

Wulan dan Yeremia

Barisan Tak Hingga

Minggu 3 – Kalkulus 2

Wulan dan Yeremia

Suatu barisan takhingga a_1, a_2, a_3, \dots (notasi: $\{a_n\}$) adalah susunan bilangan terurut sesuai dengan urutan bilangan asli sebagai indeksnya.

Cara menyatakan barisan takhingga:

1. Dengan memberikan suku awal yang cukup untuk membentuk pola. Misalnya barisan: 3, 7, 11, 15, ...
(Lompat 4 dimulai dari 3)

2. Dengan rumus eksplisit

$$a_n = 3 + 4(n - 1)$$

$$a_n = 4n - 1$$

$$\{a_n\} = \{3, 7, 11, 15, \dots, 99, \dots\}$$

3. Dengan rumus rekursif

$$a_1 = 3$$

$$a_n = a_{n-1} + 4, n \geq 2$$

Kekonvergenan

Barisan $\{a_n\}$ disebut konvergen ke L dan ditulis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ jika untuk setiap bilangan positif ε terdapat bilangan positif N sedemikian sehingga $n \geq N \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Untuk selanjutnya, memeriksa kekonvergenan barisan $\{a_n\}$ cukup dilakukan dengan menghitung $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Contoh:

$$a_n = \frac{4n^2 + 5}{2n^2 + 7n}$$

Jawab: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 5}{2n^2 + 7n} = 2$

Barisan $\{a_n\}$ konvergen ke 2.

$$b_n = 8 - 2n.$$

Jawab: $\lim_{n \rightarrow \infty} 8 - 2n = -\infty$

Barisan $\{b_n\}$ divergen.

Teorema Apit

Jika $\{a_n\}$ dan $\{c_n\}$ adalah barisan – barisan yang konvergen ke L dan $a_n < b_n < c_n$ untuk semua $n > K$, dengan $K \in N$ konstanta , maka $\{b_n\}$ konvergen ke L .

Tentukan kekonvergenan barisan berikut:

Contoh:

$$\{a_n\} \text{ dengan } a_n = \frac{\sin n}{n^2}$$

Jawab:

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Sehingga, $\{a_n\}$ konvergen ke 0.

Berdasarkan Teorema Apit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n^2} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) = 0$$

Jika $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Contoh:

Periksa kekonvergenan barisan berikut:

$$a_n = (-1)^n \frac{\ln n^2}{n}$$

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\ln n^2}{n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln n^2}{n} \right| \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n^2}{n} \\&= 0\end{aligned}$$

$$b_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$$

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + (-1)^n \frac{1}{n} \right| \\&= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| \\&= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\&= 1\end{aligned}$$

Teori tidak dapat digunakan.

Barisan Monoton

Barisan $\{a_n\}$ disebut:

- Naik (*strictly increasing*) jika $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots : a_n < a_{n+1}$
- Tak naik (*decreasing*) jika $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots : a_n \geq a_{n+1}$
- Turun (*strictly decreasing*) jika $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots : a_n > a_{n+1}$
- Tak turun (*strictly increasing*) jika $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots : a_n \leq a_{n+1}$

Cara memeriksa kemonotonan:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\leftrightarrow a_n - a_{n+1} = 0 \\ a_n < a_{n+1} &\leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \text{ atau } \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 \text{ (asalkan } a_{n+1} \text{ atau } a_n \text{ positif)} \\ a_n < a_{n+1} &\leftrightarrow a'(x) > 0 \end{aligned}$$

Soal Latihan

$$1. a_n = \frac{n}{3n-1}$$

$$2. a_n = \frac{n^3+3n^2+3n}{(n+1)^3}$$

$$3. a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}$$

$$4. a_n = e^{-n} \sin n$$

$$5. a_n = \frac{1}{n^3}$$

Carilah rumus eksplisit dari:

$$6. \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots$$

$$7. \sin 1, 2 \sin \frac{1}{2}, 3 \sin \frac{1}{3}, 4 \sin \frac{1}{4}, \dots$$

$$8. 0.1, 0.11, 0.111, 0.1111, \dots$$

Tugas Kelompok

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$\cos \pi, \frac{\cos 2\pi}{4}, \frac{\cos 3\pi}{9}, \frac{\cos 4\pi}{16}, \dots$$

(b) Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B . Buktikan (dengan definisi limit) $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke $A + B$.

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \sin \frac{n\pi}{4}.$$

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$$

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{3 - 8 \cdot 2^n}{5 + 4 \cdot 2^n}.$$

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{\ln n}{n}.$$

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \dots$$

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{n+3}{3n-2}.$$

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{n!}{10^n}.$$

Terima Kasih

WULAN & YEREMIA

