Andi Fathatul Fuadiyah
61401211041

1) a. Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$\cos x, \frac{\cos 2x}{4}, \frac{\cos 3x}{9}, \frac{\cos 4x}{16}, \ldots$

$\Rightarrow$ rumus eksplisit : $\frac{\cos nx}{n^2}$; $n = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow$ Kekonvergenan :

$-1 \leq \cos nx \leq 1$

$\frac{-1}{n^2} \quad \frac{\cos x}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{-1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

$\therefore$ Konvergen ke 0

b. Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B. Buktikan dengan definisi limit $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke A + B.

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = A$, $\lim_{n \to \infty} b_n = B$

$\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n = A \pm B = A + B$.

pembuktian : $|(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon$

- $\{a_n\}$ konvergen ke A
  $L = A$, dibuktikan : untuk tiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N > 0$ sedemikian sehingga $n \geq N$.
  $|a_n - L| < \varepsilon/2$
  $|a_n - A| < \varepsilon/2$

- $\{b_n\}$ konvergen ke B
  $L = B$, dibuktikan : untuk setiap $\varepsilon > 0$ terhadap $N >$ sedemikian sehingga $n \geq N$.
  $|a_n - L| < \varepsilon/2$
  $|b_n - B| < \varepsilon/2$

$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$

$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

(terbukti)

c. tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit barisan berikut.

$\Rightarrow$ Kemonotonan :

$a_n = \frac{\sin n\pi}{4}$

$a'(n) = \frac{\pi}{4} \cos \frac{nx}{4}$ (tidak naik dan tidak turun)

$\Rightarrow$ keterbatasan :

$a_n = \sin \frac{nx}{4}$

$-1 \leq \sin nx \leq 1$ (tidak ada limit $\therefore$ divergen)

$-\frac{1}{4} \leq \frac{\sin nx}{4} \leq \frac{1}{4}$

2) a. tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$

$\Rightarrow$ rumus eksplisit :

$(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right)$; $n; 1, 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow$ kekonvergenan :

$\lim_{n \to \infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|(-1)^{n+1}\right| \left|\frac{1}{n}\right| =$

$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{1}{n}\right| = 0$

$\therefore$ konvergen ke 0

b. Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$a_n = \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n}$

$\lim_{n \to \infty} = \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3 - 16^n}{5 + 8^n}$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{3/1^n - 16}{5/1^n + 8}$

$= \frac{0 - 16}{0 + 8} = -2$

$\therefore$ konvergen ke -2

c. tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan :

$$a_n = \frac{\ln n}{n}$$

⇒ kemonotonan :

$$a'n = \frac{1/n \cdot n - \ln n \cdot 1}{n^2}$$

$$= \frac{1 - \ln n}{n^2} \quad \text{(bukan barisan monoton)}$$

⇒ kekonvergenan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \overset{LH}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = 0 \quad \therefore \text{ konvergen ke } 0$$

3) a. tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya :

0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, ...

⇒ rumus eksplisit :

$$1 - \frac{1}{10^n} \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

⇒ kekonvergenan :

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{10^n} = 1 - 0 = 1 \quad \therefore \text{ konvergen ke } 1$$

b. Dengan definisi, buktikan bahwa $\{a_n\}$ berikut konvergen,

$$a_n = \frac{n+3}{3n-2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3n-1} = \frac{n/n + 3/n}{3n/n - 1/n} = \frac{1+0}{3-0} = 1/3$$

∴ konvergen ke 1/3

c. tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{n!}{10^n}$$

⇒ kemonotonan :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!/10^n}{(n+1)!/10^{(n+1)}} = \frac{\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{10\cdot 10\cdot 10 \cdots 10^n}}{\dfrac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n(n+1)}{10\cdot 10\cdot 10 \cdot 10^n \cdot 10^{n+1}}}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot 10^{n+1}$$

$$= \frac{10^{n+1}}{n+1} > 1 \quad \text{(monoton naik)}$$

⇒ kekonvergenan

$$a_n = \frac{n!}{10^n}$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n}{10\cdot 10\cdot 10 \cdots 10^n} = \frac{\infty}{\infty} = \text{tak tentu}$$

∴ divergen (tidak ada limit)

Scanned with CamScanner