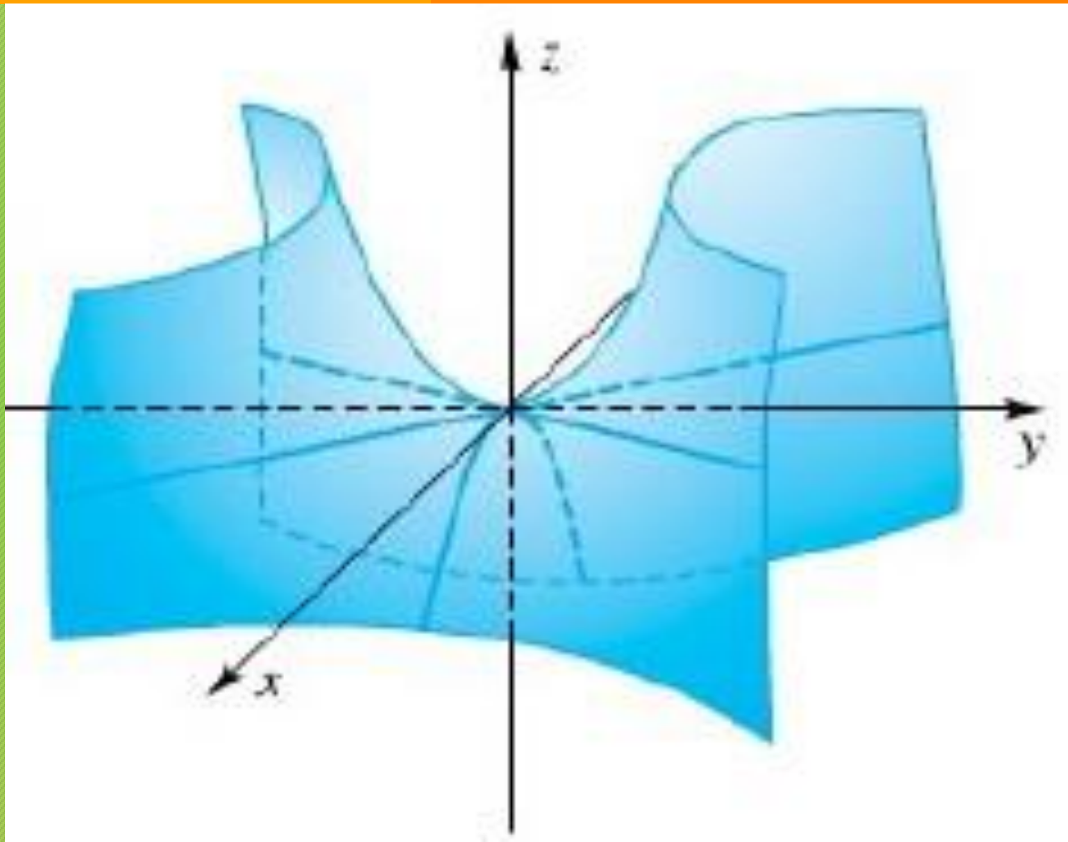
Math IPB
www.math.ipb.ac.id

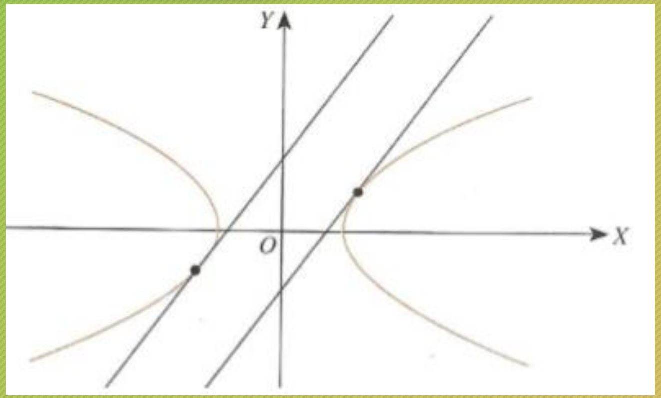
Pertemuan ke-13

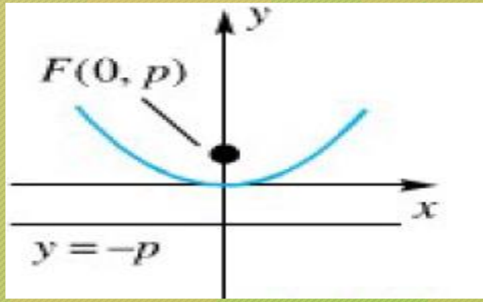
SISTEM KOORDINAT DIMENSI TIGA, SILINDER DAN PERMUKAAN-PERMUKAAN KUADRIK

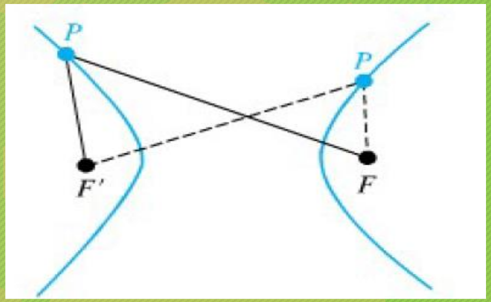


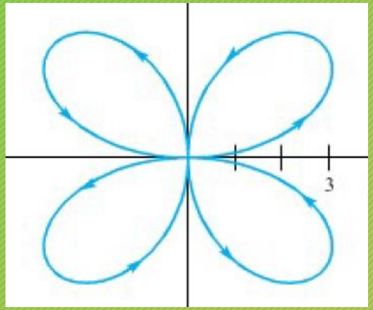
Apa yang sudah dipelajari sebelumnya?

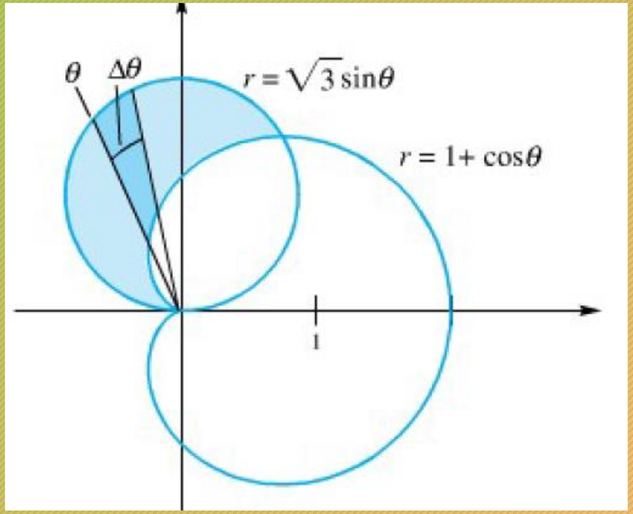
Kita telah mempelajari fungsi peubah tunggal, yaitu fungsi-fungsi yang grafiknya dapat digambarkan pada bidang (ruang dimensi dua).

