MAT211 Kalkulus II
R3 - Barisan Takhingga

TBK (AKT)
IPB University

September 3, 2021

1. Selesaikan soal-soal berikut:

   (a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

   $$2, \left(\tfrac{3}{2}\right)^2, \left(\tfrac{4}{3}\right)^3, \left(\tfrac{5}{4}\right)^4, \ldots.$$

   (b) Buktikan (dengan definisi limit): Jika $\{a_n\}$ konvergen maka $\{a_n\}$ terbatas.
   Misalkan $\{a_n\}$ konvergen ke L, yaitu

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

   Dalam bahasa definisi limit, untuk setiap $\varepsilon > 0$ selalu dapat ditemukan $N > 0$ sehingga untuk $n > N$ berlaku

   $$|a_n - L| < \varepsilon.$$

   Selanjutnya diperoleh:

   $$\begin{aligned} |a_n| &= |a_n - L + L| \\ &\leq |a_n - L| + |L| \text{ (ini disebut ketaksamaan segitiga)} \\ &< \varepsilon + |L|, \text{ untuk } n > N. \end{aligned}$$

   Definisikan:

   $$K = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N, \varepsilon + |L|\},$$

   maka dapat disimpulkan

   $$|a_n| \leq K, \text{ untuk semua } n \in \mathbb{N}.$$

   Jadi terbukti $\{a_n\}$ terbatas.

   (c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

   $$a_n = n + \frac{2}{n}$$

   Kemonotonan:

   $$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(n + 1 + \frac{2}{n+1}\right) - \left(n + \frac{2}{n}\right) \\ &= \frac{n^2 + n - 2}{n\,(n+1)}. \end{aligned}$$

Karena penyebut selalu bernilai positif untuk semua n, maka tanda dari $a_{n+1} - a_n$ ditentukan oleh tanda pembilang:

$$n^2 + n - 2 = (n + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{9}{4} \text{ (melengkapkan kuadrat).}$$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} n \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad n + \tfrac{1}{2} \geq \tfrac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad (n + \tfrac{1}{2})^2 \geq \tfrac{9}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad (n + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{9}{4} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad n^2 + n - 2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dari sini dapat disimpulkan

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n,$$

yaitu $\{a_n\}$ tak-turun untuk $n \geq 1$. Namun demikian dapat dilihat bahwa

$$a_{n+1} > a_n, \; n = 2, 3, 4, \ldots,$$

sehingga $\{a_n\}$ naik untuk $n \geq 2$.
Keterbatasan:

- Karena $\{a_n\}$ tak-turun maka $\{a_n\}$ terbatas di bawah, dengan batas bawah:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \frac{2}{1} = 3, \\ a_2 &= 2 + \frac{2}{2} = 3. \end{aligned}$$

- Karena

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(n + \frac{2}{n} \right) = \infty$$

maka $\{a_n\}$ tidak terbatas di atas.

2. Selesaikan soal-soal berikut:

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$\cos \pi, \frac{\cos 2\pi}{4}, \frac{\cos 3\pi}{9}, \frac{\cos 4\pi}{16}, \ldots.$$

(b) Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B. Buktikan (dengan definisi limit) $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke $A + B$.

- Karena $\{a_n\}$ konvergen ke A maka $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, dengan kata lain: untuk setiap $\varepsilon > 0$ selalu dapat ditemukan $N_1 > 0$ sedemikian sehingga untuk $n > N_1$ berlaku

$$|a_n - A| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Catatan: Karena $\varepsilon > 0$ sembarang, maka $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ juga sembarang. Jadi di sini kita dibolehkan untuk menulis $\frac{1}{2}\varepsilon$ di ruas kanan.

- Karena $\{b_n\}$ konvergen ke B maka $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, dengan kata lain: untuk setiap $\varepsilon > 0$ selalu dapat ditemukan $N_2 > 0$ sedemikian sehingga untuk $n > N_2$ berlaku

$$|b_n - B| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

- Pilih $N = \max\{N_1, N_2\}$. Diperoleh:

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (A+B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| \text{ (ketaksamaan segitiga)} \\ &< \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

- Terbukti bahwa $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$.

