Pernyataan Parametrik Kurva dalam Bidang

Responsi ke-10 Kalkulus II

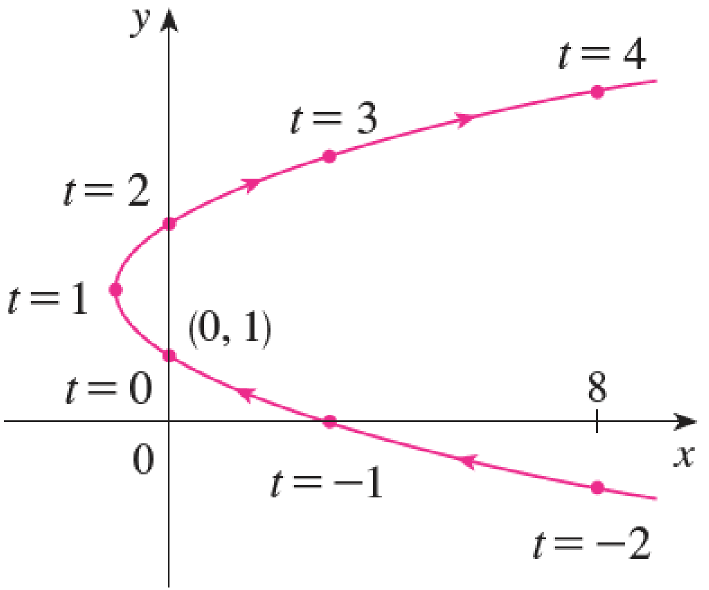
Kurva yang didefinisikan oleh Persamaan Parametrik

Misalkan x dan y adalah fungsi dari variabel t (disebut parameter) dengan persamaan $x = f(t),\ y = g(t)$ (disebut persamaan parametrik)

Contoh Soal 1

Sketsa dan identifikasi kurva yang didefinisikan oleh persamaan parametrik berikut: $x = t^2 - 2t,\ y = t + 1$.

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5



Garis Singgung

Misalkan f dan g merupakan fungsi yang terturunkan dan kita ingin mencari kemiringan pada sebuah titik di kurva parametrik $x = f(t), y = g(t)$ dimana y juga fungsi yang terturunkan terhadap x. Maka dengan aturan rantai didapat $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

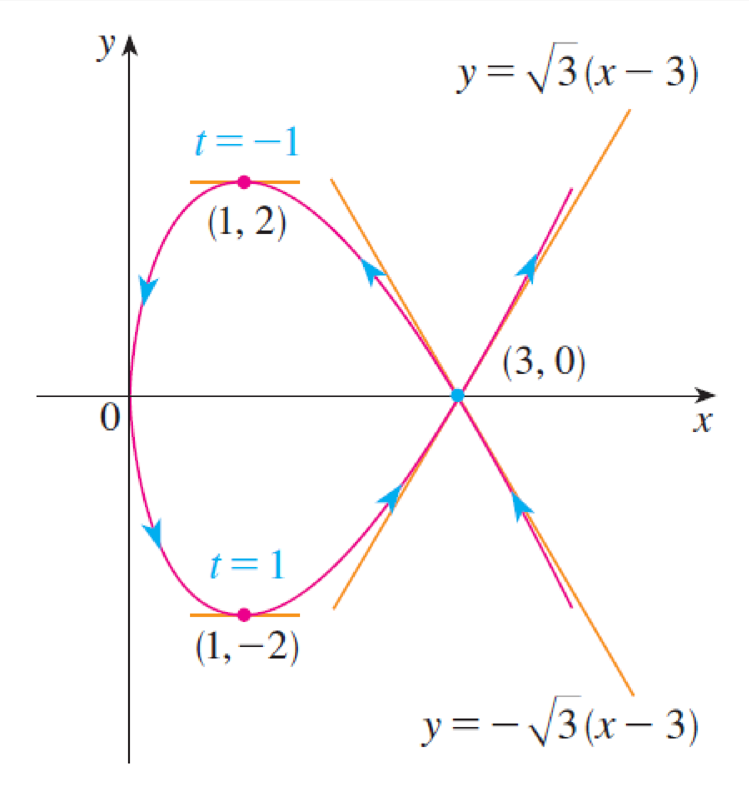
sehingga akan didapat $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$

Contoh soal 2

Sebuah kurva C didefinisikan oleh persamaan parametrik $x = t^2$ dan $y = t^3 - 3t$. 1) Tentukan dy/dx dan d^2y/dx^2. 2) Tunjukkan bahwa C mempunyai dua garis singgung di titik $(3,0)$ dan tentukan persamaannya. 3) Tentukan titik pada C di mana garis singgungnya horizontal atau vertikal. 4) Tentukan interval di mana kurva naik atau turun, dan di mana ia cekung ke atas atau cekung ke bawah. 5) Buatlah sketsa kurva tersebut.