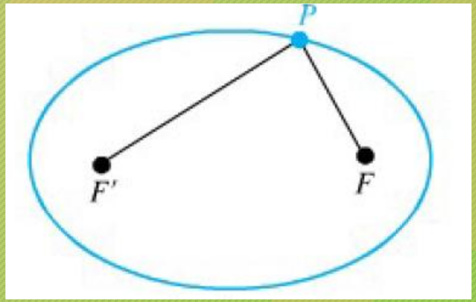


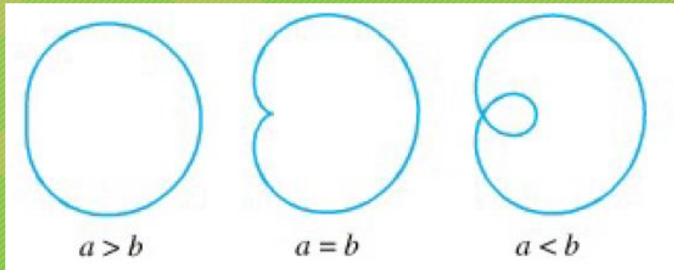


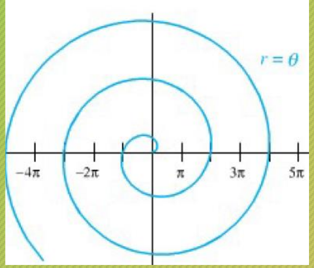












Koordinat Cartesius dalam Ruang Dimensi Tiga

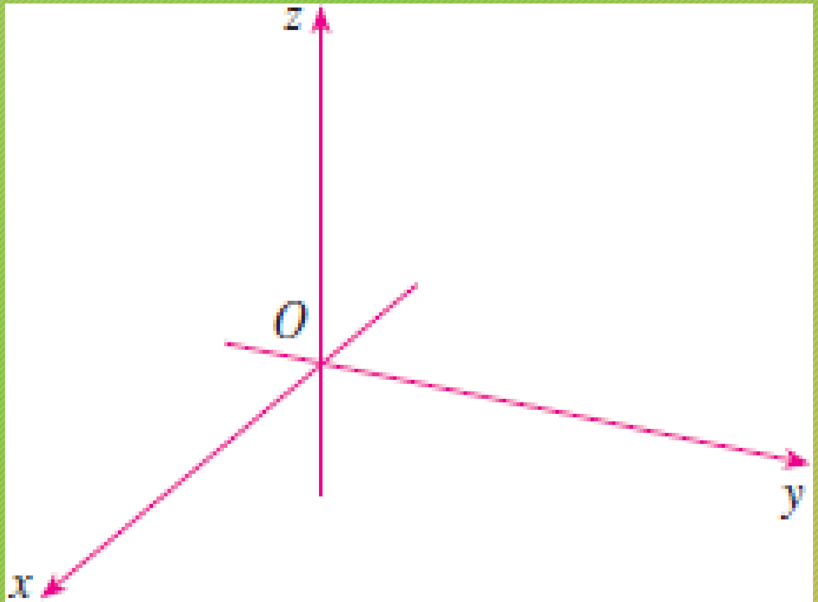
Selanjutnya, kita akan melangkah ke pembahasan kalkulus peubah ganda, yaitu kalkulus yang diterapkan pada fungsi dua peubah atau lebih.

Sebagai persiapan untuk membahas hal di atas, kita perlu membahas ruang dimensi tiga atau lebih. Namun kita mulai dulu dengan ruang dimensi tiga.

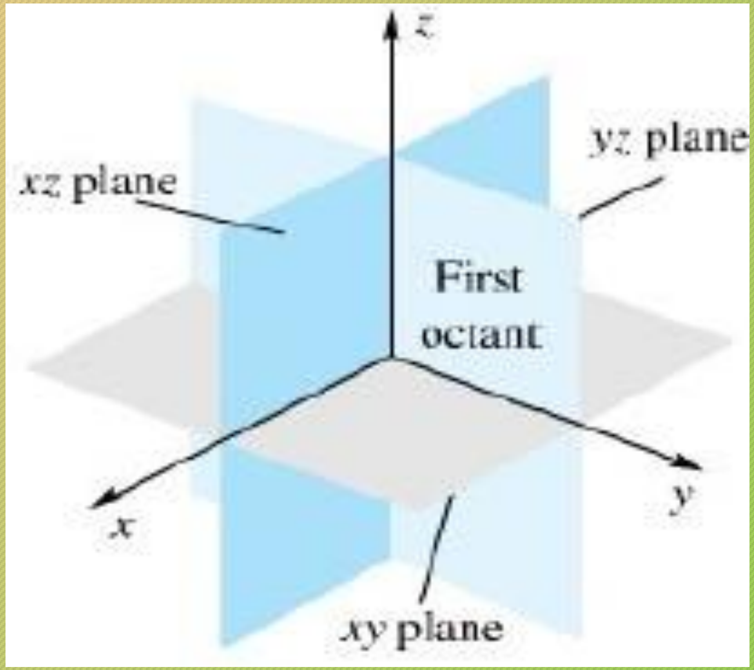
Semua pemikiran yang dikenal, seperti *limit, turunan, integral*, harus dijelajahi lagi dari perspektif yang lebih luas.

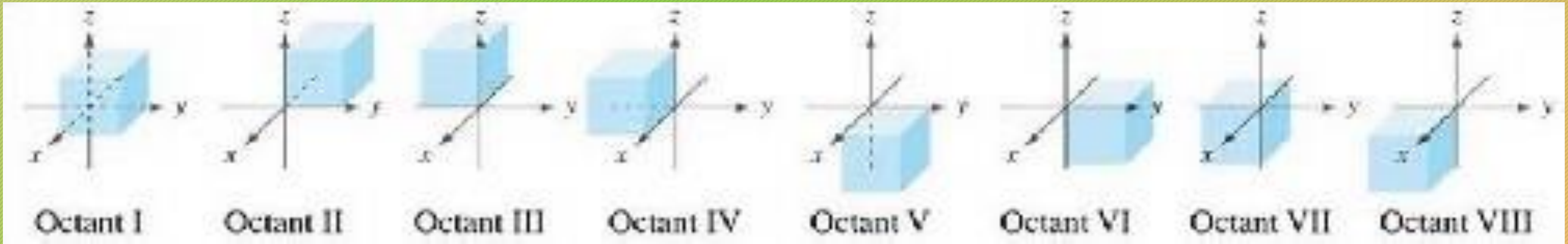
Untuk memulai, kita buat tiga garis koordinat yang saling tegak lurus (sumbu-sumbu *x*, *y*, dan *z*) dengan titik-titik nolnya berada di titik *O* yang sama, yang kita sebut titik asal.

