Pertemuan ke-5:
UJI PERBANDINGAN, DERET BERGANTI TANDA, KEKONVERGENAN MUTLAK, UJI RASIO, DAN UJI AKAR

Departemen Matematika
FMIPA IPB

Bogor, 2017

Deret Positif: Uji-uji Lainnya

Teorema (Uji banding)

Misalkan untuk $n \geq N$ *berlaku* $0 \leq a_n \leq b_n$.

1. *Jika* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergen maka* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen.*
2. *Jika* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergen maka* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergen.*

Contoh

Periksa kekonvergenan deret berikut.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{4n^2 - 5}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n (n+3)}$.

Teorema (Uji banding limit)

Misalkan $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ *dan*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L.$$

1. *Jika* $0 < L < \infty$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *bersama-sama konvergen atau bersama-sama divergen.*
2. *Jika* $L = 0$ *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergen maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen.*

Contoh

Periksa kekonvergenan deret berikut.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2+5}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3n^2-5}}$.

Teorema (Uji hasil bagi)

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *adalah deret yang suku-sukunya positif dan misalkan pula*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

1. *Jika* $\rho < 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen.*
2. *Jika* $\rho > 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergen.*
3. *Jika* $\rho = 1$, *maka uji ini tidak memberi kesimpulan (diperlukan uji lainnya).*

Contoh

Periksa kekonvergenan deret berikut.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{40}}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Teorema (Uji akar)

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *adalah deret yang suku-sukunya positif dan misalkan pula*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = R.$$

1. *Jika* $R < 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen.*
2. *Jika* $R > 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergen.*
3. *Jika* $R = 1$, *maka uji ini tidak memberi kesimpulan (diperlukan uji lainnya).*

Contoh

Periksa kekonvergenan deret berikut.

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^n.$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{n^2}{n^2+1}\right)^n.$

Ringkasan:

Untuk menguji apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dengan suku-suku positif adalah konvergen atau divergen, perhatikan a_n dengan seksama.

1. Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, maka menurut *uji kedivergenen* suku ke-n, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adalah divergen.
2. Jika a_n mengandung $n!$, c^n dengan c adalah konstanta, atau n^n coba gunakan *uji hasil bagi*.
3. Jika a_n hanya mengandung pangkat n^c dan konstanta c, maka gunakan *uji banding limit*. Khususnya jika a_n merupakan fungsi rasional dari n, maka pilih $b_n = n^{p-q}$ dengan p adalah pangkat tertinggi pembilang dan q adalah pangkat tertinggi penyebut pada a_n.
4. Jika a_n berbentuk $(f(n))^n$ dengan f adalah suatu fungsi, maka gunakan *uji akar*.
5. Sebagai usaha terakhir, cobalah *uji banding*, *uji integral* atau *uji jumlah terbatas*.
6. Beberapa deret mensyaratkan *manipulasi bijak* atau *trik tertentu* untuk menentukan kekonvergenan atau kedivergenannya.

Deret Ganti Tanda

Definisi

Misalkan $\{a_n\}$ *adalah barisan bilangan nyata tak-negatif. Yang dimaksud dengan deret ganti tanda (alternating series) adalah deret yang memiliki bentuk umum*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \\ &= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \\ &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots\end{aligned}$$

Teorema (Uji deret ganti tanda)

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *atau* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *adalah deret ganti tanda dengan* $a_n > a_{n+1} \geq 0$ *untuk semua bilangan asli* n.

1. *Jika* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *maka deret ganti tanda di atas konvergen.*
2. *Jika jumlah* S *diaproksimasi dengan jumlah* n *suku pertama* S_n, *maka kesalahan yang dibuat tidak akan melebihi* a_{n+1}.

