Nama : Danna Rachmadyanti

NIM : G1401211074

No

Date

TUGAS MANDIRI

① a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$\cos \pi, \frac{\cos 2\pi}{4}, \frac{\cos 3\pi}{9}, \frac{\cos 4\pi}{16}, \ldots$$

$$a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$$

Kekonvergenan

$$-1 \leq \cos(n\pi) \leq 1$$

$$\frac{-1}{n^2} \leq \frac{\cos(n\pi)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$ → konvergen menuju 0

b) Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B. Buktikan (dengan definisi limit) $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke A+B

TEOREMA

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= A \\ \lim_{n\to\infty} b_n &= B \end{aligned}\right\} \lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = A \pm B = \underline{A+B}$$

Untuk pembuktian, maka haruslah $|(a_n+b_n)-(A+B)| < \varepsilon$

| $\{a_n\}$ konvergen ke A | $\{b_n\}$ konvergen ke B |
|---|---|
| L = A, akan dibuktikan: | L = B, akan dibuktikan: |
| Untuk tiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N > 0$ sedemikian sehingga $n \geq N$ | Untuk tiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N > 0$ sedemikian sehingga $n \geq N$ |
| $\|a_n - L\| < \varepsilon/2$ | $\|b_n - L\| < \varepsilon/2$ |
| $\|a_n - A\| < \varepsilon/2$ | $\|b_n - B\| < \varepsilon/2$ |

$$|(a_n+b_n)-(A+B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

TERBUKTI

JOYKO 30 Lines, 6 mm

No
Date

① c) Tentukan kemonotonan, ketertabatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$

Kemonotonan

bila $a'(x) > 0$ maka $a_n < a_{n+1}$

$\llcorner$ $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$

$a(x) = \sin \frac{x\pi}{4}$

$a'(x) = \frac{\pi \cos(x\pi/4)}{4}$ → $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$ tidak naik dan tidak turun (bukan barisan monoton)

Ketertabatasan

$-1 \leq \sin \frac{n\pi}{4} \leq 1$

→ Teorema apit tak dapat digunakan

Limit

$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{n\pi}{4} \overset{LH}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{4} \cos n\pi = \infty$ DIVERGEN

② Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$

$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ | $\lim_{n \to \infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| (-1)^{n+1} \right| \left| \frac{1}{n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n} \right| = 0$

Konvergen ke 0

b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$a_n = \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n}$

$\lim_{n \to \infty} a_n = L$ → barisan $a_n$ konvergen ke $L$

$\lim_{n \to \infty} \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3 - 2 \cdot 2^{n+2}}{5 + 2^{n+2}} \overset{LH}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{-(n+2) 2 \cdot 2^{n+3}}{(n+2) 2^{n+3}} = -2$ → $a_n$ konvergen ke $-2$

No
Date

c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$a_n = \frac{\ln n}{n}$

Kemonotonan

$a'(x) > 0 \rightarrow$ naik

$a'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ bukan barisan monoton karena tidak naik & tidak turun

Keterbatasan

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} \stackrel{LH}{=} \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1/n}{1} = 0 \rightarrow$ konvergen ke 0

③ a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergennya:

0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, ...

$(1-0,1), (1-0,01), (1-0,001), (1-0,0001), \ldots$

$\left(1-\frac{1}{10}\right), \left(1-\frac{1}{100}\right), \left(1-\frac{1}{1000}\right), \left(1-\frac{1}{10\,000}\right), \ldots$

$\hookrightarrow a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$

Kekonvergenan

$a_n = 1 - 1/10^n$

$\lim\limits_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{10^n} = 1 - 0 = 1 \rightarrow$ konvergen menuju 1

b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$a_n = \frac{n+3}{3n-2}$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L \rightarrow$ barisan $a_n$ konvergen ke $L$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+3}{3n-2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + 3/n}{3 - 2/n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3} \rightarrow a_n$ konvergen $\frac{1}{3}$

No
Date

c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{n!}{10^n} = \frac{1.2.3.4.\dots.n}{10.10.10.10.\dots.10^n}$$

Kemonotonan

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(1.2.3.\dots.n)/(10.10.10.\dots.10^n)}{(2.3.4.\dots.n+1)/(10.10.10.\dots.10^{n+1})}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot 10^{n+1}$$

$$= \frac{10^{n+1}}{n+1} > 1$$ barisan naik

Keterbatasan

$$a_n = \frac{n!}{10^n} = \frac{1.2.3.\dots.n}{10.10.10.\dots.10^n} = \frac{\infty}{\infty}$$ = bentuk tak tentu (divergen)

tidak ada limit