Kita ikuti kesepakatan baku, yaitu sumbu-*y* positif ke arak kanan, sumbu-*z* positif ke arak atas dan sumbu-*x* positif ke arak kita.

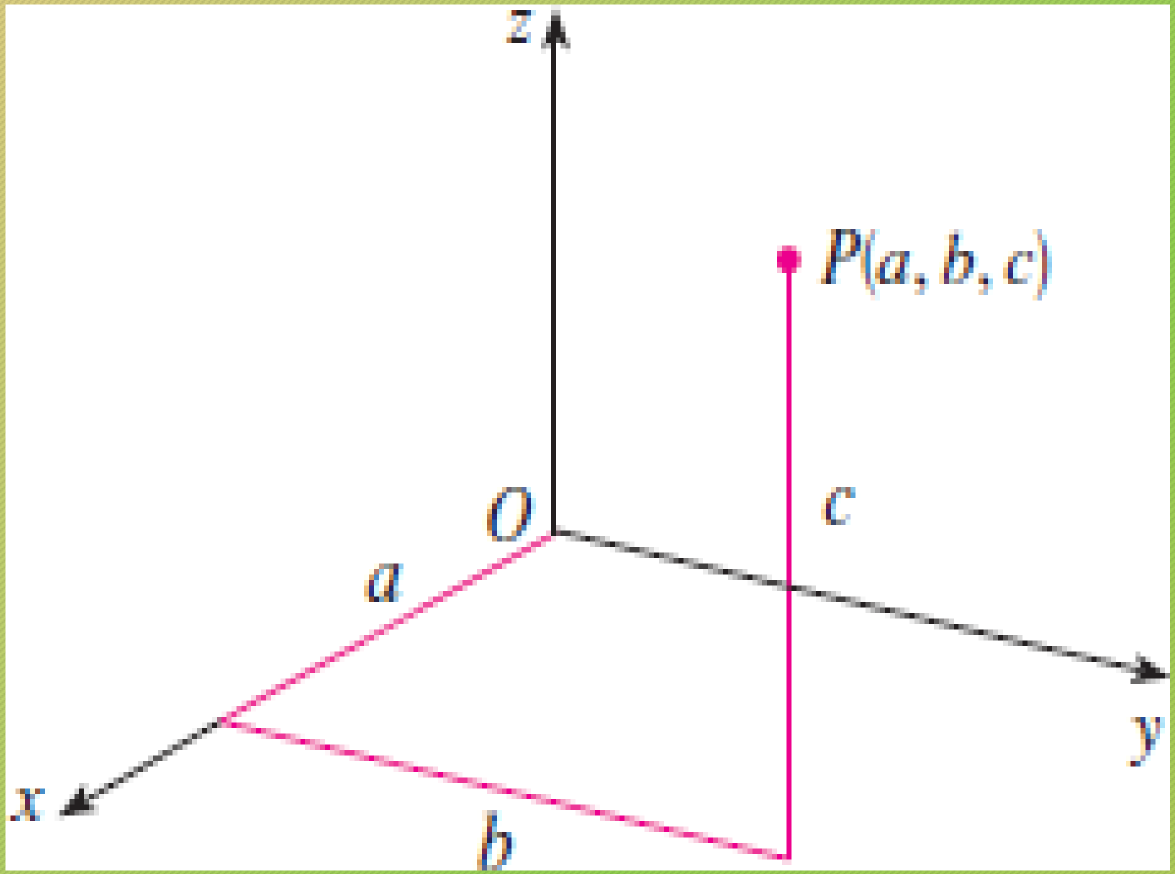


Ketiga sumbu tersebut menentukan tiga bidang, yaitu bidang-bidang *yz*, *xz* dan *xy*, yang membagi ruang menjadi delapan oktan.





Terkadap setiap titik P dalam ruang, bilangan berurut ganda tiga (a, b, c) yang mengukur jarak berarak dari P ke ketiga bidang di atas, kita sebut koordinat Cartesius dari titik yang bersangkutan.



Rumus Jarak

Misalkan $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ adalah dua titik dalam ruang berdimensi tiga, dengan $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$. Maka jarak P_1 dan P_2 dalam ruang dimensi tiga dapat ditentukan sebagai berikut

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Contoh

Gambarlah dua titik $P_1\,(1, 2, —2)$ dan $P_2\,(—1, 6, 2)$ dalam ruang dimensi tiga serta tentukan jaraknya¸

Contoh 1

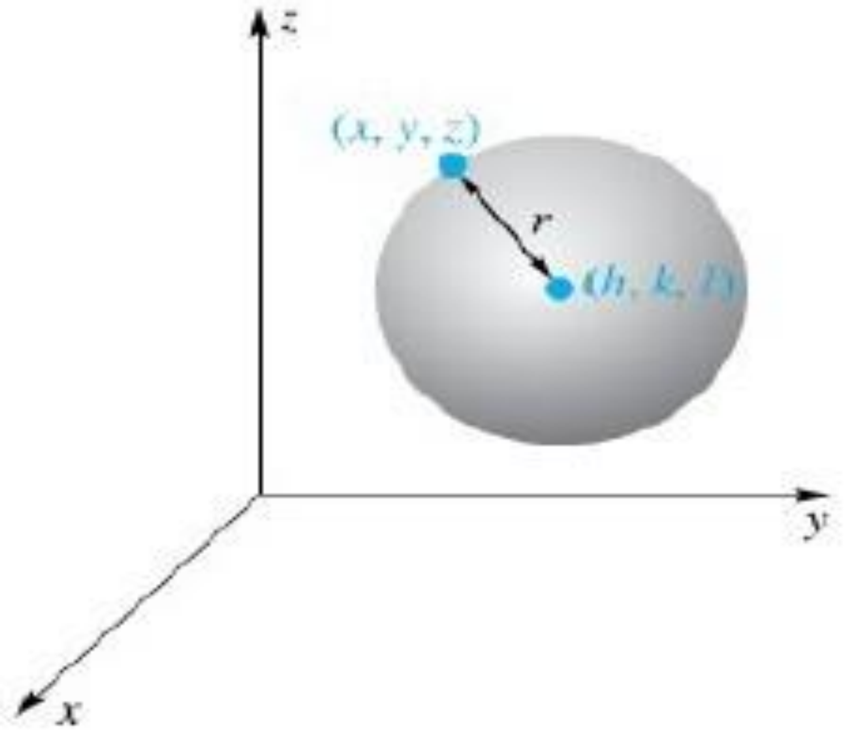
Gambarlah dua titik $P_1(1, 2, -2)$ dan $P_2(-1, 6, 2)$ dalam ruang dimensi tiga serta tentukan jaraknya

$$|P_1P_2| = \sqrt{(-1-1)^2 + (6-2)^2 + (2-(-2))^2}$$
$$= \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

