Isométries et Endomorphismes symétriques

February 2024

1 Sur les isométries

1.1 Montrer que tout les coefficients d'une matrice orthogonale sont de module inférieur à 1.

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Soit $(i,j) \in [1,n]^2$
Les colonnes de A sont de norme 1 donc $\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}^2 = 1$.
Ainsi $a_{i,j}^2 \leq 1$ donc $|a_{i,j}| \leq 1$.

Démonstration alternative:

$a_{i,j} = (E_i|AE_j)$.
D'après *l'inégalité de Cauchy-Schwarz :* $|a_{i,j}| \leq ||E_i|| \times ||AE_j||$.
Or A est une matrice d'isométrie donc $||AE_1|| = ||E_1||$.
Ainsi $|a_{i,j}| \leq ||E_i|| \times ||E_j|| = 1$

1.2 Les valeurs propres d'une matrice orthogonale sont de module 1

Soit λ une valeur propre complexe de A et U un vecteur propre associé.
Remarque: On s'intéresse au module d'une valeur propre complexe, il est logique de s'y ramener grâce à la formule $\lambda \times \bar{\lambda} = |\lambda|^2$

$\bar{AU} = \bar{\lambda U}$
Mais A est une matrice réelle donc $\bar{AU} = A\bar{U}$.
$(AU)^T \times (A\bar{u}) = (\lambda U)^T \times \bar{\lambda U}$
$U^T A^T A\bar{U} = \lambda U^T \bar{\lambda}\bar{U}$
Or $A^T A = I_n$ d'où l'égalité:
$U^T \bar{U} = |\lambda|^2 \times U^T \bar{U}$
En outre $U^T \bar{U} = \sum_{k=1}^{n} |u_k|^2 > 0$, il est donc licite de diviser.
$|\lambda| = 1$

1.3 $O_n(\mathbb{R})$ est fermé, borné dans $M_n(\mathbb{R})$

Borné:
On peut choisir la norme en dimension finie, prenons la norme infinie:
$||M||_\infty = max(|a_{1,1}|, ..., |a_{n,n}|) \leq 1$

Fermé:
Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne suite d'éléments de $O_n(\mathbb{R})$ donc la limite est notée L.
$\forall k \in \mathbb{N}, M_k^T \times M_k = I_n$
La transposée est une application linéaire de dimension finie donc est continue ainsi $M_k^T \xrightarrow{k\to+\infty} L^T$.
Par *continuité du produit matriciel:* $L^T L = I_n$ donc $L \in O_n(\mathbb{R})$. Donc c'est bien un fermé.

Variante:

Soit $f : M \mapsto M^T M$.
f est continue (linéaire en dimension finie) et $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}\{I_n\}$ qui est un fermé.

1.4 -1 est valeur propre de toute matrice de $O_n^-(\mathbb{R})$

Le déterminant vaut -1 et les valeurs propres complexes ont une contribution pour 1. Il y a au moins une fois -1 dans le produit

2 Sur les endomorphismes symétriques positifs

2.1 $f \in S^+(E) \Leftrightarrow Sp(f) \subset \mathbb{R}+$

On suppose que f est un endomorphisme symétrique positif. Soit λ une valeur propre et x un vecteur propre associé.
$(x|f(x)) \leq 0$ mais $(x|f(x)) = (x|\lambda x) = \lambda||x||^2$.
Or *x est un vecteur propre* donc $||x||^2 > 0$.
Donc $\lambda > 0$.

Réciproquement, on suppose que f est symétrique réel et que son spectre est à valeur dans $\mathbb{R}^+$.
D'après le *théorème spectral*, il existe une b.o.n $\epsilon = (e_1, ..., e_n)$ de constituée de vecteur propres de f.
Pour tout k, on note λ_k la valeur propre de f associée à e_k.
Soit $x \in E$, on le décompose dans cette b.o.n.
x = $x_1 e_1 + ... + x_n e_n$.
Alors f(x) = $x_1 f(e_1) + ... + x_n f(e_n) = x_1\lambda_1 e_1 + ... + x_n \lambda_n e_n$
Donc $(x|f(x)) = (x|\sum_{k=1}^n x_k f(e_k)) = \sum_{k=1}^n x_k \lambda_k (x|e_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \geq 0$

2.2 Accéder à certains coefficients:

Soit $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
Remarque : $a_{1,1} = E_1^T A E_1$ et $a_{2,2} = E_2^T A E_2$.
En particulier, si A est positive $a_{1,1}, a_{2,2}$ également.

On peut également accéder au déterminant en prenant X = $\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ et en réfléchissant sur le signe du discriminant

2.3 $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$

La démonstration est trop hors programme (norme d'opérateurs) mais peut peut-être servir un jour.

2.4 Quotient de Rayleigh:

Définition: Soit f un endomorphisme de E. On définit le quotient de Rayleigh de f:
$Q_f : x \mapsto \frac{(x|f(x))}{(x|x)}$

Enoncé: Pour les endomorphismes symétriques positifs, on peut encadrer le quotient de Rayleigh entre la plus grand et la plus petite valeur propre.

On utilise le *théorème spectral* pour introduire une b.o.n de diagonalisation et on effectue explicitement le calcul.

2.5 Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$, il existe une (unique) matrice $n \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$

D'après le *théorème spectral*, M est diagonalisable donc il existe $P \in O_p(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonal. Notons $m_1, ..., m_n$ ses valeurs propres qui sont d'après ce que l'on a montré positives.
On pose N = $diag(\sqrt{m_1}, ..., \sqrt{m_n})$. On peut vérifier que N remplit bien les conditions.

2.6 Application à la décomposition polaire:

Enoncé : Soit A une matrice inversible. Il existe un unique couple (O,S) de matrices telles que A=OS, S est définie positive et O est orthogonale.
On remarque que $A^T A = S^2$.
D'après ce que l'on vient de montrer il y unicité de la 'racine de matrice', on pose donc $S = (A^T A)^{\frac{1}{2}}$ puis $O = AS^{-1}$.