TUGAS INDIVIDU

Asrial Adiba
G1401211004

1

a). Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya.

$\cos\pi$, $\frac{\cos 2\pi}{4}$, $\frac{\cos 3\pi}{9}$, $\frac{\cos 4\pi}{16}$, ...

Jawab:

* Rumus eksplisit : $a_n = \frac{\cos n\pi}{n^2}$ //

* Kekonvergenan:

$-1 \le \cos n\pi \le 1$

$-\frac{1}{n^2} \le \cos n\pi \le \frac{1}{n^2}$

$\rightarrow \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$

$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

∴ Menurut teorema apit $a_n = \frac{\cos n\pi}{n^2}$ konvergen ke 0 //

b). Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B. Buktikan (dgn definisi limit) $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke A + B !

Jawab:

* $\{a_n\}$ konvergen ke A, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Dengan kata lain utk tiap $\varepsilon > 0$ selalu dpt ditemukan $N_1 > 0$ sdm sehingga $n > N_1$ Berlaku ;

$|a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon$

* $\{b_n\}$ konvergen ke B, maka $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.

Dengan kata lain utk tiap $\varepsilon > 0$ selalu dpt ditemukan $N_2 > 0$ sdm sehingga $n > N_2$ Berlaku ;

$|b_n - B| < \frac{1}{2}\varepsilon$

* Pilih N

$|a_n + b_n - (A+B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)|$

$\le |a_n - A| + |b_n - B|$

$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$

$= \varepsilon$

TERBUKTI //

c). Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit $a_n = \sin\frac{n\pi}{4}$

Jwb:

* limit

$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{4} = \infty \Rightarrow$ divergen //

* Kemonotonan

$a'(n) = \frac{\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4}$

$n=1 \rightarrow a'(1) = \frac{1}{8}\sqrt{2}\,\pi$

$n=2 \rightarrow a'(2) = 0$

$n=3 \rightarrow a'(3) = -\frac{1}{8}\sqrt{2}\,\pi$

∴ barisan $a_n = \sin\frac{n\pi}{4}$ tidak monoton naik dan tidak monoton turun //

* Keterbatasan

$-1 \le \sin\frac{n\pi}{4} \le 1$

∴ Teorema apit tidak berlaku karena $\{a_n\}$ divergen, tidak ada batasan.

2

a). Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya : $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}$

Jwb:

* Rumus eksplisit : $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ //

* Kekonvergenan:

$\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

∴ Barisan a_n konvergen menuju 0 //

b). Dengan definisi limit, Buktikan $\{a_n\}$ konvergen.

$a_n = \frac{3 - 8\cdot 2^n}{5 + 4\cdot 2^n}$

Jwb:

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - (8\cdot 2^n)}{5 + (4\cdot 2^n)} \cdot \frac{1/2^n}{1/2^n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3/2^n - (8\cdot 2^n/2^n)}{5/2^n - (4\cdot 2^n/2^n)}$

$= \frac{0-8}{0+4} = -2$

∴ Barisan a_n konvergen ke -2 // $(L = -2)$

* $n \geq N \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

$\left|\frac{3 - 8\cdot 2^n}{5 + 4\cdot 2^n} + 2\right| < \varepsilon$

$= \left|\frac{3 - 8\cdot 2^n + 2(5 + 4\cdot 2^n)}{5 + 4\cdot 2^n}\right| < \varepsilon$

$= \left|\frac{3 - \cancel{8\cdot 2^n} + 10 + \cancel{8\cdot 2^n}}{5 + 4\cdot 2^n}\right| < \varepsilon$

$= \frac{13}{5 + 4\cdot 2^n} < \varepsilon$

$< 13/n$

$\le \frac{13}{N} < \varepsilon$

* $\varepsilon > 0$, $N = \frac{13}{\varepsilon}$, dan $n \geq N$ maka :

$$\left| \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n} - (-2) \right|$$

$$= \frac{13}{5 + 4 \cdot 2^n} \leq \frac{13}{N} < \varepsilon$$

terbukti //

c). Tentukan kemonotonan, keterbatasan & limit

$$a_n = \frac{\ln n}{n}$$

Jwb :

* Kemonotonan

$$a'(n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot n - \ln n}{n^2} = \frac{1 - \ln n}{n^2} \begin{cases} n = 1 \to a'(1) = 1 \\ n = 2 \to a'(2) = 0,07 \\ n = 3 \to a'(3) = -0,01 \end{cases}$$

∴ barisan an tidak monoton naik dan monoton turun //

* Keterbatasan

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} \overset{L}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{1/n}{1} = 0$$

∴ {an} konvergen ke-0 dan terbatas sampai 0 //

$\boxed{3}$

a). Tulis rumus eksplisit dan tentukan kekonvergenan

0,9 , 0,99 , 0,999 , 0,9999 , ...

Jwb :

* Rumus eksplisit : $a_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n$

* Kekonvergenan :

$$\lim_{n \to \infty} 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n = \lim_{n \to \infty} 1 - 0 = 1 \quad //$$

b). Dengan definisi limit, Buktikan {an} konvergen

$$a_n = \frac{n + 3}{3n - 2}$$

Jwb :

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n + 3}{3n - 2} = \frac{1}{3}$$

∴ {an} konvergen ke $\frac{1}{3}$ $\left(L = \frac{1}{3}\right)$

* $n \geq N \to |a_n - L| < \varepsilon$

$$= \left| \frac{n + 3}{3n - 2} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$$

$$= \left| \frac{3(n + 3) - (3n - 2)}{3(3n - 2)} \right| < \varepsilon$$

$$= \left| \frac{3n + 9 - 3n + 2}{9n - 6} \right| < \varepsilon$$

$$= \left| \frac{11}{9n - 6} \right| < \varepsilon$$

$$\leq 11/n$$

$$\leq 11/N < \varepsilon$$

* $\varepsilon > 0$, $N = \frac{11}{\varepsilon}$ dan $n \geq N$, maka :

$$\left| \frac{n + 3}{3n - 2} - \frac{1}{3} \right|$$

$$= \frac{11}{9n - 6} \leq \frac{11}{N} < \varepsilon \quad //$$

c). Tentukan kemonotonan, keterbatasan dan limit Barisan : $a_n = \frac{n!}{10^n}$

Jwb :

* Kemonotonan

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n!}{10^n}}{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}$$

$$= \frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdots 10^n}}{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n(n+1)}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdots 10^n \cdot 10^{n+1}}}$$

$$= \frac{10^{n+1}}{n+1} > 1$$

∴ Barisan an monoton naik //

* Keterbatasan

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{10^n} = \infty \text{ divergen}$$

∴ {an} divergen maka tdk ada batasan atas //

Dipindai dengan CamScanner