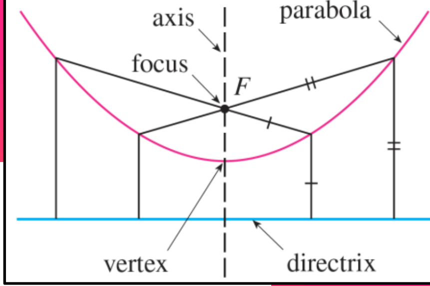
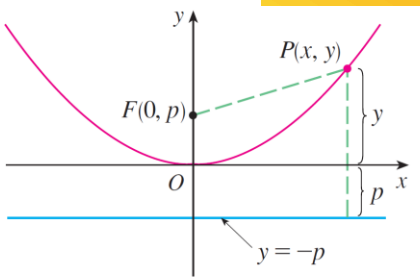
Irisan Kerucut

Responsi ke-8 Kalkulus II

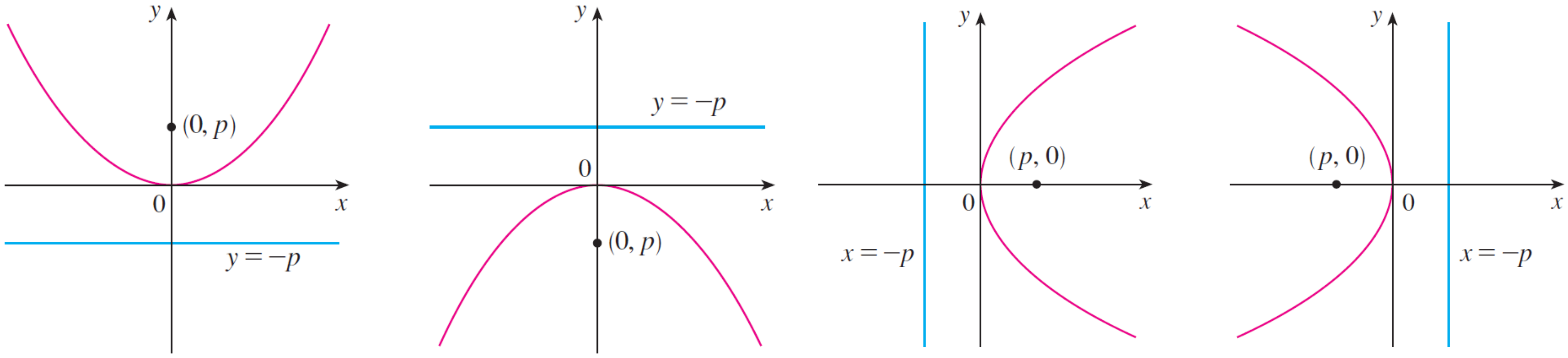
Parabola



- Parabola adalah kumpulan titik-titik yang jaraknya sama ke titik tetap F (fokus) dan ke garis tetap (direktriks), dapat ditulis $|PF| = |PL|$. Perhatikan bahwa titik tengah diantara fokus dan direktriks disebut vertex (puncak). Garis yang melewati fokus dan tegak lurus dengan direktriks disebut axis (sumbu).
- Kita akan mendapatkan persamaan yang sederhana jika kita meletakkan titik puncak di O (0,0) dan direktriksnya sejajar dengan sumbu-x. Jika titik fokus berada pada titik (0,p) maka direktriksnya memiliki persamaan $y = -p$. Jika $P(x, y)$ adalah sembarang titik pada parabola, maka jarak dari P ke fokus adalah $|PF| = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$ dan jarak dari P ke direktriks adalah $|PL| = |y + p|$. Sehingga akan kita dapatkan persamaan $\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y + p| \Leftrightarrow x^2 = 4py$.
- Dapat dilihat bahwa p adalah jarak dari fokus ke titik puncak.



