



Math IPB

www.math.ipb.ac.id

Pertemuan ke-14: KOORDINAT SILINDER DAN KOORDINAT BOLA

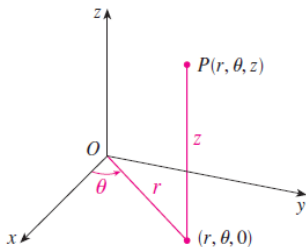
Departemen Matematika
FMIPA IPB

Bogor, 2017

- Penggunaan koordinat Cartesius (x, y, z) hanyalah salah satu dari banyak cara untuk menyatakan posisi suatu titik di ruang dimensi-tiga.
- Dua jenis koordinat lain yang memainkan peranan penting dalam kalkulus adalah *koordinat silinder* dan *koordinat bola*.

Koordinat Silinder

- Sistem koordinat silinder menggunakan koordinat polar r dan θ sebagai pengganti koordinat Cartesius x dan y pada bidang, sedangkan koordinat z adalah sama seperti pada koordinat Cartesius.
- Jadi, dalam sistem koordinat silinder, suatu titik P di ruang dimensi-tiga dinyatakan oleh bilangan terurut (r, θ, z) , dengan r dan θ adalah koordinat polar dari proyeksi P pada bidang- xy , dan z adalah jarak dari P ke bidang- xy .



- Kita gunakan syarat bahwa $r \geq 0$ dan $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

- Untuk mengubah dari koordinat Cartesius ke koordinat silinder kita gunakan persamaan:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad z = z.$$

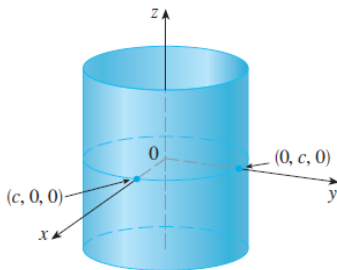
- Untuk mengubah dari koordinat silinder ke koordinat Cartesius kita gunakan persamaan:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

Contoh

- 1 *Gambarlah titik dengan koordinat silinder $\left(4, \frac{\pi}{6}, -1\right)$ dan tentukan koordinat Cartesiusnya.*
- 2 *Tentukan koordinat silinder dari titik yang memiliki koordinat Cartesius $(-2, 2, 2)$.*

- Koordinat silinder bermanfaat dalam masalah yang melibatkan simetri terhadap suatu sumbu, dan kita pilih sumbu- z berimpit dengan sumbu simetri tersebut.
- Sebagai contoh, sumbu simetri dari silinder lingkaran dengan persamaan Cartesius $x^2 + y^2 = c^2$ adalah sumbu- z .
- Dalam koordinat silinder, silinder ini memiliki persamaan yang sangat sederhana, yaitu $r = c$.



Contoh

- 1 Tentukan persamaan dalam koordinat silinder dari paraboloid yang persamaan Cartesiusnya adalah

$$x^2 + y^2 = 4 - z.$$

- 2 Tentukan persamaan dalam koordinat silinder dari bola yang persamaan Cartesiusnya adalah

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

- 3 Tentukan persamaan dalam koordinat silinder dari elipsoid yang persamaan Cartesiusnya adalah

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1.$$

Contoh

Tentukan persamaan Cartesius dari permukaan yang persamaannya dalam koordinat silinder adalah

