MAT211 Kalkulus II
K6 - Deret Pangkat

TBK (AKT)
IPB University

September 20, 2021

1 Pendahuluan

Deret takhingga:

- deret bilangan
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots ,$$
- deret fungsi:
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots ,$$
dengan $a_k(x)$ fungsi dan $x \in \mathbb{R}$.

Pertanyaan:

1. Apakah deret fungsi konvergen? Untuk nilai x berapa?
2. Jika konvergen, konvergen ke fungsi apa? $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = S(x)$, seperti apakah $S(x)$?

2 Bentuk Deret Pangkat

Deret pangkat (*power series*) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ memiliki bentuk $a_k(x) = a_k x^k$, sehingga

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Jika $a_0 = a_1 = \cdots = a$ maka deret pangkat merupakan deret geometrik dengan rasio x, yaitu

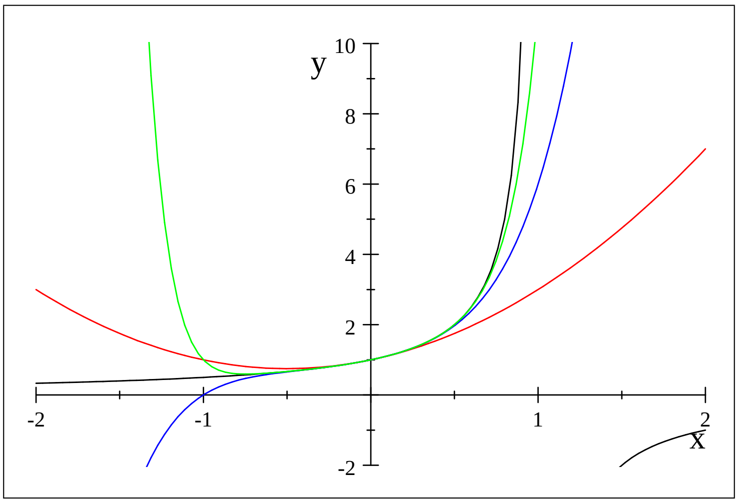
$$\sum_{k=0}^{\infty} a x^k = a + ax + ax^2 + \cdots$$

yang konvergen pada $-1 < x < 1$, sehingga

$$a + ax + ax^2 + \cdots = \frac{a}{1-x}.$$

Ilustrasi: $a = 1$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$



3 Daerah Kekonvergenan

Definisi

Himpunan kekonvergenan dari suatu deret pangkat adalah himpunan bilangan nyata yang anggota-anggotanya membuat deret pangkat tersebut konvergen.

Example 1 *Deret geometrik* Σax^n *memiliki daerah kekonvergenan* $(-1, 1)$.

Example 2 *Tentukan himpunan kekonvergenan deret-deret pangkat berikut:*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)}$

   *Uji banding **mutlak**:*

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)} \cdot \frac{2^n(n+1)}{x^n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{2} \cdot \frac{n+1}{n+2} \right| \\
&= \left| \frac{x}{2} \right| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| \\
&= \left| \frac{x}{2} \right|.
\end{aligned}$$

   Deret konvergen ketika

$$\rho < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{x}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

   Divergen ketika

$$\rho > 1 \Leftrightarrow \{x < -2\} \cup \{x > 2\}.$$

   Inkonklusif ketika $x = -2$ *atau* $x = 2$.

- *Jika $x = 2$ maka*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Deret terakhir merupakan deret harmonik yang divergen.

- *Jika $x = -2$ maka*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Deret terakhir merupakan deret harmonik ganti tanda yang konvergen.

