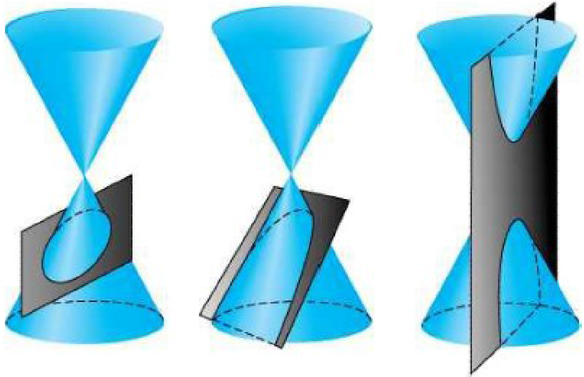
# Pertemuan ke-8:
# IRISAN KERUCUT

Departemen Matematika
FMIPA IPB

Bogor, 2017

# Irisan Kerucut

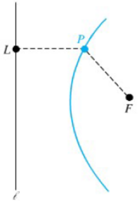
- Kurva parabola, elips, dan hiperbola disebut *irisan kerucut* atau *konik* karena mereka dapat diperoleh dengan cara mengiriskan sebuah kerucut dengan suatu bidang datar.

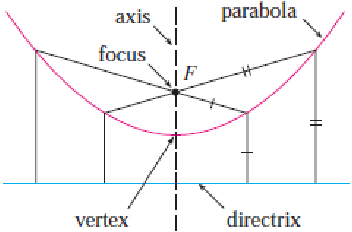


# Parabola

## Definisi (Parabola)

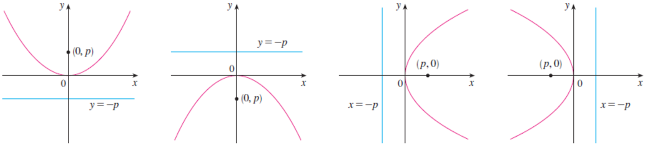
*Parabola adalah himpunan titik-titik di suatu bidang datar yang berjarak sama dari suatu titik tetap $F$ (disebut fokus) dan suatu garis tetap $l$ (disebut direktriks atau garis arah).*






- Garis yang melalui fokus dan tegak lurus direktriks disebut *sumbu parabola*.
- Titik potong antara parabola dan sumbu parabola disebut *titik puncak* parabola.

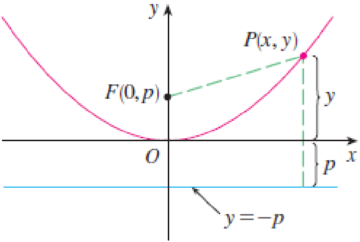
- Kita peroleh persamaan parabola yang paling sederhana jika kita tempatkan titik puncaknya di titik asal $O$ dan direktriksnya sejajar dengan sumbu-$x$ atau sumbu-$y$.




(a) $x^2 = 4py$, $p > 0$ (b) $x^2 = 4py$, $p < 0$ (c) $y^2 = 4px$, $p > 0$ (d) $y^2 = 4px$, $p < 0$

- Jika fokusnya adalah titik $(0, p)$ maka direktriksnya memiliki persamaan $y = -p$.
  - Grafik parabola membuka ke atas jika $p > 0$ dan membuka ke bawah jika $p < 0$.
- Jika fokusnya adalah titik $(p, 0)$ maka direktriksnya memiliki persamaan $x = -p$.
  - Grafik parabola membuka ke kanan jika $p > 0$ dan membuka ke kiri jika $p < 0$.

- Kita perhatikan parabola dengan fokus di $F = (0, p)$.




- Jika $P(x, y)$ adalah sembarang titik pada parabola, maka jarak dari $P$ ke fokus adalah

$$|PF| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2},$$

dan jarak dari $P$ ke direktriks adalah $|y + p|$.
- Dengan menyamakan kedua jarak ini maka kita peroleh persamaan parabola $x^2 = 4py$.

## Teorema

*Persamaan parabola dengan fokus* $(0,p)$ *dan direktriks* $y = -p$ *adalah* $x^2 = 4py$. *Persamaan parabola dengan fokus* $(p,0)$ *dan direktriks* $x = -p$ *adalah* $y^2 = 4px$.

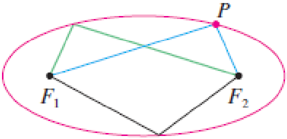
## Contoh

1. *Tentukan fokus dan direktriks dari parabola* $y^2 + 12x = 0$.
2. *Tentukan persamaan dari parabola jika fokusnya* $(0,-3)$ *dan direktriksnya* $y = 3$.

