MAT211 Kalkulus II
K5 - Uji Kekonvergenan Deret Takhingga

TBK (AKT)
IPB University

September 13, 2021

1 Deret Positif

1.1 Uji Banding

Teorema (Uji banding)

Misalkan untuk $n \geq N$ *berlaku* $0 \leq a_n \leq b_n$.

1. *Jika* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergen maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen.*
2. *Jika* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergen maka* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergen.*

- $a_n \leq b_n$ untuk $n \geq N$: Σa_n deret kecil, Σb_n deret besar.
- Jika deret yang besar konvergen, maka deret yang kecil juga konvergen.
- Jika deret yang kecil divergen, maka deret yang besar juga divergen.
- **Langkah awal:** temukan deret pembandingnya.

Example 1 *Periksa kekonvergenan deret-deret berikut:*

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-5}$.

$$\cdots \leq \frac{k}{4k^2-5} \leq \cdots$$

$$\begin{aligned} \frac{k}{4k^2} &\leq \frac{k}{4k^2-5} \\ \frac{1}{4k} &\leq \frac{k}{4k^2-5} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-5}. \end{aligned}$$

Karena $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k}$ *merupakan deret harmonik (yang divergen), maka menurut Uji Banding* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-5}$ *divergen juga.*

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k(k+3)}$.

$$\begin{aligned} \frac{k}{k+3} &\leq 1 \\ \frac{k}{3^k(k+3)} &\leq \frac{1}{3^k} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k(k+3)} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}. \end{aligned}$$

Karena $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ *merupakan deret geometrik dengan* $r = \frac{1}{3}$ *sehingga konvergen, maka* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k(k+3)}$ *juga konvergen.*

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{k}}$.

$$\frac{1}{2+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Deret pembanding: $\sum \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum \frac{1}{k^{1/2}}$ *merupakan deret-p dengan* $p = \frac{1}{2} < 1$ *(divergen). Uji Banding tidak bisa digunakan. Mungkin karena kita salah memilih deret pembandingnya.*

$$\begin{aligned} 2+\sqrt{k} &\leq k, \; k \geq 4 \\ \frac{1}{2+\sqrt{k}} &\geq \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Deret pembanding: $\sum \frac{1}{k}$ *yang merupakan deret harmonik (divergen), sehingga menurut Uji Banding, deret* $\sum \frac{1}{2+\sqrt{k}}$ *divergen.*

1.2 Uji Banding Limit

Teorema (Uji banding limit)

Misalkan $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ *dan*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L.$$

1. *Jika* $0 < L < \infty$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *bersama-sama konvergen atau bersama-sama divergen.*
2. *Jika* $L = 0$ *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergen maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen.*

Uji Banding Limit biasanya bekerja dengan baik dalam membandingkan deret aljabar dengan deret-p. Pilihlah deret pembanding dengan pangkat yang sama.

Example 2 *Periksa kekonvergenan deret-deret berikut:*

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2+5} \Leftrightarrow \frac{k}{4k^2} \Leftrightarrow \frac{1}{k}$

   Pilih deret pembanding Σb_k *dengan*

$$b_k = \frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{4k^2+5} \cdot \frac{k}{1} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{4k^2+5} \\
&= \frac{1}{4} > 0.
\end{aligned}$$

Diperoleh $L = \frac{1}{4}$. *Menurut Uji Banding Limit,* $\sum \frac{k}{4k^2+5}$ *dan* $\sum \frac{1}{k}$ *sama-sama konvergen atau sama-sama divergen. Karena* $\sum \frac{1}{k}$ *merupakan deret harmonik (divergen), maka* $\sum \frac{k}{4k^2+5}$ *divergen.*

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^3+3k^2-5}} \Leftrightarrow \frac{k}{k^{3/2}} \Leftrightarrow \frac{1}{k^{1/2}}$
Pilih deret pembanding Σb_k *dengan*

$$b_k = \frac{1}{k^{1/2}} \Rightarrow \textit{deret-p dengan } p = \tfrac{1}{2} \textit{ (divergen).}$$

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{k^3+3k^2-5}} \cdot \frac{k^{1/2}}{1} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k^{3/2}}{\sqrt{k^3+3k^2-5}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k^3}{k^3+3k^2-5}} \\
&= 1 > 0.
\end{aligned}$$

Menurut Uji Banding Limit, $\sum \frac{k}{\sqrt{k^3+3k^2-5}}$ *dan* $\sum \frac{1}{k^{1/2}}$ *sama-sama konvergen atau sama-sama divergen. Karena* $\sum \frac{1}{k^{1/2}}$ *merupakan deret-p yang divergen, maka* $\sum \frac{k}{\sqrt{k^3+3k^2-5}}$ *divergen.*