Himpunan kekonvergenan:

$$(-2, 2) \cup \{-2\} = [-2, 2).$$

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

*Uji banding **mutlak**:*

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{x}{k+1}\right| \\ &= |x| \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{k+1}\right| \\ &= 0 < 1, \end{aligned}$$

sehingga deret konvergen untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Himpunan kekonvergenan: $\mathbb{R}$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$

*Uji banding **mutlak**:*

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} |(n+1)x| \\ &= \begin{cases} 0 & ; \quad x = 0 \\ \infty & ; \quad x \neq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Deret konvergen ketika $x = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(0)^n = 0 + 0 + 0 + \cdots.$$

Himpunan kekonvergenan: $\{0\}$.

Bentuk dan jari-jari himpunan kekonvergenan:

- Satu titik $x = 0$, dengan jari-jari kekonvergenan $r = 0$.
- Selang $(-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R)$, atau $[-R, R]$, dengan jari-jari kekonvergenan
$$r = \frac{R - (-R)}{2} = R.$$
- Seluruh himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, dengan jari-jari kekonvergenan $r = \infty$.

4 Deret Pangkat dalam $x - a$

Bentuk:
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots .$$
Beberapa hasil yang berlaku pada deret pangkat dalam x juga berlaku pada deret pangkat dalam $x - a$.
$$HK : |x| < 1 \Leftrightarrow |x - a| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - a < 1 \Leftrightarrow a - 1 < x < a + 1.$$

Bentuk dan jari-jari himpunan kekonvergenan:

- Satu titik $x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$, dengan jari-jari kekonvergenan $r = 0$.
- Selang $(a - R, a + R)$, $(a - R, a + R]$, $[a - R, a + R)$, atau $[a - R, a + R]$, dengan jari-jari kekonvergenan
$$r = \frac{(a + R) - (a - R)}{2} = R.$$
- Seluruh himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, dengan jari-jari kekonvergenan $r = \infty$.

Example 3 *Tentukan himpunan dan jari-jari kekonvergenan dari deret pangkat*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}, y = x - 3.$$

Uji banding mutlak:
$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{y^n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| y \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| \\
&= |y|
\end{aligned}$$

Deret konvergen ketika $\rho < 1$, yaitu
$$\rho < 1 \Leftrightarrow |y| < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < x < 4.$$

Divergen ketika $\rho > 1$, yaitu
$$\{x < 2\} \cup \{x > 4\}$$

Inkonklusif jika $\rho = 1$

- *Jika* $x = 2$ *maka*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Dengan uji deret ganti tanda:

1. *Misal* $u_n = (-1)^n b_n$ *dan* $b_n = \frac{1}{n^2}$*. Diperoleh*

$$\begin{aligned} n+1 &> n \\ (n+1)^2 &> n^2 \\ \frac{1}{(n+1)^2} &< \frac{1}{n^2} \\ b_{n+1} &< b_n \text{ (turun)}. \end{aligned}$$

2. $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$

Dengan demikian deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ *konvergen.*

- *Jika* $x = 4$ *maka*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

konvergen karena merupakan deret-p dengan $p = 2 > 1$*.*

Himpunan kekonvergenan: $[2, 4]$*. Jari-jari kekonvergenan:* $\frac{4-2}{2} = 1$*.*

Example 4 *Tentukan himpunan dan jari-jari kekonvergenan dari deret pangkat*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n \ln n}{3^n \cdot n}$$

Uji banding mutlak:

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1} \ln(n+1)}{3^{n+1}(n+1)} \cdot \frac{3^n \cdot n}{(x+2)^n \ln n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)}{3} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)}{3} \cdot \frac{n}{n+1} \right| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \right| \\ &=_H \left| \frac{x+2}{3} \right| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| \\ &= \left| \frac{x+2}{3} \right|. \end{aligned}$$

Deret konvergen ketika

$$\rho < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{x+2}{3} \right| < 1 \Leftrightarrow -3 < x+2 < 3 \Leftrightarrow -5 < x < 1.$$

Divergen ketika

$$\{x < -5\} \cup \{x > 1\}.$$

Inkonklusif ketika

$$x = -5, x = 1.$$

- *Jika $x = -5$ maka*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n \ln n}{3^n \cdot n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \ln n}{3^n \cdot n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}.$$

