Departemen Matematika FMIPA IPB

UJIAN TENGAH SEMESTER GANJIL 2017/2018

Kode - Nama MK	**:**	**MAT211 - Kalkulus II**
Hari, Tanggal	**:**	**Rabu, 25 Oktober 2017**
Waktu	**:**	**2 Jam**
Sifat Ujian	**:**	**Catatan Tertutup**

Selesaikan ke-10 soal berikut **secara berurutan**. Bekerjalah dengan jujur, teliti, dan sepenuh kemampuan. Segala bentuk kecurangan bersanksi akademik. Nilai maksimum setiap soal adalah 10.

1. Tentukan

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{x^2-1}.$$

Jawab

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{x^2-1} \qquad \text{bentuk } \frac{0}{0} \\ & \overset{L}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2}2x}{2x} \\ = & \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2} \\ = & \ 1 \end{aligned}$$

2. Tentukan integral takwajar berikut:

$$\int_{-11}^{-3} \frac{1}{(x+3)^{2/3}} dx.$$

Jawab

$$\begin{aligned} \int_{-11}^{-3} \frac{1}{(x+3)^{2/3}} dx &= \lim_{t\to -3^-} \int_{-11}^{t} \frac{1}{(x+3)^{2/3}} dx \\ &= \lim_{t\to -3^-} \left[3(x+3)^{1/3}\right]_{-11}^{t} \\ &= \lim_{t\to -3^-} \left[3(t+3)^{1/3}+6\right] \\ &= 6 \end{aligned}$$

3. Diberikan barisan $\{a_n\}$ dengan

$$a_n = \frac{n}{n^2+1}.$$

   (a) Tuliskan lima suku pertama.

   (b) Periksa kekonvergenan barisan tersebut dengan menentukan $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Jawab

(a)

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2} = 0.5 \\
a_2 &= \frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5} = 0.4 \\
a_3 &= \frac{3}{3^2+1} = \frac{3}{10} = 0.3 \\
a_4 &= \frac{4}{4^2+1} = \frac{4}{17} \\
a_5 &= \frac{5}{5^2+1} = \frac{5}{26}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{0}{1+0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Barisan $\{a_n\}$ konvergen ke 0.

4. Periksa kekonvergaanan deret berikut:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{1/(n+1)} - e^{1/(n+2)}\right].$$

Jika konvergen, tentukan jumlahnya.

$\boxed{\text{Jawab}}$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left[e^{1/(k+1)} - e^{1/(k+2)}\right] \\
&= \left(e^{1/2} - e^{1/3}\right) + \left(e^{1/3} - e^{1/4}\right) + \cdots + \left(e^{1/(n+1)} - e^{1/(n+2)}\right) \\
&= e^{1/2} - e^{1/(n+2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= \lim_{n\to\infty} S_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(e^{1/2} - e^{1/(n+2)}\right) \\
&= e^{1/2} - 1
\end{aligned}$$

Deret tersebut konvergen dengan jumlah $e^{1/2} - 1$.

5. Diketahui fungsi f dengan

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

adalah fungsi yang kontinu, positif, dan taknaik pada $[2,\infty)$. Jika $a_n = f(n)$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$, periksa kekonvergenan deret

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

$\boxed{\text{Jawab}}$

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} f(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^{b} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2}\right) \\
&= 0 + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}
\end{aligned}$$

Karena integral takwajar $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ konvergen, maka berdasarkan Uji Integral, deret takhingga $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ juga konvergen.

6. Tentukan kekonvergenan deret berikut:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{6^n+5}.$$

$\boxed{\text{Jawab}}$

Cara I:

Misalkan

$$a_n = \frac{5^n}{6^n+5} \qquad \text{dan} \qquad b_n = \frac{5^n}{6^n},$$

maka untuk $n \geq 1$, berlaku

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{5^n}{6^n+5} \leq \frac{5^n}{6^n} \\
0 &\leq a_n \leq b_n.
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

merupakan deret geometri dengan $r = 5/6$, $|r| < 1$, sehingga deret tersebut konvergen. Akibatnya, berdasarkan Uji Banding,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{6^n+5}$$

juga konvergen.

