No
Date

DINDANA FITRIANI - G1401211034 - P3

No
Date

1a. Rumus eksplisit dan kekonvergenannya

$\cos \pi, \frac{\cos 2\pi}{4}, \frac{\cos 3\pi}{9}, \frac{\cos 4\pi}{16}$

* rumus eksplisit : $\frac{\cos an}{n^2}$

* kekonvergenan ~~kekonvergenan~~

$$\frac{-1}{n^2} \leq \frac{\cos an}{n} < \frac{1}{n^2}$$

~~lim~~

$$\lim_{n \to 0} -\frac{1}{n^2} = 0$$

konvergen ke-0

1b. $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke b
buktikan dalam def limit jika $\{a_n + b_n\}$ konver ke $A + B$.

• $\{a_n\}$ konvergen ke A maka,
$\lim_{n \to \infty} a_n = A$, $\varepsilon > 0$ selalu dapat ditemukan $N_1 > 0$
sehingga $n > N_1$ berlaku

$$|a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

< karena $\varepsilon > 0$ sembarang, maka $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ juga sembarang, diperbolehkan menulis $\frac{1}{2}\varepsilon$ diruas kanan.

$$|b_n - B| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$|a_n + b_n - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)|$$

ketaksamaan segitiga

$$\leq |a_n - A| + |b_n - B|$$
$$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$$
$$= e$$

terbukti bahwa $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = A + B$

Date

1c : Kemonotonan, keterbatasan, limit dari :

$$a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$$

$\approx a_n - a_{n+1}$

$\approx \sin \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{(n+1)\pi}{4}$ ⇒ tidak naik dan tidak turun

$= \cancel{\pi \sin(n+1) - \sin}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin(n\pi)}{4}$ = tidak ada Calvergen

2a. rumus eksplisit dan kekonvergenannya :

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{6}$

rumus eksplisit $= a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Kekonvergenan :

$-1 \leq (-1)^{n+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{n} \leq (-1)^{n-1} < \frac{1}{n}$

Karena $\lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

maka menurut teorema apit

$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$

2b. Dengan Def limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen

$a_n = \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n} = \frac{3/2^n - 8}{5/2^n + 4} = \frac{0 - 8}{0 + 4} = -2$

diperoleh $L = -2$

$\varepsilon > 0$ diberi sembarang tetapi cukup kecil

pilih $N = \frac{\ln\left(\frac{13}{\varepsilon} - 5\right) - \ln 4}{\ln 2}$

atau $2^N = \frac{13/\varepsilon - 5}{4}$

No
Date

untuk $n > N > 0$ diperoleh

$$|a_n - L| = \left| \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n} + 2 \right| = \left| \frac{3 - 8 \cdot 2^n + 2(5 + 4 \cdot 2^n)}{5 + 4 \cdot 2^n} \right|$$

$$= \frac{13}{5 + 4 \cdot 2^n}$$

$$< \frac{13}{5 + 4 \cdot 2^N} = \frac{13}{5 + 4 \cdot \left(\frac{\frac{13}{e} - 3}{4} \right)}$$

$$= e$$

2c. $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$

* Kemonotonan

$a_x = \dfrac{\ln x}{x}, \quad x > 0$

$a'x = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

diperoleh :

$a'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0$	$a'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0$
$\ln e < \ln x$	$\ln e > \ln x$
$e < x$	$e > x$
turun pd $(e. \infty)$	naik pada $(0, e)$

jadi, $\{a_n\}$ naik pada $= 1, 2$
$\{a_n\}$ turun pada $= 3, 4$.

Keterbatasan - $a_1 = \frac{\ln 1}{1} = 0$

$a_3 = \frac{\ln 3}{3} = 0,3662$ ⟺ $a_2 = \frac{\ln}{2} \approx 0,34657$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = H \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Maka $\{a_n\}$ terbatas dibawah oleh 0 dan terbatas oleh a_3

3a. eksplisit dan kekonvergenan :

0.9 , 0.99 , 0.999 , 0.9999 , . . .

rumus = $\left(1 - \frac{1}{9^n}\right)$ $\left(1 - \frac{1}{10^n}\right.$

$$\lim_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{10^n} = 1$$

3b. Buktikan barisan $\{a_n\}$ konvergen :

$$a_n = \frac{n+3}{3n-2} \quad \frac{1 + 3/n}{3 - 2/n} = \frac{1}{3}$$

$* \; n \geq N \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

$$\left| \frac{n+3}{3n-2} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{3n+9-3n+2}{9n-6} \right| < \varepsilon$$

$$= \left| \frac{11}{9n-6} \right| < \varepsilon$$

$$= \frac{11}{N} < \varepsilon$$

3c. $a_n = \dfrac{n!}{10^n}$

* kemonotonan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cancel{\quad(n+1)!\quad} \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \frac{n+1}{10}.$$

sehingga :

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$: $\{a_n\}$ tak naik untuk $n = 1, 2 \ldots, 9$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$: $\{a_n\}$ ~~tak~~ naik untuk $n = 10, 11$.

* keterbatasan

Karena $\{a_n\}$ tak naik for $n = 1, 2, \ldots 9$ yaitu

$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_9$

maka $a_9 = \dfrac{9!}{10^9} \approx 3{,}6288 \times 10^{-4}$ adalah batas bawah

karena $a_{10} = \dfrac{10!}{10^{10}} = \dfrac{9!}{10^9}$ maka a_{10} adalah batas bawah

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{10^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \ldots 3, 2, 1}{10 \cdot 10 \cdot 10}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{10} \cdot \frac{n-1}{10} \cdot \frac{n-2}{10} \ldots \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10}$$

disimpulkan $\{a_n\}$ tidak terbatas diatas.