  Dengan uji deret ganti tanda:

  1. *Misal:* $u_n = (-1)^n b_n$ *dan* $b_n = \frac{\ln n}{n}$. *Misal* $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. *Diperoleh*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \\ &< 0, \quad x \geq 3 \text{ (turun)}. \end{aligned}$$

     Oleh karenanya, $b_{n+1} < b_n$ *untuk* $n \geq 3$.
  2. $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} =_H \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ *konvergen.*

- *Jika $x = 1$ maka*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n \ln n}{3^n \cdot n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \ln n}{3^n \cdot n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

  Dengan uji banding:

$$\begin{aligned} 1 &< \ln n, \quad n \geq 3 \\ \frac{1}{n} &< \frac{\ln n}{n} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} &< \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{n}. \end{aligned}$$

  Karena ruas kiri merupakan deret harmonik yang divergen, maka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ *divergen.*

Himpunan kekonvergenan: $[-5, 1)$. *Jari-jari kekonvergenan:* $\frac{1-(-5)}{2} = 3$.

5 Penyajian Fungsi sebagai Deret Pangkat

- Pada bagian ini kita mempelajari bagaimana menyajikan fungsi jenis tertentu sebagai deret pangkat.
- Penyajian seperti ini antara lain kita perlukan jika kita ingin mengintegralkan suatu fungsi yang tidak memiliki anti-turunan elementer, sehingga fungsi tersebut perlu dihampiri dengan polinom.

$$\begin{aligned} \int e^{x^2}\, dx &= ...? = \text{erf}(x). \\ \int_0^1 e^{x^2}\, dx &= 1.4627. \end{aligned}$$

Example 5 *Seperti sudah dijelaskan sebelumnya, deret pangkat geometrik*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

konvergen ketika $|x| < 1$*, sehingga diperoleh*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

Misalkan

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Nyatakan fungsi berikut sebagai suatu deret pangkat dan tentukan selang kekonvergenan-nya:

1. $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

   Apa hubungan antara $\frac{1}{1+x^2}$ *dan* $\frac{1}{1-x}$*?*

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1-(-x^2)} \\ &= f(-x^2) \\ f(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\ f(-x^2) &= 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + (-x^2)^4 + \cdots \\ g(x) &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots . \end{aligned}$$

   - *Daerah kekonvergenan* f *adalah* $-1 < x < 1$.
   - *Daerah kekonvergenan* g *adalah*

$$-1 < -x^2 < 1 \Leftrightarrow 1 > x^2 > -1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

2. $g(x) = \frac{2}{3+x}$

   Apa hubungan antara $\frac{2}{3+x}$ *dan* $\frac{1}{1-x}$*?*

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2}{3+x} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x}{3})} \\ &= \frac{2}{3} \cdot f(-\tfrac{x}{3}) \\ &= \frac{2}{3}(1 + (-\tfrac{x}{3}) + (-\tfrac{x}{3})^2 + (-\tfrac{x}{3})^3 + \cdots) \\ &= \frac{2}{3}(1 - \tfrac{x}{3} + \tfrac{x^2}{9} - \tfrac{x^3}{27} + \cdots) \end{aligned}$$

   - *Daerah kekonvergenan* f *adalah* $-1 < x < 1$.

- *Daerah kekonvergenan g adalah*

$$-1 < -\tfrac{x}{3} < 1 \Leftrightarrow 3 > x > -3.$$

3. $g(x) = \frac{2x^3}{3+x}$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2x^3}{3+x} \\ &= \frac{2x^3}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{3}} \\ &= \frac{2x^3}{3}(1 - \tfrac{x}{3} + \tfrac{x^2}{9} - \tfrac{x^3}{27} + \cdots) \text{ (dari soal sebelumnya)} \\ &= \frac{2}{3}(x^3 - \tfrac{x^4}{3} + \tfrac{x^5}{9} - \tfrac{x^6}{27} + \cdots) \end{aligned}$$

