Dhiya Khalishah Tsany Suwarso

G1401211038

No. ....

Date ....

1 a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$\cos \pi, \frac{\cos 2\pi}{4}, \frac{\cos 3\pi}{9}, \frac{\cos 4\pi}{16}, \ldots$$

* Rumus eksplisit $\Rightarrow$ $a_n = \dfrac{\cos n\pi}{n^2}$

* Kekonvergenan

$-1 \leq \cos n\pi \leq 1$

$-\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{\cos n\pi}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$

Berdasarkan teorema apit:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$

Sehingga, $\{a_n\}$ konvergen ke 0

b) Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B. Buktikan (dengan definisi limit) $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke A+B.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$$

Dalam pembuktian, maka $|(a_n + b_n) - (A+B)| < \varepsilon$

$\{a_n\}$ konvergen ke A

- $L = A$
- Akan dibuktikan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N > 0$ sedemikian sehingga $n \geq N$ $\rightarrow |a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon$

$\{b_n\}$ konvergen ke B

- $L = B$
- Akan dibuktikan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N > 0$ sedemikian sehingga $n \geq N$ $\rightarrow |b_n - B| < \frac{1}{2}\varepsilon$

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (A+B)| &= |a_n - A| + |b_n - B| \\ &< \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti

No.
Date

c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut :

$a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$	※ limit	※ keterbatasan
※ kemonotonan	$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{n\pi}{4}$	Karena $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$ termasuk barisan alternating (bolak-balik) yang suku-sukunya berganti tanda, maka a_n tidak memiliki batas.
$a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$	= tidak ada	
$a'(n) = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$	(divergen)	
↳ tidak naik dan tidak turun	$-1 \le \sin \frac{n\pi}{4} \le 1$	
↳ Bukan barisan monoton.	↳ teorema apit tidak berlaku	

2 a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$

※ Rumus eksplisit ⟹ $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

※ kekonvergenan

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right|$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

$= 0$

Jika $\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right| = 0$, maka $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 0$

Sehingga $\{a_n\}$ konvergen ke 0

b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen :

$a_n = \frac{3 - 8.2^n}{5 + 4.2^n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3 - 8.2^n}{5 + 4.2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2^n} - 8}{\frac{5}{2^n} + 4}$

$= -2$

Sehingga $\{a_n\}$ konvergen ke -2

No.
Date

c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$a_n = \frac{\ln n}{n}$

* Kemonotonan

$a_n = \frac{\ln n}{n}$

$a'(n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot n - \ln n}{n^2}$

$= \frac{1 - \ln n}{n^2}$

↳ Bukan barisan monoton

* Limit

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

* Keterbatasan

karena a_n bukan barisan monoton, maka tidak memiliki batas.

(3) a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, ...

* Rumus Eksplisit ⟹ $a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$

* Kekonvergenan

$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{10^n} = 1 - 0$

$= 1$ (konvergen ke 1)

b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen.

$a_n = \frac{n+3}{3n-2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3n-2} = \frac{1}{3}$

Sehingga $\{a_n\}$ konvergen ke $\frac{1}{3}$

c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$a_n = \frac{n!}{10^n}$

* Kemonotonan

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n!}{10^n}}{\frac{(n+1)!}{10^{(n+1)}}} = \frac{\frac{1.2.3\ldots n}{10.10.10\ldots 10^n}}{\frac{1.2.3\ldots n.(n+1)}{10.10.10\ldots 10^n.10^{n+1}}} = \frac{10^{n+1}}{n+1} > 1$$

Sehingga $\{a_n\}$ barisan monoton naik

Dipindai dengan CamScanner

* limit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{10^n} = \frac{\infty}{\infty}$$ ~~= bentuk tak tentu.~~

↳ divergen (tidak ada limit)

* keterbatasan

karena a_n barisan monoton naik dan divergen, maka batas atas dari a_n tidak terbatas.