BÀI TẬP XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Họ tên: Nguyễn Tiến Thành
MSSV: 23120358

Bài toán 1

Một bài báo được đăng trên trang Vietnamnet.vn ngày 11/10 với tiêu đề "Bộ GD-ĐT đề nghị ..." có đăng số liệu của Tổng cục Thống kê tại Bác cáo điều tra lao động việc làm năm 2020. Theo đó, tỷ lệ thất nghiệp trong lực lượng lao động là $2,19\%$. Tỷ lệ lao động có trình độ cao đẳng, đại học trở lên là $14,9\%$. Trong số những người thất nghiệp, thì tỷ lệ người có trình độ cao đẳng, đại học trở lên chiếm $30,8\%$.
Chọn ngẫu nhiên một người trong lực lượng lao động.

(a) Xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên và thất nghiệp là bao nhiêu?

(b) Xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên hoặc thất nghiệp là bao nhiêu?

(c) Nếu biết người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên thì xác suất người này thất nghiệp là bao nhiêu?

(d) Nếu biết người này không thất nghiệp, thì xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A là biến cố "người lao động thất nghiệp".
Gọi B là biến cố "người lao động có trình độ cao đẳng, đại học".
Theo đề bài, ta có các xác suất

- $\mathbb{P}(A) = 0.0219$
- $\mathbb{P}(B) = 0.149$
- $\mathbb{P}(B|A) = 0.308$

(a) Xác suất người lao động có trình độ cao đẳng, đại học trở lên và thất nghiệp

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = 0.308 \cdot 0.0219 = 0.0067$$

(b) Xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên hoặc thất nghiệp là

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A+B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) \\ &= 0.0219 + 0.149 - 0.0067 \\ &= 0.1642\end{aligned}$$

(c) Nếu biết người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên thì xác suất người này thất nghiệp là

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{0.0067}{0.149} \\ &= 0.045\end{aligned}$$

(d) Nếu biết người này không thất nghiệp, thì xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên là

$$\mathbb{P}(B|\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A}B)}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{0.149 - 0.0067}{1 - 0.0219} = 0.1455$$

Bài toán 2

Thời gian cần thiết để sinh viên hoàn thành một bài kiểm tra 60 phút là một biến ngẫu nhiên liên tục X (đơn vị: giờ) với hàm mật độ xác suất cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + x & ,0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{nơi khác} \ . \end{cases}$$

(a) Tìm c.
(b) Tìm xác suất để một sinh viên được chọn ngẫu nhiên sẽ hoàn thành trong ít hơn 30 phút.
(c) Cho biết sinh viên A cần ít nhất 15 phút để hoàn thành bài kiểm tra, tìm xác suất để sinh viên A sẽ cần ít nhất 30 phút để hoàn thành.

Lời giải

(a) Để $f(x)$ là hàm mật độ xác suất thì $f(x)$ phải thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 cx^2 + x\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{cx^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right|_0^1 \\ &= \frac{c}{3} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{3} + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$

Với $c = \dfrac{3}{2}$ thì

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2 + x & ,0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{nơi khác} \ . \end{cases}$$

Ta có $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + x \geq 0, \forall x \in [0;1] \\ f(x) = 0, \forall x \notin [0;1] \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy $k = \dfrac{3}{2}$ thỏa mãn.

(b) Đổi 30 phút = 0,5 giờ. Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 0,5) &= \int_{-\infty}^{0,5} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{0,5} \frac{3}{2}x^2 + x\mathrm{d}x \\ &= 0,1875\end{aligned}$$

(c) Theo câu (b), ta có $\mathbb{P}(X \geq 0.5) = 1 - 0.1875 = 0.8125$.
Đổi 15 phút = 0.25 giờ. Ta có

$$\mathbb{P}(X \geq 0.25) = \int_{0.25}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0.25}^{1} \frac{3}{2}x^2 + x\mathrm{d}x = \frac{123}{128}$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \geq 0.5 | X \geq 0.25\right) &= \frac{\mathbb{P}((X \geq 0.5) \cap (X \geq 0.25))}{\mathbb{P}(X \geq 0.25)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \geq 0.5)}{\mathbb{P}(X \geq 0.25)} \\ &= \frac{0.8125}{\frac{123}{128}} \\ &= 0.8455\end{aligned}$$

Bài toán 3

Đường kính của một sợi bán dẫn được giả sử có phân phối chuẩn với trung bình $0,5\mu$ m và độ lệch chuẩn $0,05\mu$ m.

(a) Tính xác suất để đường kính của một sợi lớn hơn $0,62\mu$ m.

(b) Tính xác suất để đường kính của một sợi nằm giữa 0,47 và $0,63\mu$ m

(c) (không bắt buộc) Đường kính sợi của 90% mẫu nhỏ hơn giá trị nào? (Tức là, tìm x sao cho $\mathbb{P}(X < x) = 0,9$)

Lời giải

Gọi X là đường kính của một sợi bán dẫn.
Theo đề bài, $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Ta có

- Trung bình $\mu = 0.5$ (μm)
- Độ lệch chuẩn $\sigma = 0.05$ (μm)

(a) Xác suất để đường kính của một sợi lớn hơn 0.62 μm

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 0.62) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 0.62) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{0.62-\mu}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-0.5}{0.05} < \frac{0.62-0.5}{0.05}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(Z < 2.4\right) \text{ với } Z \sim \mathcal{N}(0;1) \\ &= 1 - \Phi(2.4) \\ &= 1 - 0.9918 = 0.0082\end{aligned}$$

(b) Xác suất để đường kính của một sợi nằm giữa 0,47 và 0,63 μm

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(0.47 \leq X \leq 0.63) &= \mathbb{P}\left(\frac{0.47-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{0.63-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{0.47-0.5}{0.05} \leq \frac{X-0.5}{0.05} \leq \frac{0.63-0.5}{0.05}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-0.6 \leq Z \leq 2.6\right) \text{ với } Z \sim \mathcal{N}(0;1) \\
&= \Phi(2.6) - \Phi(-0.6) \\
&= \Phi(2.6) - 1 + \Phi(0.6) \\
&= 0.9953 - 1 + 0.7257 \\
&= 0,721
\end{aligned}$$

(c) Đường kính sợi của 90% mẫu nhỏ hơn giá trị nào? (Tức là, tìm x sao cho P(X < x) = 0,9)
Ta có:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < x) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0.9 \Leftrightarrow \frac{x-\mu}{\sigma} = 0.8159 \Leftrightarrow x = 0.8159 \cdot 0.05 + 0.5 = 0.5408$
Vậy đường kính sợi của 90% mẫu nhỏ hơn giá trị 0.5408.

