KHENI HIKMAH LESTARI
G1401211029

Kalkulus II Tugas Mandiri

1.) (a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya :

$\cos \pi, \frac{\cos 2\pi}{4}, \frac{\cos 3\pi}{9}, \frac{\cos 4\pi}{16}, \dots$

\# Rumus eksplisit $= \frac{\cos n\pi}{n^2}$

\# Konvergenan

$-1 \le \cos n\pi \le 1$

$\frac{-1}{n^2} \le \frac{\cos n\pi}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2} = 0 \qquad 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Jadi konvergen menuju 0

(b) Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B. Buktikan (dengan definisi limit) $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke A+B

....

$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ Maka $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n)$

$\lim_{n\to\infty} b_n = B$ $= \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = A \pm B$

\# Pembuktian :

$|(a_n+b_n) - (A+B)| < \varepsilon$

$\{a_n\}$ konvergen ke A, $L = A$, untuk tiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N > 0$ sehingga $n \ge N$

$|a_n - L| < \varepsilon/2$

$|a_n - A| < \varepsilon/2$

$\{b_n\}$ konvergen ke B, $L = B$, untuk cetiap $\varepsilon > 0$ terhadap $N > 0$ sehingga $n \ge N$

$|a_n - L| < \varepsilon/2$

$|a_n - B| < \varepsilon/2$

$|(a_n+b_n) - (A+B)| \le |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Ketaksamaan segitiga

$\therefore \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$ (TERBUKTI)

(c) Tentukan kemonotan, keterbatasan, limit (jika ada) : $a_n = \frac{\sin n\pi}{4}$

.....

\# Kemonotonan

$a_n = \frac{\sin n\pi}{4} \rightarrow a'(n) = \frac{\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{4}$

- $x = 1 \rightarrow a'(1) = \frac{1}{8}\sqrt{2}\pi$ ⊕
- $x = 2 \rightarrow a'(2) = 0$
- $x = 3 \rightarrow a'(3) = -\frac{1}{8}\sqrt{2}\pi$ ⊖
- $x = 4 \rightarrow a'(4) = 0$

Kemonotonannya adalah tidak naik dan tidak turun.

\# Keterbatasan

$-1 \le \sin \frac{n\pi}{4} \le 1$

tidak bisa menggunakan teorema apit sehingga divergen.

2.) (a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$

\# Rumus eksplisit

$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

\# Kekonvergenannya

$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} |(-1)^{n+1}| \left|\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\right|$

$= \lim \frac{1}{\infty} = 0$ (Konvergen ke-0)

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen :

$a_n = \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3/n - 16}{5/n + 8} = \frac{-16}{8} = 2$

Konvergen ke -2

KHENI HIKMAH LESTARI
01401211029

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan :

$$a_n = \frac{\ln n}{n}$$

Kemonotonan

$$a'(n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot n - 1\cdot \ln n}{n^2} = \frac{1 - \ln n}{n^2}$$

Barisan tersebut bukan barisan monoton (tidak naik dan tidak turun).

Keterbatasan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = 0$$

- $a_1 = \ln 1/1 = 0$
- $a_2 = \ln 2/2 = 0{,}34$

Oleh karena itu barisan tersebut konvergen ke 0

3) (a) Tuliskan rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya :

0,9 ; 0,99 ; 0,999 ; 0,9999

Rumus eksplisit

$$a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$$

Kekonvergenan

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{10^n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{10^n} = 1 - 0 = 1$$

Konvergen ke-1

(b) Dengan Definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ konvergen :

$$a_n = \frac{n+3}{3n-2}$$

Konvergen

$$a_n = \frac{n+3}{3n-2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n+3}{3n-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{n/n + 3/n}{3n/n - 2/n} = \frac{1}{3}$$

Konvergen menuju ke $\frac{1}{3}$

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan dan limit (jika ada)

$$a_n = \frac{n!}{10^n}$$

Kemonotonan

$$a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdots 10^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n+1}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdots 10^{n+1}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{10^{n+1}}{1} = \frac{10^{n+1}}{n+1} > 0 \text{ (naik)}$$

Keterbatasan

$$a_n = \frac{n!}{10^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n}{10\cdot 10\cdot 10\cdots 10^n} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (divergen)}$$