# Elips

## Definisi (Elips)

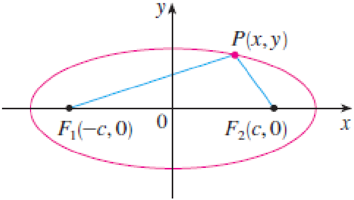
*Elips adalah himpunan titik-titik di suatu bidang datar di mana jumlah jarak dari titik itu ke dua titik tetap $F_1$ dan $F_2$ (disebut fokus) adalah konstan.*




- Jadi elips memiliki dua fokus.

- Salah satu hukum Kepler mengatakan bahwa orbit planet-planet dalam sistem tatasurya adalah berbentuk elips dengan matahari sebagai salah satu fokusnya.
- Elips mempunyai sifat pencerminan yang menarik. Jika sebuah sumber cahaya atau suara diarahkan ke salah satu fokus suatu cermin berbentuk elips, maka cahaya atau suara tersebut dipantulkan dari permukaan cermin ke fokus lainnya.

- Untuk memperoleh persamaan paling sederhana dari suatu elips, kita letakkan ke dua fokusnya pada sumbu-$x$ atau sumbu-$y$, sehingga titik pusat elips (titik yang berada di tengah-tengah kedua fokusnya) berada di titik asal $O$.
- Kita perhatikan elips dengan fokus di titik $F_1(-c, 0)$ dan $F_2(c, 0)$.




- Jika $P(x, y)$ adalah sembarang titik pada elips, maka jumlah jarak dari $P$ ke fokus $F_1$ dan $F_2$ adalah konstan, misalkan $2a$, dengan $a > 0$.

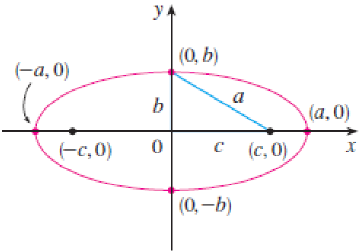
- Jadi kita peroleh $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, atau

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

- Jika $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, maka persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Karena $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$ maka $0 < b < a$.




- Titik potong elips dengan sumbu-$x$ diperoleh dengan mengambil $y = 0$, yaitu di titik $(a, 0)$ dan $(-a, 0)$.
- Kedua titik ini disebut *puncak* elips dan garis yang menghubungkannya disebut *sumbu mayor* elips.
- Titik potong elips dengan sumbu-$y$ terjadi saat $x = 0$, yaitu di titik $(0, b)$ dan $(0, -b)$.
- Garis yang menghubungkan ke dua titik ini disebut *sumbu minor* elips.

## Teorema

1. *Persamaan elips dengan fokus* $(\pm c, 0)$ *dan titik puncak* $(\pm a, 0)$ *adalah*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0,$$

   *dengan* $b^2 = a^2 - c^2$.

2. *Persamaan elips dengan fokus* $(0, \pm c)$ *dan titik puncak* $(0, \pm a)$ *adalah*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad a \geq b > 0,$$

   *dengan* $b^2 = a^2 - c^2$.

- Jika suatu elips memiliki fokus $(\pm c, 0)$ dan titik puncak $(\pm a, 0)$ atau fokus $(0, \pm c)$ dan titik puncak $(0, \pm a)$, maka bilangan $e = c/a$ disebut *keeksentrikan* dari elips yang bersangkutan.
- Batasan nilai $e$ adalah $0 \leq e < 1$.
- Jika $e = 0$ maka elips tersebut adalah lingkaran, dan semakin dekat nilai $e$ ke 1 maka bentuk elips yang bersangkutan semakin kurus panjang.

## Contoh

*Gambarlah grafik persamaan*

$$16x^2 + 25y^2 = 400,$$

*serta tentukan titik-titik fokus dan keeksentrikannya.*

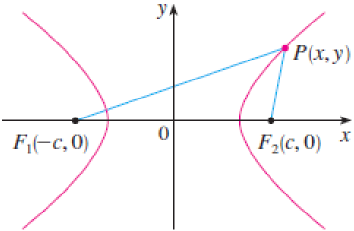
## Contoh

*Tentukan persamaan elips yang memiliki titik-titik fokus* $(0, 4)$ *dan* $(0, -4)$, *serta memiliki keeksentrikan* $4/5$.