Bài toán 4

Một bài báo đăng tỷ lệ thất nghiệp trong lực lượng lao động là $2,19\%$. Tỷ lệ lao động có trình độ cao đẳng, đại học trở lên là $14,9\%$. Trong số những người thất nghiệp, thì tỷ lệ người có trình độ cao đẳng, đại học trở lên chiếm $30,8\%$. Chọn ngẫu nhiên một người trong lực lượng lao động.

(a) Xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên và KHÔNG thất nghiệp là bao nhiêu?
(b) Xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên hoặc KHÔNG thất nghiệp là bao nhiêu?
(c) Nếu biết người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên thì xác suất người này thất nghiệp là bao nhiêu?
(d) Nếu biết người này không thất nghiệp, tính xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên?

Lời giải

Phép thử "Chọn ngẫu nhiên một người trong lực lượng lao động."
Gọi A là biến cố "người lao động thất nghiệp".
Gọi B là biến cố "người lao động có trình độ cao đẳng, đại học".
Theo đề bài, ta có các xác suất
- $\mathbb{P}(A) = 0.0219$
- $\mathbb{P}(B) = 0.149$
- $\mathbb{P}(B|A) = 0.308$

(a) Xác suất người lao động có trình độ cao đẳng, đại học trở lên và thất nghiệp

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = 0.308 \cdot 0.0219 = 0.0067$$

Xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên và KHÔNG thất nghiệp là

$$\mathbb{P}(\overline{A}B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) = 0.149 - 0.0067 = 0.1423$$

(b) Xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên hoặc KHÔNG thất nghiệp là

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A} + B) &= \mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\overline{A}B) \\ &= 1 - 0.0219 + 0.149 - 0.1423 \\ &= 0.9848\end{aligned}$$

(c) Nếu biết người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên thì xác suất người này thất nghiệp là

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{0.0067}{0.149} \\ &= 0.045\end{aligned}$$

(d) Nếu biết người này không thất nghiệp, thì xác suất người này có trình độ cao đẳng, đại học trở lên là

$$\mathbb{P}(B|\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A}B)}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{0.1423}{1 - 0.0219} = 0.1455$$

Bài toán 5

Frontier là một hệ thống siêu máy tính nhanh nhất thế giới tính đến tháng 10/2022. Trong một cuộc phỏng vấn gần đây, Justin Whitt, giám đốc chương trình có nói rằng hệ thống Frontier liên tục gặp lỗi phần cứng sau vài giờ vận hành. Giả sử khoảng thời gian giữa hai lần gặp lỗi phần cứng liên tiếp (đơn vị: giờ) là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \times e^{-\frac{x}{6}} & , x > 0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}$$

(a) Tính xác suất Frontier hoạt động liên tục trong 1 ngày (24 giờ).

(b) Tính $\mathbb{E}(X)$ và $\text{Var}(X)$.

Lời giải

Gọi X (giờ) là biến ngẫu nhiên thể hiện khoảng thời gian giữa hai lần gặp lỗi phần cứng liên tiếp

(a) Xác suất Frontier hoạt động liên tục trong 24 giờ:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \ge 24) &= \int_{24}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{24}^{+\infty} \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}\mathrm{d}x \\ &= \left(-e^{-\frac{1}{6}x}\right)\Big|_{24}^{+\infty} \\ &= e^{-4} \approx 0.0183\end{aligned}$$

(b) Theo định nghĩa

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{6}e^{-\frac{x}{6}}\mathrm{d}x \\ &= 6\end{aligned}$$

Theo định nghĩa

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{6}e^{-\frac{x}{6}}\mathrm{d}x \\ &= 72\end{aligned}$$

Suy ra, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 72 - 6^2 = 36$

Bài toán 6

Số khách hàng đến một quầy thanh toán tại một siêu thị trong một giờ tuân theo phân phối Poisson với trung bình bằng bảy. Trong một giờ nhất định, tính xác suất

(a) không có hơn 3 khách hàng đến?

(b) ít nhất 2 khách hàng đến?

(c) có chính xác 5 khách hàng đến?

Nhắc lại: Cho $X \sim P(\lambda)$. Khi đó, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ với $k = 0, 1, 2, \ldots$ và $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

Lời giải

Gọi Y là số khách hàng đến thanh toán tại một siêu thị trong một giờ.
Theo đề bài, ta có $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ với $\lambda > 0$.
Vì Y có phân phối Poisson nên ta có

- Trung bình Y: $\mathbb{E}(Y) = \lambda = 7$
- Phương sai Y: $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = \lambda = 7$

(a) Xác suất không có hơn 3 khách hàng đến

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \le 3) &= \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(Y = 3) \\ &= e^{-7} \cdot \frac{7^0}{0!} + e^{-7} \cdot \frac{7^1}{1!} + e^{-7} \cdot \frac{7^2}{2!} + e^{-7} \cdot \frac{7^3}{3!} \\ &= 0.0818\end{aligned}$$

(b) Xác suất có ít nhất hai khách hàng đến

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \ge 2) &= 1 - \mathbb{P}(Y < 2) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) \\ &= 1 - e^{-7} \cdot \frac{7^0}{0!} - e^{-7} \cdot \frac{7^1}{1!} \\ &= 0.9927\end{aligned}$$

(c) Xác suất có chính xác 5 khách hàng đến

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=5) &= e^{-7}\cdot\frac{7^5}{5!}\\ &= 0.1277\end{aligned}$$

Bài toán 7

Đối với các cặp vợ chồng một vùng ngoại ô, xác suất để người chồng sẽ bỏ phiếu trong cuộc bầu cử là 0,21 , xác suất để người vợ sẽ bỏ phiếu là 0,28 , và xác suất để cả chồng và vợ sẽ bỏ phiếu là 0,15 . Hỏi xác suất để

(a) ít nhất một trong hai vợ chồng sẽ bỏ phiếu?
(b) người vợ bỏ phiếu, biết rằng chồng cô ấy sẽ bỏ phiếu?
(c) người chồng bỏ phiếu, biết rằng vợ ông ấy sẽ không bỏ phiếu?

