Departemen Matematika FMIPA IPB

UJIAN AKHIR SEMESTER GANJIL 2014/2015

Kode - Nama MK : **MAT211 - Kalkulus II**
Hari/Tanggal : **Jumat/9 Januari 2015**
Waktu : **2 Jam**
Sifat Ujian : **Catatan Tertutup**

Selesaikan ke-10 soal berikut **secara berurutan** dengan **jujur**, **teliti**, dan **sepenuh kemampuan**. Segala bentuk kecurangan bersanksi akademik. Nilai maksimum setiap soal adalah 10.

1. Diberikan suatu barisan

$$c_n = (-1)^n \frac{(n-1)}{n},$$

untuk $n \geq 1$.

(a) Tentukan lima suku pertama.

(b) Tentukan apakah barisan tersebut konvergen atau divergen.

$\boxed{\text{Jawab}}$

(a)

$$\begin{aligned} c_1 &= (-1)^1 \frac{(0)}{1} = 0 \\ c_2 &= (-1)^2 \frac{(1)}{2} = \frac{1}{2} \\ c_3 &= (-1)^3 \frac{(2)}{3} = -\frac{2}{3} \\ c_4 &= (-1)^4 \frac{(3)}{4} = \frac{3}{4} \\ c_5 &= (-1)^5 \frac{(4)}{5} = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

(b) Barisan tersebut divergen.

2. Tentukan apakah deret berikut konvergen atau divergen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2^k}\right).$$

$\boxed{\text{Jawab}}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

merupakan deret-p dengan $p = 2 > 1$, maka deret tersebut konvergen.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

merupakan deret geometri dengan $a = \dfrac{1}{2}$ dan $r = \dfrac{1}{2}$, $|r| < 1$, maka deret tersebut konvergen.
Jadi,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2^k}\right)$$

konvergen.

3. Tentukan kekonvergenan deret berikut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4^n - n^4)}{n!}.$$

$\boxed{\text{Jawab}}$

Perhatikan deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}.$$

(Uji Hasil bagi) Misalkan $a_n = \dfrac{4^n}{n!}$, maka

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{4^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n 4}{(n+1)\, n!} \frac{n!}{4^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{(n+1)} \\
&= 0 < 1,
\end{aligned}$$

sehingga berdasarkan uji hasil bagi, deret tersebut konvergen. Kemudian, perhatikan deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}.$$

(Uji Hasil Bagi) Misalkan $b_n = \dfrac{n^4}{n!}$, maka

$$\begin{aligned}
\rho_2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{(n+1)!} \frac{n!}{n^4} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{(n+1)\, n!} \frac{n!}{n^4} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{n^5 + n^4} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n^3} + \frac{4}{n^4} + \frac{1}{n^5}}{1 + \frac{1}{n}} \\
&= 0 < 1,
\end{aligned}$$

sehingga berdasarkan uji hasil bagi, deret tersebut konvergen. Jadi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4^n - n^4)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4^n}{n!} - \frac{n^4}{n!} \right)$$

konvergen.

4. Tentukan apakah deret berikut konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen

$$\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}-2}.$$

$\boxed{\text{Jawab}}$

(Uji Banding) Misalkan $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}-2}$. Untuk $n \geq 5$,

$$\begin{aligned} \sqrt{n}-2 &\leq \sqrt{n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}-2} &\geq \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Deret

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

merupakan deret-p dengan $p = \dfrac{1}{2} \leq 1$, maka deret tersebut divergen, sehingga berdasarkan uji banding, deret

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-2}$$

divergen. (Uji Deret Ganti Tanda) Untuk $n \geq 5$,

$$\begin{aligned} \sqrt{n} &< \sqrt{n+1} \\ \sqrt{n}-2 &< \sqrt{n+1}-2 \\ \frac{1}{\sqrt{n}-2} &> \frac{1}{\sqrt{n+1}-2} \geq 0 \\ a_n &> a_{n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Kemudian,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-2} = 0,$$

sehingga berdasarkan uji deret ganti tanda, deret

$$\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}-2}$$

konvergen. Jadi, deret

$$\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}-2}$$

konvergen bersyarat.

