MUCH FAZRIN SEPRANJANI FATAH - G1401211022

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$\cos\pi, \frac{\cos 2\pi}{4}, \frac{\cos 3\pi}{9}, \frac{\cos 4\pi}{16}, \ldots.$$

(b) Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B. Buktikan (dengan definisi limit) $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke $A + B$.

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \sin\frac{n\pi}{4}.$$

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

Jawab:

$$cos\pi,\ \frac{cos2\pi}{4}, \frac{cos3\pi}{9},\ \frac{cos4\pi}{16},\ \ldots.$$

rumus eksplisit : $a_n\ =\ \frac{cosn\pi}{n^2}$

kekonvergenan: $-\ 1\ \leq\ cosn\pi\ \leq\ 1$

$$-\ \frac{1}{n^2} \leq \frac{cosn\pi}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

karena $lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2}$ dan $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$ sama dengan 0 berdasar teorema apit, maka $lim_{n\to\infty}\frac{cosn\pi}{n^2}$ juga sama dengan 0 sehingga kekonvergenannya menuju 0.

b) Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B. Buktikan (dengan definisi limit) $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke A+B.

Jawab:

- Karena $\{a_n\}$ konvergen ke A maka $lim_{n\to\infty}\ a_n$ = A, dengan kata lain: untuk setiap ε >0 selalu dapat ditemukan N1 > 0 sedemikian sehingga untuk n > N1 berlaku:
$$\left|a_n - A\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$$
- Karena $\{b_n\}$ konvergen ke B maka $lim_{n\to\infty}\ b_n$ = B, dengan kata lain: untuk setiap ε >0 selalu dapat ditemukan N2 > 0 sedemikian sehingga untuk n > N2 berlaku:
$$\left|b_n - B\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$$
- Pilih N = $max\{N1, N2\}$. Diperoleh:
$$\left|a_n + b_n - (A\ +\ B)\right| = \left|(a_n - A)\ +\ (b_n - B)\right|$$
$$\leq \left|a_n - A\right| + \left|b_n - B\right| \text{ (ketaksamaan segitiga)}$$
$$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon\ = \varepsilon$$
- Terbukti bahwa $lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ = A+B

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = sin\frac{n\pi}{4}$$

Jawab:

kemonotonan : $a'_n = \frac{\pi}{4} cos\frac{n\pi}{4}$ ⇒ • n=1 → a'_1 **=** $\frac{1}{8}\sqrt{2}\pi$

• n=2 → a'_2 **= 0**

• n=3 → a'_3 **=-** $\frac{1}{8}\sqrt{2}\pi$

• n=4 → a'_4 **=** 0

$\{a_n\}$ bukan barisan monoton

keterbatasan : $a_n = sin\frac{n\pi}{4}$

karena bentuk trigonometri sin maka $-1 \leq sin\frac{n\pi}{4} \leq 1$,sehingga $\{a_n\}$ terbatas di bawah oleh -1 dan terbatas di atas oleh 1.

Limit : Tidak ada (divergen)

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$$

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n}.$$

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{\ln n}{n}.$$

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots\ldots$$

Jawab:

Rumus eksplisit : $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Kekonvergenan : $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\right|\left|\frac{1}{n}\right|$

$= \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \left|\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\right| = 0$ (konvergen menuju 0)

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n}$$

Jawab:

- $\lim_{n\to\infty}\frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2^n} - 8}{\frac{5}{2^n} + 4} = \frac{0-8}{0+4} = -2$ (konvergen menuju -2)
- maka diketahui L=-2 ,sehingga :

$$\left|a_n - L\right| = \left|\frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n} - (-2)\right|$$

$$= \left|\frac{13}{5 + 4 \cdot 2^n}\right|$$

- untuk sembarang ε >0, akan ada N dimana n>N dan N>0 sedemikian dan dimisalkan untuk suatu ε dengan nilai cukup kecil sebagai

$$\varepsilon = \frac{13}{5 + 4 \cdot 2^N}$$

- maka untuk n>N>0 diperoleh

$$\left|a_n - L\right| = \left|\frac{13}{5 + 4 \cdot 2^n}\right| < \frac{13}{5 + 4 \cdot 2^N}$$

$$= \left|\frac{13}{5 + 4 \cdot 2^n}\right| < \varepsilon$$

- Terbukti bahwa $\{a_n\}$ konvergen.

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{\ln n}{n}$$

Jawab:

Kemonotonan: $a'_n = \frac{1-\ln n}{n^2}$ ⇒

- n=1 → a'_1 **=** 1
- n=2 → a'_2 = 0,0767
- n=3 → a'_3 **=** -0.0109
- n=4 → a'_4 **= -**0**.**0241
- n=5 → a'_5 **= -**0**.**0243
- n=6 → a'_6 **= -**0**.**0219

$\{a_n\}$ bukan barisan monoton

keterbatasan : $a_n = \frac{\ln n}{n}$ ⇒

- n=1 → a_1 **=** 0
- n=2 → a_2 = 0.346574
- n=3 → a_3 **=** 0.366204
- n=4 → a_4 **=** 0.346574
- n=5 → a_5 **=** 0.321888

diperoleh $\{a_n\}$ terbatas di bawah oleh 0 dan terbatas di atas a_3

Limit : $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \stackrel{LH}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \ldots.$$

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{n+3}{3n-2}.$$

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{n!}{10^n}.$$

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, …..

Jawab:

Rumus eksplisit : $a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$

Kekonvergenan : $\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{10^n}$ = 1 - 0 = 1 (konvergen menuju 1)

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{n+3}{3n-2}$$

Jawab:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3}$ (konvergen menuju $\frac{1}{3}$)
- maka diketahui L=$\frac{1}{3}$,sehingga :

$$\left|a_n - L\right| = \left|\frac{n+3}{3n-2} - \frac{1}{3}\right|$$
$$= \left|\frac{11}{9n-6}\right|$$

- untuk sembarang ε >0, akan ada N dimana n>N dan N>0 sedemikian dan dimisalkan untuk suatu ε dengan nilai cukup kecil sebagai

$$\varepsilon = \frac{11}{9N-6}$$

- maka untuk n>N>0 diperoleh

$$\left|a_n - L\right| = \left|\frac{11}{9n-6}\right| < \frac{11}{9N-6}$$
$$= \left|\frac{11}{9n-6}\right| < \varepsilon$$

- Terbukti bahwa $\{a_n\}$ konvergen.

:

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{n!}{10^n}$$

Jawab:

Kemonotonan: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{10^n \cdot 10} \cdot \frac{10^n}{n!} = \frac{(n+1)}{10}$

- untuk 1≤n≤9, diperoleh $\frac{a_{n+1}}{a_n}$≤1, maka barisan monoton tak naik
- untuk n>9, diperoleh $\frac{a_{n+1}}{a_n}$>1, maka barisan monoton naik.

Keterbatasan : $a_n = \frac{n!}{10^n}$

- karena $\{a_n\}$ naik maka tidak terbatas di atas (tidak memiliki batas atas)
- karena $\{a_n\}$ tak naik di 1≤n≤9 maka terbatas di bawah pada n=9, yaitu $a_9 = \frac{9!}{10^9}$ dan juga pada n=10, yaitu $a_{10} = \frac{10!}{10^{10}} = \frac{9!}{10^9} = a_9$.

Limit : $a_n = \frac{n!}{10^n} \rightarrow \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{n!}{10^n}$ = +∞ (divergen)