Bola dan Persamaannya

Definisi

Dalam ruang dimensi tiga, bola didefinisikan sebagai himpunan titik-titik dengan jarak (*jari-jari, radius*) konstan dari suatu titik tetap *P* (pusat bola),



Berdasarkan definisi di atas, maka kita peroleh persamaan baku suatu bola dengan pusat $P\,(h, k, l)$ dan jari-jari r adalah

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2.$$

Contoh 2

Tentukan pusat dan jari-jari bola yang memiliki persamaan

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 10y - 12z + 68 = 0.$$

$$x^2 - 8x + y^2 - 10y + z^2 - 12z + 68 = 0$$

$$(x-4)^2 - 16 + (y-5)^2 - 25 + (z-6)^2 - 36 + 68 = 0$$

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2 = 9$$

Persamaan bola dengan P(4,5,6) dengan jari-jari 3.

Akibat sederhana lainnya dari rumus jarak adalah titik tengah.

Jika $P_1\ (x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2\ (x_2, y_2, z_2)$ adalak titik-titik ujung suatu ruas garis, maka koordinat dari titik tengaknya adalak $M\ (m_1, m_2, m_3)$ dengan

$$m_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, m_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}, m_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Contoh

Tentukan persamaan bola yang garis tengahnya berupa ruas garis yang menghubungkan titik (1, 4, —3) dan (5, 2, 1)¸

Contoh 3

Tentukan persamaan bola yang garis tengahnya berupa ruas garis yang menghubungkan titik (1, 4, —3) dan (5, 2, 1),

Pertama, dicari titik tengah ruas garis tersebut

$$m_1 = \frac{1+5}{2} = 3, m_2 = \frac{4+2}{2} = 3, m_3 = \frac{-3+1}{2} = -1$$

Titik tengah ruas garis tersebut adalah pusat bola, sehingga pusat bola $P(3,3,-1)$.

Kedua, jari-jari bola adalah jarak titik tengah ruas garis ke salah satu titik ujung garis.

Jari-jari bola $r = \sqrt{(3-1)^2 + (3-4)^2 + \left(-1-(-3)\right)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

Jadi persamaan bola dengan pusat $P(3,3,-1)$ dan jari-jari 3 adalah :

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$$

Grafik dalam Ruang Dimensi Tiga

Grafik yang relatif sederhana dalam ruang dimensi tiga adalak grafik persamaan linear yang menyatakan suatu bidang.

Secara umum, grafik ini berbentuk

$$Ax + By + Cz = D$$

Contoh

Gambarlah grafik dari persamaan berikut:

1. $z = 2$
2. $3x + 4y = 12,$
3. $2x + 3y + 4z = 12$

Contoh 4

Sketsalah grafik dari persamaan berikut:

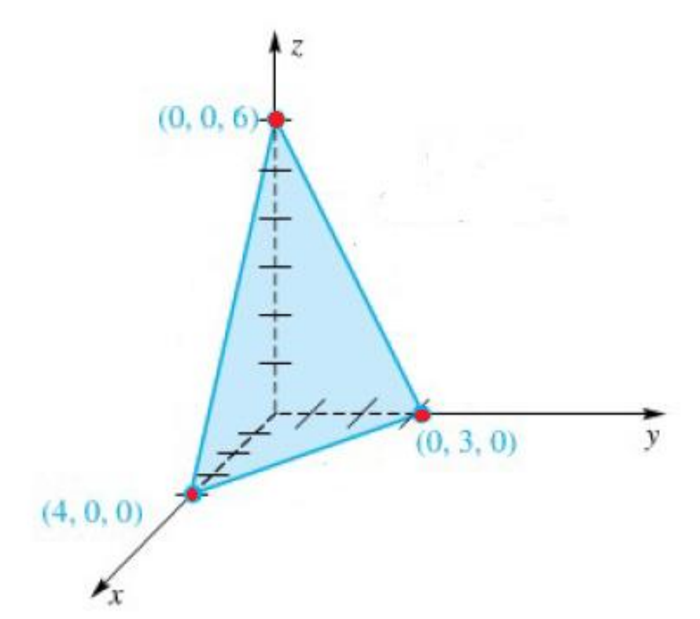
$$6x + 8y + 4z = 24$$

Buat perpotongan terhadap sumbu-x (dengan memilih y dan z sama dengan nol). Diperoleh titik: (4,0,0).

Buat perpotongan terhadap sumbu-y (dengan memilih x dan z sama dengan nol). Diperoleh titik: (0,3,0).

Buat perpotongan terhadap sumbu-z (dengan memilih x dan y sama dengan nol). Diperoleh titik: (0,0,6).

Selanjutnya, tarik garis yang menghubungkan titik-titik ini untuk memperoleh jejak. Kemudian arsir bagian oktan pertama bidang tersebut. Hasil ini dapat terlihat seperti gambar berikut.



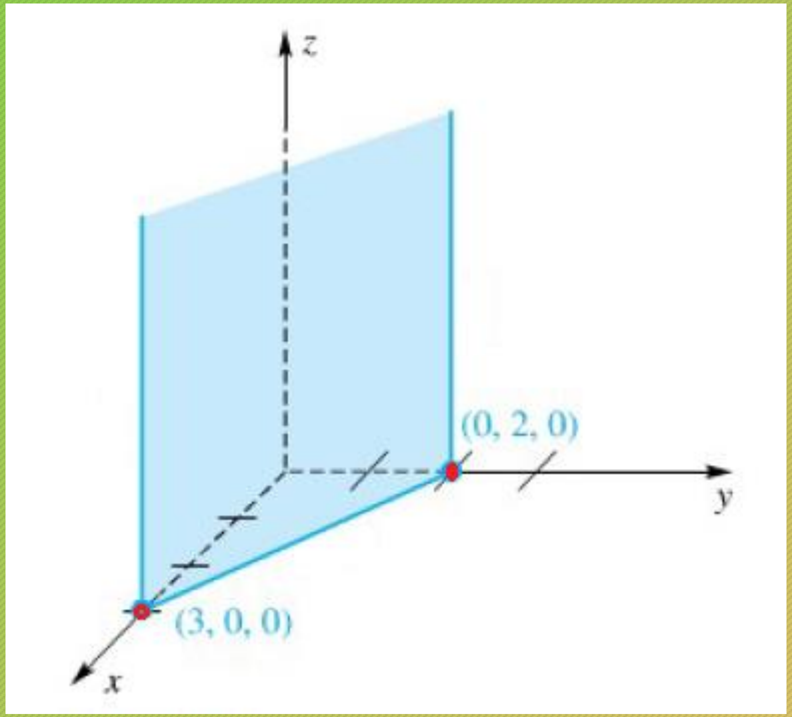
Contoh 5

Sketsalah grafik dari persamaan berikut:

$$4x + 6y = 12$$

Perpotongan sumbu-x dan sumbu-y berturut-turut adalah (3,0,0) dan (0,2,0). Hubungkan ke dua titik ini dan akan menjadikan jejak di bidang-xy.