Lời giải

Gọi C là biến cố "Người chồng bỏ phiếu".
Gọi V là biến cố "Người vợ vỏ phiếu".
Theo đề, ta có các xác suất

- $\mathbb{P}(C)=0.21$
- $\mathbb{P}(V)=0.28$
- $\mathbb{P}(VC)=0.15$

(a) Xác suất ít nhất một trong hai vợ chồng sẽ bỏ phiếu

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V+C) &= \mathbb{P}(V)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(VC)\\ &= 0.28+0.21-0.15\\ &= 0.34\end{aligned}$$

(b) Xác suất người vợ bỏ phiếu, biết rằng chồng cô ấy sẽ bỏ phiếu

$$\mathbb{P}(V|C)=\frac{\mathbb{P}(VC)}{\mathbb{P}(C)}=\frac{0.15}{0.21}=\frac{5}{7}\approx 0.7143$$

(c) Xác suất người chồng bỏ phiếu, biết rằng vợ ông ấy sẽ không bỏ phiếu

$$\mathbb{P}(C|\overline{V})=\frac{\mathbb{P}(C\overline{V})}{\mathbb{P}(\overline{V})}=\frac{\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(VC)}{1-\mathbb{P}(V)}=\frac{0.21-0.15}{1-0.28}=\frac{1}{12}\approx 0.0833$$

Bài toán 8

Giả sử rằng bốn thanh tra viên tại một công ty sản xuất phải đóng dấu ngày hết hạn lên mỗi sản phẩm vào cuối dây chuyền.

- An, đóng 20% sản phẩm, không đóng dấu ngày hết hạn một lần trong mỗi 200 sản phẩm;
- Bình đóng 60% sản phẩm, không đóng dấu ngày hết hạn một lần trong mỗi 100 sản phẩm;
- Cường đóng 15% sản phẩm, không đóng dấu ngày hết hạn một lần trong mỗi 90 sản phẩm;
- Dũng đóng 5% sản phẩm, không đóng dấu ngày hết hạn một lần trong mỗi 200 sản phẩm;

Nếu một khách hàng than phiền rằng sản phẩm của họ không có thông tin thể hiện ngày hết hạn, thì xác suất để nó đã được kiểm tra bởi An là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A là biến cố "Sản phẩm được An đóng dấu"
Gọi B là biến cố "Sản phẩm được Bình đóng dấu"
Gọi C là biến cố "Sản phẩm được Cường đóng dấu"
Gọi D là biến cố "Sản phẩm được Dũng đóng dấu"
Gọi F là biến cố "Sản phẩm được kiểm tra nhưng không được đóng dấu"
Theo đề bài, ta có các xác suất

- $\mathbb{P}(A) = 0.2$
- $\mathbb{P}(B) = 0.6$
- $\mathbb{P}(C) = 0.15$
- $\mathbb{P}(D) = 0.05$
- $\mathbb{P}(F|A) = 0.005$
- $\mathbb{P}(F|B) = 0.01$
- $\mathbb{P}(F|C) = \frac{1}{90}$
- $\mathbb{P}(F|D) = 0.005$

Ta có A, B, C, D tạo thành một hệ đầy đủ các biến cố nên áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(F|A) + \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(F|B) + \mathbb{P}(C)\cdot\mathbb{P}(F|C) + \mathbb{P}(D)\cdot\mathbb{P}(F|D) \\
&= 0.2\cdot 0.005 + 0.6\cdot 0.01 + 0.15\cdot\frac{1}{90} + 0.05\cdot 0.005 \\
&= 0.0089
\end{aligned}$$

Suy ra, xác suất sản phẩm đó đã được kiểm tra bởi An là

$$\mathbb{P}(A|F) = \frac{\mathbb{P}(AF)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(F|A)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{0.2\cdot 0.005}{0.0089} = \frac{10}{89} = 0.1124$$

Bài toán 9

Một giáo sư đại học không bao giờ kết thúc bài giảng của mình trước khi hết giờ và luôn hoàn thành bài giảng của mình trong vòng 2 phút sau giờ học. Cho X là thời gian trôi qua giữa thời điểm hết tiết học và kết thúc bài giảng của giáo sư. Giả sử hàm mật độ xác suất của X là

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & \text{khi } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

(a) Tìm k.

(b) Hãy tính xác suất bài giảng kết thúc trong vòng 1 phút sau khi giờ học kết thúc.

(c) Hãy tính xác suất bài giảng tiếp tục diễn ra sau khi giờ học kết thúc từ 60 s tới 90 s ?

(d) Xác suất mà bài giảng tiếp tục trong ít nhất 90 s ngoài giờ kết thúc là bao nhiêu?

Lời giải

(a) Để $f(x)$ là hàm mật độ xác suất thì $f(x)$ phải thỏa hai điều kiện

$$\begin{cases} f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{2} kx^2\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{kx^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 \\ &= \frac{8k}{3} \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \frac{8k}{3} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{8}$. Khi đó ta có

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & \text{khi } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Dễ thấy, với $0 \le x \le 2$ thì $f(x) = \frac{3}{8}x^2 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Với $x < 0$ hoặc $x > 2$ thì $f(x) = 0$

Do đó, $f(x) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow k = \frac{3}{8}$ thỏa mãn.

(b) Xác suất bài giảng kết thúc trong vòng 1 phút sau khi giờ học kết thúc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 \le X \le 1) &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{x^3}{8}\right|_0^1 \\ &= 0.125\end{aligned}$$

(c) Xác suất bài giảng tiếp tục diễn ra từ 60s tới 90s.
Đổi 60s = 1 phút, 90s = 1.5 phút

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 \le X \le 1.5) &= \int_1^{1.5} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{1.5} \frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{x^3}{8}\right|_1^{1.5} \\ &= 0.2969\end{aligned}$$

(d) Xác suất bài giảng tiếp tục trong ít nhất 90s (1.5 phút)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \ge 1.5) &= \int_{1.5}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{1.5}^{2} \frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x + \int_2^{+\infty} 0\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{x^3}{8}\right|_{1.5}^{2} \\ &= 0.5781\end{aligned}$$

Bài toán 10

Một công ty bảo hiểm thực hiện khảo sát trên diện rộng về tình trạng sức khỏe và việc mua bảo hiểm sức khỏe của một cộng đồng dân cư. Kết quả được tổng hợp ở bảng dưới đây

		Tình trạng sức khỏe				
		Hoàn hảo	Rất tốt	Tốt	Tương đối	Yếu
Bảo hiểm sức khỏe	Không	459	727	854	385	99
	Có	4198	6245	4821	1634	578
Tổng cộng		4657	6972	5675	2019	677

(a) Gặp một người có sức khỏe yếu.
(b) Gặp một người không mua bảo hiểm sức khỏe.
(c) Gặp một người có sức khỏe yếu khi biết người đó không mua bảo hiểm sức khỏe.

