Departemen Matematika FMIPA IPB
UJIAN AKHIR SEMESTER GANJIL 2017/2018

Kode - Nama MK	:	**MAT211 - Kalkulus II**
Hari, Tanggal	:	**Rabu, 3 Januari 2018**
Waktu	:	**2 Jam**
Sifat Ujian	:	**Catatan Tertutup**

Selesaikan ke-10 soal berikut **secara berurutan**. Bekerjalah dengan jujur, teliti, dan sepenuh kemampuan. Segala bentuk kecurangan bersanksi akademik. Nilai maksimum setiap soal adalah 10.

1. Tentukan persamaan parabola yang memiliki fokus di titik $(0, 2)$ dan garis direktriks $y = -2$.

   Jawab

$$p = 2$$

   Persamaan parabola:

$$\begin{aligned} x^2 &= 4py \\ x^2 &= 4(2)y \\ x^2 &= 8y \end{aligned}$$

2. Tentukan titik puncak, fokus, keeksentrikan dan gambar grafik dari elips

$$25x^2 + 9y^2 + 100x - 18y - 116 = 0.$$

   Jawab

$$\begin{aligned} 25x^2 + 9y^2 + 100x - 18y - 116 &= 0 \\ 25x^2 + 100x + 9y^2 - 18y &= 116 \\ 25\left(x^2 + 4x + 4\right) - 100 + 9\left(y^2 - 2y + 1\right) - 9 &= 116 \\ 25(x+2)^2 + 9(y-1)^2 &= 225 \\ \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &= -2 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= 25 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

$$b^2 = 9$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - b^2 \\ &= 25 - 9 \\ &= 16 \\ c &= 4 \end{aligned}$$

   Titik puncak: $(h, k \pm a) = (-2, 1 \pm 5)$

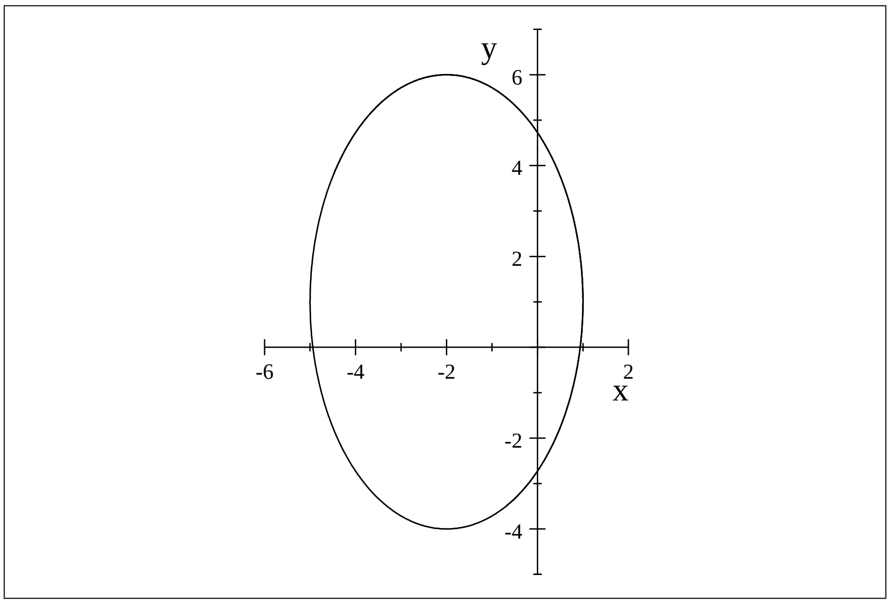
$$(-2, -4) \text{ dan } (-2, 6)$$

   Fokus: $(h, k \pm c) = (-2, 1 \pm 4)$

$$(-2, -3) \text{ dan } (-2, 5)$$

Keeksentrikan: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

Gambar grafik:



3. Diberikan fungsi secara parametrik berikut:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad -1 \le t \le 1.$$

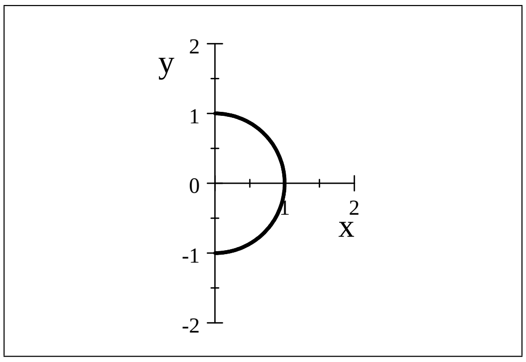
Nyatakan kedua persamaan parametrik di atas menjadi persamaan kartesius (dalam x dan y), kemudian buatlah sketsa grafiknya.

$\boxed{\text{Jawab}}$

Diperoleh

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 \\ &= \frac{(1-t^2)^2 + (2t)^2}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2}{1 + 2t^2 + t^4} \\ &= \frac{1 + 2t^2 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Karena $-1 \le t \le 1$ maka x bernilai taknegatif ($0 \le x \le 1$) dan y bernilai positif atau negatif atau nol ($-1 \le y \le 1$), sehingga terbentuk kurva setengah lingkaran berpusat di titik asal dan berjari-jari 1 berikut: $x^2 + y^2 = 1$



4. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva

$$x = t \sin t, \qquad y = t \cos t$$

di titik pada saat $t = \pi$.

