Fedora Ilahi – G1901211025

Tugas Mandiri

1. (a) $\cos\pi, \frac{\cos 2\pi}{4}, \frac{\cos 3\pi}{9}, \frac{\cos 4\pi}{16}, \ldots$

↳ Rumus eksplisit : $a_n =$

↳ Kekonvergenannya $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2}$

$$-\frac{1}{n^2} \le \frac{\cos n\pi}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ Konvergen ke 0

(b) • $\{a_n\}$ Konvergen ke A

maka $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, sehingga

Setiap $\epsilon > 0$ Dapat ditemukan bentuk $N_1 > 0$, sedemikian sehingga untuk $n > N_1$ berlaku

$$|a_n - A| < \frac{1}{2}\epsilon$$

• $\{b_n\}$ konvergen ke B maka $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, dengan kata lain untuk setiap $\epsilon > 0$ selalu dapat ditemukan $N_2 > 0$ sedemikian hingga untuk $n > N_2$ berlaku

$$|b_n - B| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

• Pilih $N = \max\{N_1, N_2\}$ diperoleh:

$|a_n + b_n - (A+B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)|$

$\le |a_n - A| + |b_n - B|$

$< \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon$

$= \epsilon$

Terbukti $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(c) $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$

• Kemonotonan

$a_n - a_{n+1} = \sin\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{(n+1)\pi}{4}$

$=$ tak tentu

• Keterbatasan

$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{4} =$ tidak ada

$\therefore \{a_n\}$ divergen, sehingga $\{a_n\}$ tak terbatas.

2. (a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}$

• Eksplisit : $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

• Kekonvergenannya : $-1 \le (-1)^{n+1} \le 1$

$$-\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^{n+1}}{n} \le \frac{1}{n}$$

↳ $\{a_n\}$ Konvergen ke 0

(b) $a_n = \frac{3 - 8\cdot 2^n}{5 + 4\cdot 2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3 - 8\cdot 2^n}{5 + 4\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2^n} - 8}{\frac{5}{2^n} + 4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{0 - 8}{0 + 4} = -2$$

Konvergen ke −2

ⓒ $a_n = \frac{\ln n}{n}$

• Kemonotonan

$a(x) = \frac{\ln x}{x}$

$a'(x) = \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

- $a'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$

$\ln e < \ln x$

$e < x$

$\therefore$ a turun pada (e, ∞)

- $a'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} > 0$

$\ln e > \ln x$

$e > x$

$\therefore$ a naik pada $(0, e)$

Oleh karena itu $\{a_n\}$ bukan barisan monoton pada N.

Keterbatasan

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$

$\{a_n\}$ Konvergen ke 0

3 ⓐ 0,9 . 0,99 . 0,999 . 0,9999

↳ Rumus eksplisit: $a_n = 1 - 10^{-n}$

↳ Kekonvergenannya

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - 10^{-n}$

$= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{10^n}$

$= 1$

$\{a_n\}$ Konvergen menuju 1

ⓑ $a_n = \frac{n+3}{3n-2}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3n-2} \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\{a_n\}$ Konvergen ke $1/3$

ⓒ $a_n = \frac{n!}{10^n}$

Kemonotonan

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{10^n} \times \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$

$= \frac{1}{1} \cdot \frac{10}{n+1}$

$= \frac{10}{n+1}$

$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 = \{a_n\}$ turun untuk $n = 1, 2, 3, \ldots, 8$

$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 = \{a_n\}$ tak turun untuk $n = 9, 10, 11, \ldots$

$\{a_n\}$ tidak monoton.

Keterbatasan

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{10^n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \ldots 10}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{10} \cdot \frac{(n-1)}{10} \cdot \frac{(n-2)}{10} \ldots \frac{1}{10}$

$= \infty$

$\{a_n\}$ divergen, sehingga $\{a_n\}$ tak terbatas.