Pembahasan Kuis 2 Bagian Deret dan Deret Pangkat

Ekspresikan bilangan berikut dalam bentuk pecahan.

3a) $2.\overline{516}$

$$2.\overline{516} = 2 + \frac{516}{10^3} + \frac{516}{10^6} + \cdots$$

Ini adalah deret geometrik dengan $a = \frac{516}{10^3}$ dan $r = \frac{1}{10^3}$. Deret ini konvergen menuju $S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{516}{10^3}}{1-\frac{1}{10^3}} = \frac{516}{999}$. Karena itu

$$2.\overline{516} = 2 + \frac{516}{999} = \frac{2514}{999} = \frac{838}{333}\ \blacksquare$$

3b) $1.23\overline{4567}$

$$1.23\overline{4567} = 1.234 + \frac{567}{10^6} + \frac{567}{10^9} + \cdots$$

Ini adalah deret geometrik dengan $a = \frac{567}{10^6}$ dan $r = \frac{1}{10^3}$. Deret ini konvergen ke $S = \frac{a}{1-r} = \frac{567/10^6}{1-1/10^3} = \frac{567}{999000}$. Karena itu

$$1.234\overline{567} = 1.234 + \frac{567}{999000} = \frac{45679}{37000}\ \blacksquare$$

Tentukan apakah deret geometrik ini konvergen atau divergen.

4a) $3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + \cdots$

Terlihat jelas bahwa deret geometrik ini memiliki rasio $r = -\frac{4}{3}$. Karena $|r| = \frac{4}{3} > 1$, deret ini divergen.$\blacksquare$

4b) $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \cdots$

Terlihat jelas bahwa deret geometrik ini memiliki rasio $r = -\frac{2}{10}$. Karena $|r| = \frac{1}{5} < 1$, dere ini konvergen.$\blacksquare$

Tentukan jari-jari kekonvergenan dan interval kekonvergenan

$$5a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^4 4^n}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^4\,4^{n+1}} \cdot \frac{n^4\,4^n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^4}{(n+1)^4}\cdot\frac{x}{4}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 \frac{|x|}{4} = 1^4\cdot\frac{|x|}{4} = \frac{|x|}{4}\end{aligned}$$

Dengan uji banding mutlak, deret ini konvergen ketika $\frac{|x|}{4} < 1 \Leftrightarrow |x| < 4$, jadi didapat jari-jari kekonvergenan $R = 4$. Ketika $x = 4$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ konvergen karena deret-p dimana $p = 4 > 1$. Ketika $x = -4$, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$ konvergen dengan uji deret ganti tanda. Oleh karena itu, interval kekonvergenannya adalah $[-4,4]\ \blacksquare$

$$5b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}|x|\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-1/n}{2+1/n}|x|\right) = |x|$$

Dengan uji banding mutlak, deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}$ konvergen ketika $|x|<1$, sehingga $R=1$. Ketika $x=1$, deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ divergen karena perbandingan dengan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ karena $\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$ dan $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergen karena merupakan perkalian konstan dari deret harmonik. Ketika $x=-1$, deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ konvergen dengan uji deret ganti tanda. Karena itu, interval kekonvergenannya adalah $[-1,1)$.■

Ubahlah fungsi berikut ini menjadi deret pangkat dan tentukan interval kekonvergenannya.

$$6a)\ f(x)=\frac{x-1}{x+2}$$

$$f(x)=1-\frac{3}{x+2}=1-\frac{\frac{3}{2}}{\frac{x}{2}+1}=1-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}=1-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n\ atau-\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n3x^n}{2^{n+1}}.$$

Deret geometrik $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n$ konvergen ketika $\left|-\frac{x}{2}\right|<1 \Leftrightarrow |x|<2$, jadi jari-jari kekonvergenan $R=2$ dan interval kekonvergenannya $(-2,2)$■

$$6b)\ f(x)=\frac{x^2}{x^4+16}$$

$$f(x)=\frac{x^2}{16}\left(\frac{1}{1+\frac{x^4}{16}}\right)=\frac{x^2}{16}\cdot\left(\frac{1}{1-\left[-\left(\frac{x}{2}\right)\right]^4}\right)=\frac{x^2}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\left(\frac{x}{2}\right)^4\right]^n\ atau\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{4n+2}}{2^{4n+4}}.$$

Deret geometrik $\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\left(\frac{x}{2}\right)^4\right]^n$ konvergen ketika $\left|-\left(\frac{x}{2}\right)^4\right|<1 \Leftrightarrow |x|<2$, jadi jari-jari kekonvergenan $R=2$ dan interval kekonvergenannya $(-2,2)$■