Model poruszającego się samolotu

Ruch samolotu można opisać następującym dyskretnoczasowym równaniem stanu

$$s[n+1] = Fs[n] + Gq[n]$$

wraz z równaniem obserwacji:

$$z[k] = Hs[n] + w[n]$$

gdzie

- $s = [x, y, v_x, v_y]^\top$ to stan, który zawiera informację o położeniu (x, y) oraz prędkości (v_x, v_y) w przestrzeni dwuwymiarowej,
- $q = [q_x, q_y]^\top$ to tzw. szum procesowy modelujący niepewność trajektorii samolotu oraz nieprzewidywalne manewry wykonywane przez samolot; w powyższym prostym modelu przyjmiemy, że jest to dyskretnoczasowy biały szum gaussowski o zerowej wartości średniej i znanej macierzy kowariancji Q,
- $w = [w_x, w_y]^\top$ to tzw. szum pomiarowy modelujący niedokładność czujnika; przyjmiemy, że jest to dyskretnoczasowy biały szum gaussowski o zerowej wartości średniej i znanej macierzy kowariancji R,
- z to wyjście czujnika pomiarowego, którym w omawianym przykładzie jest kamera podczerwieni znajdująca się na satelicie.

Sedno modelu oddane jest w macierzach F, G, które wynikają z równań kinematyki oraz macierzy H która opisuje zasadę działania czujnika. W prostym modelu można przyjąć, że prędkość jest stała i zmienia się tylko wskutek szumu q. Zatem:

$$v_x[n+1] = v_x[n] + q_x[n]$$

Analogicznie opisana jest prędkość v_y.

Położenie x w takim modelu opisane jest natomiast równaniem:

$$x[n+1] = x[n] + Tv_x[n]$$

gdzie T jest okresem obserwacji samolotu. Podobne równanie można zapisać dla położenia y, które jest odpowiednio zależne od prędkości v_y. Powyższe rozważania prowadzą do następujących macierzy F oraz G:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Czujnik mierzy ze stanu tylko składowe położenia, zatem macierz obserwacji w naszym modelu to:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 Filtr Kalmana

Filtr Kalmana, na podstawie niepewnych pomiarów oraz modelu samolotu, wyznacza 'wygładzoną' trajektorię, której 'jakość' jest lepsza niż proste połączenie pomiarów liniami (wyznaczona trajektoria jest w optymalny sposób dopasowana do pomiarów).

Równania jednego cyklu filtru Kalmana są następujące. Na podstawie oszacowania stanu (oznaczanego jako $\hat{s}$) w chwili n filtr wyznacza (jednokrokowe[1]) przewidywane oszacowanie w chwili $n+1$:

$$\hat{s}[n+1|n] = F\hat{s}[n|n]$$

Notacja $[n+1|n]$ oznacza, że oszacowanie dotyczy chwili $n+1$ ale wyznaczone jest na podstawie pomiarów zebranych do chwili n.

Wraz z oszacowaniem wyznaczana jest tzw. macierz kowariancji przewidywanego oszacowania. Nieformalnie macierz kowariancji zawiera informację o tym, jaki błąd popełnia filtr przy wyznaczaniu danej wielkości (w tym przypadku przewidywanego oszacowania stanu). Macierz ta wyznaczana jest następująco:

$$P[n+1|n] = FP[n|n]F^\top + GQG^T$$

Na podstawie przewidywanego oszacowania stanu wyznaczany jest przewidywany pomiar. Korzystając z zasady działania czujnika wynosi on:

$$\hat{z}[n+1|n] = H\hat{s}[n+1|n]$$

Powyższe kroki to tzw. *faza predykcji* filtru.