Bidang ini tidak pernah memotong sumbu-z (karena x dan y tidak dapat sama dengan nol bersamaan), sehingga bidang ini sejajar sumbu-z



Silinder dan Permukaan Kuadrik

Agar dapat menggambar grafik sebuah permukaan, adalah bermanfaat jika kita tentukan kurva perpotongan antara permukaan itu dengan bidang-bidang yang sejajar bidang-bidang koordinat.

Kurva-kurva ini disebut jejak atau penampang melintang permukaan.

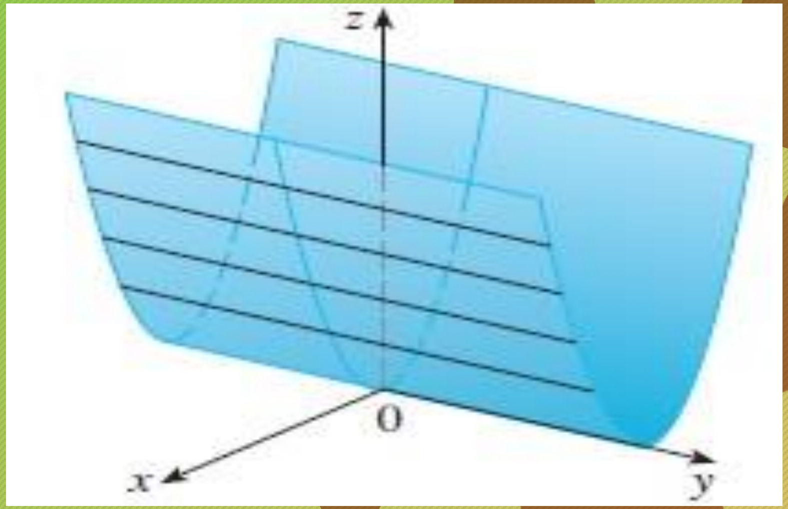
Silinder

Definisi

Silinder adalah permukaan yang terdiri atas semua garis (disebut kuasa) yang sejajar terhadap suatu garis yang diberikan dan menembus kurva bidang yang diberikan¸

Contoh

- $z = x^2$ adalah silinder parabolik¸



Contoh 6

Sketsalah grafik $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$

Untuk mencari jejak di bidang-xy, pilih $z = 0$. Grafik persamaan yang dihasilkan adalah

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Ini adalah sebuah elips.

Untuk mencari jejak di bidang-yz, pilih x$= 0$. Grafik persamaan yang dihasilkan adalah

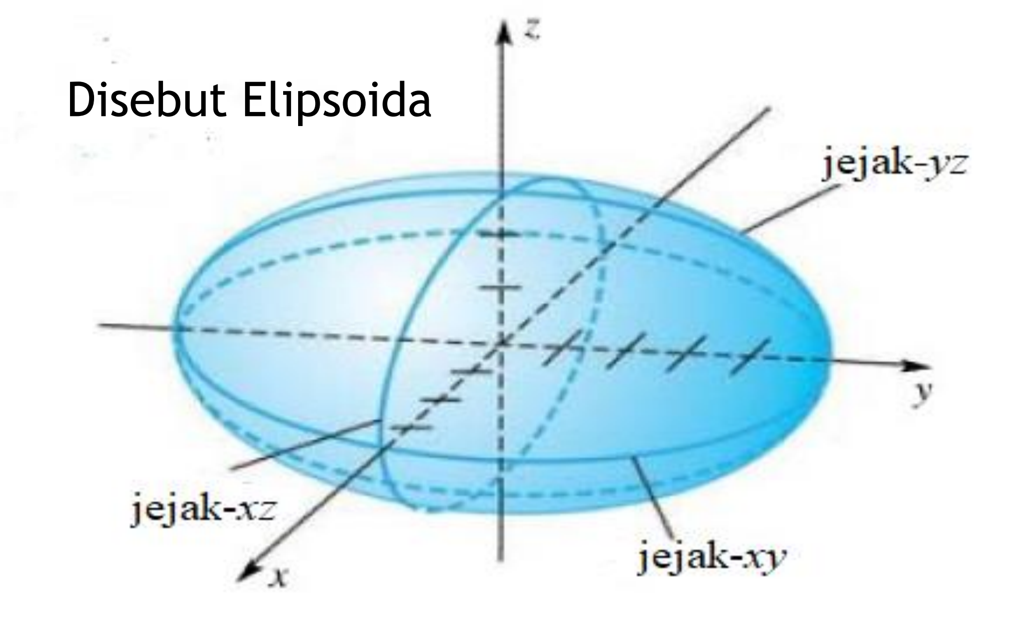
$$\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Ini adalah sebuah elips.

Untuk mencari jejak di bidang-xz, pilih y$= 0$. Grafik persamaan yang dihasilkan adalah

$$\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Ini adalah sebuah elips.



