*Departemen Matematika FMIPA IPB*

# UJIAN TENGAH SEMESTER GANJIL 2016/2017

| | | |
|---|---|---|
| **Kode - Nama MK** | **:** | **MAT211 - Kalkulus II** |
| **Hari, Tanggal** | **:** | **Senin, 7 November 2016** |
| **Waktu** | **:** | **2 Jam** |
| **Sifat Ujian** | **:** | **Catatan Tertutup** |

**Selesaikan ke-8 soal berikut secara berurutan. Bekerjalah dengan jujur, teliti, dan sepenuh kemampuan. Segala bentuk kecurangan bersanksi akademik.**

1. **(Nilai Maksimum: 10)** Tentukan integral berikut

$$\int (1+4\cos x)^2\,dx.$$

Jawab

$$\begin{aligned}
\int (1+4\cos x)^2\,dx &= \int \left(1+8\cos x+16\cos^2 x\right)dx \\
&= \int \left(1+8\cos x+16\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\right)dx \\
&= \int (9+8\cos x+8\cos(2x))\,dx \\
&= 9x+8\sin x+4\sin(2x)+C.
\end{aligned}$$

2. **(Nilai Maksimum: 15)** Tentukan integral berikut

$$\int \frac{2\sin^{-1}(u)}{\sqrt{1-u^2}}du.$$

Jawab

Misalkan

$$u=\sin\theta,$$

maka

$$du=\cos\theta d\theta$$

dan

$$\theta=\sin^{-1}(u),$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\int \frac{2\sin^{-1}(u)}{\sqrt{1-u^2}}du &= \int \frac{2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta d\theta \\
&= \int \frac{2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}\cos\theta d\theta \\
&= \int \frac{2\theta}{\cos\theta}\cos\theta d\theta \\
&= \int 2\theta d\theta \\
&= \theta^2+C \\
&= \left(\sin^{-1}(u)\right)^2+C.
\end{aligned}$$

3. **(Nilai Maksimum: 10)** Tentukan limit berikut

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{2}{3x}\right)^{1/x}.$$

$\boxed{\text{Jawab}}$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{2}{3x}\right)^{1/x} && (\text{bentuk } \infty^0) \\
= \ & \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(x-\frac{2}{3x}\right)\right) && (\text{bentuk } 0\times\infty) \\
= \ & \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x-\frac{2}{3x}\right)}{x}\right) && (\text{bentuk } \frac{\infty}{\infty}) \\
\overset{L}{=} & \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x-\frac{2}{3x}}\left(1+\frac{2}{3x^2}\right)}{1}\right) \\
= \ & \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{3x^2}}{x-\frac{2}{3x}}\right) \\
= \ & \exp(0) = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

4. **(Nilai Maksimum: 15)** Diketahui $\alpha$ dan $\lambda$ adalah konstanta-konstanta positif. Didefinisikan fungsi $f$ dengan

$$f(x)=\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}, \quad x\geq 0.$$

Tunjukkan bahwa

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = 1.$$

$\boxed{\text{Jawab}}$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}dx.
\end{aligned}$$

Misalkan

$$u=\lambda+x,$$

maka

$$du=dx,$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\int\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}dx &= \int\frac{\alpha\lambda^\alpha}{u^{\alpha+1}}du \\
&= \alpha\lambda^\alpha\int u^{-\alpha-1}du \\
&= \alpha\lambda^\alpha\frac{1}{-\alpha}u^{-\alpha}+C \\
&= -\frac{\lambda^\alpha}{u^\alpha}+C \\
&= -\frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^\alpha}+C.
\end{aligned}$$

Jadi,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^\alpha}\right)\Bigg|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\left(-\frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+b)^\alpha}\right)-\left(-\frac{\lambda^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+b)^\alpha}+1\right) \\
&= 0+1 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

