Math IPB

www.math.ipb.ac.id

Pertemuan ke-9:
IRISAN KERUCUT YANG DIGESER

Departemen Matematika
FMIPA IPB

Bogor, 2017

Irisan Kerucut yang Digeser

- Sejauh ini, kita meletakkan irisan kerucut pada sebuah sistem koordinat dalam kedudukan yang istimewa, yaitu sumbu panjangnya berimpit dengan salah satu sumbu koordinat, serta menggunakan titik asal $(0, 0)$ sebagai: puncak parabola, titik pusat elips, dan titik simetris hiperbola.
- Sekarang kita bahas persamaan irisan kerucut dengan kedudukan yang lebih umum, tetapi sumbu panjangnya masih sejajar dengan salah satu sumbu koordinat. Persamaan yang lebih umum ini dapat diperoleh dengan teknik penggeseran (translasi).

- Jika parabola $x^2 = 4py$ digeser ke kanan sejauh h dan digeser ke atas sejauh k, maka kita peroleh persamaan parabola dengan x dan y diganti berturut-turut $x - h$ dan $y - k$, yaitu: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.
- Dengan demikian, teorema awal dapat diperumum sebagai berikut.

Teorema

Parabola $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ *mempunyai fokus di* $(h, p+k)$ *dan direktriks* $y = k - p$. *Parabola* $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ *mempunyai fokus di* $(p+h, k)$ *dan direktriks* $x = h - p$.

- Perhatikan bahwa pada teorema awal puncak parabola berada di titik asal $(0,0)$, tetapi pada teorema yang lebih umum puncak parabola berada di titik (h,k).
- Jadi teorema awal adalah bentuk khusus dari teorema yang lebih umum, yaitu untuk kasus di mana $h = 0$ dan $k = 0$.
- Parabola pada teorema yang lebih umum dapat diperoleh dengan menggeser titik puncak parabola pada teorema awal dari titik asal $(0,0)$ ke titik (h,k).
- Oleh karena itu, parabola yang baru disebut *irisan kerucut yang digeser*.

Contoh

Tentukan persamaan parabola yang mempunyai fokus di $(3,2)$ *dan direktriks sumbu-*x*.*

- Pemikiran serupa diterapkan untuk elips.

Teorema

1. *Elips*
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1, \quad a \geq b > 0,$$
mempunyai fokus $(h \pm c, k)$ *dan titik puncak* $(h \pm a, k)$, *dengan* $c=\sqrt{a^2-b^2}$.
2. *Elips*
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1, \quad a \geq b > 0,$$
mempunyai fokus $(h, k \pm c)$ *dan titik puncak* $(h, k \pm a)$, *dengan* $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

- Perhatikan bahwa titik pusat elips pada teorema tersebut adalah di titik (h,k).

Contoh

Gambarlah grafik irisan kerucut

$$25y^2 + 9x^2 - 100y + 18x - 116 = 0,$$

dan tentukan titik-titik fokusnya.

- Untuk hiperbola kita peroleh teorema berikut.

Teorema

1. *Hiperbola*
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$
mempunyai fokus $(h \pm c, k)$ *dengan* $c^2 = a^2 + b^2$, *titik puncak* $(h \pm a, k)$, *dan asimtot* $y - k = \pm (b/a)(x-h)$.

2. *Hiperbola*
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$
mempunyai fokus $(h, k \pm c)$ *dengan* $c^2 = a^2 + b^2$, *titik puncak* $(h, k \pm a)$, *dan asimtot* $y - k = \pm (a/b)(x-h)$.

- Titik simetris hiperbola pada teorema tersebut adalah di titik (h, k).

Contoh

Gambarlah grafik irisan kerucut

$$16y^2 - 9x^2 - 32y - 18x - 137 = 0,$$

dan tentukan titik-titik fokusnya.

Bahan Responsi

Soal

Tentukan titik puncak, fokus, dan direktriks dari parabola berikut, serta gambarlah grafiknya.

1. $(x+2)^2 = 8(y-1)$.
2. $4x^2 + 16x - 16y + 32 = 0$.

Soal

Tentukan titik puncak, fokus, dan keeksentrikan dari elips berikut, serta gambarlah grafiknya.

1. $\dfrac{(x+3)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1.$
2. $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 1 = 0.$

Soal

Tentukan titik puncak, fokus, dan garis asimtot hiperbola berikut, serta gambarlah grafiknya.

1. $$\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1.$$
2. $9x^2 - 16y^2 + 54x + 64y - 127 = 0.$

Soal

Tentukan persamaan irisan kerucut berikut:

1. *Parabola dengan puncak di* $(2,3)$ *dan fokus di* $(2,5)$.
2. *Parabola dengan sumbu parabola vertikal, serta melalui titik* $(-2,3)$, $(0,3)$, *dan* $(1,9)$.

Soal

Tentukan persamaan irisan kerucut berikut:

1. *Elips mendatar dengan pusat di* $(5, 1)$, *sumbu mayor* 10 *dan sumbu minor* 8.
2. *Elips dengan fokus* $(\pm 2, 2)$ *dan yang melalui titik asal.*

Soal

Tentukan persamaan irisan kerucut berikut:

1. *Hiperbola dengan puncak di* $(0, 0)$ *dan* $(0, 6)$, *dan dengan sebuah fokus di* $(0, 8)$.

Tentang Slide

- Penyusun: Dosen Departemen Matematika FMIPA IPB
- Versi: 2017
- Media Presentasi: LaTeX - BEAMER (PDFLaTeX)