Parabola (Rangkuman)

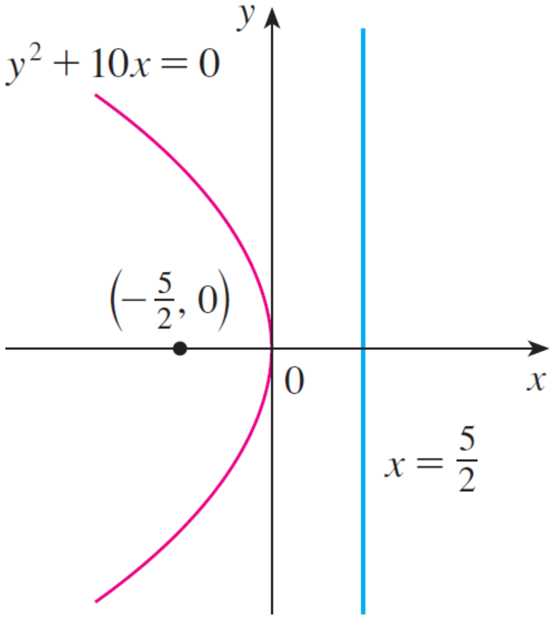


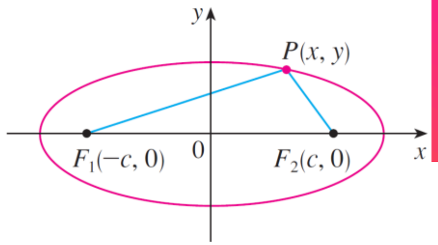
(a) $x^2 = 4py$, $p > 0$ (b) $x^2 = 4py$, $p < 0$ (c) $y^2 = 4px$, $p > 0$ (d) $y^2 = 4px$, $p < 0$

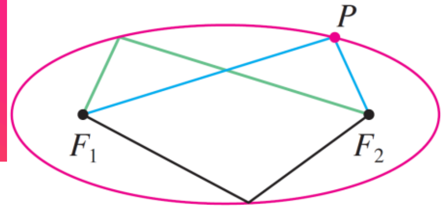
Contoh Soal (Parabola)

+ Tentukan fokus dan direktriks dari parabola $y^2 + 10x = 0$.

Jawab: Jika kita menulis persamaan $y^2 = -10x$ dan membandingkannya dengan $y^2 = 4px$. Maka akan didapat $p = -\frac{5}{2}$. Sehingga fokusnya adalah $(p, 0)$ yaitu $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ dan direktriksnya adalah $x = \frac{5}{2}$.





