Deret Tak Hingga & Deret Positif: Uji Integral

Responsi ke-4 (Kalkulus II)

DERET TAK HINGGA

PENGERTIAN

Deret tak-hingga:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

Jumlah parsial:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Definisi: Deret tak hingga $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen dan memiliki jumlah S jika barisan dari jumlah parsial $\{S_n\}$ konvergen ke S. Jika barisan $\{S_n\}$ divergen, maka deret divergen. Sebuah deret yang divergen tidak memiliki nilai.

GEOMETRIC SERIES

Deret yang memiliki bentuk:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

Di mana $a \neq 0$, di sebut deret geometrik

Contoh: Buktikan deret geometrik konvergen dan memiliki jumlah yaitu $S = \frac{a}{1-r}$ jika $|r| < 1$, dan divergen jika $|r| \geq 1$

UJI KEDIVERGENAN

Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Ekuivalen juga,
jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ atau jika $\lim_{n\to\infty} a_n$ tidak ada, maka deret divergen.

Contoh: Tunjukkan bahwa nilai deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3n^3+2n^2}$ divergen

DERET HARMONIC

Deret harmonik memiliki bentuk sebagai berikut:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Perhatikan meskipun nilai $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$, akan tetapi nilai dari $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen.

Contoh: Tentukan nilai dari $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k}$

COLLAPSING SERIES

Deret kolaps adalah deret tak hingga yang jumlah parsialnya terdiri atas sejumlah berhingga suku setelah pencoretan (*cancellation*)

Contoh: Tentukan nilai dari $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+5k+6}$

SIFAT DARI DERET YANG KONVERGEN

a. Jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ keduanya konvergen, dan jika c adalah konstanta, maka $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ juga konvergen, dan

$$(i)\ \sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$(ii)\ \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

b. Jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen dan $c \neq 0$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ divergen.

c. Kemudian; suku suku dari deret yang konvergen dapat dikelompokkan dengan berbagai cara (asalkan urutan sukunya tetap sama) menjadi sebuah deret baru, dan deret baru tersebut juga akan konvergen dengan jumlah nilai yang sama seperti deret semula.

DERET POSITIF: UJI INTEGRAL

UJI JUMLAH TERBATAS

Sebuah deret $\sum a_k$ dengan suku-suku nonnegatif konvergen jika dan hanya jika jumlah parsialnya terbatas di atas.

Contoh: Tunjukkan bahwa deret $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ konvergen

UJI INTEGRAL

Misalkan f kontinu, positif, dan fungsi taknaik pada interval $[1, \infty)$ dan misalkan $a_k = f(k)$ untuk semua bilangan bulat positif k. Maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen jika dan hanya jika nilai dari integral tak wajar, $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ ini konvergen.

Contoh: Tunjukkan bahwa deret, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ di mana p adalah konstanta, konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $p \leq 1$

TUGAS KELOMPOK

Tentukan apakah deret ini konvergen atau divergen. Jika divergen, cari nilainya.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^k$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 5}{k + 2}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3k}$
4. $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)$

Gunakan uji integral untuk menentukan kekonverganan atau kedivergenan deret berikut.

5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3}$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2k-3}$
7. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k^2+3}$
8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2k^2+1}$