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2+1} \Leftrightarrow \frac{k^{1/2}}{k^2} \Leftrightarrow \frac{1}{k^{3/2}}$
Pilih deret pembanding Σb_k *dengan*

$$b_k = \frac{1}{k^{3/2}} \Rightarrow \textit{deret-p dengan } p = \tfrac{3}{2} \textit{ (konvergen).}$$

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2+1} \cdot \frac{k^{3/2}}{1} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2+1} \\
&= 1 > 0.
\end{aligned}$$

Menurut Uji Banding Limit, $\sum \frac{\sqrt{k}}{k^2+1}$ *dan* $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ *sama-sama konvergen atau sama-sama divergen. Karena* $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ *merupakan deret-p yang konvergen (karena* $p = \frac{3}{2} > 1$*), maka* $\sum \frac{\sqrt{k}}{k^2+1}$ *konvergen.*

1.3 Uji Hasil Bagi (Uji Rasio)

Teorema (Uji hasil bagi)

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *adalah deret yang suku-sukunya positif dan misalkan pula*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

1. *Jika* $\rho < 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen.*
2. *Jika* $\rho > 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergen.*
3. *Jika* $\rho = 1$, *maka uji ini tidak memberi kesimpulan (diperlukan uji lainnya).*

Uji Hasil Bagi (Uji Rasio) biasanya digunakan untuk memeriksa kekonvergenan deret yang mengandung suku $k!$ atau r^k.

Example 3 *Periksa kekonvergenan deret-deret berikut:*

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!} \Rightarrow a_k = \frac{5^k}{k!}$ *positif*

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{5^k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{5}{k+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Karena $\rho = 0 < 1$ *maka* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$ *konvergen.*

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^{40}} \Rightarrow a_k = \frac{2^k}{k^{40}}$ *positif*

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)^{40}} \cdot \frac{k^{40}}{2^k} \\ &= \lim_{k\to\infty} 2\left(\frac{k}{k+1}\right)^{40} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Karena $\rho = 2 > 1$ *maka* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^{40}}$ *divergen.*

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} \Rightarrow a_k = \frac{k^k}{k!}$ *positif*

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{1}{k^k} \\
&= \lim_{k\to\infty} (k+1)^k \cdot \frac{1}{k^k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \\
&= e.
\end{aligned}$$

Karena $\rho = e > 1$ *maka* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ *divergen.*

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{10^k} \Rightarrow a_k = \frac{k!}{10^k}$ *positif*

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{10^{k+1}} \cdot \frac{10^k}{k!} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{10} \\
&= \infty > 1.
\end{aligned}$$

Karena $\rho > 1$ *maka menurut Uji Rasio deret* $\sum \frac{k!}{10^k}$ *divergen.*

1.4 Uji Akar (Root Test)

$$(\Box^n)^{1/n} = \Box.$$

Teorema (Uji akar)

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *adalah deret yang suku-sukunya positif dan misalkan pula*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = R.$$

1. *Jika* $R < 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen.*
2. *Jika* $R > 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergen.*
3. *Jika* $R = 1$, *maka uji ini tidak memberi kesimpulan (diperlukan uji lainnya).*

Example 4 *Periksa kekonvergenan deret-deret berikut:*

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln k}\right)^k \Rightarrow a_k = \left(\frac{1}{\ln k}\right)^k$

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty} (a_k)^{1/k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Karena $R = 0 < 1$ *maka menurut Uji Akar* $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln k}\right)^k$ *konvergen.*

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{k^2+1}\right)^k \Rightarrow a_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{k^2+1}\right)^k$

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty} (a_k)^{1/k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{k^2+1}\right) \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Karena $R = \frac{3}{2} > 1$ *maka menurut Uji Akar,* $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{k^2+1}\right)^k$ *divergen.*

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \Rightarrow a_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty} (a_k)^{1/k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Karena $R = 1$ *maka Uji Akar tidak dapat digunakan untuk menyimpulkan. Gunakan uji lain:*

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} a_k &= \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-k}\right)^{-(-k)} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{-k}\right)^{-k}} \\ (n := -k) &= \lim_{n\to-\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\lim_{n\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{1}{e} \neq 0, \end{aligned}$$

sehingga menurut uji kedivergenan deret $\sum \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$ *divergen.*

2 Ringkasan

Ringkasan:
Untuk menguji apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dengan suku-suku positif adalah konvergen atau divergen, perhatikan a_n dengan seksama.

1. Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, maka menurut *uji kedivergenen* suku ke-n, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adalah divergen.
2. Jika a_n mengandung $n!$, c^n dengan c adalah konstanta, atau n^n coba gunakan *uji hasil bagi*.
3. Jika a_n hanya mengandung pangkat n^c dan konstanta c, maka gunakan *uji banding limit*. Khususnya jika a_n merupakan fungsi rasional dari n, maka pilih $b_n = n^{p-q}$ dengan p adalah pangkat tertinggi pembilang dan q adalah pangkat tertinggi penyebut pada a_n.
4. Jika a_n berbentuk $(f(n))^n$ dengan f adalah suatu fungsi, maka gunakan *uji akar*.
5. Sebagai usaha terakhir, cobalah *uji banding*, *uji integral* atau *uji jumlah terbatas*.
6. Beberapa deret mensyaratkan *manipulasi bijak* atau *trik tertentu* untuk menentukan kekonvergenan atau kedivergenannya.

3 Deret Berganti Tanda (Alternating Series)

Definisi

Misalkan $\{a_n\}$ adalah barisan bilangan nyata tak-negatif. Yang dimaksud dengan deret ganti tanda (alternating series) adalah deret yang memiliki bentuk umum

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \\ &= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \\ &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots\end{aligned}$$

3.1 Uji Deret Ganti Tanda

Teorema (Uji deret ganti tanda)

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ atau $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ adalah deret ganti tanda dengan $a_n > a_{n+1} \geq 0$ untuk semua bilangan asli n.

1. *Jika $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, maka deret ganti tanda di atas konvergen.*
2. *Jika jumlah S diaproksimasi dengan jumlah n suku pertama S_n, maka kesalahan yang dibuat tidak akan melebihi a_{n+1}.*

Catatan: Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, maka deret ganti tanda divergen (Uji Kedivergenan).

Example 5 *Buktikan deret harmonik ganti tanda*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$$

adalah konvergen, dan tentukan berapa suku yang harus diambil agar $|S-S_n|\leq 0.01$.

$\sum(-1)^k\frac{1}{k}\Rightarrow u_k=(-1)^k\frac{1}{k},\ a_k=\frac{1}{k}$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k}{1}=\frac{k}{k+1}<1\Leftrightarrow a_{k+1}<a_k \text{ (barisan turun).}$$

$$a(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow a'(x)=-\frac{1}{x^2} \text{ (fungsi turun).}$$

$$\frac{1}{k+1}<\frac{1}{k}\Rightarrow a_{k+1}<a_k.$$

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0.$$

Menurut Uji Deret Ganti Tanda, $\sum(-1)^k\frac{1}{k}$ konvergen.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} &= S\\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k} &= S_n\\ |S-S_n| &\leq a_{n+1}\end{aligned}$$

$$a_{n+1}=0.01\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}=0.01\Leftrightarrow n+1=100\Leftrightarrow n=99.$$

Example 6 *Periksa kekonvergenan dari deret*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^3}{3^k}.$$

Karena

- $a_k=\frac{k^3}{3^k}\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^3}{3^x}$, *sehingga diperoleh*

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot 3^x-x^3\cdot 3^x\ln 3}{(3^x)^2}=\frac{3^x x^2(3-x\ln 3)}{(3^x)^2}.$$

$$f'(x)\leq 0\Leftrightarrow x^2(3-x\ln 3)\leq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{3}{\ln 3}\Leftrightarrow x\geq 2.73.$$

$$f \text{ turun pada } [2,73,\infty).$$

Jadi a_k *turun pada* $k\geq 3$.

- $\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\frac{k^3}{3^k}=_H\lim_{k\to\infty}\frac{3k^2}{3^k\ln 3}=_H\lim_{k\to\infty}\frac{6k}{3^k(\ln 3)^2}=_H\lim_{k\to\infty}\frac{6}{3^k(\ln 3)^3}=0,$

menurut Uji Deret Ganti Tanda, deret $\sum(-1)^{k+1}\frac{k^3}{3^k}$ *konvergen.*

Example 7 *Periksa kekonvergenan dari deret*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(-2)^{k-1}}.$$

Diperoleh:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(-2)^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(-1)^{k-1}2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{2^{k-1}}.$$

Karena

- $a_k = \frac{k}{2^{k-1}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{2^{x-1}}$ *sehingga diperoleh*

$$f'(x) = \frac{2^{x-1} - x \cdot 2^{x-1} \ln 2}{(2^{x-1})^2} = \frac{2^{x-1}(1 - x \ln 2)}{(2^{x-1})^2}.$$

$$f'(x) \le 0 \Leftrightarrow 1 - x \ln 2 \le 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow x \ge 1.44.$$

Jadi a_k *turun pada* $k \ge 2$.

