Math IPB
www.math.ipb.ac.id

Pertemuan ke-6: DERET PANGKAT

Departemen Matematika
FMIPA IPB

Bogor, 2017

Deret Pangkat

- Deret yang telah kita bahas adalah deret dalam bentuk $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dengan a_n adalah bilangan.
- Selanjutnya akan kita bahas deret dalam bentuk $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, dengan $u_n(x)$ adalah fungsi dari bilangan nyata x.
- Ada dua hal penting yang ingin kita ketahui dari deret fungsi.
  1. Untuk nilai x manakah deret tersebut konvergen.
  2. Ke fungsi apakah deret tersebut konvergen. Dengan kata lain, berapakah jumlah $S(x)$ dari deret tersebut.

- Salah satu bentuk khusus dari deret fungsi adalah *deret pangkat* (*power series*), yang berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

- Jika $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a$, maka deret di atas merupakan suatu *deret geometri*, yang telah kita ketahui bahwa konvergen untuk $-1 < x < 1$, dengan jumlah

$$S(x) = \frac{a}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$

Himpunan Kekonvergenan

Definisi

Himpunan kekonvergenan dari suatu deret pangkat adalah himpunan bilangan nyata yang anggota-anggotanya membuat deret pangkat tersebut konvergen.

- Sebagai contoh, untuk deret geometri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kita telah tahu himpunan kekonvergenannya adalah $-1 < x < 1$.

- Dengan *uji hasil bagi mutlak* kita dapat menentukan himpunan kekonvergenan dari deret-deret yang lain, seperti pada contoh berikut.

Contoh

Tentukan himpunan kekonvergenan dari deret-deret berikut

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\,2^n}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n.$

- Himpunan kekonvergenan sebuah deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ selalu berbentuk selang yang berupa salah satu dari ketiga jenis berikut:
    1. Satu titik $x = 0$.
    2. Selang $(-R, R)$, mungkin ditambah salah satu atau kedua titik ujungnya.
    3. Himpunan semua bilangan nyata.

Jari-jari Kekonvergenan

- Jari-jari kekonvergenan dari suatu deret pangkat adalah setengah dari panjang selang himpunan kekonvergenannya, sehingga jari-jarinya dapat dilihat dari himpunan kekonvergenannya.
  1. Kasus 1 jari-jarinya 0,
  2. Kasus 2 jari-jarinya R,
  3. Kasus 3 jari-jarinya ∞.

- Deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergen mutlak pada bagian dalam selang kekonvergenannya.
- Deret ini bisa juga konvergen mutlak pada titik ujungnya, tetapi hal ini tidak selalu benar.

Deret Pangkat dalam $(x-a)$

- Sebuah deret pangkat yang berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \cdots$$

  disebut deret pangkat dalam $(x-a)$.
- Sifat-sifat deret pangkat dalam x juga berlaku untuk deret pangkat dalam $(x-a)$.
- Himpunan kekonvergenan dari deret pangkat dalam $(x-a)$ berbentuk salah satu selang berikut:
  1. Titik tunggal $x = a$.
  2. Selang $(a-R, a+R)$, mungkin ditambah salah satu atau kedua titik ujungnya.
  3. Himpunan semua bilangan nyata.

Contoh

Tentukan himpunan dan jari-jari kekonvergenan dari deret pangkat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}.$$

Penyajian Fungsi sebagai Deret Pangkat

- Pada bagian ini kita mempelajari bagaimana menyajikan fungsi jenis tertentu sebagai deret pangkat.
- Penyajian seperti ini antara lain kita perlukan jika kita ingin mengintegralkan suatu fungsi yang tidak memiliki anti-turunan elementer, sehingga fungsi tersebut perlu dihampiri dengan polinom.

- Kita mulai dengan deret geometri yang jumlahnya telah kita ketahui.
- Jika $|x| < 1$ maka berlaku

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad (1)$$

  sebab deret di atas merupakan deret geometri dengan $a = 1$ dan $r = x$.
- Sekarang kita pandang persamaan (1) sebagai penyajian fungsi $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ sebagai suatu deret pangkat.

- Berdasarkan persamaan (1) kita dapat menyajikan beberapa fungsi yang lain sebagai deret pangkat, seperti pada contoh berikut.

Contoh

Nyatakan fungsi berikut sebagai suatu deret pangkat dan tentukan selang kekonvergenannya.

