Math IPB

www.math.ipb.ac.id

Pertemuan ke-2:
INTEGRAL TAKWAJAR

Departemen Matematika
FMIPA IPB

Bogor, 2017

Integral Takwajar (Batas Tak Terhingga)

Bentuk umum dari integral takwajar jenis ini adalah

1. $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$,
2. $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, atau
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

Definisi

1. $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$,
2. $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$.

Jika limit pada ruas kanan di atas ada dan bernilai terhingga, maka kita katakan integral takwajar yang bersangkutan konvergen dan memiliki nilai yang berhingga tersebut. Jika tidak konvergen, integral disebut divergen.

Definisi

Jika $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ *dan* $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ *keduanya konvergen, maka integral* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *adalah konvergen dengan nilai*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Dalam hal lain kita sebut integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *adalah divergen.*

Contoh

Tentukan (jika ada) integral berikut

1. $\int_{1}^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx.$
2. $\int_{-\infty}^{0} \cos x dx.$

Contoh

Dalam teori peluang, suatu fungsi f disebut fungsi kepekatan peluang (probability density function) jika dipenuhi syarat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Fungsi kepekatan peluang dari sebaran Cauchy memiliki bentuk

$$f(x) = \frac{k}{1+x^2}.$$

Tentukan nilai k.

Contoh

Dalam teori peluang, fungsi kepekatan peluang dari sebaran eksponensial dengan parameter λ *adalah*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

dengan $\lambda > 0$ *dan* $x \in [0, \infty)$, *serta* $f(x) = 0$ *untuk nilai* x *lainnya.*
Buktikan:

1. $\int_0^\infty f(x)\,dx = 1$ *dan*
2. $\int_0^\infty xf(x)\,dx = 1/\lambda$.

Integral Takwajar (Integran Tak Terhingga)

- Contoh cara yang salah dalam menyelesaikan integral jenis ini adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{1} \frac{1}{x^2} dx &= \left(-\frac{1}{x} \right) \Big]_{-3}^{1} \\ &= -1 + \frac{1}{-3} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

- Padahal $\frac{1}{x^2}$ adalah fungsi yang selalu bernilai positif, sehingga seyogyanya, jika ada,

$$\int_{-3}^{1} \frac{1}{x^2} dx \geq 0.$$

- Keanehan ini terjadi karena kita mengabaikan fakta bahwa fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$ tidak terdefinisi pada $x = 0$ dan $0 \in [-3, 1]$.

Definisi (Integran takhingga pada titik ujung suatu selang)

1. *Jika fungsi* f *kontinu pada selang setengah buka* $[a,b)$ *dan jika* $\lim_{x\to b^-} |f(x)| = \infty$, *maka kita definisikan*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx,$$

asalkan limit di atas ada dan bernilai terhingga. Dalam hal ini integral tersebut disebut konvergen. Dalam hal lain disebut divergen.

2. *Jika fungsi* f *kontinu pada selang setengah buka* $(a,b]$ *dan jika* $\lim_{x\to a^+} |f(x)| = \infty$, *maka kita definisikan*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx,$$

asalkan limit di atas ada dan bernilai terhingga. Dalam hal ini integral tersebut disebut konvergen. Dalam hal lain disebut divergen.

Definisi (Integran takhingga pada sebuah titik dalam)

Misalkan fungsi f *kontinu pada selang* $[a, b]$ *kecuali di titik* c *dengan* $a < c < b$, *dan misalkan pula* $\lim_{x \to c} |f(x)| = \infty$. *Kita definisikan*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

asalkan kedua integral di ruas kanan di atas konvergen. Jika tidak, $\int_a^b f(x)\,dx$ *adalah divergen.*

Contoh

Tentukan (jika ada) integral berikut

1. $\int_{-3}^{1} \frac{1}{x^2} dx.$
2. $\int_{2}^{6} \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx.$

Contoh

Buktikan bahwa

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$$

adalah

1. *konvergen jika* $p < 1$
2. *divergen jika* $p \geq 1$.

Contoh

Tentukan (jika ada) integral berikut.