- $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2^{k-1}} =_H \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k-1}\ln 2} = 0,$

menurut Uji Deret Ganti Tanda, deret $\sum \frac{k}{(-2)^{k-1}}$ *konvergen.*

3.2 Konvergen Mutlak dan Konvergen Bersyarat

Sudah dibahas sebelumnya bahwa deret harmonik ganti tanda

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots$$

konvergen, tetapi deret harmonik (saja)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

divergen.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Definisi (Konvergen mutlak dan konvergen bersyarat)

1. *Suatu deret* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *disebut konvergen mutlak jika* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *adalah konvergen.*
2. *Suatu deret* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *disebut konvergen bersyarat jika* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *konvergen tetapi* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *adalah divergen.*

Deret harmonik ganti tanda

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

konvergen bersyarat.

Teorema

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *konvergen maka* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *adalah konvergen.*

- Untuk memeriksa kekonvergenan $\Sigma\, |u_k|$ dapat digunakan uji-uji kekonvergenan deret positif.
- Jika $\Sigma\, |u_k|$ konvergen, maka Σu_k konvergen (teorema di atas), sehingga Σu_k konvergen mutlak.
- Jika $\Sigma\, |u_k|$ divergen, gunakan uji-uji deret ganti tanda untuk memeriksa kekonvergenan Σu_k.

3.3 Uji Banding Mutlak

Teorema (Uji pembanding mutlak)

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *adalah deret yang suku-sukunya taknol, dan misalkan pula*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho.$$

1. *Jika* $\rho < 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *konvergen.*
2. *Jika* $\rho > 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *divergen.*
3. *Jika* $\rho = 1$, *maka uji ini tidak memberi kesimpulan (diperlukan uji lainnya).*

Example 8 *Tentukan apakah deret berikut adalah konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen.*

1. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} \Rightarrow u_k = (-1)^{k+1}\frac{1}{k}, a_k = \frac{1}{k}$

   Uji Banding Mutlak

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{k+1}\right|}{\left|\frac{1}{k}\right|} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \\ &= 1.\end{aligned}$$

   Karena $\rho = 1$ *maka Uji Banding Mutlak tidak dapat digunakan untuk menyimpulkan. Namun demikian, sudah dibuktikan di contoh sebelumnya bahwa deret har-*

monik ganti tanda adalah konvergen.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} u_k &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} \text{ konvergen,}\\ \sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right| &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \text{ divergen.}\end{aligned}$$

Jadi, $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ *konvergen bersyarat.*

2. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{4^k}{k!} \Rightarrow u_k = (-1)^{k+1}\frac{4^k}{k!}, a_k = \frac{4^k}{k!}$
Uji Banding Mutlak

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{k\to\infty}\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}\\ &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{4^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{4^k}\right|\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{4}{k+1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Karena $\rho = 0 < 1$ *maka deret* $\sum |u_k|$ *konvergen (berakibat* $\sum u_k$ *konvergen juga), sehingga* $\sum u_k$ *konvergen mutlak.*

3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k!}{k^2}$ *(tampaknya soal di slide salah ketik, mungkin harusnya seperti di samping)*

$$\begin{aligned}u_k &= \frac{\sin k!}{k^2}\\ |u_k| &= \left|\frac{\sin k!}{k^2}\right|\\ &= \frac{|\sin k!|}{k^2}\\ &\leq \frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$

Karena $\sum \frac{1}{k^2}$ *merupakan deret-p yang konvergen, maka dengan Uji Banding disimpulkan bahwa* $\sum |u_k|$ *juga konvergen. Dengan demikian* $\sum u_k = \sum \frac{\sin k!}{k^2}$ *konvergen mutlak.*

4. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow u_k = (-1)^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}, a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$
Diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

merupakan deret-p yang divergen. Jika digunakan Uji Banding Mutlak:

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{k\to\infty}\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}\\ &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{k+1}}\frac{\sqrt{k}}{1}\right|\\ &= \lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{k}{k+1}}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Karena $\rho = 1$ *maka Uji Banding Mutlak bersifat* inconclusive. *Akan digunakan Uji Deret Ganti Tanda:*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{\sqrt{k}}{1} = \sqrt{\frac{k}{k+1}} < 1 \Leftrightarrow a_{k+1} < a_k,$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0.$$

Karena $\sum |u_k|$ *divergen dan* $\sum u_k$ *konvergen, maka* $\sum u_k$ *konvergen bersyarat.*

5. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{k+1} \Rightarrow u_k = (-1)^{k+1} \frac{k}{k+1}, a_k = \frac{k}{k+1}$

Karena

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0$$

maka deret divergen.