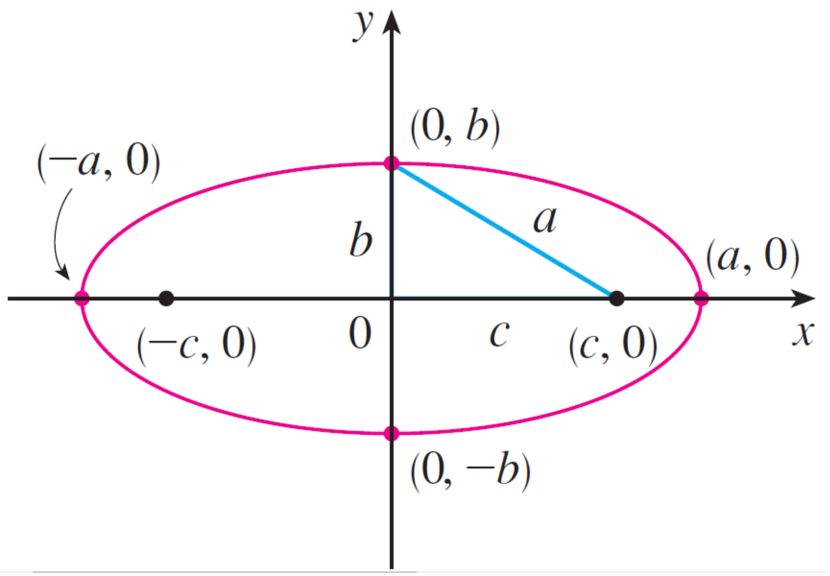


Ellips

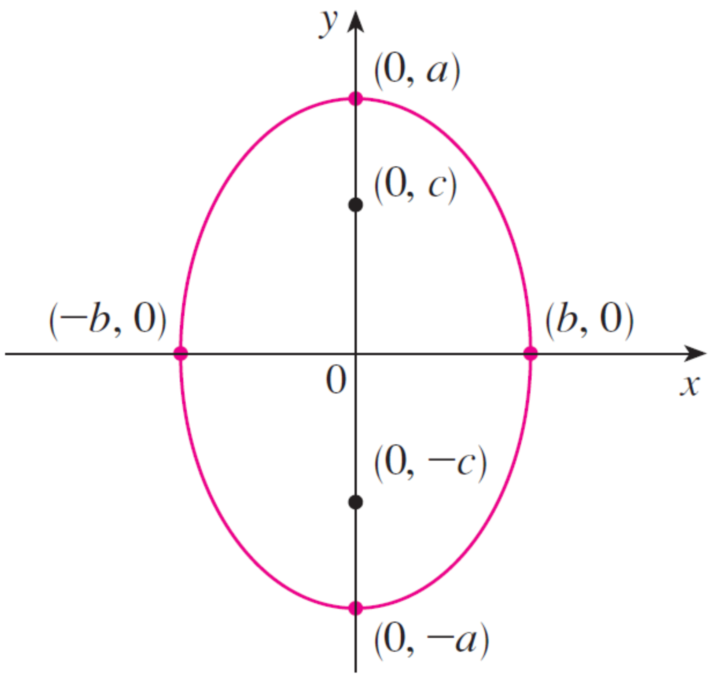
Elips adalah kumpulan titik yang jumlah jaraknya dari dua titik tetap (fokus) F_1 dan F_2 adalah konstan.

Agar mendapatkan persamaan yang sederhana untuk sebuah elips, maka kita menempatkan titik-titik fokus pada sumbu-x pada koordinat $(-c,0)$ dan $(c,0)$ sehingga titik O (0,0) di tengah kedua fokusnya. Misalkan jumlah dari jarak titik P pada elips ke kedua fokusnya adalah $2a$ maka akan didapat persamaan $|PF_1|+|PF_2|=2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \Leftrightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. Dari segitiga F_1F_2P pada gambar, kita dapat lihat bahwa $2c<2a$, maka $c<a$ dan karena itu $a^2-c^2>0$. Untuk kenyamanan, misalkan $b^2=a^2-c^2$. Maka persamaan elips dapat disederhanakan menjadi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Karena $b^2=a^2-c^2<a^2$, akan didapat $b<a$. Perpotongan pada sumbu-x akan didapat ketika $y=0$ yaitu menjadi $\frac{x^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow x=\pm a$. Titik $(a,0)$ dan $(-a,0)$ disebut titik-titik puncak (*vertices*) dan garis yang menghubungkan titik puncak adalah sumbu mayor (*major axis*). Untuk mencari perpotongan pada sumbu-y, kita mengatur $x=0$ dan akan didapat $y=\pm b$. Garis yang menghubungkan $(0,b)$ dan $(0,-b)$ disebut sumbu minor (*minor axis*). Jika kita mengganti x menjadi $-x$ atau y menjadi $-y$ pada persamaan sebelumnya tidak terjadi perubahan, artinya elips simetrik terhadap kedua sumbu. Perhatikan bahwa jika kedua fokus saling tumpang-tindih maka $c=0$, maka $a=b$ dan elips menjadi sebuah lingkaran dengan jari-jari $r=a=b$.

Ellips (Rangkuman)



- Elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geq b > 0$ memiliki fokus $(\pm c, 0)$ dimana $c^2 = a^2 - b^2$ dan titik puncak $(\pm a, 0)$

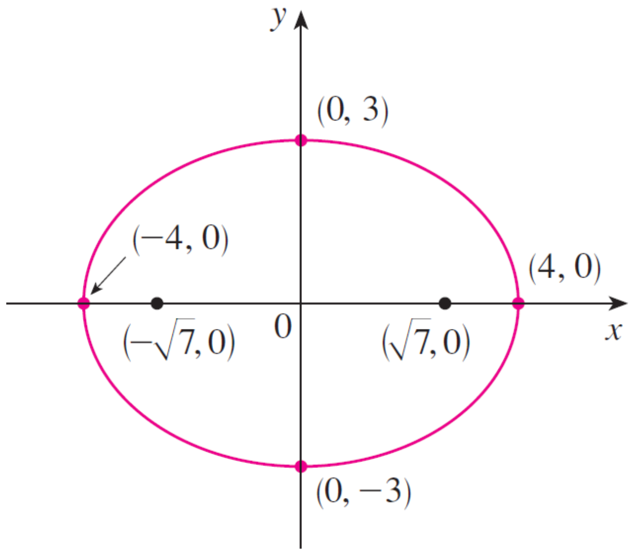


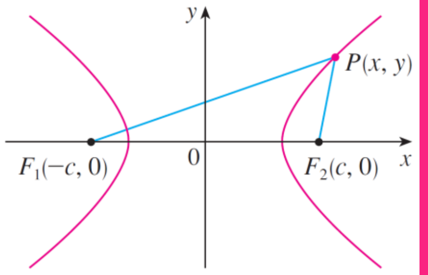
- Elips $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,\ a \geq b > 0$ memiliki fokus $(0, \pm c)$, dimana $c^2 = a^2 - b^2$ dan titik puncak $(0, \pm a)$.

