1. **(12 poin)** Diberikan suatu barisan $\{a_n\}$ dengan rumus

$$a_n = \frac{n}{2n-1}, \quad n \geq 1.$$

   (a) Tentukan empat suku pertama (dalam bentuk pecahan).

   (b) Tentukan apakah barisan tersebut konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan $\lim_{n\to\infty} a_n$.

$\boxed{\text{Jawab}}$

(a)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2(1)-1} = \frac{1}{1} = 1 \\ a_2 &= \frac{2}{2(2)-1} = \frac{2}{3} \\ a_3 &= \frac{3}{2(3)-1} = \frac{3}{5} \\ a_4 &= \frac{4}{2(4)-1} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

(b) Barisan tersebut konvergen dengan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

2. (**13 poin**) Tentukan apakah deret berikut

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\frac{1}{k\left(k+1\right)}\right]$$

konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan jumlahnya.

$\boxed{\text{Jawab}}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

merupakan deret geometri dengan $a=3$ dan $r=\frac{1}{2}$, $|r|<1$, maka deret tersebut konvergen dengan jumlah $\frac{a}{1-r}=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$.

Karena

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(k+1\right)} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

maka

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\left(k+1\right)}$$

konvergen dengan jumlah 1.

Jadi,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\frac{1}{k\left(k+1\right)}\right]$$

konvergen dengan jumlah $6-1=5$.

3. **(12 poin)** Tentukan kekonvergenan deret berikut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+4} \right)^n .$$

$\boxed{\text{Jawab}}$

(Uji Akar) Misalkan $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n+4} \right)^n$, maka

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+4} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}} \\ &= \frac{2+0}{3+0} \\ &= \frac{2}{3} < 1, \end{aligned}$$

sehingga berdasarkan uji akar, deret tersebut konvergen.

4. (**13 poin**) Tentukan apakah deret berikut konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}.$$

$\boxed{\text{Jawab}}$

(Uji Integral) Misalkan $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$, maka

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \,|x > 0 \text{ dan } x \ln x \neq 0\} \\ &= \{x \,|x > 0 \text{ dan } x \neq 0 \text{ dan } x \neq 1\} \\ &= (0,1) \cup (1, \infty). \end{aligned}$$

Fungsi f termasuk fungsi yang kontinu pada daerah asalnya, sehingga f kontinu pada $[2, \infty)$.
Untuk $x \in [2, \infty)$, $x > 0$ dan $\ln x > 0$ sehingga f positif pada $[2, \infty)$.
Kemudian,

$$f'(x) = -1 (x \ln x)^{-2} (\ln(x) + 1) = -\frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} < 0, \text{ untuk setiap } x \in [2, \infty)$$

sehingga f turun (yang berakibat taknaik) pada $[2, \infty)$.
Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} f(x)\, dx &= \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx \\ &= \lim_{b \to \infty} \int_2^{b} \frac{1}{x \ln x} dx \\ &= \lim_{b \to \infty} \left[\ln |\ln x|\right]_2^b \\ &= \lim_{b \to \infty} (\ln |\ln b| - \ln |\ln 2|) \\ &= \infty \end{aligned}$$

Catatan:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx$$

Misalkan $u = \ln x$, maka $du = \dfrac{1}{x} dx$, sehingga

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C = \ln |\ln x| + C$$

Misalkan $a_n = f(n) = \dfrac{1}{n \ln n}$.

Karena f kontinu, positif, dan taknaik pada $[2, \infty)$ serta $\int_2^{\infty} f(x)\, dx$ divergen, maka

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

divergen.

(Uji Deret Ganti Tanda) Untuk $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} 0 &< n < n+1 \text{ dan } 0 < \ln n < \ln(n+1) \\ 0 &< n \ln n < (n+1)\ln(n+1) \\ \frac{1}{n \ln n} &> \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \geq 0 \\ a_n &> a_{n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Kemudian,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0,$$

sehingga berdasarkan uji deret ganti tanda, deret

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$$

konvergen. Jadi, deret

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$$

konvergen bersyarat.

5. **(12 poin)** Tentukan jari-jari kekonvergenan deret pangkat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

$\boxed{\text{Jawab}}$

(Uji Hasil bagi Mutlak) Misalkan $u_n(x) = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$, maka

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2 |x|^{n+1}}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{(n!)^2 |x|^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2 |x|^n |x|}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2 |x|^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)\, n!)^2 |x|}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}} \\
&= |x| \left(\frac{1+0+0}{4+0+0}\right) \\
&= \frac{1}{4}|x|.
\end{aligned}$$

Deret konvergen jika

$$\begin{aligned}
\rho &< 1 \\
\frac{1}{4}|x| &< 1 \\
|x| &< 4 \\
-4 &< x < 4.
\end{aligned}$$

Jadi, jari-jari kekonvergenannya adalah 4.

6. (**13 poin**) Diberikan fungsi f dengan

$$f\left(x\right)=e^{2x}.$$

Tentukan deret Taylor dalam $(x-2)$ untuk fungsi f

(a) yang dijabarkan hingga suku dengan $\left(x-2\right)^{3}$,

(b) menggunakan notasi sigma.

$\boxed{\text{Jawab}}$

(a)

$$f\left(x\right)\approx f\left(2\right)+f'\left(2\right)\left(x-2\right)+\frac{f''\left(2\right)}{2}\left(x-2\right)^{2}+\frac{f'''\left(2\right)}{6}\left(x-2\right)^{3}.$$

$$\begin{aligned}
f\left(x\right) &= e^{2x}\Rightarrow f\left(2\right)=e^{4}.\\
f'\left(x\right) &= 2e^{2x}\Rightarrow f'\left(2\right)=2e^{4}.\\
f''\left(x\right) &= 2^{2}e^{2x}\Rightarrow f''\left(2\right)=2^{2}e^{4}.\\
f'''\left(x\right) &= 2^{3}e^{2x}\Rightarrow f'''\left(2\right)=2^{3}e^{4}.
\end{aligned}$$

$$f\left(x\right)\approx e^{4}+2e^{4}\left(x-2\right)+\frac{2^{2}e^{4}}{2}\left(x-2\right)^{2}+\frac{2^{3}e^{4}}{6}\left(x-2\right)^{3}.$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(2\right)}{n!}\left(x-2\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n}e^{4}}{n!}\left(x-2\right)^{n}$$

7. **(12 poin)** Koordinat titik A dalam sistem koordinat silinder adalah $(4, -\frac{1}{3}\pi, 5)$ dan koordinat titik B dalam sistem koordinat bola adalah $(2, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi)$. Nyatakan koordinat A dan B dalam sistem koordinat kartesius.

   $\boxed{\text{Jawab}}$

   Diperoleh $r = 4$, $\theta = -\frac{1}{3}\pi$, dan $z = 5$, sehingga

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = 4\cos(-\tfrac{1}{3}\pi) = 4\cos(\tfrac{1}{3}\pi) = 4 \cdot \tfrac{1}{2} = 2, \\ y &= r\sin\theta = 4\sin(-\tfrac{1}{3}\pi) = -4\sin(\tfrac{1}{3}\pi) = -4 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = -2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

   Jadi koordinat titik A dalam sistem koordinat kartesius adalah $(2, -2\sqrt{3}, 5)$.

   Selanjutnya diperoleh $\rho = 2$, $\theta = \frac{1}{3}\pi$, dan $\phi = \frac{1}{4}\pi$, sehingga

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\phi\cos\theta = 2\sin\tfrac{1}{4}\pi\cos\tfrac{1}{3}\pi = 2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \\ y &= \rho\sin\phi\sin\theta = 2\sin\tfrac{1}{4}\pi\sin\tfrac{1}{3}\pi = 2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}, \\ z &= \rho\cos\phi = 2\cos\tfrac{1}{4}\pi = 2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

   Jadi koordinat titik B dalam sistem koordinat kartesius adalah $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{6}, \sqrt{2})$.

8. (**13 poin**) Sebuah permukaan (*surface*) memiliki persamaan dalam sistem koordinat kartesius $x^2 + y^2 = 2y$. Permukaan yang lain memiliki persamaan dalam sistem koordinat bola $\rho \sin \phi = 2 \sin \theta$. Apakah kedua permukaan tersebut identik? Jelaskan jawaban Anda.

   $\boxed{\text{Jawab}}$

   Diperoleh

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 2y &\Leftrightarrow (\rho \sin \phi \cos \theta)^2 + (\rho \sin \phi \sin \theta)^2 = 2(\rho \sin \phi \sin \theta) \\ &\Leftrightarrow \rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2\rho \sin \phi \sin \theta \\ &\Leftrightarrow \rho^2 \sin^2 \phi = 2\rho \sin \phi \sin \theta \\ &\Leftrightarrow \rho \sin \phi = 2 \sin \theta. \end{aligned}$$

   Jadi kedua permukaan identik.