No.

Date

AIDA DARAJATI - G1401211016

TUGAS MANDIRI

1. a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya :

$$\cos \pi, \frac{\cos 2\pi}{4}, \frac{\cos 3\pi}{9}, \frac{\cos 4\pi}{16}, \ldots$$

Jawab :

* Rumus eksplisit $(a_n) = \frac{\cos n\pi}{n^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

* Kekonvergenan :

$$\frac{\cos n\pi}{n^2}$$

Menggunakan teorema apit

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos n\pi}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2} \leq 0$$

Maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2} = 0 \rightarrow \text{konvergen ke } 0.$$

1. b) Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B. Buktikan (dengan definisi limit) $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke A+B.

Jawab:

$\{a_n\}$ konvergen ke A $\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

$\{b_n\}$ konvergen ke B $\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ selalu dapat ditemukan $N_1 > 0$ sehingga untuk $n > N_1$ berlaku $|a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ juga selalu dapat ditemukan $N_2 > 0$ sehingga untuk $n > N_2$ berlaku $|b_n - B| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Untuk $N = \max\{N_1, N_2\}$ didapatkan:

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (A+B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| \\ &\quad \text{(ketaksamaan segitiga} \\ &< \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

1\. c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut :

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$-1 \leq \sin(n\pi) \leq 1$$

$$\frac{-1}{4} \leq \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{4}$$

bukan barisan monoton //.

Keterbatasan

$$-1 \leq \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \leq 1$$

Divergen, teorema apit tidak berlaku .//

2. a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya :

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$$

* Rumus eksplisit

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

* Kekonvergenan

$$-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1 \qquad \text{Teorema Apit}$$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq 0 \quad \text{sehingga } \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$$

Konvergen menuju 0.

2. b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{3 - 8.2^n}{5 + 4.2^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3 - 8.2^n}{5 + 4.2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3}{2^n} - 8}{\frac{5}{2^n} + 4} = \frac{-8}{4} = -2$$

Diperoleh $L = -2$ dan $N = \frac{\ln\left(\frac{13}{\varepsilon} - 5\right) - \ln 4}{\ln 2}$, $2^N = \frac{\frac{13}{\varepsilon} - 5}{4}$
untuk $n > N > 0$ diperoleh

$$|a_n - L| = \left| \frac{3 - 8.2^n}{5 + 4.2^n} + 2 \right|$$

$$= \left| \frac{3 - 8.2^n + 2(5 + 4.2^n)}{2(5 + 4.2^n)} \right|$$

$$= \frac{13}{5 + 4.2^n} < \frac{13}{5 + 4.2^N}$$

$$= \frac{13}{5 + \cancel{4} \cdot \left(\frac{\frac{13}{\varepsilon} - 5}{\cancel{4}}\right)}$$

$$= \varepsilon$$

Terbukti bahwa barisan $\{a_n\}$ tersebut konvergen.

2. c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (Jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{\ln n}{n}$$

* Kemonotonan

$$a'(n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot n - \ln n}{n^2} = \frac{1 - \ln n}{n^2}$$

Diperoleh:

$a'(n) < 0$	$a'(n) > 0$
$\Leftrightarrow 1 - \ln n < 0$	$\Leftrightarrow 1 - \ln n > 0$
$\Leftrightarrow \ln e < \ln n$	$\Leftrightarrow \ln e > \ln n$
$\Leftrightarrow e < n$	$\Leftrightarrow e > n$
a turun pada (e, ∞)	a naik pada $(0, e)$.

Karena itu,
$\{a_n\}$ naik pada $n = 1, 2$, dan $\{a_n\}$ turun pada $n = 3, 4, \ldots$
Secara umum $\{a_n\}$ bukan barisan monoton pada N.

* Keterbatasan

$$a_1 = \frac{\ln 1}{1} = 0.$$

$$a_2 = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}34657.$$

$$a_3 = \frac{\ln 3}{3} \approx 0{,}3662.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} \overset{LH}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Maka $\{a_n\}$ memiliki batas bawah 0 dan batas atas 0,3662.

3. a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya :

$$0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \ldots$$

* rumus eksplisit :

$$a_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

* kekonvergenan

$$\lim_{n \to \infty} 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n = 1 - 0 = 1$$

∴ Konvergen ke 1.

b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen :

$$a_n = \frac{n+3}{3n-2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+3}{3n-2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{3}{n}}{\frac{3n}{n} - \frac{2}{n}} = \frac{1}{3}$$

∴ Terbukti barisan $\{a_n\}$ konvergen, yaitu konvergen ke $\frac{1}{3}$.

c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut :

$$a_n = \frac{n!}{10^n}$$

* Kemonotonan

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{10^n} \cdot \frac{10^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1.\cancel{2}.3 \ldots \cancel{n}}{\cancel{10.10.10 \ldots 10^n}} \cdot \frac{\cancel{10.10.10 \ldots 10^n}.10^{n+1}}{\cancel{1}.\cancel{2}.3 \ldots \cancel{n}.(n+1)}.$$

$$= \frac{10^{(n+1)}}{(n+1)} > 1 \longrightarrow \text{monoton naik}$$

* Kekonvergenan

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{10^n} = \frac{\infty}{\infty}$$

tidak dapat disimpulkan, $\{a_n\}$ tidak terbatas di atas. Divergen, tidak ada limitnya.