Contoh Soal (Elips)

- Gambarlah grafik persamaan $9x^2 + 16y^2 = 144$ dan tentukan titik-titik fokusnya.

Jawab: Bagi kedua ruas dengan 144 maka akan didapat $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, sehingga kita punya $a^2 = 16, b^2 = 9, c^2 = a^2 - b^2 = 7$. Sehingga perpotongan sumbu-x adalah ± 4, perpotongan sumbu-y adalah ± 3 dan titik fokusnya adalah $(\pm\sqrt{7}, 0)$.



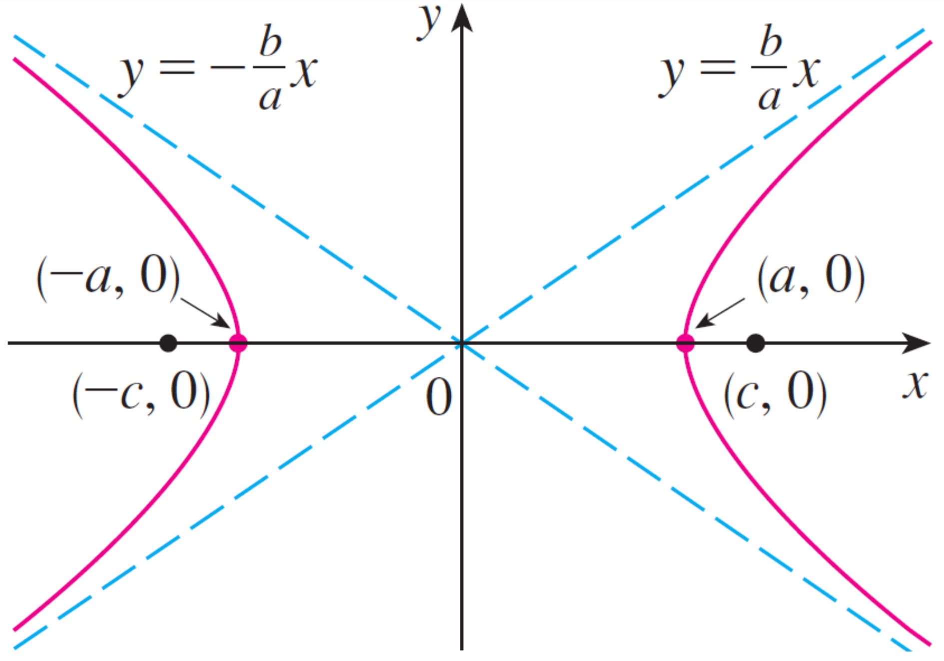


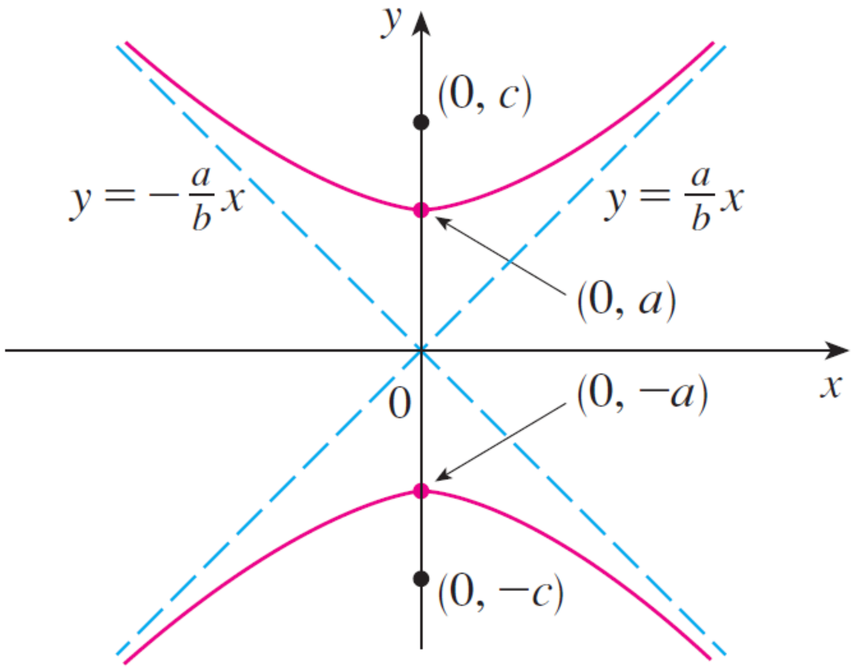
Hiperbola

Hiperbola adalah kumpulan titik yang selisih jarak dari dua titik tetap (fokus) F_1 dan F_2 adalah konstan. Perhatikan bahwa definisi hiperbola mirip dengan elips, perubahannya hanya terjadi dari penjumlahan menjadi pengurangan (selisih). Faktanya, proses penurunan persamaan hiperbola mirip dengan elips. Dapat dibuktikan bahwa jika fokus (*foci*) berada pada sumbu-x yaitu pada $(\pm c, 0)$ dan $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$ maka persamaan hiperbola menjadi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dimana $c^2 = a^2 + b^2$. Perhatikan bahwa perpotongan sumbu-x berada pada $(\pm a, 0)$ dan ini adalah titik puncak (*vertices*) dari hiperbola. Akan tetapi ketika kita mengatur $x = 0$ pada persamaan maka didapat $y^2 = -b^2$, yang tidak mungkin, sehingga tidak ada perpotongan sumbu-y.