- *Daerah kekonvergenan f adalah $-1 < x < 1$.*
- *Daerah kekonvergenan g adalah*

$$-1 < -\tfrac{x}{3} < 1 \Leftrightarrow 3 > x > -3.$$

6 Penurunan dan Pengintegralan Deret Pangkat

- Jumlah suatu deret pangkat merupakan suatu fungsi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ yang daerah asalnya adalah selang kekonvergenan deret tersebut.
- Dengan menganggap deret pangkat sebagai sebuah suku banyak dengan suku-suku yang tak terhingga banyaknya, maka perilaku suku banyak terhadap pengintegralan dan pendiferensialan berlaku juga pada deret pangkat.
- Operasi ini dapat dilakukan suku-demi-suku.
- Jari-jari kekonvergenan deret yang telah diintegralkan maupun yang telah didiferensialkan adalah sama dengan jari-jari kekonvergenan deret aslinya.

Teorema

Misalkan $f(x)$ adalah jumlah sebuah deret pangkat pada sebuah selang I, yaitu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

Jika $x \in I$ maka berlaku

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(c_n (x-a)^n\right) \\ &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n (x-a)^n\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \\ &= C + c_0(x-a) + c_1(x-a)^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Example 6 *Nyatakan fungsi berikut sebagai suatu deret pangkat dan tentukan selang kekonvergenannya.*

1. $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

   Apa hubungan antara $\frac{1}{(1-x)^2}$ *dan* $\frac{1}{1-x}$*?*

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2 = ...?$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = -1 \cdot (1-x)^{-2} \cdot -1 \\
&= \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2 \\
&= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots, \ -1 < x < 1.
\end{aligned}$$

2. $g(x) = \ln|x-1|$

   Apa hubungan antara $\ln|x-1|$ *dan* $\frac{1}{1-x}$*?*

$$\begin{aligned}
\ln|x-1| &= -\int \frac{1}{1-x}\, dx = \ln|1-x| = \ln|x-1| \\
&= -\int (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)\, dx \\
&= -\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right).
\end{aligned}$$

3. $g(x) = \tan^{-1} x$

   Apa hubungan antara $\tan^{-1} x$ *dan* $\frac{1}{1-x}$*?*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-x} \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\
\frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots \ \textit{(dari soal sebelumnya)} \\
\int \frac{1}{1+x^2}\, dx &= \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots)\, dx \\
\tan^{-1} x &= ....
\end{aligned}$$

Example 7 *Nyatakan integral berikut sebagai suatu deret pangkat:*

$$\int \frac{1}{1+x^5}\, dx.$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^5} &= \frac{1}{1-(-x^5)} \\
&= 1 + (-x^5) + (-x^5)^2 + (-x^5)^3 + \cdots \\
\int \frac{1}{1+x^5}\, dx &= ....
\end{aligned}$$

Example 8 *Tunjukkan bahwa fungsi*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots=...?$$

merupakan solusi persamaan diferensial $f'(x)=f(x)$. Kemudian tentukan fungsi yang dinyatakan oleh deret pangkat di atas.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0+1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots=f(x). \\ f(0) &= 1. \end{aligned}$$

Persamaan diferensial:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x), \\ f(0) &= 1. \end{aligned}$$

Solusi umum: $f(x)=Ce^x$. Solusi khusus: $f(x)=e^x$.

Diperoleh deret pangkat:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots \\ e^{x^2} &= 1+x^2+\frac{1}{2!}(x^2)^2+\frac{1}{3!}(x^2)^3+\frac{1}{4!}(x^2)^4+\cdots \\ \int_0^1 e^{x^2}\,dx &= \int_0^1\left(1+x^2+\frac{1}{2!}(x^2)^2+\frac{1}{3!}(x^2)^3+\frac{1}{4!}(x^2)^4+\cdots\right)\,dx \end{aligned}$$