Muhammad Luthfi Al Gifari || G1401211031

No Rabu
Date 7 Sept 2022

Tugas Mandiri

1. a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya.

$$\cos \pi, \frac{\cos 2\pi}{4}, \frac{\cos 3\pi}{9}, \frac{\cos 4\pi}{16}, \ldots$$

=> Rumus eksplisit : $a_n = \frac{\cos n\pi}{n^2}$ (berpola $\frac{1}{1^2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{3^2}, \frac{4}{4^2}, \ldots$)

=> Kekonvergenan : $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2} = 0$ (konvergen)

(Teorema apit) : $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos n\pi}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

b) Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B. Buktikan (dengan definisi limit) $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke A + B.

=> $\lim_{n\to\infty} \{a_n + b_n\} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = A + B.$

Karena $\{a_n\}$ konvergen ke A Karena $\{b_n\}$ konvergen ke B

=> Berlaku : $|a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon$, untuk setiap $\varepsilon > 0$ sembarang, selalu dapat $(n > N_1)$ ditemukan $N_1 > 0$.

=> Berlaku : $|b_n - B| < \frac{1}{2}\varepsilon$, untuk setiap $\varepsilon > 0$ sembarang, selalu dapat $(n > N_2)$ ditemukan $N_2 > 0$.

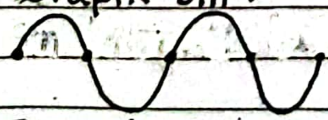
=> Diperoleh :
$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (A+B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| \\ &< \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan :

$$a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$$

=> Kemonotonan : $a_n - a_{n+1} = \sin \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{(n+1)\pi}{4}$ = Tidak monoton atau tak tentu

• Grafik Sin :



(naik - turun)

Bisa (−) < 0 Monoton naik
(+) < 0 Monoton turun

• Keterbatasan : Apabila $\{a_n\}$ konvergen = terbatas, (teorema apit tidak berlaku)

• Bentuk limit : $\lim_{n\to\infty} \sin \frac{n\pi}{4}$.

KENKO 36 Lines, 6 mm

No Rabu
Date 07 Sept 2022

2. a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya.

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}$$

=> Rumus eksplisit : $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

=> Kekonvergenan : $\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left|(-1)^{n+1}\right| \left|\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(Teorema apit) = $-1 \leq (-1)^{n+1} < 1 = -\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{n} < \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$

b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen :

$$a_n = \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n}$$

=> $\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 8\cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n} \cdot \frac{1/2^n}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3/2^n - 8}{5/2^n + 4} = \frac{0-8}{0+4} = -2$ (konvergen)

c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut :

$$a_n = \frac{\ln n}{n} \Rightarrow a(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ dengan } x > 0$$

=> Kemonotonan : $a'(x) = \frac{1/x \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ => Tidak monoton (tidak naik & tidak turun)

- $a'(x) < 0 = 1 - \ln x < 0 = \ln e < \ln x = e < x$: a (monoton turun (e, ∞))
- $a'(x) > 0 = 1 - \ln x > 0 = \ln e > \ln x = e > x$: a (naik pada $(0, e)$)

=> Keterbatasan : $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} =^{*LH} \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = \frac{1}{n} = 0$ (konvergen ke 0)

3. a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya.

$$0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \ldots$$

=> Rumus eksplisit : Berpola $(1 - 1/10), (1 - 1/100), (1 - 1/1000), \ldots = a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$

=> Kekonvergenan : $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{10^n} = 1 - 0 = 1$ (konvergen)

b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen :

$$a_n = \frac{n+3}{3n-2}$$

=> $\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3n-2} \cdot \frac{1/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 3/n}{3 - 2/n} = \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3}$ (konvergen)

No Rabu
Date 07 Sept 2022

c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan :

$$a_n = \frac{n!}{10^n}$$

=> Kemonotonan : $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n! \cdot 10^{-n}}{(n+1)! / 10^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot 10^{(n+1)} = \frac{10^{n+1}}{n+1}$ (naik)

=> Keterbatasan : $\lim_{n \to \infty} \{a_n\} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{10^n} = \frac{n \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10^n \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{\infty}{\infty}$ (divergen)