Algèbre linéaire

December 2023

---

1 Conseils généraux et réflexes

Egalité d'ensemble: *Soit on montre une inclusion, puis l'égalité des dimensions, soit on montre les deux inclusions.*

Montrer que l'image et le noyau sont supplémentaires: *Soit on passe par l'inclusion nulle et l'égalité des dimensions soit on écrit :*

$$\forall x \in E, x = (x - p(x)) + p(x)$$

'Préciser le noyau et l'image de':
Ecrire en premier lieu les inclusions triviales comme : $Ker(f) \subset Ker(f^2)$ *ou* $Im(f^2) \subset Im(f)$ *et utiliser les hypothèses de l'énoncé pour montrer l'autre inclusion.*

Polynomes de matrices avec des matrices semblables:
On suppose $A = PBP^{-1}$, alors $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = PB^kP^{-1}$. Ainsi $\forall Q \in \mathbb{R}[X], Q(A) = PQ(B)P^{-1}$

Montrer efficacement qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel :
Tout ensemble que l'on peut écrire sous la forme Ker(?), Im(?) ou Vect(?) est un sous-espace vectoriel.
Exemple : $\{M \in M_n(\mathbb{R}); tr(M) = 0\} = \text{Ker(tr)}$ est un sous-espace vectoriel.

2 Isomorphismes

Dans cette épreuve, il était question à de nombreuses reprises d'isomorphismes.

Montrer qu'une application est un isomorphisme:
○ On peut commencer par montrer qu'une application est linéaire et injective. Puis deux manières de conclure, soit on explique qu'*en dimension finie l'injectivité est équivalente à la bijectivité*, soit qu'*une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension est un isomorphisme.*
○ On montre par une analyse synthèse la présence d'un unique antécédent.

Une question d'existence d'un espace avec une égalité des dimensions doit faire penser aux isomorphismes.

En outre il est toujours bon de garder à l'esprit les isomorphismes de référence notamment $u \mapsto M_B(u)$.

3 Sur les familles libres

Question classique: On suppose que $u^p(x) = 0; u^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est libre
Soit $(\lambda_0, ..., \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tels que $\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^i(x) = 0_E$.
On suppose que les λ_i sont non tous nuls et on note alors i_0 le plus petit des indices tel que $\lambda_i \neq 0$, l'égalité devient $\sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i u^i(x) = 0_E$.
Mais en appliquant u^{p-1-i_0} il vient $\lambda_{i_0} u^{p-1}(x) = 0$, les deux termes du produit sont non nuls, on aboutit à une contradiction donc tout les λ_i sont nuls. Ainsi la famille est libre.

Question classique (à la suite): Montrer que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x), y, u(y), ..., u^{q-1}(y))$ est libre:
Déjà par liberté des familles $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ et $(y, u(y), ..., u^{q-1}(y))$, si tout les λ_i sont nuls alors tout les μ_j le sont aussi et réciproquement, on se place alors dans le cas où ils sont non tous nuls et on introduit i_0, j_0 comme au paragraphe précédent alors $\sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i u^i(x) + \sum_{j=j_0}^{q-1} \mu_j u^j(y) = 0_E$.
On effectue alors une disjonction de cas:
○ Si $p - 1 - i_0 > q - 1 - j_0$: On applique u^{p-1-i_0} et on trouve $\lambda_{i_0} u^{p-1}(x) = 0$ qui est faux.
○ Si $q - 1 - j_0 > p - 1 - i_0$: On applique u^{q-1-j_0} et on trouve $\mu_{j_0} u^{q-1}(y) = 0$ qui est faux.
○ Si $q - 1 - j_0 = p - 1 - i_0$, on applique u^{q-1-j_0} et on trouve: $\lambda_{i_0} u^{p-1}(x) + \mu_{j_0} u^{q-1}(y) = 0$ qui contredit que la famille soit libre.
Finalement, dans tout les cas les contradictions nous permettent d'affirmer que la famille 'concaténée' est libre.

Remarque sur les inclusions strictes:
Si on suppose que $Vect(y) \subset A$ avec une inclusion stricte, alors il existe z dans A tel que (y,z) forme une famille libre.

