Pertemuan ke-4: DERET TAKHINGGA, UJI INTEGRAL DAN TAKSIRAN JUMLAH

Departemen Matematika
FMIPA IPB

Bogor, 2017

Deret Takhingga

Definisi (Deret takhingga)

Deret takhingga (kadangkala hanya disebut deret saja) adalah jumlah dari suku-suku suatu barisan takhingga $\{a_k\}$, *yaitu*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

- Deret takhingga $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kadangkala hanya ditulis $\sum a_k$.

Definisi (Barisan jumlah parsial)

Barisan jumlah parsial dari deret takhingga $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *adalah*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Definisi (Kekonvergenan deret)

Deret takhingga $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *disebut konvergen ke suatu jumlah* S *jika barisan jumlah-jumlah parsial* $\{S_n\}$ *dari deret tersebut konvergen ke* S.

- Jika barisan $\{S_n\}$ divergen, maka deret takhingga $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ disebut divergen.
- Suatu deret takhingga yang divergen tidak memiliki jumlah.

- Salah satu jenis deret yang relatif mudah untuk menentukan kekonvergenannya adalah *deret geometri*.

Definisi (Deret geometri)

Suatu deret takhingga disebut deret geometri jika deret tersebut memiliki bentuk umum

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1},$$

dengan r *dan* a *konstanta bilangan nyata dan* $a \neq 0$.

- Uji kekonvergenan deret geometri diberikan dalam teorema berikut.

Teorema (Kekonvergenan deret geometri)

Perhatikan deret geometri $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$.

1. *Jika* $|r| < 1$ *maka deret geometri tersebut konvergen dengan jumlah* $S = \dfrac{a}{1-r}$.
2. *Jika* $|r| \geq 1$ *maka deret geometri tersebut divergen.*

Bukti:

- Untuk $r = 1$ maka $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = na$, yang menuju ∞ jika $n \to \infty$.
  Jadi S_n adalah divergen untuk $r = 1$.
- Untuk $r = -1$, maka

$$\begin{aligned} S_1 &= a \\ S_2 &= a - a = 0 \\ S_3 &= a - a + a = a \\ S_4 &= a - a + a - a = 0 \\ &\text{dan seterusnya} \end{aligned}$$

  sehingga

$$\lim_{n\to\infty} S_n \text{ tidak ada.}$$

  Jadi S_n adalah divergen untuk $r = -1$.

- Untuk $|r| \neq 1$, maka

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= \left(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}\right) \\ &\quad - \left(ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n\right) \\ &= a - ar^n, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} S_n\,(1 - r) &= a\,(1 - r^n) \text{ atau} \\ S_n &= \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r}. \end{aligned}$$

  - Jika $|r| < 1$ maka $r^n \to 0$ jika $n \to \infty$, sehingga

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1 - r}.$$

  - Jika $|r| > 1$ maka $\{r^n\}$ divergen, sehingga $\{S_n\}$ juga divergen. Sebagai akibat deret di atas juga divergen.

Contoh

1. *Tentukan jumlah dari* $\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{27} + \cdots$.
   Pada contoh ini, $a = 4/3$ *dan* $r = 1/3$.
2. *Bilangan* $0.125125125\ldots$ *dapat dinyatakan sebagai deret geometri berikut.*

$$\begin{aligned}
0.125125125\ldots &= \frac{125}{1000} + \frac{125}{1000000} + \frac{125}{1000000000} + \cdots \\
&= \frac{125}{1000}\left(1 + \frac{1}{1000} + \left(\frac{1}{1000}\right)^2 + \cdots\right) \\
&= \frac{125/1000}{1 - 1/1000} = \frac{125}{999}.
\end{aligned}$$

   Pada contoh ini, $a = 125/1000$ *dan* $r = 1/1000$.
3. *Tentukan jumlah dari* $\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{4} + \dfrac{5}{8} + \cdots$.
   Pada contoh ini, $a = 5/2$ *dan* $r = 1/2$.