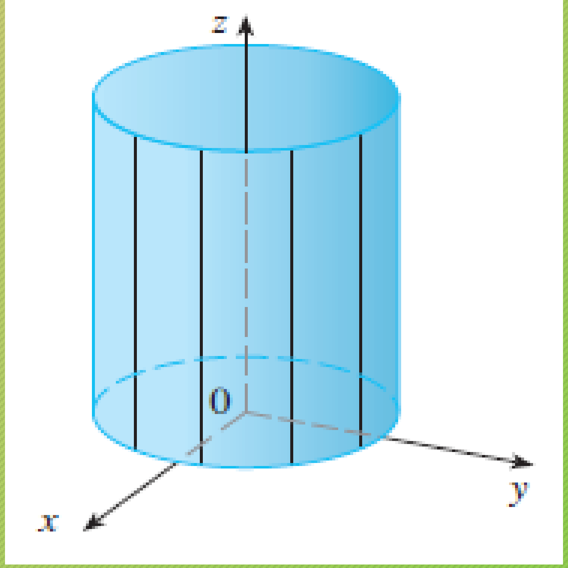
Contoh

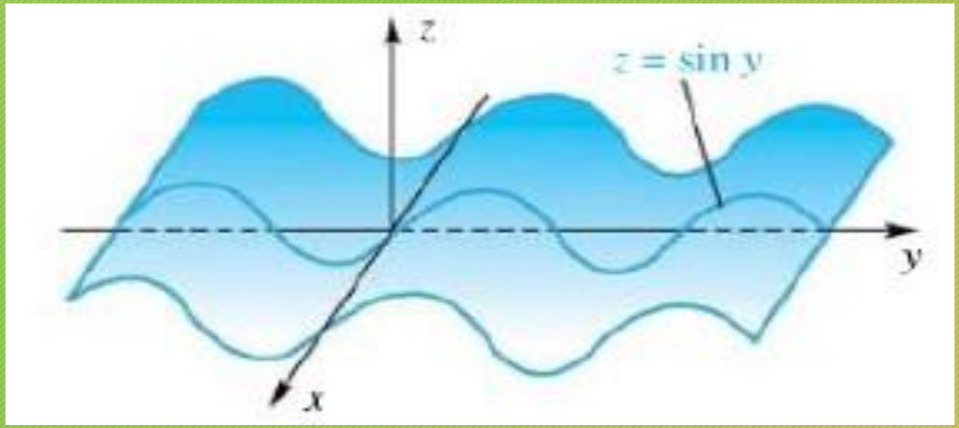
1. $x^2 + y^2 = 1$ adalah silinder lingkaran¸

2. $\frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ adalah silinder elips,

3. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 4$ adalah silinder hiperbola¸

3. $z = \sin y$ juga suatu silinder.





Permukaan Kuadrik

Permukaan kuadrik adalah grafik dari persamaan derajat dua dalam tiga variabel *x*, *y*, dan *z*.

Bentuk paling umum dari persamaan ini adalak

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

dengan *A*, *B*, *C*, . . ., *J* adalak konstanta.

Namun, melalui penggeseran (translasi) dan pemutaran (rotasi) persamaan di atas dapat diubah ke salah satu dari bentuk baku

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0, \text{ atau } Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

Contoh 7

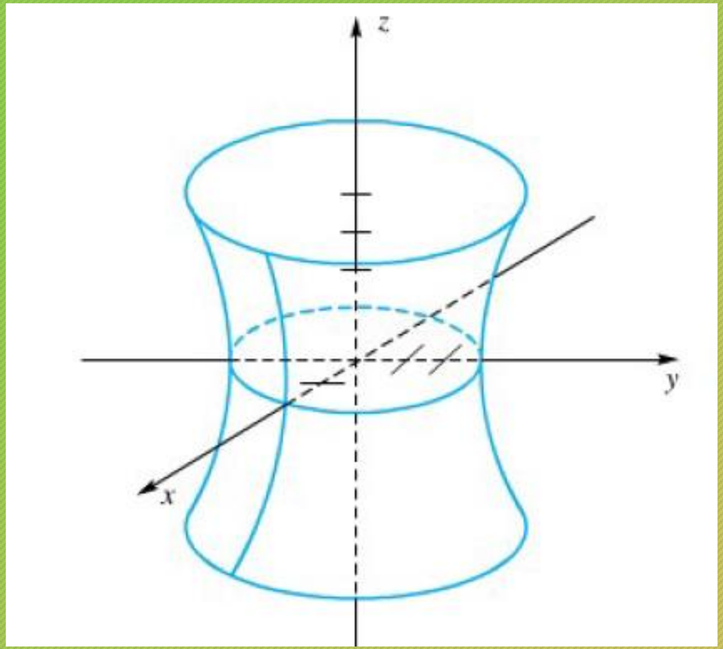
Analisis dan sketsalah persamaan $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$

Jejak-jejak bidang koordinat diperoleh dengan menetapkan $z=0, y=0$ dan $x=0$.

Bidang-xy: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=1,$ sebuah elips

Bidang-xz: $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1,$ sebuah hiperbola

Bidang-yz: $\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1,$ sebuah hiperbola



Jika disubstitusikan $z=\pm 4$, maka akan diperoleh

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{16}{16}=1$$

atau

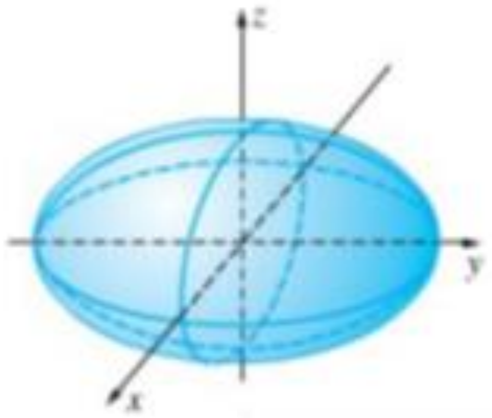
$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$$

yang merupakan sebuah elips

Permukaan Kuadrik

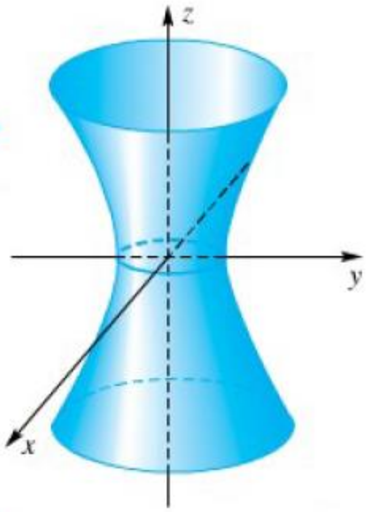
ELLIPSOID: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Plane	Cross Section
xy-plane	Ellipse
xz-plane	Ellipse
yz-plane	Ellipse
Parallel to *xy*-plane	Ellipse, point, or empty set
Parallel to *xz*-plane	Ellipse, point, or empty set
Parallel to *yz*-plane	Ellipse, point, or empty set



