MAT211 Kalkulus 2
K7 - Deret Taylor, Deret Maclaurin, dan Deret Binomial

TBK (AKT)
IPB University

September 27, 2021

1 Pendahuluan

- Pada bagian sebelumnya kita telah membahas penyajian deret pangkat untuk suatu kelas terbatas fungsi, yaitu fungsi-fungsi yang berkaitan dengan

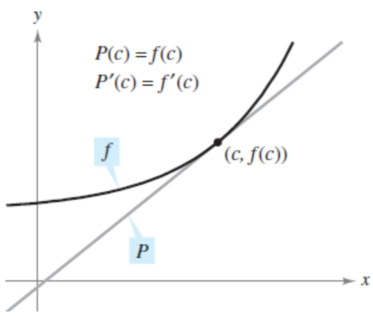
$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

- Pada bagian ini kita menyelidiki masalah yang lebih umum: fungsi manakah yang mempunyai penyajian deret pangkat dan bagaimana menentukannya?

2 Polinomial Taylor

Agar polinomial berderajat satu (linear) P dapat digunakan untuk menghampiri nilai fungsi f di $x = c$ haruslah dipenuhi:

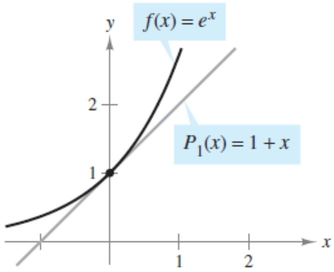
$$\begin{aligned} f(c) &= P(c), \\ f'(c) &= P'(c). \end{aligned}$$



1. Fungsi $f(x) = e^x$

   Polinom (linear): $P(x) = a_0 + a_1 x$

$$\begin{aligned} f(0) &= P(0) \Leftrightarrow 1 = a_0, \\ f'(0) &= P'(0) \Leftrightarrow 1 = a_1, \\ P(x) &= 1 + x. \end{aligned}$$



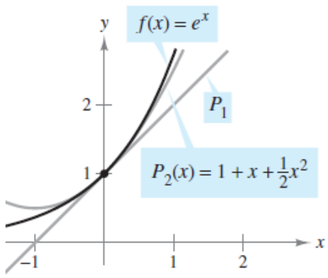
Jika kita menjauh dari titik $(0, 1)$ maka kedua grafik juga akan menjauh (akurasi turun). Untuk meningkatkan akurasi perlu ditambahkan syarat baru, yaitu

$$f''(c) = P''(c) \Rightarrow P \text{ kuadratik.}$$

2. Fungsi $f(x) = e^x$

   Polinom: $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\begin{aligned} f(0) &= P(0) \Leftrightarrow 1 = a_0, \\ f'(0) &= P'(0) \Leftrightarrow 1 = a_1 + 2a_2(0) \Leftrightarrow a_1 = 1, \\ f''(0) &= P''(0) \Leftrightarrow 1 = 2a_2 \Leftrightarrow a_2 = \tfrac{1}{2}, \\ P(x) &= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$



Definition 1 *Jika f memiliki turunan ke-n maka polinomial*

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

*disebut **polinomial Taylor** berderajat n bagi f di sekitar $x = c$. Jika $c = 0$ maka*

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

*disebut **polinomial Maclaurin** berderajat n bagi f.*

3 Sisa Polinomial Taylor

Untuk mengukur akurasi hampiran fungsi $f(x)$ oleh polinomial Taylor $P_n(x)$ dapat digunakan konsep sisa (*remainder*) $R_n(x)$, dituliskan

$$f(x) \approx P_n(x),$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \Leftrightarrow R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Nilai mutlak dari $R_n(x)$ disebut dengan galat (*error*), yaitu

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|\,.$$

Theorem 2 (Taylor) *Jika f memiliki turunan ke-$(n+1)$ pada interval I yang memuat c, maka untuk setiap x di I terdapat $z \in (x, c)$ sedemikian sehingga*

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x),$$

dengan

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \\ |R_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \right| \le \frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!} \max \left| f^{(n+1)}(z) \right|. \end{aligned}$$