Lời giải

(a) Gọi A là biến cố "gặp một người có sức khỏe yếu".
Ta có $\mathbb{P}(A) = \dfrac{677}{4657 + 6972 + 5675 + 2019 + 677} = 0,03385$

(b) Gọi B là biến cố "gặp một người không mua bảo hiểm sức khỏe".
Ta có $\mathbb{P}(B) = \dfrac{459 + 727 + 854 + 385 + 99}{4657 + 6972 + 5675 + 2019 + 677} = 0,1262$

(c) Xác suất gặp một người có sức khỏe yếu biết người đó không mua bảo hiểm sức khỏe là

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{99}{20000}}{0,1262} = 0,039$$

Bài toán 11

Giả sử trọng lượng hành lý ký gửi của hành khách đi máy bay tuân theo phân phối chuẩn với trung bình 20.41 kg và độ lệch chuẩn 1.45 kg . Hầu hết các hãng hàng không đều tính phí hành lý nặng hơn 22.67 kg .

(a) Xác định bao nhiêu phần trăm hành khách đi máy bay phải chịu khoản phí này?
(b) Giả sử trong một chuyến bay có 200 hành khách. Cân nặng hành lý của từng hành khách là độc lập nhau. Gọi Y là số lượng hành khách bị phạt vì có hành lý nặng hơn 22.67 kg . Xác định phân phối xác suất của Y, và tính xác suất cho việc có từ 10 đến 20 hành khách bị phạt, tức là $\mathbb{P}(10 \leq Y \leq 20)$.

Lời giải

Gọi X là trọng lượng hành lý ký gửi của hành khách đi máy bay
Theo đề, $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ với $\mu = 20.41$kg và $\sigma = 1.45$kg

(a) Hành khách chịu phí khi trọng lượng hành lý nặng hơn 22.67. Ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 22.67) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 22.67) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{22.67-\mu}{\sigma}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-20.41}{1.45} \leq \frac{22.67-20.41}{1.45}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{22.67-20.41}{1.45}\right) \\
&= 1 - \Phi(1.56) \\
&= 1 - 0.9406 = 0.0594
\end{aligned}$$

(b) Với Y là số lượng hành khách bị phạt vì có hành lý nặng hơn 22.67 kg, ta có $Y \sim B(n; p)$ với $n = 200$ và $p = 0.0594$.
Hàm trọng lượng xác suất của Y

$$f(y) = \begin{cases} C_{200}^{y} \cdot (0.0594)^{y} \cdot (1-0.0594)^{200-y} & , \quad y \in \{0, 1, 2, ..., 200\} \\ 0 & , \quad \text{Nơi khác} \end{cases}$$

Xác suất cho việc có từ 10 đến 20 hành khách bị phạt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(10 \leq Y \leq 20) &= \sum_{y=10}^{20} \mathbb{P}(Y = y) \\
&= \mathbb{P}(Y = 10) + \mathbb{P}(Y = 11) + ... + \mathbb{P}(Y = 20) \\
&= \sum_{y=10}^{20} C_{200}^{y} \cdot (0.0594)^{y} \cdot (0.9406)^{200-y} \\
&= 0.7465
\end{aligned}$$

Bài toán 12

Một quán cà phê phục vụ trung bình 75 khách hàng mỗi giờ vào giờ cao điểm buổi sáng.

(a) Phân phối xác suất nào là thích hợp nhất để tính xác suất mà một số lượng khách hàng nhất định đến trong vòng một giờ vào thời điểm này trong ngày?

(b) Giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của số lượng khách hàng mà quán cà phê này phục vụ trong một giờ vào thời gian này trong ngày là bao nhiêu?

(c) Tính xác suất quán cà phê này phục vụ 70 khách hàng trong một giờ vào thời điểm này trong ngày?

(d) Một sự kiện được coi là bất thường nếu xác suất xảy ra sự kiện đó là nhỏ hơn 1%, nhưng sự kiện đó vẫn xảy ra trong thực tế. Giả sử rằng có nhiều nhất là 55 khách hàng đến quán cà phê này trong một giờ vào giờ cao điểm buổi sáng. Liệu số khách hàng này có được coi là thấp bất thường?

Lời giải

(a) Gọi X là biến ngẫu nhiên thể hiện số khách hàng đến quán trong mỗi giờ vào giờ cao điểm buổi sáng.
Theo đề bài, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ với $\lambda > 0$.

(b) Vì $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ nên ta có

- Trung bình $\mathbb{E}(X) = \lambda = 75$ (Khách hàng)
- Độ lệch chuẩn $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(X)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{75}$ (Khách hàng)

(c) Xác suất quán cà phê này phục vụ 70 khách hàng trong một giờ vào thời điểm này trong ngày

$$\mathbb{P}(X = 70) = e^{-75} \cdot \frac{75^{70}}{70!} \approx 0.0402$$

(d) Xác suất để có nhiều nhất 55 khách hàng đến quán cà phê trong một giờ vào thời điểm cao điểm buổi sáng

$$\sum_{k=0}^{55} \left(e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{55} \left(e^{-75} \cdot \frac{75^k}{k!} \right) \approx 0.0096 < 0.01$$

Do đó, số khách hàng này được coi là thấp bất thường.

Bài toán 13

Một công ty sản xuất ôtô thực hiện khảo sát ý kiến của khách hàng về các sản phẩm của mình. Kết quả thu được như sau: 90% số sản phẩm loại 1 nhận được đánh giá tích cực; 60% số sản phẩm loại 2 nhận được đánh giá tích cực, và 10% số sản phẩm loại 3 nhận được đánh giá tích cực. Giả sử, công ty sản xuất 40% sản phẩm loại $1, 40\%$ sản phẩm loại 2 và 20% sản phẩm loại 3. Một sản phẩm được chọn ngẫu nhiên để kiểm tra.