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{2}{3+x}$
3. $f(x) = \dfrac{2x^3}{3+x}$

Penurunan dan Pengintegralan Deret Pangkat

- Jumlah suatu deret pangkat merupakan suatu fungsi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ yang derah asalnya adalah selang kekonvergenan deret tersebut.
- Dengan menganggap deret pangkat sebagai sebuah suku banyak dengan suku-suku yang tak terhingga banyaknya, maka perilaku suku banyak terhadap pengintegralan dan pendiferensialan berlaku juga pada deret pangkat.
- Operasi ini dapat dilakukan suku-demi-suku.
- Jari-jari kekonvergenan deret yang telah diintegralkan maupun yang telah didiferensialkan adalah sama dengan jari-jari kekonvergenan deret aslinya.

Teorema

Misalkan $f(x)$ *adalah jumlah sebuah deret pangkat pada sebuah selang* I*, yaitu*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots$$

Jika $x \in I$ *maka berlaku*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(c_n (x-a)^n \right) \\ &= c_1 + 2c_2 (x-a) + 3c_3 (x-a)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \int f(x)\, dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n (x-a)^n\, dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \\ &= C + c_0 (x-a) + c_1 (x-a)^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Contoh

Nyatakan fungsi berikut sebagai suatu deret pangkat dan tentukan selang kekonvergenannya.

1. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$
2. $f(x) = \ln|x-1|$
3. $f(x) = \arctan(x)$

Jawab: Untuk menjawab soal nomor 1 kita turunkan kedua ruas persamaan (1), sedangkan untuk menjawab soal nomor 2 kita integralkan kedua ruas persamaan (1), kemudian sesuaikan tandanya.

Contoh

Nyatakan integral berikut sebagai suatu deret pangkat.

$$\int \frac{1}{1+x^5}dx.$$

Contoh

Tunjukkan bahwa fungsi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

merupakan solusi persamaan diferensial $f'(x) = f(x)$. *Kemudian tentukan fungsi yang dinyatakan oleh deret pangkat di atas.*

Bahan Responsi

Soal

Tentukan himpunan dan jari-jari kekonvergenan deret pangkat berikut. Tentukan terlebih dahulu rumus untuk suku ke-n, lalu gunakan uji hasil bagi mutlak.

1. $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots.$
2. $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots.$
3. $x - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^3}{3^3} + \frac{x^4}{3^4} - \cdots.$
4. $1 + 2x + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^4x^4}{4!} + \cdots.$

Soal

Tentukan himpunan dan jari-jari kekonvergenan deret pangkat berikut. Tentukan terlebih dahulu rumus untuk suku ke-n, lalu gunakan uji hasil bagi mutlak.

1. $\dfrac{x-5}{1}+\dfrac{(x-5)^2}{2}+\dfrac{(x-5)^3}{3}+\dfrac{(x-5)^4}{4}+\cdots.$
2. $1+\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{(x+2)^2}{2^2}+\dfrac{(x+2)^3}{2^3}+\cdots.$
3. $\dfrac{x+3}{(1)(2)}+\dfrac{(x+3)^2}{(2)(3)}+\dfrac{(x+3)^3}{(3)(4)}+\dfrac{(x+3)^4}{(4)(5)}+\cdots.$

Soal

Tentukan jumlah $S(x)$ *dari deret* $\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$, *serta tentukan batasan nilai* x *agar rumus tersebut berlaku.*

Soal

Tentukan himpunan kekonvergenan deret berikut

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{(n)(3^n)}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x+2)^n}{(n)\left(3^n\sqrt{n}\right)}$.

Soal

Tentukan penyajian deret pangkat untuk fungsi berikut dan tentukan selang kekonvergenannya.

1. $f(x) = \dfrac{1}{4+x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$
3. $f(x) = \dfrac{2x}{3x+1}$
4. $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$
6. $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$

Soal

Tentukan penyajian deret pangkat untuk fungsi berikut dan tentukan selang kekonvergenannya.

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^4}$
2. $f(x) = \ln(3 - x)$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(1 + x)^3}$
4. $f(x) = x^2 \ln(1 + x)$
5. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x - 3)^2}$
6. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

Soal

Tentukan penyajian deret pangkat untuk integral taktentu berikut.

1. $\int \frac{1}{1+x^4} dx$
2. $\int \frac{\arctan x}{x} dx$

Soal

Tunjukkan bahwa fungsi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ *merupakan solusi persamaan diferensial* $f''(x) + f(x) = 0$.

Tentang Slide

- Penyusun: Dosen Departemen Matematika FMIPA IPB
- Versi: 2017
- Media Presentasi: LaTeX - BEAMER (PDFLaTeX)