Zulfa Hafizhoh
G1401211037

Responsi III Kalkulus II

No.
Date. / /

1\. (a). Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$\cos\pi, \frac{\cos 2\pi}{4}, \frac{\cos 3\pi}{9}, \frac{\cos 4\pi}{16}, \dots$$

rumus eksplisit : $\boxed{\frac{\cos n\pi}{n^2} ; n = 1, 2, 3, \dots}$

Kekonvergenan : $-1 \leq \cos n\pi \leq 1$

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos n\pi}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2} = 0 \qquad = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$\therefore$ konvergen ke 0

(b). Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B. Buktikan (dengan definisi limit) $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke A+B.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} a_n = A \\ \lim_{n\to\infty} b_n = B\end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = A \pm B = A+B$$

$$|(a_n + b_n) - (A+B)| < \varepsilon$$

- $\{a_n\}$ konvergen ke A

$L = A$, akan dibuktikan :

Untuk tiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N > 0$ sedemikian sehingga $n \geq N$

$$|a_n - L| < \varepsilon/2$$

$$|a_n - A| < \varepsilon/2$$

- $\{b_n\}$ konvergen ke B

$L = B$, akan dibuktikan :

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terhadap $N >$ sedemikian sehingga $n \geq N$

$$|a_n - L| < \varepsilon/2$$

$$|b_n - B| < \varepsilon/2$$

$$|(a_n + b_n) - (A+B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

TERBUKTI

No.

Date. / /

(c). Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

Keterbatasan: $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$

$-1 \leq \sin n\pi \leq 1$

$-\frac{1}{4} \leq \frac{\sin n\pi}{4} \leq \frac{1}{4}$

teorema apit tidak ada limit

∴ DIVERGEN

Kemonotonan:

$a_n = \frac{\sin n\pi}{4}$

$a'(n) = \frac{\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{4}$

tidak naik dan tidak turun

2. (a). Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$

rumus eksplisit: $\boxed{(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right) ; n = 1, 2, 3, \ldots}$

Kekonvergenan:

$$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n+1} \right| \left| \frac{1}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \right| = 0$$

∴ konvergen ke 0

(b). Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 16^n}{5 + 8^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3/_{1^n} - 16}{5/_{1^n} + 8} = \frac{0 - 16}{0 + 8} = -2$$

∴ konvergen ke -2

REMEMBER · MEMORY

(c). Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan ;

$$a_n = \frac{\ln n}{n}$$

Kemonotonan : $a'(n) = \dfrac{\frac{1}{n} \cdot n - \ln n \cdot 1}{n^2}$

$= \dfrac{1 - \ln n}{n^2}$ ⟹ bukan barisan monoton

Kekonvergenan :

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln n}{n} \overset{LH}{=} \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{1} = 0$ ∴ konvergen ke 0

3. (a). Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya :

$$0.9 \ , \ 0.99 \ , \ 0.999 \ , \ 0.9999 \ , \ldots$$

rumus eksplisit : $1 - \dfrac{1}{10^n}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

Kekonvergenan : $\lim\limits_{n \to \infty} 1 - \dfrac{1}{10^n} = 1 - 0 = 1$ ∴ konvergen ke 1

(b). Dengan definisi limit, buktikan bahwa $\{a_n\}$ berikut konvergen :

$$a_n = \frac{n+3}{3n-2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+3}{3n-1} = \frac{\frac{n}{n} + \frac{3}{n}}{\frac{3n}{n} - \frac{1}{n}} = \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

∴ konvergen ke $\frac{1}{3}$

No.

Date. / /

c). Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{n!}{10^n}$$

Kemonotonan : $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{\frac{n!}{10^n}}{\frac{(n+1)!}{10^{(n+1)}}} = \dfrac{\frac{1.2.3.\cdots n}{10.10.10.\cdots 10^n}}{\frac{1.2.3.\cdots n^{(n+1)}}{10.10.10.10^n.10^{n+1}}} = \dfrac{1}{n+1} \cdot 10^{n+1}$

$$= \frac{10^{n+1}}{n+1} > 1$$

∴ monoton naik

Kekonvergenan : $a_n = \dfrac{n!}{10^n}$

$$= \frac{1.2.3.\cdots n}{10.10.10\ldots 10^n} = \frac{\infty}{\infty} = \text{bentuk tak tentu}$$

↳ DIVERGEN (tidak ada limit)