(a) Tính xác suất sản phẩm được chọn nhận được đánh giá tích cực?

(b) Tính xác suất sản phẩm được chọn nhận được đánh giá tích cực hoặc thuộc loại 1.

(c) Nếu sản phẩm được chọn nhận đánh giá tích cực, thì xác suất nó là sản phẩm thuộc loại 1 là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A là biến cố "Sản phẩm được chọn là loại 1".
Gọi B là biến cố "Sản phẩm được chọn là loại 2".
Gọi C là biến cố "Sản phẩm được chọn là loại 3".
Gọi G là biến cố "Sản phẩm được chọn được đánh giá tích cực".
Theo đề, ta có các xác suất

- $\mathbb{P}(A) = 0.4$
- $\mathbb{P}(B) = 0.4$
- $\mathbb{P}(C) = 0.2$
- $\mathbb{P}(G|A) = 0.9$
- $\mathbb{P}(G|B) = 0.6$
- $\mathbb{P}(G|C) = 0.1$

(a) Vì A, B, C tạo thành một hệ đầy đủ các biến cố, nên áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(G|A) + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(G|B) + \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(G|C) \\
&= 0.4 \cdot 0.9 + 0.4 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.1 \\
&= 0.62
\end{aligned}$$

(b) Xác suất sản phẩm được chọn nhận được đánh giá tích cực hoặc thuộc loại 1

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G+A) &= \mathbb{P}(G)+\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(GA)\\ &= \mathbb{P}(G)+\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(G|A)\\ &= 0.62+0.4-0.4\cdot 0.9\\ &= 0.66\end{aligned}$$

(c) Nếu sản phẩm được chọn nhận đánh giá tích cực, thì xác suất nó là sản phẩm thuộc loại 1 là:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|G) &= \frac{\mathbb{P}(GA)}{\mathbb{P}(G)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(G|A)}{\mathbb{P}(G)}\\ &= \frac{0.4\cdot 0.9}{0.62}\\ &= \frac{18}{31}\approx 0.5806\end{aligned}$$

Bài toán 14

Đường kính (X) của một phân tử (đv: μm) được mô hình hoá bởi hàm mật độ xác suất

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{(x-6)^2} & \text{, nếu } 0\le x\le 4,\\ 0 & \text{, nơi khác}\end{cases}$$

(a) Tìm hằng số C;
(b) Tính giá trị của hàm phân phối xác suất tại 3 ;
(c) Cho $Y=2X+3$. Tính kỳ vọng của Y.

Lời giải

(a) Để $f(x)$ là hàm mật độ xác suất thì $f(x)$ phải thỏa mãn

$$\begin{cases}f(x)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}(\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1\end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x+\int_{4}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^4 \frac{C}{(x-6)^2}\mathrm{d}x\\ &= \left.\frac{-C}{x-6}\right|_0^4\\ &= \frac{C}{2}-\frac{C}{6}\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1 \Leftrightarrow \frac{C}{2}-\frac{C}{6}=1\Leftrightarrow C=3$$

Với $C = 3$ thì

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{(x-6)^2} & , 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{nơi khác} . \end{cases}$$

Ta có $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3}{(x-6)^2} > 0, \forall x \in [0;4] \\ f(x) = 0, \forall x \notin [0;4] \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy $C = 3$ thỏa mãn điều kiện.

(b) Ta có

$$F(3) = \mathbb{P}(X \le 3) = \int_{-\infty}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{3} \frac{3}{(x-6)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} = 0.5$$

(c) Ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(2X+3) \\ &= 2\mathbb{E}(X) + 3 \\ &= 2\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x + 3 \\ &= 2\left(\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} \frac{3x}{(x-6)^2}\mathrm{d}x + \int_{4}^{+\infty} 0\mathrm{d}x\right) + 3 \\ &= 2\left(\int_{0}^{4} \frac{3x}{(x-6)^2}\mathrm{d}x\right) + 3 \\ &\approx 8.4083 \end{aligned}$$

Bài toán 15

Giả sử thời gian hoàn thành đường chạy cự li 100 m của các nam sinh trường T là một biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối chuẩn với trung bình là 15 giây và độ lệch chuẩn là 1,5 giây. Những nam sinh có thành tích chạy dưới 11,5 giây sẽ được chọn vào đội tuyển của trường.

(a) Tính tỷ lệ nam sinh được chọn vào đội tuyển;

(b) Trong một nhóm gồm 30 nam sinh được chọn ngẫu nhiên, hãy tính xác suất để có ít nhất hai nam sinh được chọn vào đội tuyển.

(c) (không bắt buộc) Gọi Y là tổng thời gian hoàn thành đường chạy của 30 sinh viên này. Tính $\mu_Y - \sigma_Y$, với μ_Y và σ_Y lần lượt là kỳ vọng và độ lệch chuẩn của Y.

Lời giải

Gọi X là thời gian hoàn thành chạy cự li 100m của các nam sinh trường T.
Theo đề, $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ với $\mu = 15$ giây và $\sigma = 1.5$ giây.

(a) Nam sinh được chọn vào đội tuyển khi thời gian chạy dưới 11.5 giây. Ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < 11.5) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{11.5-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{X-15}{1.5} < \frac{11.5-15}{1.5}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z < -\frac{7}{3}\right) \text{ với } Z \sim \mathcal{N}(0;1) \\
&= \Phi\left(\frac{-7}{3}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{7}{3}\right) \\
&= 1 - 0.9901 \\
&= 0.0099
\end{aligned}$$

(b) Gọi Y là số nam sinh được chọn vào đội tuyển trong 30 nam sinh được chọn ngẫu nhiên. Theo đề, $Y \sim B(n;p)$ với $n = 30$ và $p = 0.0099$.
Hàm trọng lượng xác suất của Y

$$f(y) = \begin{cases} C_{30}^{y} \cdot (0.0099)^{y} \cdot (0.9901)^{30-y} & , \ y \in \{0,1,2,...,30\} \\ 0 & , \ \text{Nơi khác} \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \le 2) &= 1 - \mathbb{P}(Y < 2) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Y \le 1) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) \\
&= 1 - C_{30}^{0} \cdot (0.0099)^{0} \cdot (0.9901)^{30} - C_{30}^{1} \cdot (0.0099)^{1} \cdot (0.9901)^{29} \\
&= 0.035
\end{aligned}$$