Teorema

Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen maka* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- Pernyataan yang setara dengan teorema di atas adalah kontrapositifnya, yang bisa digunakan sebagai uji kedivergenan deret, yang diberikan oleh akibat berikut.

Akibat (Uji kedivergenan dengan suku ke-n)

Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergen.*

Contoh

Buktikan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+7}$ *adalah divergen.*

Jawab:

Karena

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+7} = 2 \neq 0,$$

maka berdasarkan uji kedivergenan dengan suku ke-n *dapat disimpulkan bahwa deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+7}$ *adalah divergen.*

Catatan:

- Perhatikan bahwa jika diketahui $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, belum tentu deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen. Contohnya adalah *deret harmonik*:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

Teorema

Deret harmonik

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

adalah divergen.

Bukti:

$$\begin{aligned} S_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n} \\ &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\frac{1}{n} \\ &> 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots+\frac{1}{n} \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Untuk $n \to \infty$ maka ruas kanan adalah divergen, sehingga S_n divergen. Jadi deret harmonik adalah divergen.

Deret kolaps: Selain deret geometri, jenis deret yang bisa kita tentukan jumlahnya adalah *deret kolaps*, seperti yang diilustrasikan pada contoh berikut.

Contoh

Perhatikan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+3)(k+4)}$ *adalah konvergen dan tentukan jumlahnya.*

Jawab:

Pertama perhatikan bahwa

$$\frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4},$$

Contoh

maka

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4} \right) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+4}. \end{aligned}$$

Akhirnya diperoleh

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+4} \right) = \frac{1}{4}.$$

Jadi deret tersebut konvergen dengan jumlah $= 1/4$.

- Deret konvergen memenuhi sifat-sifat yang dinyatakan pada teorema berikut.

Teorema (Sifat-sifat deret konvergen)

Jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *dan* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *keduanya konvergen dan* c *adalah konstanta bilangan nyata, maka*

1. *deret* $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ *adalah konvergen,*
2. *deret* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ *adalah konvergen.*

Selain itu juga berlaku

1. $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, *dan*
2. $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Contoh

Tentukan jumlah dari deret

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[3\left(\frac{1}{8}\right)^{k}-5\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right].$$

Teorema

Jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergen dan* $c \neq 0$ *adalah konstanta bilangan nyata, maka deret* $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ *adalah divergen.*

Bukti: Pertama perhatikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Karena $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen dan $c \neq 0$ maka $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ adalah divergen.

Contoh

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10k}$ *adalah divergen, sebab deret harmonik adalah divergen.*

Deret Positif: Uji Integral

- Pada bagian sebelumnya kita telah mengkaji dua jenis deret, yang jika konvergen maka dengan mudah dapat ditentukan jumlahnya, yaitu *deret geometri* dan *deret kolaps*.
- Pada bagian ini kita kaji kekonvergenan deret yang lebih umum. Kita mulai dengan mengkaji deret positif.
- Deret positif adalah deret yang suku-sukunya terdiri atas bilangan-bilangan taknegatif.

- Salah satu hasil yang dapat dijabarkan langsung dari teorema kemonotonan barisan, diberikan pada teorema berikut.

Teorema (Uji jumlah terbatas)

Suatu deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *yang suku-sukunya taknegatif adalah konvergen jika dan hanya jika jumlah parsialnya terbatas di atas.*

Contoh

Buktikan deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ *adalah konvergen.*

Bukti: Pertama perhatikan bahwa

$$k! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times k \geq 1 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^{k-1}.$$

Dengan demikian

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}},$$

atau

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 2,$$

karena

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

yaitu jumlah deret geometri dengan $a = 1$ dan $r = \frac{1}{2}$. Jadi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergen.

Teorema (Uji integral)

Misalkan f adalah suatu fungsi yang kontinu, positif, dan tidak naik pada selang $[1, \infty)$. Jika $a_k = f(k)$ untuk semua k bulat positif, maka deret takhingga $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen jika dan hanya jika integral takwajar $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ konvergen.