# Hiperbola

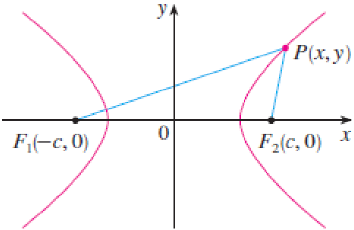
## Definisi (Hiperbola)

*Hiperbola adalah himpunan titik-titik di suatu bidang datar di mana selisih jarak dari titik itu ke dua titik tetap* $F_1$ *dan* $F_2$ *(disebut fokus) adalah konstan.*




- Jadi, seperti elips, hiperbola juga memiliki dua fokus.

- Untuk memperoleh persamaan paling sederhana dari suatu hiperbola, kita letakkan kedua fokusnya pada sumbu-$x$ atau sumbu-$y$, sehingga titik simetris hiperbola (titik yang berada di tengah-tengah kedua fokusnya) berada di $(0,0)$.
- Kita perhatikan suatu hiperbola dengan fokus di titik $F_1\,(-c,0)$ dan $F_2\,(c,0)$. Jika $P\,(x,y)$ adalah sembarang titik pada hiperbola, maka selisih jarak dari $P$ ke fokus $F_1$ dan $F_2$ adalah konstan, misalkan $\pm 2a$, dengan $a > 0$.

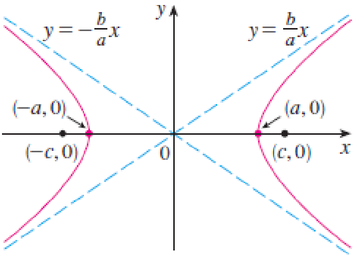


- Jadi kita peroleh $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$, atau

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

- Jika $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, maka persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$




- Titik potong hiperbola dengan sumbu-$x$ diperoleh dengan mengambil $y = 0$, yaitu di titik $(a, 0)$ dan $(-a, 0)$.
- Kedua titik ini disebut *puncak* hiperbola.
- Jika kita ambil $x = 0$, maka $y^2 = -b^2$, sehingga tidak ada bilangan real yang memenuhi.
- Jadi hiperbola di atas tidak memotong sumbu-$y$.

## Teorema

1. *Hiperbola*
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
*mempunyai fokus* $(\pm c, 0)$ *dengan* $c^2 = a^2 + b^2$, *titik puncak* $(\pm a, 0)$, *dan asimtot* $y = \pm (b/a)\, x$.
2. *Hiperbola*
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$
*mempunyai fokus* $(0, \pm c)$ *dengan* $c^2 = a^2 + b^2$, *titik puncak* $(0, \pm a)$, *dan asimtot* $y = \pm (a/b)\, x$.

**Contoh**

*Gambarlah grafik persamaan*

$$16x^2 - 9y^2 = 144,$$

*serta tentukan titik-titik fokus dan persamaan garis asimtotnya.*

## Contoh

*Tentukan persamaan hiperbola yang memiliki titik-titik fokus* $(0,5)$ *dan* $(0,-5)$, *dan garis asimtot* $y = \pm (4x)/3$.

# Bahan Responsi

## Soal

*Tentukan titik puncak, fokus, dan direktriks dari parabola berikut, serta gambarlah grafiknya.*

1. $4y + x^2 = 0.$
2. $y^2 = 12x.$

## Soal

*Tentukan titik puncak, fokus, dan keeksentrikan dari elips berikut, serta gambarlah grafiknya.*

1. $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1.$
2. $25x^2 + 9y^2 = 225.$

## Soal

*Tentukan titik puncak, fokus, dan garis asimtot hiperbola berikut, serta gambarlah grafiknya.*

1. $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1.$
2. $9y^2 - x^2 = 9.$

## Soal

*Tentukan persamaan irisan kerucut berikut:*

1. *Parabola dengan titik puncak* $(0,0)$ *dan fokus* $(0,-2)$.
2. *Parabola dengan fokus* $(3,0)$ *dan direktriks* $x=1$.

## Soal

*Tentukan persamaan irisan kerucut berikut:*

1. *Elips dengan fokus* $(\pm 2, 0)$ *dan titik puncak* $(\pm 5, 0)$.

## Soal

*Tentukan persamaan irisan kerucut berikut:*

1. *Hiperbola dengan fokus* $(0, \pm 3)$ *dan titik puncak* $(0, \pm 1)$.
2. *Hiperbola dengan titik puncak* $(\pm 3, 0)$ *dan garis asimtot* $y = \pm 2x$.

# Tentang Slide

- Penyusun: Dosen Departemen Matematika FMIPA IPB
- Versi: 2017
- Media Presentasi: LaTeX - BEAMER (PDFLaTeX)