(c) Gọi Y là tổng thời gian hoàn thành đường chạy của 30 sinh viên này. Khi đó

$$Y = X_1 + X_2 + ... + X_{30}$$

Vì thời gian chạy của mỗi sinh viên là độc lập nhau, nên ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(X_1 + X_2 + ... + X_{30}) \\
&= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + ... + \mathbb{E}(X_{30}) \\
&= 30\mathbb{E}(X) \\
&= 30 \cdot 15 \\
&= 450 \text{ (giây)}
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}(Y) &= \mathbb{V}\text{ar}(X_1 + X_2 + ... + X_{30}) \\
&= \mathbb{V}\text{ar}(X_1) + \mathbb{V}\text{ar}(X_2) + ... + \mathbb{V}\text{ar}(X_{30}) \\
&= 30\sigma^2 \\
&= 30 \cdot (1.5)^2 \\
&= 45 \cdot 1.5 = 67.5 \text{ (giây)}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu_Y - \sigma_Y = \mathbb{E}(Y) - \sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(Y)} = 450 - \sqrt{67.5} \approx 441.7842$

Bài toán 16

Một nhà máy có bốn ca làm việc. Trung bình mỗi ngày, tỷ lệ phế phẩm của bốn ca lần lượt là $4\%, 3\%, 2\%$ va 1% tương ứng từ ca 1 dến ca 4 . Giả sử số lượng sản phẩm của bốn ca có tỷ lệ $3:3:2:2$ tương ứng từ ca 1 đến ca 4 . Một sản phẩm được chọn ngẫu nhiên để kiểm tra.

(a) Tính xác suất sản phẩm được chọn là phế phẩm.
(b) Tính xác suất sản phẩm được chọn là phế phẩm hoặc được sản xuất bởi ca 3 .
(c) Nếu sản phẩm được chọn là phế phẩm, thì xác suất nó là sản phẩm của ca 3 là bao nhiêu?

Lời giải

Phép thử "Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm để kiểm tra"
Gọi A là biến cố "Sản phẩm được chọn của ca 1".
Gọi B là biến cố "Sản phẩm được chọn của ca 2".
Gọi C là biến cố "Sản phẩm được chọn của ca 3".
Gọi D là biến cố "Sản phẩm được chọn của ca 4".
Gọi F là biến cố "Sản phẩm được chọn là phế phẩm".
Theo đề bài, ta có các xác suất:

- $\mathbb{P}(A) = 0.3$
- $\mathbb{P}(B) = 0.3$
- $\mathbb{P}(C) = 0.2$
- $\mathbb{P}(D) = 0.2$
- $\mathbb{P}(F|A) = 0.04$
- $\mathbb{P}(F|B) = 0.03$
- $\mathbb{P}(F|C) = 0.02$
- $\mathbb{P}(F|D) = 0.01$

(a) Xác suất sản phẩm được chọn là phế phẩm
Vì A, B, C, D tạo thành hệ đầy đủ các biến cố, nên áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(F|A)+\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(F|B)+\mathbb{P}(C)\cdot\mathbb{P}(F|C)+\mathbb{P}(D)\cdot\mathbb{P}(F|D)\\ &= 0.3\cdot 0.04+0.3\cdot 0.03+0.2\cdot 0.02+0.2\cdot 0.01\\ &= 0.027\end{aligned}$$

(b) Xác suất sản phẩm được chọn là phế phẩm hoặc được sản xuất bởi ca 3

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F+C) &= \mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(CF)\\ &= \mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(C)\cdot\mathbb{P}(F|C)\\ &= 0.027+0.2-0.2\cdot 0.02\\ &= 0.223\end{aligned}$$

(c) Nếu sản phẩm được chọn là phế phẩm, thì xác suất nó là sản phẩm của ca 3 là

$$\mathbb{P}(C|F) = \frac{\mathbb{P}(CF)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(C)\cdot\mathbb{P}(F|C)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{0.2\cdot 0.02}{0.027} = 0.1481$$

Bài toán 17

Nhà máy có ba phân xưởng A, B, C tương ứng làm ra $25\%, 35\%$ và 40% tổng sản phẩm của nhà máy. Giả sử xác suất làm ra một sản phẩm hỏng của các phân xưởng A, B và C lần lượt là 0,01; 0, 02 và 0,025. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm từ nhà máy. Tính xác suất nhận được một sản phẩm hỏng.

Lời giải

Phép thử "Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm từ nhà máy"
Gọi A là biến cố "Sản phẩm được chọn của phân xưởng A".
Gọi B là biến cố "Sản phẩm được chọn của phân xưởng B".
Gọi C là biến cố "Sản phẩm được chọn của phân xưởng C".
Gọi F là biến cố "Sản phẩm được chọn là sản phẩm hỏng".
Theo đề bài, ta có các xác suất:

- $\mathbb{P}(A) = 0.25$
- $\mathbb{P}(B) = 0.35$
- $\mathbb{P}(C) = 0.4$
- $\mathbb{P}(F|A) = 0.01$
- $\mathbb{P}(F|B) = 0.02$
- $\mathbb{P}(F|C) = 0.025$

Xác suất sản phẩm được chọn là sản phẩm hỏng
Vì A, B, C tạo thành hệ đầy đủ các biến cố, nên áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(F|A) + \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(F|B) + \mathbb{P}(C)\cdot\mathbb{P}(F|C)\\ &= 0.25\cdot 0.01 + 0.35\cdot 0.02 + 0.4\cdot 0.025\\ &= 0.0195\end{aligned}$$

Bài toán 18

Một dây chuyền lắp ráp nhận các chi tiết từ hai nhà máy khác nhau. Tỷ lệ chi tiết do nhà máy thứ nhất cung cấp là 60%, của nhà máy thứ hai là 40%. Tỷ lệ chính phẩm (chi tiết máy có chất lượng tốt) của nhà máy thứ nhất là 90%, của nhà máy thứ hai là 85%. Lấy ngẫu nhiên một chi tiết trên dây chuyền và thấy rằng nó tốt. Tìm xác suất để chi tiết đó do nhà máy thứ nhất sản xuất.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Chi tiết do nhà máy thứ nhất cung cấp"
Gọi B là biến cố "Chi tiết do nhà máy thứ 2 cung cấp"
Gọi C là biến cố "Chi tiết đó là chính phẩm".
Theo đề bài, ta có các xác suất

