Math IPB

www.math.ipb.ac.id

Pertemuan ke-3: BARISAN TAKHINGGA

Departemen Matematika
FMIPA IPB

Bogor, 2017

Barisan Takhingga

Definisi (Barisan takhingga)

Suatu barisan takhingga $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *adalah susunan bilangan terurut sesuai dengan urutan bilangan asli sebagai indeksnya, atau, suatu fungsi yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan asli.*

- Barisan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dapat disajikan sebagai $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ atau $\{a_n\}$.
- Kadangkala kita memperhatikan barisan yang indeksnya terdiri atas semua bilangan asli atau bilangan asli yang lebih besar.
  Contohnya: $\{b_n\}_{n=8}^{\infty} = \{b_8, b_9, b_{10}, \ldots\}$.

Suatu barisan dapat dispesifikasi dengan beberapa cara berikut:

1. Dengan memberikan suku awal yang cukup untuk membentuk suatu pola. Misalnya barisan: $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$
2. Dengan rumus eksplisit untuk suatu suku ke-n. Misalnya: $a_n = 3n - 1$, $n \geq 1$.
3. Dengan rumus rekursif. Misalnya: $a_1 = 2$, dan untuk semua $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + 3$.

Kekonvergenan

Untuk memahami konsep kekonvergenan barisan takhingga, kita perhatikan empat barisan berikut.

1. $a_n = 1 - 1/n$, untuk $n \geq 1$, atau $0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \ldots$.
2. $b_n = 1 - (-1)^n 1/n$, untuk $n \geq 1$, atau $2, 1/2, 4/3, 3/4, 6/5, \ldots$.
3. $c_n = (-1)^n (n-1)/n$, untuk $n \geq 1$, atau $0, 1/2, -2/3, 3/4, -4/5, 5/6, -6/7, \ldots$.
4. $d_n = 0.999$, untuk $n \geq 1$, atau $0.999, 0.999, 0.999, 0.999, \ldots$.

Untuk nilai n yang semakin besar, baik nilai a_n maupun nilai b_n menuju ke 1. Namun tidak demikian dengan nilai c_n dan d_n. Dalam hal ini kita sebut barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ konvergen ke 1.

Definisi (Kekonvergenan)

Suatu barisan $\{a_n\}$ *disebut konvergen ke* L*, atau berlimit* L*, dan ditulis*

$$a_n \to L, \text{ jika } n \to \infty,$$

atau

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L,$$

jika untuk setiap bilangan positif ϵ*, ada bilangan positif* N*, sehingga jika* $n \geq N$ *maka* $|a_n - L| < \epsilon$*.*

- Suatu barisan yang tidak konvergen ke suatu bilangan L yang terhingga disebut divergen.
- Untuk memperjelas gagasan kekonvergenan, bandingkan grafik fungsi $a(x) = 1 - 1/x$ untuk $x \geq 1$ dengan grafik barisan $a_n = 1 - 1/n$ untuk $n \geq 1$.

Teorema

Misalkan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ adalah barisan-barisan yang konvergen dan k adalah suatu konstanta.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (ka_n) = k \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n \right)$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n \right) \pm \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n \right)$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n \right) \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n \right)$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n} \right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, *asalkan* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Contoh

1. *Buktikan bahwa barisan* $\{a_n\}$ *dengan*

$$a_n = (2n+3)/n$$

untuk $n \geq 1$ *adalah barisan yang konvergen ke* 2.

2. *Periksa kekonvergenan barisan*

$$\left\{\frac{4n^2+5}{2n^2+7n}\right\}.$$

3. *Periksa kekonvergenan barisan* $\{n^2/e^n\}$. *Jika konvergen, tentukan limitnya.*

Teorema (Teorema Apit)

Jika $\{a_n\}$ *dan* $\{c_n\}$ *adalah barisan-barisan yang konvergen menuju* L, *serta* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *untuk semua* $n > K$ *dengan* K *adalah konstanta bilangan asli, maka barisan* $\{b_n\}$ *konvergen menuju* L.

Contoh

Periksa kekonvergenan barisan

$$\left\{ \left(n + \sin^2 n \right) / \left(2n + 3 \right) \right\}.$$

Teorema

Jika $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ *maka* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Contoh

Periksa kekonvergenan barisan

$$\left\{(-1)^n \left(\ln n^2\right) / n\right\}.$$

Definisi (Barisan monoton)

1. *Suatu barisan* $\{a_n\}$ *disebut barisan naik jika untuk semua* $n \geq 1$ *berlaku* $a_n < a_{n+1}$.
2. *Suatu barisan* $\{a_n\}$ *disebut barisan turun jika untuk semua* $n \geq 1$ *berlaku* $a_n > a_{n+1}$.
3. *Suatu barisan* $\{a_n\}$ *disebut barisan takturun jika untuk semua* $n \geq 1$ *berlaku* $a_n \leq a_{n+1}$.
4. *Suatu barisan* $\{a_n\}$ *disebut barisan taknaik jika untuk semua* $n \geq 1$ *berlaku* $a_n \geq a_{n+1}$.

   Barisan yang memenuhi salah satu sifat di atas disebut barisan monoton.

Teorema

1. *Jika* U *adalah suatu batas atas barisan takturun* $\{a_n\}$*, maka barisan ini konvergen menuju suatu limit* A *yang kurang dari atau sama dengan* U.
2. *Jika* L *adalah suatu batas atas barisan taknaik* $\{b_n\}$*, maka barisan ini konvergen menuju suatu limit* B *yang lebih dari atau sama dengan* L.

Bahan Responsi

Soal

Dari tiap barisan, tuliskan lima suku pertama. Tentukan apakah barisan tersebut konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan $\lim_{n\to\infty} a_n$.

1. $a_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+n-3}$
2. $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+4}$
3. $a_n = \dfrac{n\sin(n\pi/2)}{2n+1}$
4. $a_n = \dfrac{n+\cos\left(n^2+2\right)}{2n+1}$
5. $a_n = (-1)^n \dfrac{\sin(n\pi/2)}{n}$
6. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n.$

Soal

Tentukan rumus eksplisit untuk a_n. *Tentukan apakah barisan tersebut konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

1. $-1, \frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, -\frac{5}{9}, \ldots$
2. $-\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{9}{27}, \frac{16}{81}, -\frac{25}{243}, \ldots$
3. $1, \frac{2}{2^2-1^2}, \frac{3}{3^2-2^2}, \frac{4}{4^2-3^2}, \frac{5}{5^2-4^2}, \ldots$
4. $2, 1, \frac{2^3}{3^2}, \frac{2^4}{4^2}, \frac{2^5}{5^2}, \ldots$

Soal

Tuliskan empat suku pertama dari barisan $\{a_n\}$*. Kemudian, gunakan teorema mengenai kekonvergenan barisan monoton terbatas untuk membuktikan bahwa barisan tersebut konvergen.*

1. $a_n = \dfrac{n}{n+1}\left(4 - \dfrac{2}{n^2}\right)$.
2. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 2$.
3. $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2}a_n$, $a_1 = 1$.
4. $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$, $a_1 = 2$.

Soal

Gunakan definisi limit untuk membuktikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+4} = 2.$$

Soal

Jika barisan $\{a_n\}$ *dan* $\{b_n\}$ *keduanya divergen, apakah* $\{a_n + b_n\}$ *divergen?*

Tentang Slide

- Penyusun: Dosen Departemen Matematika FMIPA IPB
- Versi: 2017
- Media Presentasi: $\LaTeX$ - BEAMER (PDF$\LaTeX$)