Departemen Matematika FMIPA IPB
UJIAN AKHIR SEMESTER GANJIL 2016/2017

Kode - Nama MK	**:**	**MAT211 - Kalkulus II**
Hari, Tanggal	**:**	**Senin, 16 Januari 2017**
Waktu	**:**	**2 Jam**
Sifat Ujian	**:**	**Catatan Tertutup**

Selesaikan ke-8 soal berikut secara berurutan. Bekerjalah dengan jujur, teliti, dan sepenuh kemampuan. Segala bentuk kecurangan bersanksi akademik.

1. (Nilai maksimum: 10) Tentukan kekonvergenan barisan $\{a_n\}$ jika

   (a) $a_n = \dfrac{n^2}{n+3}$.

   (b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n^2+3}$.

   $\boxed{\text{Jawab}}$

   (a) Karena

   $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} \\ &= \infty,\end{aligned}$$

   maka $\{a_n\}$ divergen.

   (b) Karena

   $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |a_n| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2n^2+3}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2+3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{0}{2+0} = 0,\end{aligned}$$

   maka

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

   sehingga $\{a_n\}$ konvergen ke 0.

2. (Nilai maksimum: 15) Tentukan apakah deret

   $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(k+1)(k+3)}$$

   konvergen atau divergen. Jika deret tersebut konvergen, tentukan jumlahnya.

   $\boxed{\text{Jawab}}$

Karena

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+3)} \\
= \; & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \\
= \; & \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) \right] \\
= \; & \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\
= \; & 1 + \frac{1}{2} - 0 - 0 \\
= \; & \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

maka

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(k+2)(k+3)}$$

konvergen dengan jumlah $\frac{3}{2}$.

3. (Nilai maksimum: 10) Tentukan kekonvergenan deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 e^{-n}.$$

$\boxed{\text{Jawab}}$

(Uji Banding Limit) Misalkan

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 e^{-n} \quad \text{dan} \quad b_n = e^{-n},$$

maka

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 e^{-n}}{e^{-n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \\
&= 1 > 0.
\end{aligned}$$

Karena

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

merupakan deret geometri dengan $a = 1$ dan $r = \frac{1}{e}$, $|r| < 1$, maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

konvergen, sehingga berdasarkan uji banding limit,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 e^{-n}$$

juga konvergen.

4. (Nilai maksimum: 15) Tentukan apakah deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)\,4^{2n+1}}$$

konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen.

$\boxed{\text{Jawab}}$

(Uji Pembanding Mutlak) Misalkan

$$u_n = \frac{(-3)^n}{(n+1)\,4^{2n+1}},$$

maka

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-3)^{n+1}}{(n+2)\,4^{2n+3}}\right| \left|\frac{(n+1)\,4^{2n+1}}{(-3)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+2)\,4^{2n+3}} \frac{(n+1)\,4^{2n+1}}{3^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4^2} \frac{n+1}{n+2} \\
&= \frac{3}{16} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \\
&= \frac{3}{16}(1) = \frac{3}{16} < 1,
\end{aligned}$$

sehingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

konvergen. Akibatnya,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)\,4^{2n+1}}$$

konvergen mutlak.

5. (Nilai maksimum: 15) Tentukan selang dan jari-jari kekonvergenan deret pangkat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}.$$

$\boxed{\text{Jawab}}$

(Uji Hasil Bagi Mutlak) Misalkan

$$u_n(x) = \frac{(x-3)^n}{n},$$

maka

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|^{n+1}}{n+1} \frac{n}{|x-3|^n} \\
&= |x-3| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \\
&= |x-3|.
\end{aligned}$$

Deret tersebut konvergen jika

$$\begin{aligned} \rho &< 1 \\ |x-3| &< 1 \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} -1 < x-3 < 1 \\ 2 < x < 4. \end{gathered}$$

Untuk $x = 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

konvergen bersyarat karena deret tersebut merupakan deret harmonik ganti tanda.

Untuk $x = 4$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergen karena deret tersebut merupakan deret harmonik. Jadi, selang kekonvergenannya adalah $[2, 4)$ dan jari-jari kekonvergenannya adalah 1.

6. (Nilai maksimum: 10) Tentukan deret Taylor untuk fungsi f dengan $f(x) = \cos x$ di $\frac{\pi}{3}$ hingga suku dengan $\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3$.

Jawab

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ f'(x) &= -\sin x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ f''(x) &= -\cos x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ f'''(x) &= \sin x \Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Deret Taylornya adalah

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n \\ = &\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{0!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^0 + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^1 + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots \\ = &\frac{\frac{1}{2}}{0!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^0 + \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^1 + \frac{-\frac{1}{2}}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots \\ = &\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{12}\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots. \end{aligned}$$

7. (Nilai maksimum: 15) Misalkan (x, y, z) merupakan titik yang jaraknya ke titik $(-1, 5, 3)$ adalah dua kali jaraknya ke titik $(5, 2, -3)$.

   (a) Tunjukkan bahwa himpunan semua titik yang demikian adalah suatu bola.

   (b) Tentukan titik pusat dan panjang jari-jari dari bola tersebut.

Jawab

(a)

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2} &= 2\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2+(z+3)^2} \\
(x+1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2 &= 4\left[(x-5)^2+(y-2)^2+(z+3)^2\right] \\
x^2+2x+1+y^2-10y+25+z^2-6z+9 &= 4\left(x^2-10x+25+y^2-4y+4+z^2+6z+9\right) \\
x^2+2x+1+y^2-10y+25+z^2-6z+9 &= 4x^2-40x+100+4y^2-16y+16+4z^2+24z+36 \\
0 &= 3x^2-42x+3y^2-6y+3z^2+30z+117 \\
x^2-14x+y^2-2y+z^2+10z+39 &= 0 \\
x^2-14x+49+y^2-2y+1+z^2+12z+25 &= -39+49+1+25=36 \\
(x-7)^2+(y-1)^2+(z+5)^2 &= 6^2
\end{aligned}$$

yang merupakan persamaan suatu bola.

(b) Titik pusat: $(7, 1, -5)$.
Panjang jari-jari: $r = 6$.

8. (Nilai maksimum: 10) Ubahlah persamaan

$$\rho = 4\cos\phi$$

dari koordinat bola ke koordinat **silinder** dan koordinat **Cartesius**.

Jawab

$$\begin{aligned}
\rho &= 4\cos\phi \\
\rho^2 &= 4\rho\cos\phi
\end{aligned}$$

Persamaannya dalam koordinat silinder adalah

$$r^2+z^2=4z,$$

sedangkan persamaannnya dalam koordinat Cartesius adalah

$$x^2+y^2+z^2=4z.$$