Réduction d'endomorphismes

December 2023

---

1 Conseils généraux et réflexes

Chercher les espaces propres pour les valeurs propres non nulles :
Soit U un vecteur propre associé à une valeur propre λ non nulle: $f(U) = \lambda U$. Donc $U = f(\frac{U}{\lambda}) \in Im(f)$. Donc il est logique de chercher les vecteurs propres associées à une valeur propre non nulle dans l'image. Surtout quand le rang vaut 1.

Classique : Matrices de rang 1 :
Déjà par application du *théorème du rang* : $dim(E_0(f)) = n-1$ donc $0 \in Sp(f)$.
En outre, le polynome caractéristique est $\chi_f = X^n - tr(f)X^{n-1} + ... + (-1)^n det(f)$, en factorisant par X^{n-1}, on obtient : $\chi_f = X^{n-1} \times (X - tr(f))$.
Ainsi Sp(f) = {0,tr(f)}.
En outre, il vient alors que f est diagonalisable ssi $tr(f) \neq 0$. (Sinon la somme des dimensions des espaces propres ne vaut pas n)

Recherche de racines multiples :
Soit $\alpha \in (R)$. $mult(\alpha, P) \geq 2 \Leftrightarrow P(\alpha) = 0 \; et \; P'(\alpha) = 0$.

A propos des valeurs propres complexes :
◦ Le polynome caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$ et donc admet au minimum une racine complexe. (Théorème de D'Alembert)
◦ $dim(E_z(u)) = dim(E_{\bar{z}}(u))$. Ainsi *si un complexe est valeur propre, son conjugué l'est également.*
◦ L'égalité $dim(\chi_A) = n$ peut permettre d'obtenir que n est pair.

Classique : Matrices de rang 2 : Par application du *Théorème du rang*, $dim(E_0(f)) = n - 2$.
Rappel : Les vecteurs propres des valeurs propres non nulles sont alors contenues dans Im(f). Pour les trouver on introduit l'endomorphisme induit sur

Im(f): $U \mapsto AU$. Puis on cherche, une base de l'image et l'on donne la matrice représentative dans une base de l'image. (On fait celà parce que les valeurs propres de l'endomorphisme induit sont les mêmes).
Soit (e_1, e_2) une base de Im(f) et (u_1, u_2) les deux vecteurs propres; une fois que l'on a obtenu les éléments propre de l'endomorphisme induit il suffit pour retrouver les vecteurs propres de f de faire les produits scalaires $< u_1|(e_1, e_2) >$ et $< u_2|(e_1, e_2) >$.

2 Conseils spécifiques annales:

2.1 Centrale PSI 2019 Maths 2

M est nilpotente ssi $\chi_M = X^n$:
On montre l'implication indirecte à l'aide du *théorème de Cayley-Hamilton.*
Pour l'implication directe, on montre déjà que 0 est la seule valeur propre de M. Alors χ_M est scindé, sur $\mathbb{C}$, avec 0 pour unique racine, *il est unitaire, de degré* n donc c'est X^n.

$Q(0) \neq 0$**, montrer que Q(A) est inversible:**
On écrit Q sous la forme $Q = \alpha \prod_{k=1}^{d}(X - z_k)$. Ainsi $Q(A) = \alpha \prod_{k=1}^{d}(A - z_k I_n)$
On sait que les z_i sont non nuls, or Sp(A) = 0 donc les z_i ne sont pas des valeurs propres de A *donc les* $A - z_i I_n$ *sont inversibles.* Finalement *Q(A) est inversible en tant que produit de matrices inversibles.*

Inégalité majeure sur l'indice de nilpotence:
○ $p \leq n$ ○ Pour le démontrer on raisonne par l'absurde et on réussit à prouver que la famille de n+1 vecteurs d'un espace de dimension n $(x, u(x), ..., u^n(x)$ est libre ce qui est absurde.

'Montrer qu'il existe un plus petit/grand entier tel que':
Si possible on utilise un argument ensembliste comme : A est non vide et majorée donc admet un plus grand élément.

2.2 Racine de matrices

○ *On suppose que* $\lambda \in Sp(B) \Leftrightarrow \lambda^2 \in Sp(A)$, *montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.*
On commence par poser $\sigma(A) = \sum_{\mu \in Sp(A)} dim(E_\mu(A))$. Notons $\mu_1, ...\mu_s$ les valeurs propres de A et soit λ_i une racine de μ_i alors $Sp(B) = \{\pm\lambda_1, ..., \pm\lambda_s\}$.
L'idée importante ici est de *faire une disjonction de cas par rapport au fait que 0 soit valeur propre ou non de A* (car 0 n'a qu'une racine). En raisonnant sur les sommes des dimensions des espaces propres, et en remarquant que $dim(E_{\lambda_{\pm k}}(B)) = dim(E_{\mu_k}(A))$ on retrouve la proposition.

Montrer que I_2 admet une infinité de racine:
Toute matrice de réflexion M vérifie $M^2 = I_2$.

Remarque: Desfois il arrive que dans les exercices il faille vraiment faire des systèmes pour déterminer l'ensemble des racines d'une matrice.

2.3 X MP2 2007

Montrer que toute matrice commutant avec une matrice diagonale avec des nombres diagonaux distincts est diagonale:
D possède des sous-espaces propres de dimension 1, les vecteurs propres engendrent les espaces. Tout ces espaces sont stables par A, Donc $A(x_k)$ est de la forme $a_k x_k$ donc A est diagonale.

Remarque: Toujours se rappeler qu'un espace propre est non trivial

Question en lien avec des familles libres:
Penser au fait que les sous-espaces propres sont en somme directe (alternativement on peut tout redémontrer avec les polynomes interpolateurs.)