Improper Integrals: Infinite Limits of Integration & Infinite Integrands

Responsi ke-2

Wulan & Yeremia

Infinite Limits of Integration (One Infinite Limit)

Definisi:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Jika nilai limit di ruas kanan ada dan punya nilai berhingga, maka kita dapat mengatakan bahwa integral tak-wajar ini **konvergen** dan memiliki nilai. Jika tidak, integral tersebut dikatakan **divergen**.

Contoh Soal (One Infinite Limit)

Tentukan integral berikut jika ada; $\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\ dx$

Jawab: Misalkan $u = -x^2$ sehingga $\frac{du}{dx} = -2x$. Diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\ dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1} e^u\ du = -\frac{1}{2}\cdot \lim_{a\to-\infty}\int_{-\infty}^{-1} e^u\ du$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot \lim_{a\to-\infty}\left(e^{-1} - e^a\right) = -\frac{1}{2e}$$

Tentukan integral berikut jika ada; $\int_0^\infty \sin(x)\ dx$

Jawab:

$$\int_0^\infty \sin(x)\ dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin(x)\ dx = \lim_{b\to\infty}[-\cos x]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}[-\cos b] + 1 = diverges$$

Nilai integral divergen

Infinite Limits of Integration (Both Infinites Limit)

Definisi:

Jika nilai dari $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ dan $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergen, maka nilai dari $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ juga konvergen dan memiliki nilai yaitu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

Selain dari pada itu, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ divergen

Contoh Soal (Both Infinite Limit)

Tentukan integral berikut jika ada; $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{a\to-\infty} [\tan^{-1} x]_a^0 + \lim_{b\to\infty} [\tan^{-1} x]_0^b$$

$$= \tan^{-1} 0 - \lim_{a\to-\infty} \tan^{-1} a + \lim_{b\to\infty} \tan^{-1} b - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Probability Density Functions

Fungsi Kepekatan Peluang

Jika fungsi kepekatan peluang $f(x)$ dari peubah acak kontinu X maka persyaratan untuk sebuah fkp adalah:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Nilai harapan (ditulis μ) dan varians (ditulis σ^2) didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

$$\sigma^2 = V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\, dx$$

Contoh Soal (Fungsi Kepekatan Peluang)

Sebuah fungsi kepekatan peluang didefinisikan sebagai berikut: [Sebaran normal baku]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Tunjukkan bahwa nilai harapan dari sebaran normal baku adalah 0.

Jawab:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]. Misalkan\; u = -\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} -e^{u} du + \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{0} -e^{u} du \right] = 0$$

Infinite Integrands

Kasus ke-1: Integran tak berbatas di ujung selang kanan; $[a, b)$, yaitu memiliki nilai $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$;

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Kasus ke-2: Integran tak berbatas di ujung selang kiri; $(a, b]$, yaitu memiliki nilai $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$;

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

Kasus ke-3: Integran tak berbatas di titik interior, pada titik c dimana $a < c < b$ dan memiliki nilai $\lim_{x \to c} |f(x)| = \infty$;

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{s \to c^+} \int_s^b f(x)\,dx$$

Contoh Soal (Interior Point)

Tentukan integral berikut jika ada; $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

Jawab: Integran ini menuju tak-hingga ketika $x = 1$, sehingga:

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{s\to 1^+} \int_s^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \left[3(x-1)^{1/3}\right]_0^t + \lim_{s\to 1^+} \left[3(x-1)^{1/3}\right]_s^3 = 3 \lim_{t\to 1^-} \left[(t-1)^{\frac{1}{3}} + 1\right] + 3 \lim_{s\to 1^+} \left[(2)^{\frac{1}{3}} - (s-1)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= 3 + 3\left(2^{1/3}\right) \approx 6.78$$

Infinite Integrands at Interior Point

Soal

Infinite Limits of Integration;

Tentukan nilai integral berikut jika ada:

1) $\int_{100}^{\infty} e^{x}\, dx$

2) $\int_{-\infty}^{-5} \frac{dx}{x^4}$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+16)^2}$

4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+10}\, dx$

Infinite Integrands;

Tentukan nilai integral berikut jika ada:

1) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$

2) $\int_{0}^{9} \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$

3) $\int_{-1}^{128} x^{-\frac{5}{7}}\, dx$

4) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+1)^{4/3}}$

Soal

1. Tentukan integral berikut:

(a) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$

2. Tentukan integral berikut:

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+4)}\,dx$

3. Tentukan integral berikut:

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+4x+9}\,dx$

4. Tentukan integral berikut:

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{e^{|x|}}\,dx$

Integral Tak-Wajar

Terimakasih

Responsi Ke-2: