No.

Date

TUGAS MANDIRI

Nama : Salsabila Dwi Rahmi

NIM : G1401211026

① a. Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$\cos\pi, \frac{\cos 2\pi}{4}, \frac{\cos 3\pi}{9}, \frac{\cos 4\pi}{16}, \ldots$$

$a_n = \dfrac{\cos n\pi}{n^2}$ Kekonvergenan : $-1 \le \cos n\pi \le 1$

$$\frac{-1}{n^2} \le \frac{\cos n\pi}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2} = 0 \qquad 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

∴ Konvergen menuju 0

b. Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B. Buktikan (dengan definisi limit) $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke A + B

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n = A\\ \lim_{n\to\infty} b_n = B\end{aligned}\right\} \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = A \pm B = A + B \,//$$

Untuk pembuktian, maka $|(a_n + b_n) - (A+B)| < \varepsilon$

$\{a_n\}$ konvergen ke A

$L = A$, akan dibuktikan:

Untuk tiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N > 0$ sedemikian sehingga $n \geq N$

$|a_n - L| < \varepsilon/2$

$|a_n - A| < \varepsilon/2$

$\{b_n\}$ konvergen ke B

$L = B$, akan dibuktikan:

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ tdp $N > 0$ sdm shg $n \geq N$

$|b_n - L| < \varepsilon/2$

$|b_n - B| < \varepsilon/2$

$$|(a_n + b_n) - (A+B)| \le |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

TERBUKTI

No.

Date

c. Tentukan Kemonotonan, Keterbatasan, Limit (jika ada) :

$$a_n : \frac{\sin n\pi}{4}$$

Kemonotonan

$a_n : \frac{\sin n\pi}{4}$

$a'(n) : \frac{\pi}{4} \cos n\pi/4$

- $x = 1 \rightarrow a'(1) : \frac{1}{8}\sqrt{2}\,\pi$
- $x = 2 \rightarrow a'(2) : 0$
- $x = 3 \rightarrow a'(3) : -\frac{1}{8}\sqrt{2}\,\pi$

↳ tidak naik dan tidak turun karena kadang (-) dan (+)

Keterbatasan

$-1 \leq \sin \frac{n\pi}{4} \leq 1$

↳ Teorema apit tidak berlaku : divergen

② a. Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenanya:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$$

$a_n : (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

Kekonvergenan :

$$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| : \lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n+1} \right| \left| \frac{1}{n} \right| : \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \right| : 0$$

∴ Konvergen ke 0

No.

Date

b. Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen :

$$a_n : \frac{3-8\cdot 2^n}{5+4\cdot 2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3-8\cdot 2^n}{5+4\cdot 2^n} : \lim_{n\to\infty} \frac{3-16^n}{5+8^n}$$

$$: \lim_{n\to\infty} \frac{3/_1{}^n - 16}{5/_1{}^n + 8}$$

$$: \frac{0-16}{0+8} = -2$$

$\therefore$ konvergen ke -2

c. Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan :

$$a_n : \frac{\ln n}{n}$$

Kemonotonan

$$a'(n) : \frac{\frac{1}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n} - 1\cdot \ln n}{n^2} : \frac{1-\ln n}{n^2}$$

$\rightarrow$ bukan barisan monoton ; karena tidak naik & tidak turun

Keterbatasan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \overset{LH}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} : 0$$

$\rightarrow$ konvergen ke 0

③ a. Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergennya :

0,9 ; 0,99 ; 0,999 ; 0,9999

$\hookrightarrow$ (1-0,1) ; (1-0,01) ; (1-0,001)

$$1-\frac{1}{10} \; ; \; 1-\frac{1}{100} \; ; \; 1-\frac{1}{1000}$$

No.

Date

$a_n : 1 - \frac{1}{10^n}$

Kekonvergenan

$a_n : 1 - \frac{1}{10^n}$

$\lim_{n \to \infty} : 1 - \frac{1}{10^n} : 1 - 0 = 1 \rightarrow$ konvergen menuju 1

b. Dengan Definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ konvergen :

$a_n : \frac{n+3}{3n-2}$

$\lim_{n \to \infty} a_n = L$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n+3}{3n-2} : \lim_{n \to \infty} \frac{1 + 3/n}{3 - 2/n} : \lim_{n \to \infty} \frac{1+0}{3-0} : \frac{1}{3} \rightarrow$ konvergen ke $\frac{1}{3}$

c. Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) :

$a_n : \frac{n!}{10^n} \Rightarrow a_n : \frac{1}{10} \frac{2}{10} \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n}{\cdot 10 \cdot 10 \cdots 10^n}$

Kemonotonan

$\frac{a_n}{a_{n+1}} : \frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdots 10^n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n+1 / 10 \cdot 10 \cdots 10^{n+1}}$

$\frac{a_n}{a_{n+1}} : \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} / \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} \cdot n+1}{\cancel{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdots 10^n} / \cancel{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdots 10^n} \cdot 10^{n+1}}$

$: \frac{1}{n+1} \times \frac{10^{n+1}}{1} , \frac{10^{n+1}}{n+1} > 0$ (naik)

Keterbatasan

$a_n : \frac{n!}{10^n} : \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}{10 \cdot 10 \cdots 10^n}$

$: \frac{\infty}{\infty}$

$:$ (divergen)