Math IPB
www.math.ipb.ac.id

Pertemuan ke-1: BENTUK TAKTENTU

Departemen Matematika
FMIPA IPB

Bogor, 2017

Bentuk Taktentu Jenis 0/0

Teorema (Aturan L'hopital)

Misalkan $\lim_{x \to u} f(x) = \lim_{x \to u} g(x) = 0$*. Jika* $\lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *ada, baik nilainya terhingga atau takhingga (*L*,* ∞*, atau* $-\infty$*), maka*

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Di sini, u *dapat mewakili sembarang simbol* a*,* a^-*,* a^+*,* $-\infty$*, atau* $+\infty$*.*

Contoh

Tentukan limit berikut

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{4 \sin x}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos(3x))}{2x^2}$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{2x^2 + 5x}$.
4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

Bentuk Taktentu yang Lain

Teorema (Bentuk ∞/∞)

Misalkan

$$\lim_{x \to u} |f(x)| = \lim_{x \to u} |g(x)| = \infty.$$

Jika $\lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *ada, baik nilainya terhingga atau takhingga* (L, ∞, *atau* $-\infty$), *maka*

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Di sini, u *dapat mewakili sembarang simbol* a, a^-, a^+, $-\infty$, *atau* $+\infty$.

Contoh

Tentukan limit berikut

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^e}{e^x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cot x}{\ln x}$.

(i). Bentuk $0 \times \infty$ atau $\infty - \infty$:

- Jika kita menyelesaikan limit bentuk $0 \times \infty$ atau $\infty - \infty$, maka terlebih dahulu ubah limit tersebut sehingga menjadi limit dalam bentuk $0/0$ atau ∞/∞.

Contoh

Tentukan limit berikut

1. $\lim_{x \to 0} x^2 \csc x.$
2. $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$

(ii). Bentuk 0^0, ∞^0 atau 1^∞:

- Kadangkala

$$\lim_{x \to u} [f(x)]^{g(x)}$$

merupakan salah satu dari bentuk 0^0, ∞^0 atau 1^∞.

- Untuk menyelesaikan limit jenis ini, kita lakukan hal berikut.
- Mula-mula kita nyatakan $[f(x)]^{g(x)}$ sebagai

$$\begin{aligned} e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} &= e^{g(x) \ln f(x)} \\ &= \exp[g(x) \ln f(x)], \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{x \to u} [f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x \to u} \exp[g(x) \ln f(x)] \\ &= \exp\left[\lim_{x \to u} g(x) \ln f(x)\right]. \end{aligned}$$

Contoh

Tentukan limit berikut

1. $\lim_{x \to 0^+} (x+1)^{\frac{1}{x}}$.
2. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x}$.
3. $\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^{x}$.
4. $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

Catatan:

- Bentuk $0/\infty$, $\infty/0$, $\infty+\infty$, $\infty\times\infty$, 0^{∞} atau ∞^{∞} adalah bukan bentuk taktentu, karena masing-masing hasilnya bisa langsung ditentukan.
- Hasil dari $0^{\infty}=0$.
- Untuk memperjelas bahwa $0^{\infty}=0$, kita perhatikan contoh trivial berikut.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{x}} &= \exp\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{x}\right]\\ &= \exp(-\infty)=0.\end{aligned}$$

Soal

Tentukan limit berikut

1. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - 2\sin x}{\tan x}.$
2. $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 4x - 5}.$
3. $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{\pi}{2} - x}.$
4. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - x}{\ln x}.$

Soal

Tentukan limit berikut

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^2 \tan x}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \ln(x+1) - 1}{x^2}$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x - x}{8x^3}$.
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \sqrt{1 + \sin t}\, dt}{x}$.

Soal

Tentukan limit berikut:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{10^x}{e^x}$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \left(2x \ln x^2\right)$
4. $\lim\limits_{x \to 0} (\csc x - \cot x)$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \left(x + e^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{x}}$
6. $\lim\limits_{x \to \infty} x^x$
7. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - \dfrac{2}{3x}\right)^x$
8. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\ln x}$

Soal

Jika n adalah bilangan bulat, maka tentukan limit berikut (**Petunjuk** *: Ubahlah ke persoalan yang melibatkan peubah kontinu x.):*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$

Soal

Tentukan limit berikut:

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} (1^x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$
2. $\lim\limits_{x \to 0^-} (1^x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} (1^x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} (1^x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$

Tentang Slide

- Penyusun: Dosen Departemen Matematika FMIPA IPB
- Versi: 2017
- Media Presentasi: LaTeX - BEAMER (PDFLaTeX)