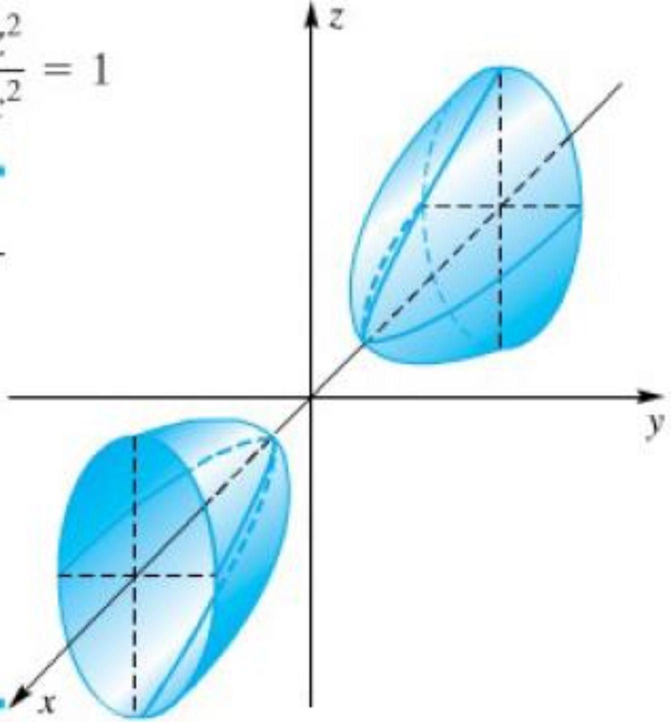
HYPERBOLOID OF ONE SHEET: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Plane	Cross Section
xy-plane	Ellipse
xz-plane	Hyperbola
yz-plane	Hyperbola
Parallel to *xy*-plane	Ellipse
Parallel to *xz*-plane	Hyperbola
Parallel to *yz*-plane	Hyperbola



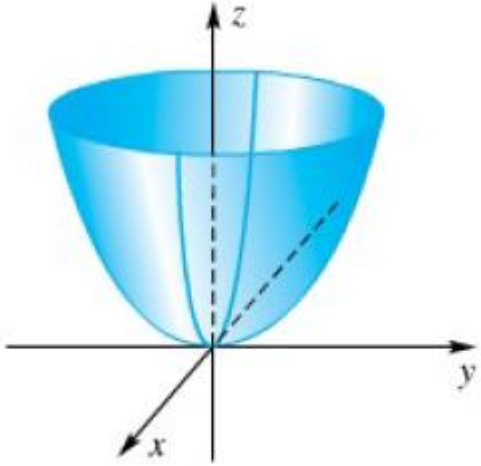
HYPERBOLOID OF TWO SHEETS: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Plane	Cross Section
xy-plane	Hyperbola
xz-plane	Hyperbola
yz-plane	Empty set
Parallel to xy-plane	Hyperbola
Parallel to xz-plane	Hyperbola
Parallel to yz-plane	Ellipse, point, or empty set



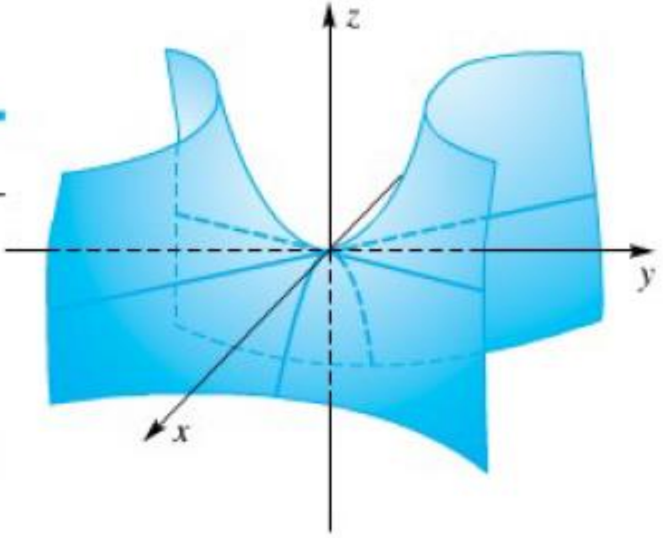
ELLIPTIC PARABOLOID: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Plane	Cross Section
xy-plane	Point
xz-plane	Parabola
yz-plane	Parabola
Parallel to xy-plane	Ellipse, point, or empty set
Parallel to xz-plane	Parabola
Parallel to yz-plane	Parabola



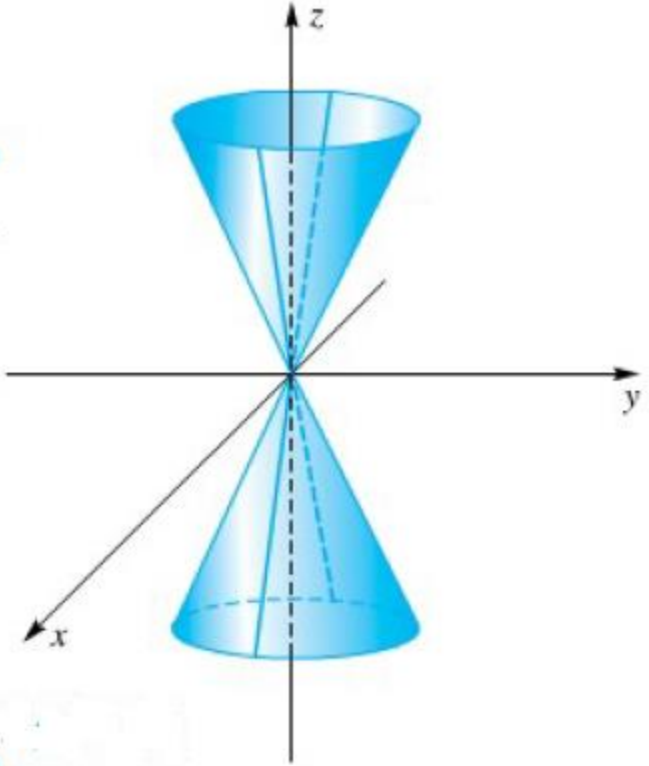
HYPERBOLIC PARABOLOID: $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$

Plane	Cross Section
xy-plane	Intersecting straight lines
xz-plane	Parabola
yz-plane	Parabola
Parallel to xy-plane	Hyperbola or intersecting straight lines
Parallel to xz-plane	Parabola
Parallel to yz-plane	Parabola



ELLIPTIC CONE: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Plane	Cross Section
xy-plane	Point
xz-plane	Intersecting straight lines
yz-plane	Intersecting straight lines
Parallel to xy-plane	Ellipse or point
Parallel to xz-plane	Hyperbola or intersecting straight lines
Parallel to yz-plane	Hyperbola or intersecting straight lines



Contoh

Beberapa contoh permukaan kuadrik adalah:

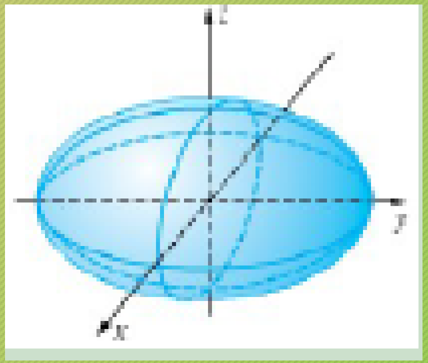
1 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$, disebut elipsoid