4 Sur les matrices stochastiques

Montrer l'existence d'une ligne L telle que $P = U \times L$:
La matrice P est de rang 1, chaque colonne est multiple de U, on pose L la ligne qui contient la proportionnalité par rapport à U.

La somme des coefficients d'une matrice stochastique vaut 1 en particulier pour tout x, $x = \sum_{k=1}^{n} A_k \times x$

Pour que la somme vaille 1, il existe au moins un coefficient de la ligne qui est strictement positif.

5 Cas spécifiques

5.1 CCMP PC 2007 Maths 1:

◦ On sait que $A = WBW^{-1}$, on veut une formule du type $A' = WDW^{-1}$, on doit penser à passer par les changements de base ou de façon analogue à dire que la matrice dans la nouvelle base de A' est D.
◦ $u(\mathbb{R})$ désigne en fait Im(u)
◦ Quand on veut montrer une inégalité qui contient l'inverse d'une matrice, on peut déjà s'intéresser à ce que donnerait l'égalité en multipliant de l'autre côté , exemple : *Montrer que :* $\sum_{j=0}^{k-1}(I_n - C)^j = (I_n - (I_n - C)^k)C^{-1}$
◦ Toujours bon de se rappeler que rg(f) correspond à $n - dim(E_0(f))$

5.2 CCMP PC 2001 Maths 1:

◦ *Montrer que si* $Ker(f^p) = Ker(f^{p+1}) : \forall q \geq p\ Ker(f^q) = Ker(f^{q+1})$:
On procède par récurrence, l'initialisation est triviale.
Pour l'hérédité : Soit x$\in Ker(f^{q+2}), f^{q+2}(x) = 0$. *Or* $f^{q+2}(x) = f^{q+1}(f(x))$. Donc $f(x) \in Ker(f^{q+1})$. Mais d'après *(HR)* : $Ker(f^{q+1}) = Ker(f^q)$. Ainsi $f^q(f(x)) = 0 = f^{q+1}(x)$. Donc $Ker(f^{q+2}) \subset Ker(f^{q+1})$.
L'autre inclusion est triviale.

5.3 X PC 2009:

Calcul de l'inverse par la méthode des cofacteurs:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \times C^T$$

où C est la **matrice des cofacteurs**: $\forall(i,j) \in [1,n]^2, C_{i,j}$ est le déterminant de A privée de la ligne i et de la colonne j.

5.4 CCMP PC 2020 Maths 1:

Calcul de $(u+tv)^k$ dans le cas où les endomorphismes ne commutent pas:
On montre par récurrence sur k l'existence d'une famille d'endomorphismes $(f_0^{(k)}, ..., f_k^{(k)})$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, (u+tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}$.
Pour montrer l'unicité d'une telle famille, on en suppose une autre vérifiant les mêmes propriétés et en passant par les représentations matricielles on trouve l'égalité des matrices représentatives.
Une seconde récurrence donne l'expression de $f_1^{(k)}$.

Montrer que $f_1^{(p)} = 0$:
(u+tv) est nilpotent d'indice inférieur à p donc $(u+tv)^p = 0$, par *unicité des coefficients pour un polynome* : $f_1^{(p)} = 0$.

5.5 X MP2 2007:

Phrase clé quand on travaille sur une base et non pour tout élément:
Soit on réussit à montrer que l'endomorphisme s'annule sur une base alors c'est l'endomorphisme nul.

Stratégie rare pour chercher des sous-espaces stables:
On rappelle que *toutes les puissances de F commutent avec F*. Ainsi il est parfois intéressant de s'intéresser aux $Ker(F^k)$

Réflexe: Montrer que proportionnel
Montrer qu'il appartient au sous espace engendré par la valeur.

Cas assez rare pour montrer que la taille d'une famille est égale à sa dimension:
Montrer que cette famille est une base de l'espace.

Montrer qu'il existe un élément dans un certain ensemble E qui vérifie ...
Incite à s'intéresser à l'endomorphisme induit

Si une quelconque puissance annule f alors f n'est pas bijective:
Peut surement se démontrer en regardant $f(f^{n-1}(x))$ et $f(f^{n-1}(-x))$.
Sert à dire que le noyau est non trivial