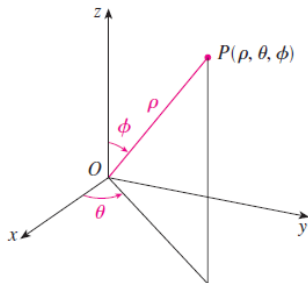
1 $9r^2 + 16z^2 = 144.$

2 $z = 2r.$

3 $z = r^2.$

4 $r^2 (1 - 2 \sin^2 \theta) = 1 - z^2.$

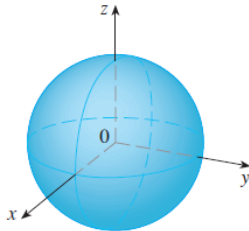
Koordinat Bola



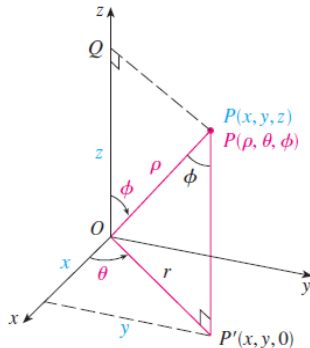
- Sebuah titik P mempunyai koordinat bola (ρ, θ, ϕ) jika:
 - ρ adalah jarak dari P ke titik asal O ,
 - θ adalah sudut kutub dari titik P' , yaitu proyeksi dari titik P pada bidang- xy ,
 - ϕ adalah sudut antara sumbu- z positif dengan ruas garis OP .
- Kita gunakan syarat bahwa

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

- Suatu permukaan akan memiliki persamaan yang relatif sederhana dalam koordinat bola, jika permukaan tersebut simetri terhadap suatu titik tetap.
- Misalnya, bola dengan jari-jari c dan berpusat di titik asal mempunyai persamaan $\rho = c$.



- Dari definisi ρ , θ dan ϕ dalam koordinat bola,



kita dapatkan hubungan antara koordinat bola dan koordinat Cartesius sebagai berikut

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta,$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta,$$

$$z = \rho \cos \phi.$$

- Di samping itu, dari rumus jarak kita peroleh hubungan

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Contoh

Diberikan suatu titik P dengan koordinat bola $\left(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$. Gambarlah titik tersebut dan tentukan koordinat Cartesiusnya.

Contoh

Diberikan suatu titik Q dengan koordinat Cartesius $(\sqrt{3}, 0, -1)$. Gambarlah titik tersebut dan tentukan koordinat bolanya.

Contoh

Tentukan persamaan dalam koordinat bola dari hiperboloid lembar-dua yang persamaan Cartesiusnya adalah $x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 4$.

Contoh

Tentukan persamaan Cartesius dari permukaan yang memiliki persamaan dalam koordinat bola $\rho = 2 \cos \phi$.

Soal

Ubah koordinat Cartesius berikut ke koordinat tabung

1 $(3, 3, -2)$.

2 $(2\sqrt{3}, -2, 3)$.

Soal

Ubah koordinat tabung berikut ke koordinat Cartesius

1 $(4, \frac{\pi}{3}, -2)$.

2 $(6, \frac{7\pi}{6}, 3)$.

Soal

Ubah koordinat Cartesius berikut ke koordinat bola

1 $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right).$

2 $\left(-2, 2\sqrt{3}, 4\right).$

Soal

Ubah koordinat bola berikut ke koordinat Cartesius

1 $\left(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right).$

2 $\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right).$

Soal

Buat sketsa grafik dari persamaan dengan koordinat tabung atau bola berikut

1 $r = 4.$

2 $\rho = 4.$

3 $\theta = \frac{\pi}{4}.$

4 $\phi = \frac{\pi}{4}.$

5 $r = 3 \sin \theta.$

6 $\rho = 3 \cos \phi.$

7 $r^2 + z^2 = 16.$

8 $r^2 \sin^2 \theta + z^2 = 9.$

Soal

Ubahlah persamaan berikut ke persamaan dengan sistem koordinat yang diminta.

- 1 $x^2 + y^2 = 16$ ke koordinat tabung
- 2 $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ ke koordinat tabung
- 3 $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ ke koordinat bola
- 4 $r^2 + 2z^2 = 4$ ke koordinat bola
- 5 $\rho = 2 \cos \phi$ ke koordinat tabung
- 6 $x + y + z = 1$ ke koordinat bola
- 7 $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ ke koordinat tabung

Soal

Tuliskan persamaan permukaan yang dihasilkan dalam koordinat tabung, jika parabola $2z = x^2$ diputar mengelilingi sumbu-z.

- Penyusun: Dosen Departemen Matematika FMIPA IPB
- Versi: 2017
- Media Presentasi: \LaTeX - BEAMER (PDF \LaTeX)