$\boxed{\text{Jawab}}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \\ &= \frac{\cos t - t\sin t}{\sin t + t\cos t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{\cos\pi - \pi\sin\pi}{\sin\pi + \pi\cos\pi} \\ &= \frac{-1-0}{0+(-\pi)} = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x,y) &= (\pi\sin\pi, \pi\cos\pi) \\ &= (0, -\pi) \end{aligned}$$

Persamaan garis singgung:

$$\begin{aligned} y - (-\pi) &= \frac{1}{\pi}(x-0) \\ y &= \frac{x}{\pi} - \pi \end{aligned}$$

5. Diberikan persamaan dalam koordinat polar

$$r = \frac{5}{\sin\theta - 2\cos\theta}.$$

Tunjukkan bahwa dalam koordinat kartesius, persamaan di atas merupakan persamaan garis lurus. Kemudian tentukan gradien dari garis lurus tersebut dengan terlebih dahulu membuat persamaannya dalam bentuk $y = mx + c$.

$\boxed{\text{Jawab}}$

$$\begin{aligned} r &= \frac{5}{\sin\theta - 2\cos\theta} \\ r\sin\theta - 2r\cos\theta &= 5 \\ y - 2x &= 5 \\ y &= 2x + 5 \end{aligned}$$

yang merupakan persamaan sebuah garis lurus.

Gradien: $m = 2$

6. Diketahui bahwa persamaan polar yang berbentuk

$$\text{(a) } r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{atau} \qquad \text{(b) } r = \frac{ed}{1 \pm e\sin\theta}$$

menyatakan suatu irisan kerucut dengan fokus (atau salah satu fokusnya) di titik asal dan keeksentrikan e. Pada kasus (a) direktriksnya adalah garis $x = \pm d$, sedangkan pada kasus (b) direktriksnya adalah garis $y = \pm d$. Tentukan persamaan polar dari hiperbola dengan salah satu fokusnya di titik asal, $e = 2$, dan direktriks $y = 5$.

$\boxed{\text{Jawab}}$

Persamaan polarnya adalah:

$$\begin{aligned} r &= \frac{(2)(5)}{1 + 2\sin\theta} \\ r &= \frac{10}{1 + 2\sin\theta} \end{aligned}$$

7. Tentukan luas daerah yang dibatasi kurva $r = 2 - 4\cos\theta$ untuk $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, garis $\theta = \frac{\pi}{2}$ dan garis $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

   Jawab

$$\begin{aligned}
L &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{2} (2 - 4\cos\theta)^2 \, d\theta \\
&= 2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1 - 2\cos\theta)^2 \, d\theta \\
&= 2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(1 - 4\cos\theta + 4\cos^2\theta\right) d\theta \\
&= 2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1 - 4\cos\theta + 2 + 2\cos 2\theta) \, d\theta \\
&= 2 \left[3\theta - 4\sin\theta + \sin 2\theta\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} \\
&= 2 \left[\frac{9\pi}{2} + 4 - \frac{3\pi}{2} + 4\right] \\
&= 6\pi + 16
\end{aligned}$$

8. Perpotongan bola $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 13$ dengan bidang $z = 3$ berupa sebuah lingkaran. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran tersebut.

   Jawab

$$\begin{aligned}
(x-2)^2 + (y+3)^2 + (3-1)^2 &= 13 \\
(x-2)^2 + (y+3)^2 &= 9 \\
(x-2)^2 + (y+3)^2 &= 3^2
\end{aligned}$$

   Pusat: $(2, -3)$

   Jari-jari: $r = 3$

9. Diketahui dua titik dalam koordinat silinder berikut: $A\left(5, \frac{3\pi}{2}, 0\right)$ dan $B\left(5, \frac{\pi}{2}, 10\right)$. Tentukan jarak kedua titik tersebut.

   Jawab

$$A(r,\theta,z) = A\left(5, \frac{3\pi}{2}, 0\right)$$

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta = 5\cos\frac{3\pi}{2} = 0 \\
y &= r\sin\theta = 5\sin\frac{3\pi}{2} = -5
\end{aligned}$$

$$A(x,y,z) = A(0,-5,0)$$

$$B(r,\theta,z) = B\left(5, \frac{\pi}{2}, 10\right)$$

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta = 5\cos\frac{\pi}{2} = 0 \\
y &= r\sin\theta = 5\sin\frac{\pi}{2} = 5
\end{aligned}$$

$$B(x,y,z) = B(0,5,10)$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(0-0)^2 + (-5-5)^2 + (0-10)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

10. Diberikan persamaan dalam koordinat bola

$$\rho = 2\cos\phi.$$

Tunjukkan bahwa dalam koordinat kartesius, persamaan di atas merupakan persamaan bola. Tentukan pusat dan jari-jari bola tersebut.

$\boxed{\text{Jawab}}$

$$\begin{aligned} \rho &= 2\cos\phi \\ \rho^2 &= 2\rho\cos\phi \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2z \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Pusat: $(0, 0, 1)$

Jari-jari: $r = 1$