Contoh

1. *Buktikan deret harmonik ganti tanda*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

   adalah konvergen, dan tentukan berapa suku yang harus diambil agar

$$|S - S_n| \leq 0.01.$$

2. *Periksa kekonvergenan dari deret*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{3^n}.$$

Konvergen Mutlak dan Konvergen Bersyarat

Definisi (Konvergen mutlak dan konvergen bersyarat)

1. *Suatu deret* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *disebut konvergen mutlak jika* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *adalah konvergen.*
2. *Suatu deret* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *disebut konvergen bersyarat jika* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *konvergen tetapi* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *adalah divergen.*

Teorema

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *konvergen maka* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *adalah konvergen.*

Bukti:

- Misalkan $v_n = u_n + |u_n|$ atau $u_n = v_n - |u_n|$.
- Karena $0 \leq v_n \leq 2|u_n|$, maka berdasarkan uji banding biasa, diperoleh bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ adalah konvergen.
- Karena $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, serta ruas kanannya adalah konvergen, maka ruas kirinya juga konvergen atau $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ adalah konvergen.

Catatan:

- Untuk memeriksa kekonvergenan $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, kita dapat menggunakan uji-uji kekonvergenan untuk deret positif.
- Jika $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ konvergen, maka dapat kita simpulkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ adalah konvergen mutlak.
- Jika $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ divergen, maka gunakan uji deret ganti tanda untuk memeriksa kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
- Jika $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergen, maka berarti deret $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ adalah konvergen bersyarat. Jika tidak, berarti $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ adalah divergen.

- *Uji hasil bagi* jika digunakan untuk memeriksa kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, sering juga disebut dengan nama *uji pembanding mutlak*, yang akan kita tulis kembali pada teorema berikut.

Teorema (Uji pembanding mutlak)

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *adalah deret yang suku-sukunya taknol, dan misalkan pula*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho.$$

1. *Jika* $\rho < 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *konvergen.*
2. *Jika* $\rho > 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *divergen.*
3. *Jika* $\rho = 1$, *maka uji ini tidak memberi kesimpulan (diperlukan uji lainnya).*

Catatan:

- Pada penggunaan *uji pembanding mutlak*, jika kita temukan kasus 1, maka berati deret $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ adalah konvergen mutlak.
- Jika kita temukan kasus 2, maka $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ mungkin konvergen bersyarat atau divergen. Untuk membedakannya, gunakanlah *uji deret ganti tanda*.

Contoh

Tentukan apakah deret berikut adalah konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n}{n!}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n!}{n^2}\right)$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$.

Soal

Periksa kekonvergenan deret yang diberikan dan sebutkan jenis uji yang anda gunakan.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k+3}}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{100^k}{k!}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k+6)^{4/3}}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^{100}}$

Soal

Periksa kekonvergenan deret yang diberikan dan sebutkan jenis uji yang anda gunakan.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^2\sqrt{n+1}}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{40}}{n!}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(4n)!}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n+n^8}{n!}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+5n+11}}{n^2}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4+\sin^2 n}$

Soal

Periksa kekonvergenan deret yang diberikan dan sebutkan jenis uji yang anda gunakan.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5} \right)^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+5} \right)^n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5} \right)^{\sqrt{n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n} \right)^2$
5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^4}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^2$

Soal

Jika $a_n > 0$ *untuk semua bilangan asli* n *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen, maka buktikan* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *adalah konvergen.*

Soal

Buktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, *dengan menyelidiki kekonvergenan deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Soal

Buktikan bahwa tiap deret ganti tanda yang diberikan adalah konvergen. Kemudian perkirakanlah kesalahan (galat) yang dibuat oleh jumlah parsial S_9 sebagai aproksimasi dari jumlah S deret tersebut.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{\ln(n+2)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\ln(n+4)}{n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n}{n^2-10}$.

Soal

Buktikan bahwa deret-deret berikut konvergen mutlak.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^{2n}}{n!}$.

Soal

Tentukan apakah deret yang diberikan adalah konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n}{10n+10}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n}{10n^{1.1}+10}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-4)^n}{n^2}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+9)}}$.

Soal

Berikan contoh dua deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *yang keduanya konvergen, tetapi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *adalah divergen.*

Soal

Buktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *tidak cukup untuk menjamin kekonvergenan deret ganti tanda* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

Petunjuk:

Bentuklah deret ganti tanda yang berasal dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right)$.

Tentang Slide

- Penyusun: Dosen Departemen Matematika FMIPA IPB
- Versi: 2017
- Media Presentasi: LaTeX - BEAMER (PDFLaTeX)