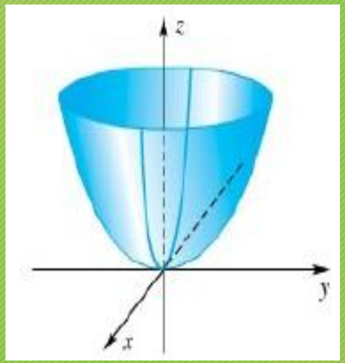
2 $z = 4x^2 + y^2$, disebut paraboloid eliptik

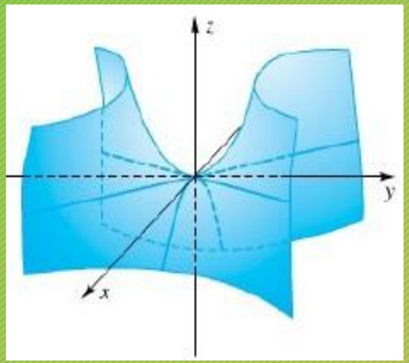
3 $z = y^2 - x^2$, disebut paraboloid hiperbolik

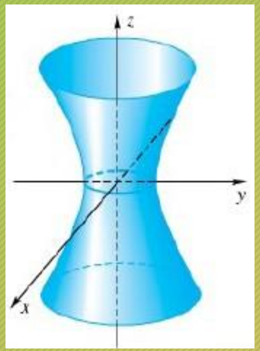
4 $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$, disebut hiperboloid lembar satu, sedangkan

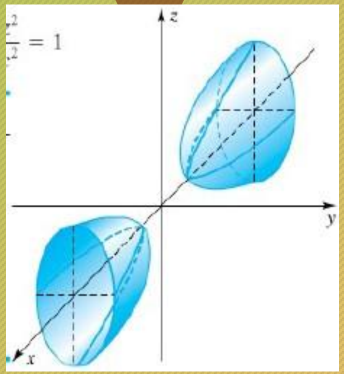
5 $-\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$, disebut hiperboloid lembar dua











Contoh 8

Sebutkan nama grafik persamaan berikut

1. $4x^2 + 4y^2 - 25z^2 + 100 = 0$
2. $y^2 + z^2 - 12y = 0$
3. $x^2 - z^2 = 0$
4. $9x^2 + 4z^2 - 36y = 0$

Dengan membagi dengan 100, diperoleh

$$-\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Grafiknya adalah hiperboloida dua lembar. Ia tidak memotong bidang-xy tetapi penampang melintang yang sejajar bidang ini (paling sedikit berjarak 2 satuan, berupa lingkaran-lingkaran

Variabel-x tidak muncul, sehingga grafik berupa sebuah tabung yang sejajar sumbu-x. Persamaan dapat dituliskan dalam bentuk

$$(y-6)^2 + z^2 = 36$$

Grafiknya berupa tabung lingkaran.

Karena variabel-y tidak ada, grafiknya sebuah tabung. Persamaannya dapat ditulis

$$(x-z)(x+z) = 0$$

Grafik terdiri 2 bidang : $z = 2$ dan $z = -2$.

Persamaannya dapat ditulis sebagai

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = y$$

Grafiknya suatu paraboloida eliptik yang simetris terhadap sumbu-y

Sekian - Terimakasih

BAHAN RESPONSI (1)

1. Tentukan jarak antara tiap pasang titik berikut:
   a. $(6, -2,1)$ dan $(2,3,6)$
   b. $(-1,3,2)$ dan $(4,0, -5)$

2. Tentukan persamaan bola yang pusat dan jari-jarinya sebagai berikut:
   a. Pusat $(1, -2,3)$, jejari 3.
   b. Pusat $(4,0, -2)$, jari-jari $\sqrt{8}$.

3. Tentukan pusat dan jari-jari bola yang persamaannya :
   a. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 10z + 34 = 0$
   b. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 8y + 16z - 13 = 0$

4. Buatlah sketsa grafik persamaan berikut :
   a. $y = 3$
   b. $2y + 3z = 6$
   c. $3x - 4y + 2z = 24$
   d. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

5. Deskripsikan dan buat sketsa permukaan berikut
   a. $4x^2 + z^2 = 4$
   b. $z = 4 - y^2$
   c. $z = \cos x$
   d. $x^2 - y^2 = 1$

BAHAN RESPONSI (2)

1. Perlihatkan bahwa $(4,5,2)$ dan $(1,7,3)$ dan $(2,4,5)$ merupakan titik-titik sudut suatu segitiga samasisi.
2. Perlihatkan bahwa $(1,0,5)$ dan $(3,6,8)$ dan $(7,4,-7)$ merupakan titik-titik sudut suatu segitiga siku-siku.
3. Tentukan persamaan bola yang garis tengahnya berupa ruas garis yang menghubungkan titik $(-2,3,6)$ dan $(4,-1,5)$.
4. Tentukan persamaan bola dengan pusat $(2,2,4)$ dan menyinggung bidang $x+y=8$.
5. Bola $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=10$ memotong bodang $z=2$ dalam sebuah lingkaran. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran tersebut.

BAHAN RESPONSI (3)

1. Tentukan jejak dan permukaan yang diberikan di bidang $x = k, y = k, z = k$. Kemudian identifikasi permukaan tersebut dan buatlah sketsanya.
   a. $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$
   b. $x = z^2 + y^2$
   c. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$
   d. $y = z^2 - x^2$
   e. $4z^2 - x^2 - y^2 = 4$
   f. $16x^2 = y^2 + 4z^2$

2. Ubah persamaan berikut ke salah satu bentuk baku, tentukan jenis permukaannya dan buatlah sketsanya
   a. $z^2 = 4x^2 + 3y^2 - 12$
   b. $z = x^2 + y^2 - 1$
   c. $x^2 + y^2 - 4z^2 + 4x - 6y - 8z = 13$
   d. $9x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$

Referensi

1. Varberg D, Purcell EJ, Rigdon SE. 2011. Kalkulus. Ed ke-9. Jilid 2. Susila IN, penerjemah; Simarmata L, Drajat AM, editor. Jakarta (ID): Penerbit Erlangga. Terjemahan dari: Calculus. 9th Ed.
2. Stewart J. 2002. Kalkulus. Ed ke-4. Jilid 1. Susila IN, Gunawan H, penerjemah; Mahanani N, Hardani W, editor. Jakarta (ID): Penerbit Erlangga. Terjemahan dari: Calculus. 4th Ed.
3. Stewart J. 2003. Kalkulus. Ed ke-4. Jilid 2. Susila IN, Gunawan H, penerjemah; Mahanani N, Safitri A, editor. Jakarta (ID): Penerbit Erlangga. Terjemahan dari: Calculus. 4th Ed.

Penyusun : Dosen Departemen Matematika – FMIPA IPB, versi 2020