1. $\int_1^e \frac{1}{x \ln x} dx$.
2. $\int_{-8}^{27} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx$.

Bahan Responsi

Soal

Tentukan integral takwajar yang diberikan atau tunjukkan bahwa integral tersebut divergen.

1. $\int_3^\infty \frac{x}{\sqrt{16+x^2}} dx$
2. $\int_2^\infty \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx$
3. $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx$
4. $\int_2^\infty \frac{1}{x (\ln x)^2} dx$

Soal

Tentukan integral takwajar yang diberikan atau tunjukkan bahwa integral tersebut divergen.

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4)^2} dx$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+9} dx$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{|x|}} dx$

Soal

Tentukan luas daerah di bawah kurva $y = \dfrac{2}{4x^2 - 1}$ *dan di sebelah kanan garis* $x = 1$. *Gunakan pecahan parsial.*

Soal

Berikan contoh dari suatu daerah pada kuadran pertama yang menghasilkan benda dengan volume terhingga jika diputar terhadap sumbu-x*, tetapi menghasilkan benda dengan volume takhingga jika diputar terhadap sumbu-*y.

Soal

Tentukan integral takwajar yang diberikan atau tunjukkan bahwa integral tersebut divergen.

1. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$
2. $\int_{-3}^3 \frac{1}{x^4}dx$
3. $\int_2^6 \frac{1}{(4-x)^{\frac{2}{3}}}dx$
4. $\int_0^2 \frac{x}{4-x^2}dx$

Soal

Tentukan integral takwajar yang diberikan atau tunjukkan bahwa integral tersebut divergen.

1. $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x} dx$
2. $\int_0^1 \ln x dx$
3. $\int_1^e \dfrac{1}{x(\ln x)^2} dx$
4. $\int_1^e \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

Soal

Jika fungsi $f(x)$ *menuju takhingga di titik* $x = a$ *dan* $x = b$, *kita definisikan*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

dengan c *sebuah titik antara* a *dan* b, *jika kedua integral di ruas kanan konvergen. Dalam hal lain, kita sebut integral di ruas kiri adalah divergen. Gunakan definisi ini untuk menentukan*

$$\int_{-4}^{4} \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} dx.$$

Soal

Buktikan bahwa

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

divergen untuk semua p.
Petunjuk: Tuliskan integral di atas sebagai

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx.$$

Soal

Andaikan fungsi f *kontinu pada* $[0, \infty)$ *kecuali di* $x = a$ *dengan* $a \in [1, \infty)$ *dan* $\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty$. *Tentukan bagaimana mendefinisikan* $\int_0^\infty f(x)\, dx$.

Soal

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \dfrac{1}{(x-27)^{\frac{2}{3}}}$ *untuk* $0 \leq x < 27$ *dan sumbu-*x*.*

Soal

Misalkan R *adalah daerah di kuadran pertama di bawah kurva* $y = x^{-\frac{2}{3}}$ *dan di sebelah kiri garis* $x = 8$*.*

1. *Perlihatkan bahwa luas daerah* R *adalah terhingga, dengan cara menentukan luasnya.*
2. *Perlihatkan bahwa volume benda putar yang terjadi jika* R *diputar mengelilingi sumbu-*x *adalah takhingga, dengan cara menentukan volumenya.*

Soal (Uji banding)

Jika $0 \le f(x) \le g(x)$ *pada selang* $[a, \infty)$, *maka dapat dibuktikan bahwa kekonvergenan* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *mengakibatkan kekonvergenan* $\int_a^\infty f(x)\,dx$, *dan kedivergenan* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *mengakibatkan kedivergenan* $\int_a^\infty g(x)\,dx$. *Gunakan sifat ini untuk membuktikan*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^4}}dx$$

adalah konvergen.

Petunjuk: Perhatikan bahwa pada interval $[1, \infty)$,

$$\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^4}} \le \frac{1}{x^4}.$$

Tentang Slide

- Penyusun: Dosen Departemen Matematika FMIPA IPB
- Versi: 2017
- Media Presentasi: LaTeX - BEAMER (PDFLaTeX)