Cara II:

Misalkan

$$a_n = \frac{5^n}{6^n+5} \qquad \text{dan} \qquad b_n = \frac{5^n}{6^n},$$

maka

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{6^n+5}\frac{6^n}{5^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6^n}{6^n+5} \qquad \text{bentuk } \frac{\infty}{\infty}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\frac{6^x}{6^x+5} \qquad \text{bentuk } \frac{\infty}{\infty}\\
&\overset{L}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{6^x\ln 6}{6^x\ln 6}\\
=\ &\lim_{x\to\infty} 1\\
=\ &1>0
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

merupakan deret geometri dengan $r = 5/6$, $|r| < 1$, sehingga deret tersebut konvergen. Akibatnya, berdasarkan Uji Banding Limit,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{6^n+5}$$

juga konvergen.

7. Periksa apakah deret berikut:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}$$

konvergen mutlak, konvergen bersyarat, ataukah divergen.

$\boxed{\text{Jawab}}$

Misalkan

$$a_n = \frac{4}{\sqrt{n(n+2)}}$$

dan

$$b_n = \frac{1}{n}.$$

Perhatikan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

divergen karena merupakan deret harmonik.

Karena

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n^2}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}\\
&= 4>0,
\end{aligned}
$$

maka berdasarkan Uji Banding Limit,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{n(n+2)}}$$

juga divergen.

Karena untuk semua bilangan asli n,

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{n(n+2)}} &\geq \frac{4}{\sqrt{(n+1)(n+3)}} \geq 0 \\ a_n &\geq a_{n+1} \geq 0\end{aligned}$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{n(n+2)}} = 0,$$

maka berdasarkan Uji Deret Ganti Tanda,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}$$

konvergen.

Karena $\sum a_n$ divergen dan $\sum (-1)^n a_n$ konvergen, maka $\sum (-1)^n a_n$ konvergen bersyarat.

8. Tentukan himpunan dan jari-jari kekonvergenan deret pangkat berikut:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} x^n.$$

$\boxed{\text{Jawab}}$

Misalkan

$$u_n(x) = \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} x^n,$$

maka

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}} \frac{n\sqrt{n}}{3^n |x|^n} \\ &= 3|x| \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}} \\ &= 3|x| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3/2} \\ &= 3|x| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{3/2} \\ &= 3|x|.\end{aligned}$$

Deret konvergen jika

$$\begin{aligned}\rho &< 1 \\ 3|x| &< 1 \\ |x| &< \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} &< x < \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Belum ada kesimpulan jika

$$\begin{aligned}\rho &= 1 \\ 3|x| &= 1 \\ |x| &= \frac{1}{3} \\ x &= -\frac{1}{3} \qquad \text{atau} \qquad x = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Cek ketika $x = -\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}\end{aligned}$$

merupakan deret-p dengan $p = 3/2 > 1$, sehingga deret konvergen.

Cek ketika $x = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}\end{aligned}$$

merupakan deret-p ganti tanda dengan $p = 3/2 > 1$, sehingga deret konvergen mutlak.

Jadi, himpunan kekonvergenannya adalah

$$HK = \left\{ x \middle| -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3} \right\} = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

dan jari-jari kekonvergenannya adalah $\frac{1}{3}$.

9. Tentukan deret Taylor untuk

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

di $a = 1$ dengan empat suku pertama dari deret tersebut harus ditulis.

Jawab

Deret Taylor di $a = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \cdots$$

dengan

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(1) = 1 \\ f'(x) &= -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{2} \\ f''(x) &= \frac{3}{4x^2\sqrt{x}} \Rightarrow f''(1) = \frac{3}{4} \\ f'''(x) &= -\frac{15}{8x^3\sqrt{x}} \Rightarrow f'''(1) = -\frac{15}{8}\end{aligned}$$

Jadi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3 + \cdots$$

10. Tentukan deret binomial untuk

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$$

pada selang $-1 < x < 1$ dengan lima suku pertama dari deret tersebut harus ditulis.

$\boxed{\text{Jawab}}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x^3+1} \\
&= \left(1+x^3\right)^{1/2} \\
&= 1+\binom{1/2}{1}x^3+\binom{1/2}{2}\left(x^3\right)^2+\binom{1/2}{3}\left(x^3\right)^3+\binom{1/2}{4}\left(x^3\right)^4+\cdots \\
&= 1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}x^3+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^6+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^9+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}x^{12}+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{16}x^9-\frac{5}{128}x^{12}+\cdots
\end{aligned}$$

"Selamat Berjuang. Semoga Berhasil dan Berkah." (rho-theta-iota, 2017)