



Math IPB

www.math.ipb.ac.id

Pertemuan ke-13: SISTEM KOORDINAT DIMENSI TIGA, SILINDER DAN PERMUKAAN-PERMUKAAN KUADRIK

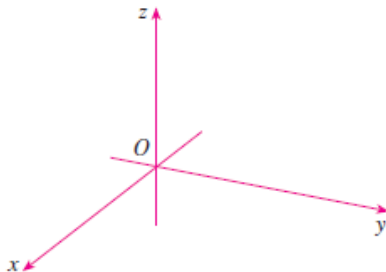
Departemen Matematika
FMIPA IPB

Bogor, 2017

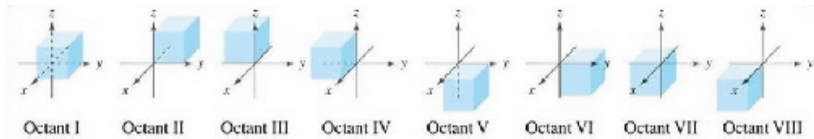
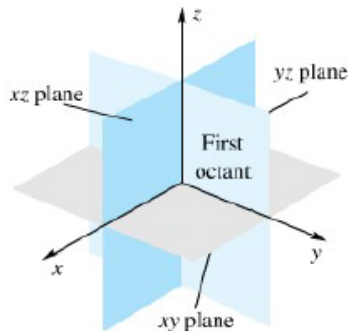
Koordinat Cartesius dalam Ruang Dimensi Tiga

- Kita telah mempelajari fungsi peubah tunggal, yaitu fungsi-fungsi yang grafiknya dapat digambarkan pada bidang (ruang dimensi dua).
- Selanjutnya, kita akan melangkah ke pembahasan *kalkulus peubah ganda*, yaitu kalkulus yang diterapkan pada fungsi dua peubah atau lebih.
- Semua pemikiran yang dikenal, seperti *limit*, *turunan*, *integral*, harus dijelajahi lagi dari perspektif yang lebih luas.
- Sebagai persiapan untuk membahas hal di atas, kita perlu membahas ruang dimensi tiga atau lebih. Namun kita mulai dulu dengan *ruang dimensi tiga*.

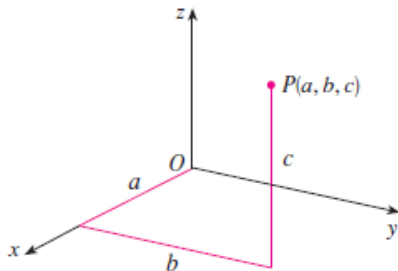
- Untuk memulai, kita buat tiga garis koordinat yang saling tegak lurus (sumbu-sumbu x , y , dan z) dengan titik-titik nolnya berada di titik O yang sama, yang kita sebut *titik asal*.
- Kita ikuti kesepakatan baku, yaitu sumbu- y positif ke arah kanan, sumbu- z positif ke arah atas dan sumbu- x positif ke arah kita.



- Ketiga sumbu tersebut menentukan tiga bidang, yaitu bidang-bidang yz , xz dan xy , yang membagi ruang menjadi delapan oktan.



- Terhadap setiap titik P dalam ruang, bilangan berurut ganda tiga (a, b, c) yang mengukur jarak berarah dari P ke ketiga bidang di atas, kita sebut *koordinat Cartesius* dari titik yang bersangkutan.



- **Jarak:** Misalkan $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah dua titik dalam ruang berdimensi tiga, dengan $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$, maka *jarak* P_1 dan P_2 dalam ruang dimensi tiga dapat ditentukan sebagai berikut

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

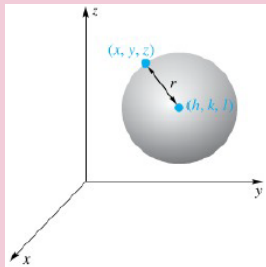
Contoh

Gambarlah dua titik $P_1(1, 2, -2)$ dan $P_2(-1, 6, 2)$ dalam ruang dimensi tiga serta tentukan jaraknya.

Bola dan Persamaannya

Definisi

Dalam ruang dimensi tiga, bola didefinisikan sebagai himpunan titik-titik dengan jarak (jari-jari, radius) konstan dari suatu titik tetap P (pusat bola).



- Berdasarkan definisi di atas, maka kita peroleh persamaan baku suatu bola dengan pusat $P(h, k, l)$ dan jari-jari r adalah

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2.$$

Contoh

Tentukan pusat dan jari-jari bola yang memiliki persamaan

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 10y - 12z + 68 = 0.$$

- Akibat sederhana lainnya dari rumus jarak adalah *titik tengah*.
- Jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah titik-titik ujung suatu ruas garis, maka koordinat dari titik tengahnya adalah $M(m_1, m_2, m_3)$ dengan

$$m_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad m_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad m_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Contoh

Tentukan persamaan bola yang garis tengahnya berupa ruas garis yang menghubungkan titik $(1, 4, -3)$ dan $(5, 2, 1)$.

Grafik dalam Ruang Dimensi Tiga

- Grafik yang relatif sederhana dalam ruang dimensi tiga adalah grafik *persamaan linear* yang menyatakan suatu bidang.
- Secara umum, grafik ini berbentuk

$$Ax + By + Cz = D.$$

Contoh

Gambarlah grafik dari persamaan berikut:

1 $z = 2,$

2 $3x + 4y = 12,$

3 $2x + 3y + 4z = 12.$

- Agar dapat menggambar grafik sebuah permukaan, adalah bermanfaat jika kita tentukan kurva perpotongan antara permukaan itu dengan bidang-bidang yang sejajar bidang-bidang koordinat.
- Kurva-kurva ini disebut *jejak* atau *penampang melintang* permukaan.