Untuk menganalisis lebih jauh, lihat persamaan dan akan didapat $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$. Ini menunjukkan bahwa $x^2 \geq a^2$, sehingga $|x| = \sqrt{x^2} \geq a$. Karena itu kita punya $x \geq a$ atau $x \leq -a$. Ini menunjukkan bahwa hiperbola terdiri dari dua bagian, yang disebut *branches*. Untuk menggambar hiperbola, penting untuk diawal menggambar asimtotnya, yang merupakan garis $y = \left(\frac{b}{a}\right) x$ dan $y = -\left(\frac{b}{a}\right) x$

Hiperbola (Rangkuman)





- Hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ memiliki fokus $(\pm c, 0)$ dimana $c^2 = a^2 + b^2$, titik puncak $(\pm a, 0)$ dan asimtot $y = \pm\left(\frac{b}{a}\right)x$.
- Hiperbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ memiliki fokus $(0, \pm c)$ dimana $c^2 = a^2 + b^2$, titik puncak $(0, \pm a)$ dan asimtot $y = \pm\left(\frac{a}{b}\right)x$

Contoh Soal (Hiperbola)

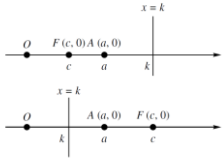
+ Tentukan fokus dan asimtot dari hiperbola $9x^2 - 16y^2 = 144$ dan gambarkan grafiknya.

Jawab: Bagi kedua ruas dengan 144 maka akan didapat $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ dimana ini merupakan bentuk dari persamaan sebelumnya sehingga didapat $a = 4, b = 3, c^2 = 16 + 9 = 25$ dan fokusnya $(\pm 5,0)$. Garis asimtot adalah $y = \frac{3}{4}x$ dan $y = -\frac{3}{4}x$.

Keeksentrikan

+ Ingat irisan kerucut merupakan kumpulan titik-titik $P(x, y)$ yang memenuhi persamaan berikut: $|PF| = e|PL|$ dimana F merupakan titik fokus, dan L adalah garis direktriks.
+ Jika $0 < e < 1$, maka irisan kerucut merupakan elips.
+ Jika $e = 1$, maka irisan kerucut merupakan parabola.
+ Jika $e > 1$, maka irisan kerucut merupakan hiperbola.