- $\mathbb{P}(A) = 0.6$
- $\mathbb{P}(B) = 0.4$
- $\mathbb{P}(C|A) = 0.9$
- $\mathbb{P}(C|B) = 0.85$

Ta cần tính xác suất để chi tiết do nhà máy thứ nhất sản xuất, biết rằng nó tốt. Vì A, B tạo thành một hệ đầy đủ các biến cố, nên áp dụng công thức Bayes, ta có

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(C|A)\cdot\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(C|A) + \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C|B)} = \frac{0.9\cdot 0.6}{0.6\cdot 0.9 + 0.4\cdot 0.85} = \frac{27}{44} \approx 0.6136$$

Bài toán 19

Tỷ lệ thời gian Y mà một robot công nghiệp hoạt động trong suốt một tuần 40 giờ là một biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất

$$f(y) = \begin{cases} 2y & ,0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{nơi khác} . \end{cases}$$

(a) Tìm $\mathbb{E}(Y)$ và $\text{Var}(Y)$.

(b) Đối với các robot đang được nghiên cứu, lợi nhuận X mỗi tuần được cho bởi $X = 200Y - 60$. Tìm $\mathbb{E}(X)$ và $\mathbb{V}\text{ar}(X)$.

Lời giải

(a) Theo định nghĩa

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{0} yf(y)\mathrm{d}y + \int_{0}^{1} yf(y)\mathrm{d}y + \int_{1}^{+\infty} yf(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{0}^{1} 2y^2\mathrm{d}y \\ &= \left.\frac{2y^3}{3}\right|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Theo định nghĩa

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^2) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y)\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{0}^{1} 2y^3\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Suy ra, $\mathbb{V}\text{ar}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - [\mathbb{E}(Y)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \approx 0.0556$

(b) Ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(200Y - 60) \\ &= 200\mathbb{E}(Y) - 60 \\ &= 200 \cdot \frac{2}{3} - 60 \\ &= \frac{220}{3} \approx 73.3333 \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\text{ar}(X) &= \mathbb{V}\text{ar}(200Y - 60) \\ &= 200^2 \cdot \mathbb{V}\text{ar}(Y) \\ &= 200^2 \cdot 0.0556 \\ &= 2224 \end{aligned}$$

Bài toán 20

Thời gian cho đến khi cần sạc lại pin cho máy tính xách tay trong điều kiện bình thường là phân phối chuẩn với trung bình 260 phút và độ lệch chuẩn là 50 phút. Xác suất pin sử dụng kéo dài hơn bốn giờ là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi X là thời gian cho đến khi cần sạc lại pin cho máy tính.
Theo đề bài, $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ với

- Trung bình $\mu = 260$ (Phút)
- Độ lệch chuẩn $\sigma = 50$ (Phút)

Đổi 4 giờ = 240 phút. Ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 240) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 240) &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{240-\mu}{\sigma}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{240-260}{50}\right) \\
&= 1 - \Phi(-0.4) \\
&= \Phi(0.4) \\
&= 0.6554
\end{aligned}$$

Bài toán 21

Bài kiểm tra trắc nghiệm chứa 25 câu hỏi, mỗi câu hỏi có bốn câu trả lời. Giả sử một học sinh chỉ đoán ngẫu nhiên để trả lời.

(a) Tính xác suất để học sinh đó có nhiều hơn 20 câu trả lời đúng.
(b) Tính xác suất để học sinh đó có ít hơn 5 câu trả lời đúng.
(c) (không bắt buộc) Giả sử bài kiểm tra trắc nghiệm có 200 câu hỏi. Sử dụng một xấp xỉ phù hợp để tính xác suất học sinh đó có ít nhất 100 câu trả lời đúng.

Lời giải

Gọi X là biến ngẫu nhiên thể hiện số câu trả lời đúng.
Theo đề bài, $X \sim B(n; p)$ với $n = 25$ và $p = \dfrac{1}{4}$
Hàm trọng lượng xác suất

$$f(x) = \begin{cases} C_{25}^{x} \cdot (0.25)^x \cdot (0.75)^{25-x} & , \quad x \in \{0, 1, 2, ..., 25\} \\ 0 & , \quad \text{nơi khác} \end{cases}$$

(a) Xác suất học sinh có nhiều hơn 20 câu trả lời đúng

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 20) &= \sum_{i=21}^{25} C_{25}^{i} \cdot (0.25)^i \cdot (0.75)^{25-i} \\
&= 0.9676 \times 10^{-9}
\end{aligned}$$

(b) Xác suất học sinh có ít hơn 5 câu trả lời đúng

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X<5) &= \sum_{i=0}^{4}\mathbb{P}(X=i) = \sum_{i=0}^{4} \mathrm{C}_{25}^{i}\cdot(0.25)^{i}\cdot(0.75)^{25-i}\\ &= 0.2137\end{aligned}$$

(c) Gọi Y là số câu trả lời đúng trong 200 câu hỏi.
Theo đề, $Y \sim B(n;p)$ với $n=200$ và $p=0.25$.
Ta thấy $n=200$ khá lớn ($np=50\geq 5$ và $n(1-p)=150\geq 5$) nên có thể áp dụng phân phối chuẩn để xấp xỉ cho phân phối nhị thức.
Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y\geq 100) &= 1-\mathbb{P}(Y<100)\\ &= 1-\mathbb{P}(Y\leq 99)\\ &= 1-\mathbb{P}\left(\frac{Y-\mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)}}\leq\frac{99-\mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)}}\right)\\ &\approx 1-\Phi\left(\frac{99-\mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)}}\right)\\ &\approx 1-\Phi(8)\\ &\approx 0\end{aligned}$$

Bài toán 22

Ở một quốc gia, nồng độ cholesterol của một người được lấy ngẫu nhiên được mô hình bằng một phân phối chuẩn với trung bình 200 và độ lệch chuẩn 20 . Đơn vị: 1mg/100ml.