Następnym krokiem jest przetworzenie pomiaru z czujnika. Zostanie on oznaczony jako z. Pomiar zawiera dwie zmienne położenia, zatem $z[n+1] = [p_x[n+1], p_y[n+1]]^\top$. Dysponując pomiarem z czujnika filtr może wyznaczyć tzw. innowację, czyli różnicę pomiędzy pomiarem z z czujnika a wyznaczonym przez niego przewidywanym pomiarem $\hat{z}$. Innowacja e wynosi zatem:

$$e[n+1] = z[n+1] - \hat{z}[n+1|n]$$

Innowacja reprezentuje zatem nową informację jaką dostarcza pomiar w chwili $n+1$ w odniesieniu do tego czym dysponował (i mógł 'przewidzieć') filtr na podstawie danych zebranych do chwili n.

Wraz z innowacją wyznaczana jest macierz kowariancji innowacji jako:

$$S[n+1] = HP[n+1|n]H^\top + R$$

Teraz filtr może przystąpić do ważnego kroku jakim jest wyznaczenie wzmocnienia. Obliczane jest ono jako:

$$K[n+1] = P[n+1|n]H^\top \left(S[n+1]\right)^{-1}$$

[1] Jak wyznaczyć przewidywanie dwukrokowe, trzykrokowe, i-krokowe?

Nieformalnie interpretacja wzmocnienia jest następująca. Niedokładne pomiary ('duże' R) i mało niepewny obiekt ('małe' Q) powoduje, że wzmocnienie jest 'małe'. Dokładne pomiary ('małe Q) ale niepewny obiekt ('duże' Q) powoduje, że wzmocnienie jest 'duże'. Duże wzmocnienie (dokładne pomiary/niepewny obiekt) oznacza, że innowacja zostanie w dużym stopniu użyta przy wyznaczaniu zaktualizowanego oszacowania stanu. Obliczane jest ono jako:

$$\hat{s}[n+1|n+1] = \hat{s}[n+1|n] + K[n+1]e[n+1]$$

Wraz z aktualnym oszacowaniem stanu wyznaczana jest jego macierz kowariancji jako:

$$P[n+1|n+1] = (I - K[n+1]H)P[n+1|n]$$

gdzie I jest macierzą jednostkową o odpowiednim wymiarze. Zatem macierz kowariancji aktualnego stanu $\hat{s}[n+1|n+1]$ jest pomniejszana w stosunku do macierzy kowariancji stanu przewidywanego $\hat{s}[n+1|n]$ (stan aktualny jest dokładniejszy od przewidywanego). Powyższe kroki to tzw. *faza aktualizacji* filtru.

Na tym kończy się jeden cykl pracy filtru. Filtr jest gotowy rozpocząć nowy cykl wyznaczając kolejne przewidywane oszacowanie stanu zgodnie z pierwszym równaniem z aktualnej sekcji.

2.3 Jak przystąpić do implementacji filtru

Do poprawnego zaimplementowania filtru (poza modelem samolotu i algorytmem przedstawionym powyżej) potrzebne są wartości początkowe oraz parametry szumów. Bez wchodzenia w szczegóły teoretyczne, jako stan początkowy możemy przyjąć wartość pomiaru w chwili 0 (odczytane z pliku) oraz prędkości zerowe, zatem stan początkowy w chwili zero wynosi:

$$\hat{s}[0|0] = [p_x[0], p_y[0], 0, 0]^\top$$

Jako macierz kowariancji $P[0|0]$ oszacowania stanu $\hat{s}[0|0]$ można przyjąć macierz jednostkową pomnożoną przez pewną stałą. W omawianym przykładzie ustalmy[2]

$$P[0|0] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

W praktyce dobór macierzy Q oraz R jest dość trudny. O ile przy doborze macierzy R można jeszcze posłużyć się danymi katalogowymi odpowiedniego czujnika używanego do pomiaru, to dobór macierzy Q, która opisuje wiele czynników takich jak niepewność obiektu, nieprzewidywalne manewry wykonywane przez obiekt czy niepewność modelu (zatem agreguje wiele niepewności) wymaga dużego doświadczenia. W rozpatrywanym przykładzie przyjmiemy, że zrobił to ktoś za nas i podał nam

$$Q = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

oraz

$$R = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

[2] Jak lepiej oszacować tą macierz?