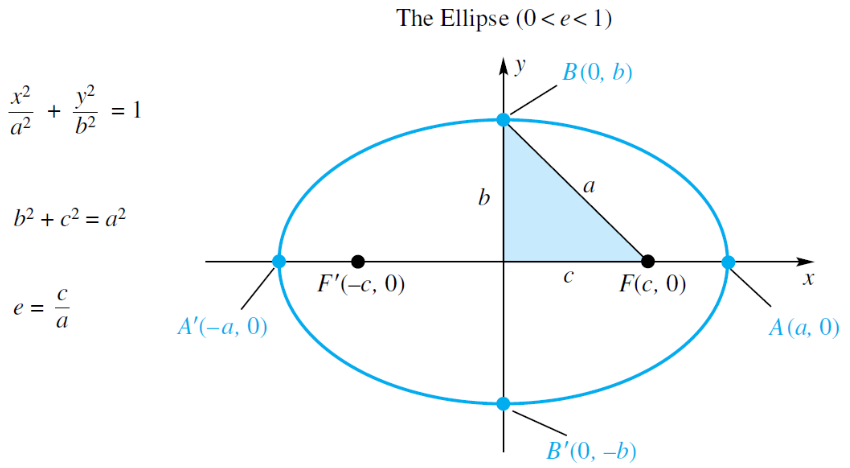
Elips dan Hiperbola (Keeksentrikan)



Ingat elips memiliki $0 < e < 1$ dan hiperbola $e > 1$. Pada kedua kasus tersebut, *conic* (irisan kerucut) memliki dua puncak, yang akan kita namai A' dan A. Titik tengah pada sumbu mayor antara A' dan A akan kita sebut pusat (*center*) dari *conic*. Elips dan hiperbola adalah simetrik terhadap pusatnya sehingga disebut *central conics*. Untuk menurunkan sebuah persamaan dari *central conic* (elips dan hiperbola), letakan sumbu-x di sepanjang sumbu mayor dengan titik O (0,0) sebagai pusat (*center*) dari conic sehingga fokus adalah $F(c,0)$ dan direktriks adalah garis $x = k$ dan titik puncak $A'(-a,0)$ dan $A(a,0)$ dengan c, k, dan a adalah positif. Terlihat bahwa A harus berada diantara F dan garis $x = k$. Dua kemungkinan penyusunan diperlihatkan pada gambar. Pada kasus pertama, menerapkan $|PF| = e|PL|$ pada titik $P = A$ memberikan $a - c = e(k - a) = ek - ea$. Pada kasus kedua, menerapkan $|PF| = e|PL|$ pada titik $P = A$ memberikan $c - a = e(a - k) = ea - ek$ yang mana ketika kedua ruas dikali -1 maka akan sama dengan kasus pertama. Selanjutnya terapkan hubungan $|PF| = e|PL|$ ke titik $A'(-a,0)$ dan $F(c,0)$ dan garis $x = k$. Ini akan menghasilkan $a + c = e(k + a) = ek + ea$. Ketika persamaan pertama dan kedua diselesaikan untuk c dan k maka akan didapat $c = ea$ dan $k = \frac{a}{e}$. Jika $0 < e < 1$ maka $c = ea < a$ dan $k = \frac{a}{e} > a$ sehingga untuk kasus elips, fokus berada di kiri titik puncak A dan direktriks $x = k$ berada di sebelah kanan A. Di sisi lain, jika $e > 1$, maka $c = ea > a$ dan $k = \frac{a}{e} < a$ sehingga untuk kasus hiperbola, garis direktriks $x = k$ berada di sebelah kiri A, dan titik fokus berada disebelah kanan A. Sekarang misalkan $P(x, y)$ adalah setiap titik pada elips atau hiperbola. Maka $L\left(\frac{a}{e}, y\right)$ adalah proyeksi garis direktriks. Persamaan $|PF| = e|PL|$ menjadi $\sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = e\sqrt{\left(x - \frac{a}{e}\right)^2}$ disederhanakan menjadi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$. Karena persamaan ini memiliki x dan y yang berpangkat genap, ini menunjukkan bahwa kurva simetrik terhadap sumbu x dan y dan titik O $(0,0)$. Karena kesimterikannya, haruslah ada fokus yang kedua pada $(-ae, 0)$ dan direktriks kedua pada $x = -\frac{a}{e}$. Sumbu yang mengandung dua titik puncak (dan juga dua titik fokus) disebut sumbu mayor. Kemudian sumbu yang tegak lurus dengan sumbu mayor dan melewati titik pusat (*center*) adalah sumbu minor.