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \sin\frac{n\pi}{4}.$$

3. Selesaikan soal-soal berikut:

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \ldots.$$

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{n+3}{3n-2}.$$

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{n!}{10^n}.$$

Kemonotonan:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\frac{10^n}{n!} = \frac{n+1}{10},$$

sehingga

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 &\quad : \quad \{a_n\} \text{ tak-naik untuk } n = 1, 2, \ldots, 9, \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 &\quad : \quad \{a_n\} \text{ naik untuk } n = 10, 11, \ldots. \end{aligned}$$

Keterbatasan:

- Karena $\{a_n\}$ tak-naik untuk $n = 1, 2, \ldots, 9$, yaitu

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_9,$$

maka $a_9 = \frac{9!}{10^9} \approx 3.6288 \times 10^{-4}$ merupakan batas bawah. Karena $a_{10} = \frac{10!}{10^{10}} = \frac{9!}{10^9}$, maka a_{10} juga merupakan batas bawah.

- Perhatikan:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{10^n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 10\cdot 10\cdot\cdots\cdot 10} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{10}\cdot\frac{n-1}{10}\cdot\frac{n-2}{10}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{10} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan, $\{a_n\}$ tidak terbatas di atas.

4. Selesaikan soal-soal berikut:

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots.$$

Rumus eksplisit:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Kekonvergenan:

$$-1 \leq (-1)^{n+1} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{n} < \frac{1}{n}.$$

Karena $\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, maka menurut teorema apit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0.$$

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{3 - 8\cdot 2^n}{5 + 4\cdot 2^n}.$$

- Diperoleh:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3 - 8\cdot 2^n}{5 + 4\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2^n} - 8}{\frac{5}{2^n} + 4} = \frac{0 - 8}{0 + 4} = -2.$$

- Diperoleh: $L = -2$.
- Misal $\varepsilon > 0$ diberikan (sembarang tetapi cukup kecil).
- Pilih $N = \frac{\ln(\frac{13}{\varepsilon} - 5) - \ln 4}{\ln 2}$ atau $2^N = \frac{\frac{13}{\varepsilon} - 5}{4}$
- Untuk $n > N > 0$ diperoleh

$$\begin{aligned}
|a_n - L| &= \left|\frac{3 - 8\cdot 2^n}{5 + 4\cdot 2^n} + 2\right| \\
&= \left|\frac{3 - 8\cdot 2^n + 2(5 + 4\cdot 2^n)}{5 + 4\cdot 2^n}\right| \\
&= \frac{13}{5 + 4\cdot 2^n} \\
&< \frac{13}{5 + 4\cdot 2^N} \\
&= \frac{13}{5 + 4(\frac{\frac{13}{\varepsilon} - 5}{4})} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

- Catatan: dalam analisis pendahuluan diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{13}{5 + 4\cdot 2^N} = \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{13}{\varepsilon} = 5 + 4\cdot 2^N \\
&\Leftrightarrow \quad 2^N = \frac{\frac{13}{\varepsilon} - 5}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad N\ln 2 = \ln(\tfrac{13}{\varepsilon} - 5) - \ln 4 \\
&\Leftrightarrow \quad N = \frac{\ln(\frac{13}{\varepsilon} - 5) - \ln 4}{\ln 2}.
\end{aligned}$$

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{\ln n}{n}.$$

Kemonotonan:
Definisikan fungsi a dengan $a(x) = \frac{\ln x}{x}$, dengan $x > 0$, sehingga

$$a'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} a'(x) &< 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln e < \ln x \Leftrightarrow e < x : a \text{ turun pada } (e, \infty), \\ a'(x) &> 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln e > \ln x \Leftrightarrow e > x : a \text{ naik pada } (0, e). \end{aligned}$$

Oleh karena itu:

$$\begin{aligned} \{a_n\} \text{ naik pada } n = & \quad 1, 2, \\ \{a_n\} \text{ turun pada } n = & \quad 3, 4, ... \end{aligned}$$

Secara umum $\{a_n\}$ bukan barisan monoton pada $\mathbb{N}$.
Keterbatasan:
Diperoleh:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\ln 1}{1} = 0, \\ a_2 &= \frac{\ln 2}{2} \approx 0.34657, \\ a_3 &= \frac{\ln 3}{3} \approx 0.3662, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} &=_H \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \end{aligned}$$

maka $\{a_n\}$ terbatas di bawah oleh 0 dan terbatas di atas oleh a_3.

