M. Rizky Fajar
G1401211009

No
Date

Tugas Mandiri

1.) a.) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tulis kekonvergenannya!

$$\cos\pi,\ \frac{\cos 2\pi}{4},\ \frac{\cos 3\pi}{9},\ \frac{\cos 4\pi}{16},\ \ldots$$

$$a_n = \frac{\cos n\pi}{n^2}$$

~~* Kemonotonan~~

$$\cancel{a_n - a_{n+1} = \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{\cos (n+1)\pi}{(n+1)^2}}$$

* Kekonvergenannya

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2} =$$

$$\frac{-1}{n^2} \le \frac{\cos n\pi}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

↳ $\{a_n\}$ konvergen ke 0

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2} = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0\end{array}}$$

1.) b.) Diketahui $\{a\}$ konvergen ke A dan $\{b\}$ konvergen ke B. Buktikan (dengan definisi limit) $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke $A+B$!

•) Karena $\{a_n\}$ konvergen ke A maka $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, sehingga

untuk setiap $\varepsilon > 0$ dapat ditemukan $N_1 > 0$, sedemikian sehingga untuk $n > N_1$ berlaku

$$|a_n - A| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

•) Karena $\{b_n\}$ konvergen ke B, maka $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, sehingga

untuk setiap $\varepsilon > 0$ dapat ditemukan $N_2 > 0$, sedemikian sehingga untuk $n > N_2$ berlaku

$$|b_n - B| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

•) Jika $N = \max\{N_1, N_2\}$, diperoleh:

$$\begin{aligned}|a_n + b_n - (A+B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\le |a_n - A| + |b_n - B| \\ &< \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

•) Terbukti $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

//

KENKO® 36 Lines, 6 mm

No
Date

1) c.) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut : $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$;

* Kemonotonan

$a_n - a_{n+1} = \sin \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{(n+1)\pi}{4}$

= tak tentu

* Keterbatasan

$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{n\pi}{4}$ = tidak ada

$\therefore$ $\{a_n\}$ divergen, sehingga $\{a_n\}$ tak terbatas

2.) a.) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan ~~kekonvergen~~ ~~nya~~ kekonvergenannya :

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$

.) Eksplisit

$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

.) Kekonvergenannya

$-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1$

$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq \frac{1}{n}$

$\hookrightarrow$ $\{a_n\}$ konvergen ke 0

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \\ &\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \end{aligned}}$$

b.) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen :

$a_n = \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3}{2^n} - 8}{\frac{5}{2^n} + 4} = \lim_{n \to \infty} \frac{0 - 8}{0 + 4}$

$= -2$

$\therefore$ Konvergen ke -2 $\therefore$

KENKO® 36 Lines, 6 mm

No
Date

2) c.) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut :

$$a_n = \frac{\ln n}{n}$$

Kemonotonan

* Definisikan fungsi a sebagai

$$a(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$a'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Diperoleh :

•) $a'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$

$$\ln e < \ln x$$

$$e < x$$

$\therefore$ a turun pada (e, ∞)

•) $a'(x) > \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} > 0$

$$\ln e > \ln x$$

$$e > x$$

$\therefore$ a naik pada $(0, e)$

Oleh karena itu : $\{a_n\}$ bukan barisan monoton pada $\mathbb{N}$

Keterbatasan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \overset{LH}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$$

$\{a_n\}$ konvergen ke 0

3) a.) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan ~~Kekonverge~~ kekonvergenannya ;

0,9 , 0,99 , 0,999 , ...

Eksplisit

$$a_n = 1 - 10^{-n}$$

Kekonvergenannya

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - 10^{-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{10^n}$$

$$= 1$$

$\therefore$ $\{a_n\}$ konvergen menuju 1

3) b.) Dengan definisi limit buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen :

$$a_n = \frac{n+3}{3n-2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3n-2} \overset{LH}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$\therefore$ $\{a_n\}$ konvergen ke $1/3$

No
Date

3) c.) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut :

$$a_n = \frac{n!}{10^n}$$

Kemonotonan

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{10^n} \times \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{10}{n+1}$$

$$= \frac{10}{n+1}$$

$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 = \{a_n\}$ turun untuk $n = 1, 2, 3, \ldots, 8$

$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 = \{a_n\}$ tak turun untuk $n = 9, 10, 11, \ldots$

$\therefore \{a_n\}$ tidak monoton

Keterbatasan

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{10^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \ldots 10}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{10} \cdot \frac{(n-1)}{10} \cdot \frac{(n-2)}{10} \cdots \frac{1}{10}$$

$$= \infty$$

$\therefore \{a_n\}$ divergen, sehingga $\{a_n\}$ tak terbatas