Kalkulus 2 - Responsi 5

UJI KEKONVERGENAN DERET TAKHINGGA

Wulan dan Yeremia

HAL YANG AKAN DIBAHAS

Uji Perbandingan
Deret Berganti Tanda
Kekonvergenan Mutlak
Uji Rasio
Uji Akar

Deret Positif

1.UJI BANDING

Teorema (Uji banding)

Misalkan untuk $n \geq N$ *berlaku* $0 \leq a_n \leq b_n$.

1. *Jika* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergen maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen.*
2. *Jika* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergen maka* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergen.*

$$a_n \leq b_n \text{untuk } n \geq N : \sum a_n \text{deret kecil}, \sum b_n \text{ deret besar}.$$

- Jika deret yang besar konvergen, maka deret yang kecil juga konvergen
- Jika deret yang kecil divergen, maka deret yang besar juga divergen

Langkah awal: Menentukan deret pembanding

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-5}$

$\frac{k}{4k^2} \leq \frac{k}{4k^2-5} \leq \ldots$

$\frac{1}{4k} \leq \frac{k}{4k^2-5}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-5}$ konvergen

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{k}}$

$\frac{1}{2+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$

$\sum \frac{1}{2+\sqrt{k}} = \sum \frac{1}{k^{1/2}}$ $p = \frac{1}{2} < 1$ (divergen)

2. UJI BANDING LIMIT

Uji banding limit biasanya bekerja dengan baik dalam membandingkan deret aljabar dengan deret-p. **Pilih deret pembanding dengan derajat sama.**

Teorema (Uji banding limit)

Misalkan $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ *dan*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L.$$

1. *Jika* $0 < L < \infty$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *bersama-sama konvergen atau bersama-sama divergen.*
2. *Jika* $L = 0$ *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergen maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen.*

Contoh:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^3+3k^2-5}}$ a_k $\Leftrightarrow \frac{k}{k^{3/2}} \Leftrightarrow \frac{1}{k^{1/2}}$ $\to$ divergen

b_k

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{k^3+3k^2-5}} \cdot \frac{k^{1/2}}{1}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k}{k^3+3k^2-5}}$$

$$= 1 > 0$$

maka, Σa_k divergen.

Contoh:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k}{4k^2+5}}_{a_k} \Longleftrightarrow \frac{k}{4k^2} \Longleftrightarrow \underbrace{\frac{1}{k}}_{b_k} \rightarrow \text{divergen}$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{4k^2+5} \cdot \frac{k}{1}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{k^2}{4k^2+5}$$

$$= \frac{1}{4} > 0$$

$$L = 1/4$$

3. UJI HASIL BAGI (RASIO)

Uji rasio biasanya digunakan untuk memeriksa kekonvergenan deret yang mengandung suku k! atau r^k.

Teorema (Uji hasil bagi)

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *adalah deret yang suku-sukunya positif dan misalkan pula*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

1. *Jika* $\rho < 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen.*
2. *Jika* $\rho > 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergen.*
3. *Jika* $\rho = 1$, *maka uji ini tidak memberi kesimpulan (diperlukan uji lainnya).*

Contoh:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$ positif

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{5^k}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{5}{k+1} = 0$$

$\rho = 0 < 1$, konvergen

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{10^k}$

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{(k+1)!}{10^{k+1}} \cdot \frac{10^k}{k!}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{k+1}{10}$$

$$= \infty > 1$$

maka, Σ... divergen

4. UJI AKAR (ROOT TEST)

Teorema (Uji akar)

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *adalah deret yang suku-sukunya positif dan misalkan pula*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = R.$$

1. *Jika* $R < 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen.*
2. *Jika* $R > 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergen.*
3. *Jika* $R = 1$, *maka uji ini tidak memberi kesimpulan (diperlukan uji lainnya).*

Contoh:

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{k^2}{k^2+1}\right)^k$ a_k

$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}$

$R = \lim_{k\to\infty} (a_k)^{\frac{1}{k}}$

$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{k^2}{k^2+1}\right)$

$R = \frac{3}{2} > 1$ maka $\sum a_k$ divergen

Contoh:

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln k}\right)^{k}$

$$R = \lim_{k\to\infty} (a_k)^{1/k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\ln k}\right)$$

$$= 0 < 1 \rightarrow \text{konvergen}$$

RINGKASAN

Ringkasan:

Untuk menguji apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dengan suku-suku positif adalah konvergen atau divergen, perhatikan a_n dengan seksama.

1. Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, maka menurut *uji kedivergenen* suku ke-n, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adalah divergen.
2. Jika a_n mengandung $n!$, c^n dengan c adalah konstanta, atau n^n coba gunakan *uji hasil bagi*.
3. Jika a_n hanya mengandung pangkat n^c dan konstanta c, maka gunakan *uji banding limit*. Khususnya jika a_n merupakan fungsi rasional dari n, maka pilih $b_n = n^{p-q}$ dengan p adalah pangkat tertinggi pembilang dan q adalah pangkat tertinggi penyebut pada a_n.
4. Jika a_n berbentuk $(f(n))^n$ dengan f adalah suatu fungsi, maka gunakan *uji akar*.
5. Sebagai usaha terakhir, cobalah *uji banding*, *uji integral* atau *uji jumlah terbatas*.
6. Beberapa deret mensyaratkan *manipulasi bijak* atau *trik tertentu* untuk menentukan kekonvergenan atau kedivergenannya.