- Dengan kata lain, deret takhingga $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan integral takwajar $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ adalah keduanya konvergen atau keduanya divergen.
- **Catatan:** Pada teorema di atas, angka 1 dapat diganti dengan sembarang bilangan bulat positif m.

- Dengan uji integral, kita dapat membuktikan teorema berikut.

Teorema (Uji kekonvergenan deret-p)

Deret-p, yaitu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

adalah konvergen jika dan hanya jika $p > 1$.

Bukti:

- Untuk $p < 0$, suku ke-n dari deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ tidak konvergen ke 0, maka deret divergen.
- Untuk $p \geq 0$, maka fungsi $f(x) = \frac{1}{x^p}$ adalah kontinu, positif, dan tidak naik, sehingga kita bisa menggunakan uji integral sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{t \to \infty} \int_1^t x^{-p} dx = \lim_{t \to \infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^t \\ &= \lim_{t \to \infty} \left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right). \end{aligned}$$

Ruas kanan di atas adalah konvergen jika $p > 1$, tidak terdefinisi jika $p = 1$, dan menuju ∞ jika $0 \leq p < 1$. Jadi terbukti bahwa deret-p konvergen jika dan hanya jika $p > 1$.

Contoh

Periksa kekonvergenan deret berikut.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.003}}$.

   Jawab: Deret ini adalah deret-p dengan $p = 1.003 > 1$, jadi konvergen.

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$.

   Jawab: Deret ini adalah deret-p dengan $p = \dfrac{2}{3} < 1$, jadi divergen.

3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$.

   Jawab: Misalkan $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ dengan x bilangan nyata dan $2 \le x < \infty$, maka f adalah kontinu, positif, dan taknaik pada selang $[2, \infty)$, sehingga, kita dapat menggunakan uji integral untuk memeriksa kekonvergenan deret di atas.

Ekor suatu deret

- Awal suatu deret tidaklah penting untuk kekonvergenan atau kedivergenannya.
- Yang penting untuk diselidiki adalah *ekornya*, yaitu:

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$$

  dengan N adalah suatu bilangan bulat positif yang besar, sehingga untuk uji kekonvergenan, kita dapat mengabaikan beberapa suku awal dari suatu deret.
- Tetapi, jumlah dari suatu deret adalah tergantung dari semua sukunya, termasuk suku awalnya.

Bahan Responsi

Soal

Periksalah apakah deret tersebut konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan jumlahnya.

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \left[4\left(\frac{1}{3}\right)^k + 5\left(\frac{1}{6}\right)^k\right]$
2. $\sum_{k=2}^{\infty} \left[2\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} - 7\left(\frac{1}{4}\right)^{k+2}\right]$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$

Soal

Periksalah apakah deret tersebut konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan jumlahnya.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+3}{k(k+2)}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{5^{k-2}}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{10^k}$
4. $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^{k-1}$

Soal

Buktikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

adalah divergen.

Soal

Suatu bola karet dijatuhkan ke lantai dari tempat yang tingginya 2 *meter. Setiap kali setelah bola itu memantul ia mencapai ketinggian yang sama dengan dua pertiga dari tinggi yang dicapai sebelum pemantulan terakhir. Tentukan panjang lintasan bola sampai berhenti.*

Soal

Berikan contoh deret untuk memperlihatkan bahwa jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *dan* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *keduanya divergen, maka belum tentu deret* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ *adalah divergen.*

Soal

Gunakan uji integral untuk menentukan apakah deret tersebut konvergen atau divergen.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+3}}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k+6)^{4/3}}$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^3}$

Soal

Gunakan uji yang telah dipelajari untuk menentukan apakah deret tersebut konvergen atau divergen.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^k + \frac{k-3}{3k+4} \right]$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2^k} \right)$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \left(\frac{k\pi}{2} \right)$
4. $\sum_{k=3}^{\infty} k^2 e^{-k^3}$

Soal

Untuk nilai p berapakah deret

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$$

konvergn?

Tentang Slide

- Penyusun: Dosen Departemen Matematika FMIPA IPB
- Versi: 2017
- Media Presentasi: LaTeX - BEAMER (PDFLaTeX)