Deret Pangkat

Responsi ke-6 Kalkulus II

Pengertian Deret Pangkat

Deret Pangkat memiliki bentuk sebagai berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Daerah Kekonvergenan (*The Convergence Set*)

Daerah kekonvergenan adalah himpunan bilangan real yang membuat deret pangkat menjadi konvergen. Daerah/ Himpunan kekonvergenan dari sebuah deret pangkat, yaitu $\sum a_n x^n$ selalu memenuhi salah satu interval dari ketiga tipe berikut ini:

(i) Titik tunggal yaitu $x = 0$

(ii) Sebuah interval $(-R, R)$ ditambah kemungkinan salah satu atau keduanya di ujung interval $[-R, R]$

(iii) Seluruh bilangan real

Pada (i), (ii), dan (iii), deret ini memiliki **jari-jari kekonvergenan** berturut-turut sebesar $0, R, \infty$

Contoh Soal

Carilah jari-jari kekonvergenan dan daerah kekonvergenan dari deret berikut ini.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

Jawab:

Pakai Uji Banding Mutlak.

Representasi Fungsi sebagai Deret Pangkat

Ingat kembali:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

Contoh Soal (Representasi Fungsi sebagai Deret Pangkat)

Ubahlah ekspresi berikut ini menjadi deret pangkat.

$$\frac{1}{x+2}$$

Deret Pangkat pada $x - a$

Deret ini memiliki bentuk sebagai berikut:

$$\sum a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$$

Secara khusus, himpunan kekonvergenan dari deret ini selalu memenuhi salah satu dari ketiga tipe interval berikut ini:

(i) Titik tunggal di $x = a$

(ii) Sebuah interval $(a-R, a+R)$ ditambah kemungkinan salah satu atau keduanya di ujung interval $[a-R, a+R]$

(iii) Seluruh bilangan real

Operasi pada Deret Pangkat

Turunan dan Integral Suku-per-Suku

Teorema: Misalkan $S(x)$ melambangkan jumlah dari deret pangkat pada sebuah interval I, yaitu: $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$

Maka, untuk x di dalam I, didapat:

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_x(a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \frac{1}{4} a_3 x^4 + \cdots$$

Contoh Soal

Tuliskan $\tan^{-1} x$ dalam deret pangkat!

Sekian dan Terimakasih