

书面作业:

1. 证明: $\int_{a-h/2}^{a+h/2} f(x) dx = hf(a) + O(h^3)$

2. 给定初值问题:

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), t \in [0, T] \\ y(0) &= \alpha \end{aligned}$$

考虑在计算机上利用显式Euler格式求解上述问题 ($h = T/N$):

$$\begin{aligned} u_0 &= \alpha + \delta_0 \\ u_{i+1} &= u_i + hf(t_i, u_i) + \delta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

证明: 如果 $|\delta_i| < \delta, i = 1, \dots, N$, 那么

$$|y(t_i) - u_i| \leq \frac{1}{L} \left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h} \right) e^{L(t_i-a)} + |\delta_0| e^{L(t_i-a)}$$

上机作业:

1. 数值实验:

$$y' = -100y, \quad 0 \leq t \leq 2, y(0) = 1.$$

真解为:

$$y(t) = e^{-100t}$$

取 $h = 0.1, 0.05, 0.01$, 分别采用显式Euler, 修正Euler及隐式欧拉方法求解. 请解释观察到的现象.

2. 数值实验:

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 5, y(0) = 1.$$

真解为:

$$y(t) = e^{-t} + t$$

自定步长序列 h_j , 采用显式Euler方法, 隐式Euler方法及改进欧拉方法求解, 比较这些格式在 $t=5$ 处的误差, 试确定上述方法的误差阶。

3. (选做) 利用数值实验验证书面作业第2题的结论。