4 Deret Taylor

- Misalkan f adalah sembarang fungsi yang dapat dinyatakan sebagai deret pangkat

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots, \quad |x-a| < R, \\ f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \\ f''(x) &= 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + \cdots \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(x-a) + \cdots. \end{aligned}$$

- Jika $x = a$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(a) &= c_0, \\ f'(a) &= c_1, \\ f''(a) &= 2c_2, \\ f'''(a) &= 2 \cdot 3c_3, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(a) &= n!c_n \Leftrightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \end{aligned}$$

Theorem 3 *Jika f dapat dinyatakan dalam deret pangkat*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \quad |x-a| < R,$$

maka koefisien c_n bersifat ***tunggal*** *dan diberikan oleh*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

- Deret pangkat di atas disebut deret Taylor.
- Jika $a = 0$, maka disebut deret Maclaurin.

Example 4 *Tentukan deret Maclaurin untuk fungsi $f(x) = e^x$, serta tentukan jari-jari kekonvergenannya.*

Karena

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1,$$

maka diperoleh deret Maclaurin

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots .$$

Karena menurut Uji Banding Mutlak (Uji Rasio):

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1,$$

untuk semua x, maka jari-jari kekonvergenan deret adalah ∞.

- Pertanyaan berikutnya adalah: bagaimana kita dapat menentukan apakah suatu fungsi adalah sama dengan deret Taylor-nya?
- Dengan kata lain, jika f memiliki turunan pada semua orde, kapankah akan benar bahwa
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Theorem 5 *Syarat perlu dan cukup agar fungsi tersebut sama dengan deret Taylor-nya adalah*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Lemma 6 *Untuk setiap bilangan real x berlaku*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Proof. Misal $m \in Z$ sedemikian sehingga $m \geq x$. Untuk $n \geq 2m$ berlaku:

$$n \geq 2m \Leftrightarrow \frac{m}{n} \leq \frac{1}{2}.$$

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned}
x \leq m \quad & \Leftrightarrow \quad x^n \leq m^n \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{x^n}{n!} \leq \frac{m^n}{n!} = \frac{m \cdot m \cdot m \cdot \cdots \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 2m \cdot (2m+1) \cdot (2m+2) \cdot \cdots \cdot n} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{x^n}{n!} \leq \frac{m \cdot m \cdot m \cdot \cdots \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 2m} \cdot \frac{m}{2m+1} \cdot \frac{m}{2m+2} \cdot \cdots \cdot \frac{m}{n} \\
\left(k = \frac{m^{2m}}{(2m)!}\right) \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{x^n}{n!} \leq k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{x^n}{n!} \leq k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2m}.
\end{aligned}$$

Jadi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} < \lim_{n\to\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2m} = k \cdot 2^{2m} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

■

Example 7 *Tentukan deret Taylor untuk* $f(x) = e^x$ *di* $a = 2$ *dan buktikan bahwa fungsi tersebut adalah sama dengan deret Taylor-nya.*

Karena $f^{(n)}(x) = e^x$ *maka diperoleh* $f^{(n)}(2) = e^2$*, sehingga*

$$\begin{aligned} e^x &= e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \cdots \\ &= e^2\left(1 + (x-2) + \frac{1}{2!}(x-2)^2 + \frac{1}{3!}(x-2)^3 + \cdots\right). \end{aligned}$$

Untuk menunjukkan bahwa fungsi tersebut adalah sama dengan deret Taylor-nya, akan ditunjukkan $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$*, sbb:*

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-2)^{n+1}, \quad x < z < 2, \\ &= \frac{e^z}{(n+1)!}(x-2)^{n+1} \\ |R_n(x)| &\le \frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)!}\max|e^z| \\ |R_n(x)| &\le \frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)!}e^2. \end{aligned}$$

$$-\frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)!}e^2 \le R_n(x) \le \frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)!}e^2.$$

Diperoleh (dari lema di atas):

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)!}e^2 &= 0, \\ \lim_{n\to\infty} -\frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)!}e^2 &= 0, \end{aligned}$$

sehingga menurut teorema Apit

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Example 8 *Tentukan deret Maclaurin untuk* $f(x) = \sin x$ *dan buktikan bahwa deret tersebut adalah sama dengan* $\sin x$ *untuk semua* x*.*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, \\ f'(x) &= \cos x, \\ f''(x) &= -\sin x, \\ f'''(x) &= -\cos x, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Deret Maclaurin:

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 - 1\cdot x^3 + 0\cdot x^4 + 1\cdot x^5 + \cdots \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots. \end{aligned}$$

Untuk menunjukkan bahwa fungsi tersebut adalah sama dengan deret Maclaurin-nya, akan ditunjukkan $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, *sbb:*

$$f^{(n)}(x) = \pm \sin x \text{ atau } f^{(n)}(x) = \pm \cos x.$$

$$\begin{aligned} |R_n(x)| \le \frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!} \max \left| f^{(n+1)}(z) \right| \quad &\Leftrightarrow \quad |R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max\{|\pm \sin x|, |\pm \cos x|\} \\ &\Leftrightarrow \quad |R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 1. \end{aligned}$$

Karena $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ *ketika* $n \to \infty$ *(berdasarkan lema), maka* $R_n(x) \to 0$ *ketika* $n \to \infty$.

Example 9 *Fungsi berikut tidak terus menerus terturunkan, sehingga representasi* f *dalam deret Maclaurin pun tidak ada:*

$$f(x) = |x|^3 = \begin{cases} x^3 & ; \quad x \ge 0 \\ -x^3 & ; \quad x < 0 \end{cases}.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0, \\ f''(0) &= 0, \\ f'''(0) & \quad \textit{tidak ada (karena } f'''_+(0) = 6 \textit{ dan } f'''_-(0) = -6), \end{aligned}$$

sehingga f *tidak memiliki representasi deret Maclaurin.*

Example 10 *Ada sebuah fungsi* f *dengan ekspresi sangat kompleks, yaitu*

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1-xt}\, dt,$$

memiliki turunan-turunan $f^{(n)}(0) = (n!)^2$, *sehingga deret Maclaurin diberikan oleh*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n.$$

Uji Banding Mutlak:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |(n+1)x| = \begin{cases} 0 < 1 & ; \quad x = 0 \\ \infty > 1 & ; \quad x \ne 0 \end{cases},$$

asalkan $x = 0$. *Deret di atas memiliki jari-jari kekonvergenan* 0, *sehingga pada dasarnya deret tersebut divergen.*

Example 11 *Misal diberikan fungsi* f *berikut:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le 0 \\ e^{-1/x} & ; \quad x > 0 \end{cases}.$$

Diperoleh $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = 0$, *sehingga deret Maclaurin berbentuk*

$$0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \cdots = 0.$$

Jelas deret Maclaurin di atas konvergen ke 0 *dan tidak ke* $f(x)$.

Pada deret Taylor atau Maclaurin yang menggambarkan dua fungsi, dapat dilakukan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian, dan hasilnya akan menggambarkan berturut-turut hasil penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian dari dua fungsi yang berpadanan.

Teorema

Misalkan $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *dan* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *adalah dua deret pangkat yang masing-masing konvergen untuk paling tidak* $|x| < R$*, dengan* R *suatu bilangan nyata. Jika penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian dilakukan terhadap deret-deret tersebut dengan memperlakukannya sebagai suku banyak, maka deret-deret yang diperoleh akan konvergen untuk* $|x| < R$*, dan masing-masing menyatakan fungsi* $f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) g(x)$ *dan* $f(x)/g(x)$ *jika* $g(x) \neq 0$.

Example 12 *Tentukan deret pangkat yang menggambarkan*

1. $\ln|1+x| + e^x$.
2. $\ln|1+x| - e^x$.
3. $e^x \ln|1+x|$.
4. $\frac{\ln|1+x|}{e^x}$.

Sudah diperoleh

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots . \text{ (A)} \\ \ln|1+x| &= \int \frac{1}{1+x}\, dx \\ &= \int \frac{1}{1-(-x)}\, dx \\ &= \int \left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\right)\, dx \\ &= x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots \text{ (B)} \\ \ln|1+x| + e^x &= \text{(A)} + \text{(B)}. \end{aligned}$$

$$\frac{\ln|1+x|}{e^x} = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots}{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots}.$$

5 Deret Binomial

Salah satu bentuk khusus dari deret Maclaurin adalah deret Binomial, yang disajikan pada teorema berikut.