5. Selesaikan soal-soal berikut:

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$\sin \tfrac{1}{2}\pi, \sin \pi, \sin \tfrac{3}{2}\pi, \sin 2\pi, \sin \tfrac{5}{2}\pi, ...$$

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{3 - 4n}{2n - 1}.$$

- Misal $\varepsilon > 0$ diberikan.
- Analisis pendahuluan:

$$|a_n - L| = \left| \frac{3 - 4n}{2n - 1} - (-2) \right| = \left| \frac{1}{2n - 1} \right| = \frac{1}{2n - 1}.$$

Untuk $n > N$ berlaku

$$\frac{1}{2n - 1} < \frac{1}{2N - 1} = \varepsilon.$$

$$\frac{1}{2N - 1} = \varepsilon \Leftrightarrow 2N - 1 = \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow N = \frac{\frac{1}{\varepsilon} + 1}{2} = \frac{1 + \varepsilon}{2\varepsilon}.$$

- Pilih $N = \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$
- Untuk $n > N$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
|a_n - L| &= \left|\frac{3-4n}{2n-1} - (-2)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2n-1}\right| \\
&= \frac{1}{2n-1} \\
&< \frac{1}{2N-1} \\
&= \frac{1}{2\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} - 1} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \tfrac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1}).$$

Kemonotonan:
Karena $(-1)^{n+1} = 1$ untuk n ganjil dan $(-1)^{n+1} = -1$ untuk n genap, maka

$$\{a_n\} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, ...\},$$

sehingga $\{a_n\}$ bukan merupakan barisan monoton pada $\mathbb{N}$.
Keterbatasan:
Jelas $\{a_n\}$ terbatas di bawah oleh 0 dan terbatas di atas oleh 1.
Kekonvergenan:

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1}) \text{ tidak ada (divergen).}$$

6. Selesaikan soal-soal berikut:

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, ...$$

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{1-3n}{n+5}.$$

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{2^n}{n!}.$$

7. Selesaikan soal-soal berikut:

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$4, 2, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{180}, ...$$

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \sqrt[n]{n}.$$

Kemonotonan:
Definisikan fungsi a dengan $a(x) = \sqrt[x]{x} = x^{1/x}$ dengan $x > 0$, sehingga

$$\begin{aligned}
\ln a(x) &= \frac{\ln x}{x} \\
\frac{a'(x)}{a(x)} &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \\
a'(x) &= x^{1/x}\frac{1 - \ln x}{x^2}.
\end{aligned}$$

Karena $x^{1/x} > 0$ maka tanda $a'(x)$ lagi-lagi ditentukan oleh tanda $1 - \ln x$ (seperti pada soal no. 4), sehingga

$$\begin{aligned}
\{a_n\} \text{ naik pada } n = &\ 1, 2, \\
\{a_n\} \text{ turun pada } n = &\ 3, 4, ...
\end{aligned}$$

Keterbatasan:
Diperoleh

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1, \\
a_2 &= \sqrt{2} \approx 1.4142, \\
a_3 &= \sqrt[3]{3} \approx 1.4422, \\
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1 \text{ (gunakan aturan l'Hopital)},
\end{aligned}$$

maka $\{a_n\}$ terbatas di bawah oleh $a_1 = 1$ dan terbatas di atas oleh $a_3 = \sqrt[3]{3}$.

8. Selesaikan soal-soal berikut:

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, ...$$

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{1 + 2 \cdot 10^n}{5 + 3 \cdot 10^n}.$$

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{3n}{n + 2}.$$

9. Selesaikan soal-soal berikut:

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$1, \frac{5}{3}, \frac{10}{4}, \frac{17}{5}, \frac{26}{6}, \ldots.$$

(b) Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B. Buktikan (dengan definisi limit) $\{a_n b_n\}$ konvergen ke AB.