DERET BERGANTI TANDA (ALTERNATING SERIES)

Definisi

Misalkan $\{a_n\}$ adalah barisan bilangan nyata tak-negatif. Yang dimaksud dengan deret ganti tanda (alternating series) adalah deret yang memiliki bentuk umum

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \\ &= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \\ &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots\end{aligned}$$

Deret Berganti Tanda (alternating series)

1.UJI DERET GANTI TANDA

Teorema (Uji deret ganti tanda)

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *atau* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *adalah deret ganti tanda dengan* $a_n > a_{n+1} \geq 0$ *untuk semua bilangan asli* n.

1. *Jika* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *maka deret ganti tanda di atas konvergen.*
2. *Jika jumlah* S *diaproksimasi dengan jumlah* n *suku pertama* S_n, *maka kesalahan yang dibuat tidak akan melebihi* a_{n+1}.

Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, maka deret ganti tanda divergen (Uji kedivergenan).

2. KONVERGEN MUTLAK DAN KONVERGEN BERSYARAT

Definisi (Konvergen mutlak dan konvergen bersyarat)

1. *Suatu deret* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *disebut konvergen mutlak jika* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *adalah konvergen.*
2. *Suatu deret* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *disebut konvergen bersyarat jika* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *konvergen tetapi* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *adalah divergen.*

Teorema

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *konvergen maka* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *adalah konvergen.*

Untuk memeriksa kekonvergenan $\sum |u_k|$ dapat digunakan uji-uji kekonvergenan deret positif.

Jika $\sum |u_k|$ konvergen, maka $\sum u_k$ konvergen.

Jika $\sum |u_k|$ divergen, gunakan uji-uji ganti tanda untuk memeriksa kekonvergenan $\sum u_k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots \quad \text{(konvergen)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad \text{(divergen)}$$

Contoh :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \Rightarrow u_k \,, \quad a_k = \frac{1}{k}$$

$\frac{1}{k} \to a_k$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{1}$$

$$= \frac{k}{k+1} < 1 \Leftrightarrow a_k > a_{k+1} \quad \text{(barisan turun)}$$

$$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} \Rightarrow a_k > a_{k+1} .$$

Menurut uji deret ganti tanda, Σu_k konvergen

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$$

$$|s - s_n| \leq 0.01$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = s$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k} = s_n$$

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}$$

$$a_{n+1} = 0.01 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} = 0.01 \Leftrightarrow n+1 = 100 \Leftrightarrow n = 99$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \quad \text{konvergen.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{divergen}$$

Jadi, $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ kovergen bersyarat

3. UJI BANDING MUTLAK

Teorema (Uji pembanding mutlak)

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *adalah deret yang suku-sukunya taknol, dan misalkan pula*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho.$$

1. *Jika* $\rho < 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *konvergen.*
2. *Jika* $\rho > 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *divergen.*
3. *Jika* $\rho = 1$, *maka uji ini tidak memberi kesimpulan (diperlukan uji lainnya).*

Contoh:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k} \to U_k$, $a_k = \frac{1}{k}$

$|U_k| = \left|(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right|$

$a_k = \frac{1}{k}$

$U_k = \left|\boxed{(-1)^{k+1}}\frac{1}{k}\right|$

$a_k = U_k = \frac{1}{k}$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{|U_{k+1}|}{|U_k|}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}$$

$$= 1$$

Jadi, $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$, konvergen bersyarat.

Contoh:

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k!}{k^2} \to U_k$

$\sum |U_k| = \left| \frac{\sin k!}{k^2} \right|$

$= \frac{|\sin k!|}{k^2}$

$= \sum \frac{1}{k^2} \to$ konvergen.

$\sum |U_k|$ konvergen.

konvergen mutlak.

Contoh:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4^k}{k!} \quad , \quad a_k = \frac{4^k}{k!} \quad ; \quad |U_k| = a_k = \frac{4^k}{k!}$$

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \frac{|U_{k+1}|}{|U_k|}$$

$$= \left| \frac{4^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{4^k} \right|$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{4}{k+1}$$

$$= 0 < 1$$

Karena $\rho = 0 < 1$ maka deret $\sum |U_k|$ konvergen ($\sum U_k$ konvergen juga).
sehingga $\sum U_k$ konvergen mutlak.

Tugas Kelompok:

Periksa kekonvergenan deret yang diberikan dan sebutkan jenis uji yang digunakan:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^2-4}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2n-3}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{100}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^k+k}{k!}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^2-4}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$
7. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^n$

Tentukan apakah deret yang diberikan adalah konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n!}{n^2}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{3}\right)^n$

THANK YOU