Jawab: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2-3}{2t} = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$. Kemudian $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{2t} = \frac{3\left(t^2+1\right)}{4t^3}$. Perhatikan bahwa $y = t^3 - 3t = 0$ ketika $t = 0$ atau $t \pm \sqrt{3}$. Karena itu titik $(3,0)$ pada kurva akan didapat dari dua nilai dari parameter, yaitu $t = \sqrt{3}$ dan $t = -\sqrt{3}$. Ini mengindikasikan kurva C melewati dirinya sendiri pada $(3,0)$. Jadi kemiringan di titik $(3,0)$ atau $t = \pm\sqrt{3}$ adalah $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{3}$ dan persamaan garis singgungnya adalah $y = \sqrt{3}(x-3)$ dan $y = -\sqrt{3}(x-3)$. Kurva C mempunyai garis singgung horizontal ketika $\frac{dy}{dx} = 0$ yaitu ketika $\frac{dy}{dt} = 0$ dan $\frac{dx}{dt} \neq 0$. Karena $\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$, ini terjadi ketika $t = \pm 1$. Titiknya pada C adalah $(1,-2)$ dan $(1,2)$. Kurva C memiliki garis singgung vertikal ketika $\frac{dx}{dt} = 0$ yaitu $2t = 0$ sehingga $t = 0$. Jadi titiknya pada C adalah $(0,0)$. Interval di mana kurva naik adalah ketika $\frac{dy}{dx} > 0$ yaitu $-1 < t < 0$ atau $t > 1$. Kurva turun ketika $\frac{dy}{dx} < 0$ yaitu $t < -1$ atau $0 < t < 1$. Cekung ke atas ketika $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ yaitu $t > 0$ dan cekung ke bawah ketika $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ yaitu $t < 0$.

Contoh Soal 2 (Lanjutan)



Luas

Kita tahu bahwa luas di bawah kurva $y = F(x)$ dari a sampai b adalah $A = \int_a^b F(x)dx$, dimana $F(x) \geq 0$. Jika kurva dinyatakan dalam persamaan parametrik $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ di mana $\alpha \leq t \leq \beta$, maka kita dapat menghitung formula luas dengan menggunakan aturan substitusi integral yaitu $A = \int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)dt$.

Contoh Soal 3

Tentukan luas di bawah satu lengkungan sikloid $x = r(\theta - \sin\theta), y = r(1 - \cos\theta)$.
Jawab: Satu lengkungan sikloid diberikan oleh $0 \leq \theta \leq 2\pi$.. Dengan menggunakan aturan substitusi dengan $y = r(1 - \cos\theta)$ dan $dx = r(1 - \cos\theta)d\theta$, maka akan didapat:

$$A = \int_0^{2\pi r} y\,dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos\theta)\, r(1 - \cos\theta)\, d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2\, d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta$$

$$= r^2 \left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= r^2\left(\tfrac{3}{2} \cdot 2\pi\right) = 3\pi r^2$$

Latihan Soal

1. Buatlah sketsa kurva berikut, dan beri tanda panah yang menunjukkan arah membesarnya nilai t. Kemudian tentukan persamaan Cartesisusnya.
   a) $x = 2t + 4,\ y = t - 1$
   b) $x = 1 - 2t,\ y = t^2 + 4, 0 \le t \le 3.$
2. Tentukan persamaan Cartesius kurva berikut. Kemudian buatlah sketsanya dan beri tanda panah arah penelusuran kurva ketika nilai parameter naik.
   a) $x = \sqrt{t},\ y = 2 - t$
   b) $x = 2\cos\theta,\ y = \frac{1}{2}\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$
   c) $x = 2\cos\theta,\ y = \sin^2\theta$
   d) $x = \ln t,\ y = \sqrt{t}, t \ge 1$
3. Jelaskan pergerakan partikel dengan posisi (x, y) bila t berubah dalam selang yang diberikan.
   a) $x = 4 - 4t,\ y = 2t + 5, 0 \le t \le 2$
   b) $x = 2 + \cos t,\ y = 3 + \sin t, 0 \le t \le 2\pi$
4. Tentukan dy/dx dan d^2y/dx^2 dari persamaan parametrik berikut:
   a) $x = t - t^3, y = 2 - 5t$
   b) $x = t^4 - 1, y = t - t^2$
5. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva di titik yang terkait dengan nilai parameter yang diberikan:
   a) $x = 2t^2 + 1,\ y = \frac{1}{3}t^3 - t,\ t = 3$
   b) $x = \theta\sin\theta,\ y = \theta\cos\theta,\ \theta = \pi$
6. Tentukan titik pada kurva berikut di mana garis singgungnya horizontal atau vertikal. Gunakan analisis selang di mana kurva naik atau turun untuk membuat sketsa grafiknya.
   a) $x = t^3 - 3t,\ y = 3t^2 - 9$
   b) $x = t^3 - 3t^2, y = t^3 - 3t$
7. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva:
   a) $x = \cos t,\ y = e^t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, x = 0, y = 1$
   b) $x = t - \frac{1}{t}, y = t + \frac{1}{t}, y = 2.5$