- Karena $\{a_n\}$ konvergen, maka $\{a_n\}$ terbatas, yaitu

$$|a_n| \leq K.$$

- Karena $\{a_n\}$ konvergen ke A maka $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, dengan kata lain: untuk setiap $\varepsilon > 0$ selalu dapat ditemukan $N_1 > 0$ sedemikian sehingga untuk $n > N_1$ berlaku

$$|a_n - A| < \tfrac{1}{2|B|}\varepsilon.$$

Catatan: Karena $\varepsilon > 0$ sembarang, maka $\frac{1}{2|B|}\varepsilon > 0$ juga sembarang. Jadi di sini kita dibolehkan untuk menulis $\frac{1}{2|B|}\varepsilon$ di ruas kanan.

- Karena $\{b_n\}$ konvergen ke B maka $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, dengan kata lain: untuk setiap $\varepsilon > 0$ selalu dapat ditemukan $N_2 > 0$ sedemikian sehingga untuk $n > N_2$ berlaku

$$|b_n - B| < \tfrac{1}{2K}\varepsilon.$$

- Pilih $N = \max\{N_1, N_2\}$. Diperoleh:

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - AB| &= |a_n(b_n - B) + B(a_n - A)| \\
&\leq |a_n(b_n - B)| + |B(a_n - A)| \quad \text{(ketaksamaan segitiga)} \\
&= |a_n|\,|b_n - B| + |B|\,|a_n - A| \\
&\leq K\,|b_n - B| + |B|\,|a_n - A| \\
&< K \cdot \tfrac{1}{2K}\varepsilon + |B|\,\tfrac{1}{2|B|}\varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

- Terbukti bahwa $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$.

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Kekonvergenan:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Kemonotonan:
Bentuk di atas agak sulit ditentukan tandanya:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}, \\
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}},
\end{aligned}$$

Tetapi, dapat ditulis:

$$a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Selanjutnya diperoleh, untuk $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+2} &> \sqrt{n} \\ \sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} &> \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \\ \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} &< \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\ a_{n+1} &< a_n. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa $\{a_n\}$ barisan turun.

Keterbatasan:

Karena $\{a_n\}$ barisan turun maka $\{a_n\}$ terbatas di atas oleh $a_1 = \sqrt{2} - 1$. Karena $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ maka $\{a_n\}$ terbatas di bawah oleh 0.

10. Selesaikan soal-soal berikut:

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$0.1, 0.11, 0.111, 0.1111, \ldots.$$

Oleh Kelompok 10, rumus eksplisit dituliskan sebagai:

$$a_n = \frac{1}{10^n} \cdot \frac{10^n - 1}{9}.$$

Benar. Namun akan lebih cantik bila dituliskan sebagai:

$$a_n = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

Dengan bentuk ini mudah dihitung limitnya:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{9}.$$

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{1}{n^3}.$$

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{2^n}{3^n - 4}.$$

Kemonotonan:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-4} - \frac{2^n}{3^n-4} \\
&= \frac{2^{n+1}(3^n-4) - 2^n(3^{n+1}-4)}{(3^{n+1}-4)(3^n-4)} \\
&= \frac{2 \cdot 2^n(3^n-4) - 2^n(3 \cdot 3^n - 4)}{(3^{n+1}-4)(3^n-4)} \\
&= \frac{2 \cdot 2^n 3^n - 8 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^n 3^n + 4 \cdot 2^n)}{(3^{n+1}-4)(3^n-4)} \\
&= \frac{-4 \cdot 2^n - 2^n 3^n}{(3^{n+1}-4)(3^n-4)} \\
&= \frac{-2^n(4+3^n)}{(3 \cdot 3^n - 4)(3^n-4)}.
\end{aligned}$$

Pembilang jelas bernilai negatif untuk semua n bilangan asli. Jika $n = 1$ maka $3^n - 4 < 0$ dan $3 \cdot 3^n - 4 > 0$, sehingga

$$a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n \text{ (naik).}$$

Untuk $n \geq 2$ diperoleh $3^n - 4 > 0$ dan $3 \cdot 3^n - 4 > 0$, sehingga

$$a_{n+1} - a_n < 0 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n \text{ (turun).}$$

Keterbatasan:
Karena

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{3-4} = -2, \\
a_2 &= \frac{2^2}{3^2-4} = \frac{4}{5}, \\
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n-4} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{2}{3})^n}{1 - \frac{4}{3^n}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

maka $\{a_n\}$ terbatas di bawah oleh $a_1 = -2$ dan terbatas di atas oleh $a_2 = \frac{4}{5}$.