Probabilités

March 2024

1 Raisonnements usuels

◦ Pour les raisonnements avec min ou max, il est souvent utile de s'intéresser $P(X \leq k)$ pour déterminer la loi. (*Exercice 19*)

◦ $\boxed{|a-b| = max(a,b) - max(a,b)}$ et $\boxed{max(a,b) + min(a,b) = a+b}$(*Borel-Cantelli*)

◦ Si une loi est définie comme somme de vard indépendantes, soit on est dans le cas d'une loi binomiale, soit il peut être utile d'utiliser la fonction génératrice.(*Borel-Cantelli*)

◦ Lorsque les événements sont décrits avec des inclusions / intersections ne jamais oublier la continuité décroissante et la sous-additivité qui permettent d'obtenir la majorité des limites.(*Borel-Cantelli*)

◦ **Justifier qu'un objet est une variable aléatoire:**
Il faut justifier que toutes les valeurs prenables par l'objet S sont des événements, c'est à dire qu'ils appartiennent à la tribu. Pour cela, il est usuel d'écrire l'événement $\{S = k\}$ comme une inclusion ou une intersection. De plus, on sait que la tribu A est stable par intersection finie et par toute inclusion; ce qui permet souvent de conclure.*(Formule de Wald)*

2 Compléments de cours

Loi de Rademacher:
$X(\Omega) = \{-1, 1\}, P(X = \pm 1) = \frac{1}{2}$

On introduit $X_1, ..., X_n$ indépendantes qui suivent cette loi.
On peut poser $Y_k = \frac{X_k+1}{2}$, alors $Y_k \sim$ B$(\frac{1}{2})$

Loi binomiale négative
$X_1, ..., X_m$ *mutuellement indépendantes et de même loi de poisson p*

Pour le calcul de la fonction génératrice, utiliser le binôme généralisé.

3 Compléments concours

3.1 X PC 2023

∘ Soit $(X_1, ..., X_n)$ un système complet d'événements: $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{X_k} = 1}$

3.2 CCMP 1 PC 2016

∘ $P(S_{k+1} - S_k = j_1, ..., S_n - S_k = j_{n-k}) = P(S_1 = j_1, ..., S_{n-k} = j_{n_k})$:
Montrer que $\Theta : (z_1, ..., z_{n-k}) \mapsto (z_1, z_1+z_2, ..., \sum_{k=1}^{n-k} z_j)$ est bijective, l'appliquer à $F = (S_{k+1}-S_k, ..., S_n-S_{n-1})$ ce qui permet à arriver à des égalités d'événement.

∘ Probabilité d'une intersection quand il n'y à priori pas d'indépendance : *Formule de Bayes.*

∘ **Loi de Rademacher : Probabilité de somme nulle**:
Si n est pair, la somme est non nulle, la probabilité est nulle.
Si n est pair, se ramener à une loi binomiale.

3.3 X PC 2018

Montrer une existence avec des probabilités
On montre que la probabilité d'un événement est non nulle, ainsi l'ensemble des x qui le réalise est non vide.

3.4 CCMP 1 PC 2018

∘ $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$:

On montre que l'application $k \mapsto \binom{n}{k}$ est croissante sur $\{0, ..., \lfloor \binom{n}{2} \rfloor\}$

3.5 CCMP 2 PSI 2023

∘ **Majoration grossière de k!**
Cette inégalité va être utile pour majorer des sommes

Soit $k \geq n + 1$.
$k! = (n + 1)! \times \prod_{l=n+2}^{k} l$

$k! \geq (n+1)! \prod_{l=n+2}^{k} (n+2)$
$k! \geq (n+1)!(n+2)^{k-(n+2)+1}$

3.6 CCMP 1 PC 2021

∘ Variables symétriques:
Def: $\forall x \in X(\Omega), P(X=x) = P(X=-x)$

Alors on peut par exemple remarquer que X et -X suivent la même loi donc f(X) et f(-X) également, et certains raisonnements pour les fonctions paires / impaires.
Pour une fonction paire, la dérivée est impaire et si elle est dérivable en 0 alors sa dérivée s'annule.

4 Astuces en vrac:

Quand on a des variables indépendantes qui suivent la même loi:
Si l'on calcule l'espérance pour une valeur en particulier alors on peut dire que l'espérance vaut $n \times \mathbb{E}(X_1)$. Cependant, le raisonnement dans l'autre sens peut également servir: Réécrire $n \times \mathbb{E}(X_1) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_1)$ et utiliser la linéarité de l'espérance.