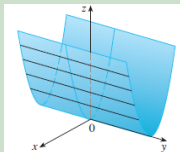
Silinder

Definisi

Silinder adalah permukaan yang terdiri atas semua garis (disebut kuasa) yang sejajar terhadap suatu garis yang diberikan dan menembus kurva bidang yang diberikan.

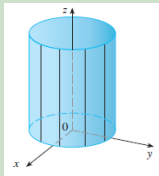
Contoh

$z = x^2$ adalah silinder parabolik.



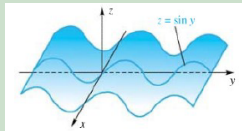
Contoh

1 $x^2 + y^2 = 1$ adalah silinder lingkaran.



2 $\frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ adalah silinder elips, sedangkan $\frac{x^2}{4} - y^2 = 4$ adalah silinder hiperbola.

3 $z = \sin y$ juga suatu silinder.



Permukaan Kuadrik

- Permukaan kuadrik adalah grafik dari persamaan derajat dua dalam tiga variabel x , y , dan z .
- Bentuk paling umum dari persamaan ini adalah

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

dengan A, B, C, \dots, J adalah konstanta.

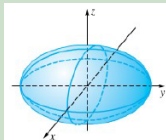
- Namun, melalui penggeseran (translasi) dan pemutaran (rotasi) persamaan di atas dapat diubah ke salah satu dari bentuk baku

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J &= 0, \text{ atau} \\ Ax^2 + By^2 + Iz &= 0. \end{aligned}$$

Contoh

Beberapa contoh permukaan kuadrik adalah:

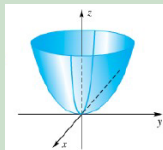
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$, yang disebut elipsoid.



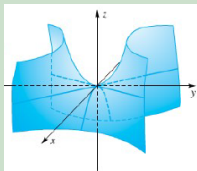
Contoh

Beberapa contoh permukaan kuadrik adalah:

1 $z = 4x^2 + y^2$, disebut paraboloid eliptik.



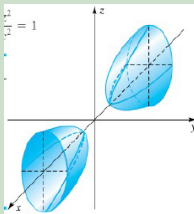
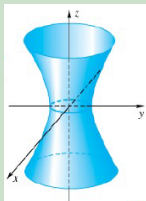
2 $z = y^2 - x^2$, disebut paraboloid hiperbolik.



Contoh

Beberapa contoh permukaan kuadrik adalah:

$\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$, hiperboloid lembar satu, sedangkan
 $-\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$, hiperboloid lembar dua.



Soal

Tentukan jarak antara tiap pasang titik berikut:

- 1 $(6, -2, 1)$ dan $(2, 3, 6)$.
- 2 $(-1, 3, 2)$ dan $(4, 0, -5)$.

Soal

Tentukan persamaan bola yang pusat dan jari-jarinya sebagai berikut:

- 1 Pusat $(1, -2, 3)$, jari-jari 3.
- 2 Pusat $(4, 0, -2)$, jari-jari $\sqrt{8}$.

Soal

Tentukan pusat dan jari-jari bola yang persamaannya diberikan oleh:

1 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 10z + 34 = 0$

2 $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 8y + 16z - 13 = 0.$

Soal

Buatlah sketsa grafik persamaan berikut:

1 $y = 3$

2 $2y + 3z = 6$

3 $3x - 4y + 2z = 24$

4 $x^2 + y^2 + z^2 = 9.$

Soal

Perlihatkan bahwa $(4,5,2)$, $(1,7,3)$, dan $(2,4,5)$ merupakan titik-titik sudut suatu segitiga sama sisi.

Soal

Perlihatkan bahwa $(1,0,5)$, $(3,6,8)$, dan $(7,4,-7)$ merupakan titik-titik sudut suatu segitiga siku-siku.

Soal

Tentukan persamaan bola yang garis tengahnya berupa ruas garis yang menghubungkan titik $(-2, 3, 6)$ dan $(4, -1, 5)$.

Soal

Tentukan persamaan bola dengan pusat $(2, 2, 4)$ dan menyinggung bidang $x + y = 8$.

Soal

Bola $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 10$ memotong bidang $z = 2$ dalam sebuah lingkaran. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran tersebut.

Soal

Deskripsikan dan buat sketsa permukaan berikut:

1 $4x^2 + z^2 = 4$

2 $z = 4 - y^2$

3 $z = \cos x$

4 $x^2 - y^2 = 1.$

Soal

Tentukan jejak dari permukaan yang diberikan di bidang $x = k$, $y = k$, $z = k$. Kemudian identifikasi permukaan tersebut dan buatlah sketsanya.

1 $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$

2 $x = z^2 + y^2$

3 $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

4 $y = z^2 - x^2$

5 $4z^2 - x^2 - y^2 = 4$

6 $16x^2 = y^2 + 4z^2$.

Soal

Ubah persamaan berikut ke salah satu bentuk baku, tentukan jenis permukaannya, dan buatlah sketsanya.

1 $z^2 = 4x^2 + 3y^2 - 12.$

2 $z = x^2 + y^2 - 1.$

3 $x^2 + y^2 - 4z^2 + 4x - 6y - 8z = 13.$

4 $9x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0.$

- Penyusun: Dosen Departemen Matematika FMIPA IPB
- Versi: 2017
- Media Presentasi: \LaTeX - BEAMER (PDF \LaTeX)