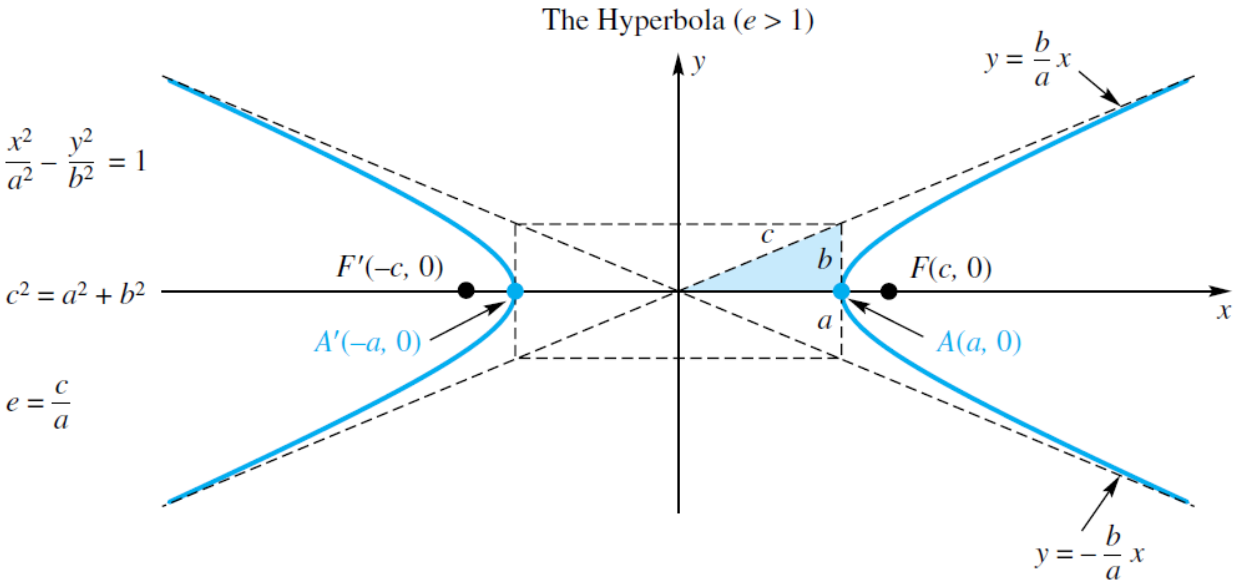
Elips (0<e<1)

Ingat $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$. Untuk kasus elips, $0 < e < 1$ maka nilai $(1-e^2)$ positif. Untuk menyederhanakan penulisan, misalkan $b = a\sqrt{1-e^2}$. Maka persamaannya dapat diturunkan menjadi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ yang disebut juga *standard equation of an ellipse*. Karena $c = ae$, nilai a, b, dan c memenuhi hubungan Pyhtagoras $a^2 = b^2 + c^2$. Sehingga nilai $2a$ yang merupakan diameter mayor dapat dihitung dan nilai $2b$ merupakan diameter minor.



Hiperbola (e>1)

Ingat $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$. Untuk kasus hiperbola, $e > 1$ maka $e^2 - 1$ bernilai positif. Misalkan $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ maka persamaan di atas dapat diturunkan menjadi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ini disebut *standard equation of a hyperbola*. Karena $c = ae$, kita akan mendapat $c^2 = a^2 + b^2$.



Tugas Responsi

1. Tentukan titik puncak, fokus, dan direktriks dari parabola berikut, serta gambarlah grafiknya.

a. $4y + x^2 = 0$

b. $y^2 = 12x$

2. Tentukan titik puncak, fokus, dan keeksentrian dari elips berikut, serta gambarlah grafiknya.

a. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

b. $25x^2 + 9y^2 = 225$

3. Tentukan titik puncak, fokus, dan garis asimtot hiperbola berikut, serta gambarlah grafiknya.

a. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

b. $9y^2 - x^2 = 9$

4. Tentukan persamaan irisan kerucut berikut:

a. Parabola dengan titik puncak $(0,0)$ dan fokus $(0,-2)$.

b. Parabola dengan fokus $(3,0)$ dan direktriks $x = 1$.

5. Tentukan persamaan irisan kerucut berikut:

a. Elips dengan fokus $(\pm 2,0)$ dan titik puncak $(\pm 5,0)$

6. Tentukan persamaan irisan kerucut berikut:

a. Hiperbola dengan fokus $(0,\pm 3)$ dan titik puncak $(0,\pm 1)$.

b. Hiperbola dengan titik puncak $(\pm 3,0)$ dan garis asimtot $y = \pm 2x$