5. Tentukan selang kekonvergenan deret pangkat

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^n}{n3^n}.$$

$\boxed{\text{Jawab}}$

(Uji Hasil bagi Mutlak) Misalkan $u_n(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{(2x)^n}{n3^n}$, maka

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(2x)^{n+1}\right|}{(n+1)\,3^{n+1}} \frac{n3^n}{|(2x)^n|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n 2\,|x|^n\,|x|}{(n+1)\,3^n 3} \frac{n3^n}{2^n\,|x|^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n\,|x|}{3n+3} \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+3} \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+\frac{3}{n}} \\
&= \frac{2}{3}\,|x|\,.
\end{aligned}$$

Deret konvergen jika

$$\begin{aligned}
\rho &< 1 \\
\frac{2}{3}\,|x| &< 1 \\
|x| &< \frac{3}{2} \\
-\frac{3}{2} &< x < \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Untuk $x = -\dfrac{3}{2}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^n}{n3^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(2\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^n}{n3^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n\,(3)^n}{n3^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

divergen karena deret tersebut merupakan negatif dari deret harmonik.

Untuk $x = \dfrac{3}{2}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^n}{n3^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(2\left(\frac{3}{2}\right)\right)^n}{n3^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(3)^n}{n3^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

konvergen bersyarat karena deret tersebut merupakan deret harmonik ganti tanda. Jadi, selang kekonvergenannya adalah $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$.

6. Nyatakan

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

sebagai deret pangkat dan tentukan selang kekonvergenannya.

$\boxed{\text{Jawab}}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right) \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n. \end{aligned}$$

Selang kekonvergenannya sama dengan selang kekonvergenan deret $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, yaitu $(-1, 1)$.

7. Tentukan deret Maclaurin untuk fungsi f dengan

$$f(x) = 5^x$$

hingga suku dengan x^3.

$\boxed{\text{Jawab}}$

Deret Maclaurin:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{6} x^3 + \cdots .$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 5^x \Rightarrow f(0) = 1. \\
f'(x) &= 5^x \ln 5 \Rightarrow f'(0) = \ln 5. \\
f''(x) &= 5^x (\ln 5)^2 \Rightarrow f''(0) = (\ln 5)^2 . \\
f'''(x) &= 5^x (\ln 5)^3 \Rightarrow f'''(0) = (\ln 5)^3 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{6} x^3 + \cdots \\
= \; & 1 + (\ln 5)\, x + \frac{(\ln 5)^2}{2} x^2 + \frac{(\ln 5)^3}{6} x^3 + \cdots \\
= \; & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 5)^n}{n!} x^n .
\end{aligned}$$

8. Diketahui diameter dari sebuah bola berupa ruas garis yang menghubungkan titik $(1,0,3)$ dan titik $(5,4,11)$.

   (a) Tentukan titik pusat dan jari-jari bola tersebut.

   (b) Tentukan persamaan bola tersebut.

   $\boxed{\text{Jawab}}$

   (a) Titik pusat:

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{3+11}{2}\right) = (3,2,7).$$

   Jari-jari:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(5-3)^2+(4-2)^2+(11-7)^2} \\ &= \sqrt{2^2+2^2+4^2} \\ &= \sqrt{4+4+16} \\ &= \sqrt{24} \\ &= 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

   (b) Persamaan bola:

$$\begin{aligned} (x-3)^2+(y-2)^2+(z-7)^2 &= 24 \\ x^2-6x+9+y^2-4y+4+z^2-14z+49 &= 24 \\ x^2+y^2+z^2-6x-4y-14z+38 &= 0 \end{aligned}$$

9. Carilah persamaan dalam koordinat bola dari persamaan dalam koordinat kartesius berikut

$$2x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 10.$$

Jawab

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 - 4z^2 &= 10 \\ x^2 + y^2 - 2z^2 &= 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2 &= 5 \\ \rho^2 - 3\rho^2 \cos^2 \phi &= 5 \end{aligned}$$

10. Carilah persamaan dalam koordinat bola dari persamaan dalam koordinat silinder berikut

$$r^2 + 2z^2 = 4.$$

Jawab

$$\begin{aligned} r^2 + 2z^2 &= 4 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 &= 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 + z^2 &= 4 \\ \rho^2 + \rho^2 \cos^2 \phi &= 4 \end{aligned}$$