Theorem 13 *Untuk setiap bilangan real* p *dan* x *dengan* $|x| < 1$ *berlaku*

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots ,$$

dengan

$$\begin{aligned}\binom{p}{k} &= \frac{p!}{k!(p-k)!} \\ &= \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-(k-2))(p-(k-1))(p-k)!}{k!(p-k)!} \\ &= \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-(k-2))(p-(k-1))}{k!}\end{aligned}$$

- Bukti: misal $f(x) = (1+x)^p$, maka diperoleh

  $$\begin{aligned}f(x) &= (1+x)^p \Rightarrow f(0) = 1, \\ f'(x) &= p(1+x)^{p-1} \Rightarrow f'(0) = p, \\ f''(x) &= p(p-1)(1+x)^{p-2} \Rightarrow f''(0) = p(p-1), \\ f'''(x) &= p(p-1)(p-2)(1+x)^{p-3} \Rightarrow f'''(0) = p(p-1)(p-2), \\ &\vdots\end{aligned}$$

  sehingga diperoleh deret Maclaurin

  $$\begin{aligned}(1+x)^p &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots.\end{aligned}$$

- Bukti bahwa $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ dapat dilihat pada buku-buku Kalkulus lanjut.
- Jika p adalah bilangan bulat positif, maka

  $$\binom{p}{k} = 0, \quad k > p,$$

  sehingga deret binomial takhingga sebelumnya menjadi deret dengan suku-suku terhingga.

  $$\begin{aligned}(1+x)^2 &= 1 + \binom{2}{1}x + \binom{2}{2}x^2 + \binom{2}{3}x^3 + \cdots \\ &= 1 + 2x + x^2 + 0 + 0 + 0 + \cdots.\end{aligned}$$

- Dalam hal ini deret menjadi suku banyak seperti pada **formula Binomial** berikut. Untuk setiap bilangan real a dan b dengan $|a| < 1$ dan $|b| < 1$, serta untuk setiap bilangan bulat positif n, berlaku

  $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Example 14 *Tentukan deret Maclaurin untuk fungsi*

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned}
g(x) &= (1+x)^{-2} \\
&= 1 + \binom{-2}{1}x + \binom{-2}{2}x^2 + \binom{-2}{3}x^3 + \cdots \\
&= 1 + \frac{(-2)}{1!}x + \frac{(-2)(-3)}{2!}x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}x^3 + \cdots \\
&= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots,
\end{aligned}$$

sehingga

$$f(x) = g(x^2) = 1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + \cdots .$$

Example 15 *Tentukan deret pangkat yang menyatakan*

$$\int \sqrt{1+x^4}\ dx.$$

Kemudian hampiri $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\ dx$ *dengan lima suku pertama deret di atas.*

Dengan menggunakan rumus

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

diperoleh:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{1/2} \\
&= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4!}x^4 + \cdots \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 + \cdots \\
\sqrt{1+x^4} &= 1 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{8}x^8 + \tfrac{1}{16}x^{12} - \tfrac{5}{128}x^{16} + \cdots \\
\int \sqrt{1+x^4}\ dx &= \int \left(1 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{8}x^8 + \tfrac{1}{16}x^{12} - \tfrac{5}{128}x^{16} + \cdots\right)\ dx \\
&= x + \tfrac{1}{10}x^5 - \tfrac{1}{72}x^9 + \tfrac{1}{208}x^{13} - \tfrac{5}{2176}x^{17} + \cdots
\end{aligned}$$

Nilai integral hampiran

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\ dx &\approx (x + \tfrac{1}{10}x^5 - \tfrac{1}{72}x^9 + \tfrac{1}{208}x^{13} - \tfrac{5}{2176}x^{17}|_0^1 \\
&= 1 + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{72} + \tfrac{1}{208} - \tfrac{5}{2176} \\
&= 1.0886.
\end{aligned}$$

Dengan komputer diperoleh

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\ dx \approx 1.089\,4.$$