5. **(Nilai Maksimum: 15)** Tentukan (jika ada) integral berikut

$$\int_2^6 \frac{1}{(4-x)^{2/3}}dx.$$

$\boxed{\text{Jawab}}$

Misalkan

$$u = 4 - x,$$

maka

$$du = -dx,$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(4-x)^{2/3}}dx &= \int -\frac{1}{u^{2/3}}du \\
&= -3u^{1/3}+C \\
&= -3(4-x)^{1/3}+C.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{1}{(4-x)^{2/3}}dx &= \lim_{s\to 4^-}\int_2^s \frac{1}{(4-x)^{2/3}}dx \\
&= \lim_{s\to 4^-}\left[-3(4-x)^{1/3}\right]_2^s \\
&= \lim_{s\to 4^-}\left[-3(4-s)^{1/3}+3(2)^{1/3}\right] \\
&= 0+3(2)^{1/3} \\
&= 3(2)^{1/3}\ \text{(konvergen)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_4^6 \frac{1}{(4-x)^{2/3}}dx &= \lim_{t\to 4^+}\int_t^6 \frac{1}{(4-x)^{2/3}}dx \\
&= \lim_{t\to 4^+}\left[-3(4-x)^{1/3}\right]_t^6 \\
&= \lim_{t\to 4^+}\left[-3(-2)^{1/3}+3(4-t)^{1/3}\right] \\
&= -3(-2)^{1/3}+0 \\
&= 3(2)^{1/3}\ \text{(konvergen)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_2^6 \frac{1}{(4-x)^{2/3}}dx &= \int_2^4 \frac{1}{(4-x)^{2/3}}dx+\int_4^6 \frac{1}{(4-x)^{2/3}}dx \\
&= 3(2)^{1/3}+3(2)^{1/3} \\
&= 3(2)^{4/3}.
\end{aligned}
$$

6. **(Nilai Maksimum: 10)** Diketahui sebuah kurva dengan persamaan parametrik

$$x = e^t \text{ dan } y = (t-1)^2 .$$

(a) Tentukan gradien garis singgung kurva di titik $(1,1)$.

(b) Tentukan interval dari $t$ sehingga kurva naik atau turun.

$\boxed{\text{Jawab}}$

(a)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \\ &= \frac{2(t-1)}{e^t}. \end{aligned}$$

Di titik $(1,1)$,

$$\begin{aligned} x &= 1 \text{ dan } y = 1 \\ e^t &= 1 \text{ dan } (t-1)^2 = 1 \\ t &= 0 \text{ dan } (t = 0 \text{ atau } t = 2) \\ t &= 0, \end{aligned}$$

sehingga gradien garis singgungnya adalah

$$m = \frac{2(-1)}{1} = -2$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{2(t-1)}{e^t} &= 0 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccl} --- & \quad +++ & \\ \hline & t = 1 & \text{tanda } dy/dx \end{array}$$

Kurva turun pada $(-\infty, 1)$ dan naik pada $(1, \infty)$.

7. **(Nilai Maksimum: 10)** Diketahui persamaan polar

$$r = 2\sin\theta.$$

Nyatakan persamaan tersebut dalam persamaan Cartesius dan tentukan nama kurvanya.

$\boxed{\text{Jawab}}$

$$\begin{aligned} r &= 2\sin\theta \\ r^2 &= 2r\sin\theta \\ x^2 + y^2 &= 2y \\ x^2 + y^2 - 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 &= 1 \\ x^2 + (y-1)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan dari kurva lingkaran yang berpusat di titik $(0,1)$ dan berjari-jari 1.

8. **(Nilai Maksimum: 15)** Diberikan hiperbola dengan persamaan berikut

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

(a) Tentukan titik-titik puncaknya.

(b) Tentukan titik-titik fokusnya.

(c) Tentukan asimtot-asimtotnya.

(d) Gambarkan grafiknya.

$\boxed{\text{Jawab}}$

$$\begin{aligned} a^2 &= 16 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= 9 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ &= 16 + 9 \\ &= 25 \\ c &= 5. \end{aligned}$$

(a) Titik-titik puncak dari hiperbola tersebut adalah $(0, a) = (0, 4)$ dan $(0, -a) = (0, -4)$.

(b) Titik-titik fokus dari hiperbola tersebut adalah $(0, c) = (0, 5)$ dan $(0, -c) = (0, -5)$.

(c) Asimtot-asimtot dari hiperbola tersebut adalah

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{b}x \text{ dan } y = -\frac{a}{b}x \\ y &= \frac{4}{3}x \text{ dan } y = -\frac{4}{3}x. \end{aligned}$$

(d) Gambar grafik dari hiperbola tersebut adalah