(a) Xác suất để một người được chọn ngẫu nhiên trong quốc gia đó có mức cholesterol dưới 160 là bao nhiêu?

(b) Hỏi tỷ lệ dân số có mức cholesterol từ 170 tới 230 .

(c) Hỏi xác suất để chọn ngẫu nhiên 10 người thì có ít nhất 2 người có mức cholesterol từ 170 tới 230 ?

Lời giải

Gọi X là nồng độ cholesterol của một người được lấy ngẫu nhiên.
Theo đề bài, $X\sim\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Ta có

- Trung bình $\mu=200$ (mg/100ml)
- Độ lệch chuẩn $\sigma=20$ (mg/100ml)

(a) Xác suất để một người được chọn ngẫu nhiên trong quốc gia đó có mức cholesterol dưới 160

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X<160) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{160-\mu}{\sigma}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X-200}{20}<\frac{160-200}{20}\right)\\ &= \mathbb{P}(Z<-2)\ \text{ với } Z\sim\mathcal{N}(0;1)\\ &= \Phi(-2)\end{aligned}$$

Ta có $\Phi(-2)=1-\Phi(2)=1-0,9772=0,0228$

(b) Mức cholesterol từ 170 đến 230

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(170 \le X \le 230) &= \mathbb{P}\left(\frac{170-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{230-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{170-200}{20} \le \frac{X-200}{20} \le \frac{230-200}{20}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-1,5 \le Z \le 1.5\right) \text{ với } Z \sim \mathcal{N}(0;1) \\
&= \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) \\
&= 2\Phi(1,5) - 1 \\
&= 2 \cdot 0.9332 - 1 \\
&= 0,8664
\end{aligned}$$

(c) Gọi Y là biến ngẫu nhiên thể hiện số người có mức cholesterol từ 170 đến 230 trong 10 người được chọn.
Khi đó, $Y \sim B(n,p)$ với $n = 10$ và $p = 0,8664$.
Hàm trọng lượng xác suất của Y

$$f(y) = \begin{cases} C_{10}^{y} \cdot p^{y} \cdot (1-p)^{10-y} & , \quad y \in \{0,1,2,3,...10\} \\ 0 & , \quad \text{Khác} \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \ge 2) &= 1 - \mathbb{P}(Y=0) - \mathbb{P}(Y=1) \\
&= 1 - C_{10}^{0} \cdot (1-0,8664)^{10} - C_{10}^{1} \cdot 0,8664 \cdot (1-0,8664)^{9} \\
&= 0,99
\end{aligned}$$

Bài toán 23

Một nhà sản xuất thực phẩm sử dụng một máy cắt để cắt bánh và các đồ ăn nhẹ. Tuy nhiên, máy cắt bị hỏng trung bình khoảng hai lần trong mỗi ngày mà nó hoạt động. Nếu Y là số sự cố mỗi ngày, doanh thu hàng ngày tạo ra bởi máy được xác định bởi $R = 1600 - 50Y^2$. Tìm doanh thu hàng ngày dự kiến.

Lời giải

Với Y là số sự cố mỗi ngày, theo đề bài, ta có $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ với $\lambda > 0$.
Vì Y có phân phối Poisson nên ta có

- Trung bình Y: $\mathbb{E}(Y) = \lambda = 2$
- Phương sai Y: $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = \lambda = 2$

Ta có

$$\begin{aligned}
& \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - [\mathbb{E}(Y)]^2 \\
\Leftrightarrow\ & \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + [\mathbb{E}(Y)]^2 \\
\Leftrightarrow\ & \mathbb{E}(Y^2) = 2 + 2^2 = 6
\end{aligned}$$

Doanh thu hằng ngày dự kiến là trung bình của R, tức là $\mathbb{E}(R)$.
Ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R) &= \mathbb{E}(1600) - 50\mathbb{E}(Y^2) \\
&= 1600 - 50\mathbb{E}(Y^2) \\
&= 1600 - 50 \cdot 6 \\
&= 1300
\end{aligned}$$

Vậy doanh thu hằng ngày dự kiến là 1300

Bài toán 24

Cánh quạt trên thị trường có 2 loại là loại 3 cánh và loại 5 cánh. Tại một cửa hàng điện dân dụng có bán cánh quạt thuộc hai nhà sản xuất A và B chiếm tỉ lệ về số lượng lần lượt là 10% và 90%. Cánh quạt 3 cánh của nhà sản xuất A chiếm 39% và của nhà sản xuất B chiếm 54%. Một khách hàng đến và chọn mua ngẫu nhiên một cánh quạt tại cửa hàng này.

(a) Tính xác suất khách hàng mua loại cánh quạt 3 cánh.

(b) Nếu khách hàng trên mua loại 3 cánh, tính xác suất cánh quạt đó thuộc nhà sản xuất A ?

Lời giải

Phép thử "Khách hàng chọn ngẫu nhiên một cánh quạt"
Gọi $\mathcal{A}$ là biến cố "Cánh quạt thuộc nhà sản xuất A
Gọi $\mathcal{B}$ là biến cố "Cánh quạt thuộc nhà sản xuất B.
Gọi $\mathcal{C}$ là biến cố "Cánh quạt đó là cánh quạt 3 cánh".
Theo đề bài, ta có các xác suất

- $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 0.1$
- $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = 0.9$
- $\mathbb{P}(\mathcal{C}|\mathcal{A}) = 0.39$
- $\mathbb{P}(\mathcal{C}|\mathcal{B}) = 0.54$

(a) Vì $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ tạo thành một hệ đầy đủ các biến cố, nên áp dụng công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{C}) &= \mathbb{P}(\mathcal{A})\cdot\mathbb{P}(\mathcal{C}|\mathcal{A}) + \mathbb{P}(\mathcal{B})\cdot\mathbb{P}(\mathcal{C}|\mathcal{B}) \\
&= 0,1\cdot 0,39 + 0,9\cdot 0,54 \\
&= 0,525
\end{aligned}$$

(b) Nếu khách hàng mua loại 3 cánh, xác suất cánh quạt đó thuộc nhà sản xuất A

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{A}|\mathcal{C}) &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{A})\cdot\mathbb{P}(\mathcal{C}|\mathcal{A})}{\mathbb{P}(C)} \\
&= \frac{0,1\cdot 0,39}{0,525} \\
&= 0,074
\end{aligned}$$