Kalkulus 2 - Responsi 7

DERET TAYLOR, DERET MACLAURIN, DAN DERET BINOMIAL

Wulan dan Yeremia

HAL YANG AKAN DIBAHAS

Pendahuluan
Polinomial Taylor
Sisa Polinomial Taylor
Deret Taylor
Deret Binomial

1.PENDAHULUAN

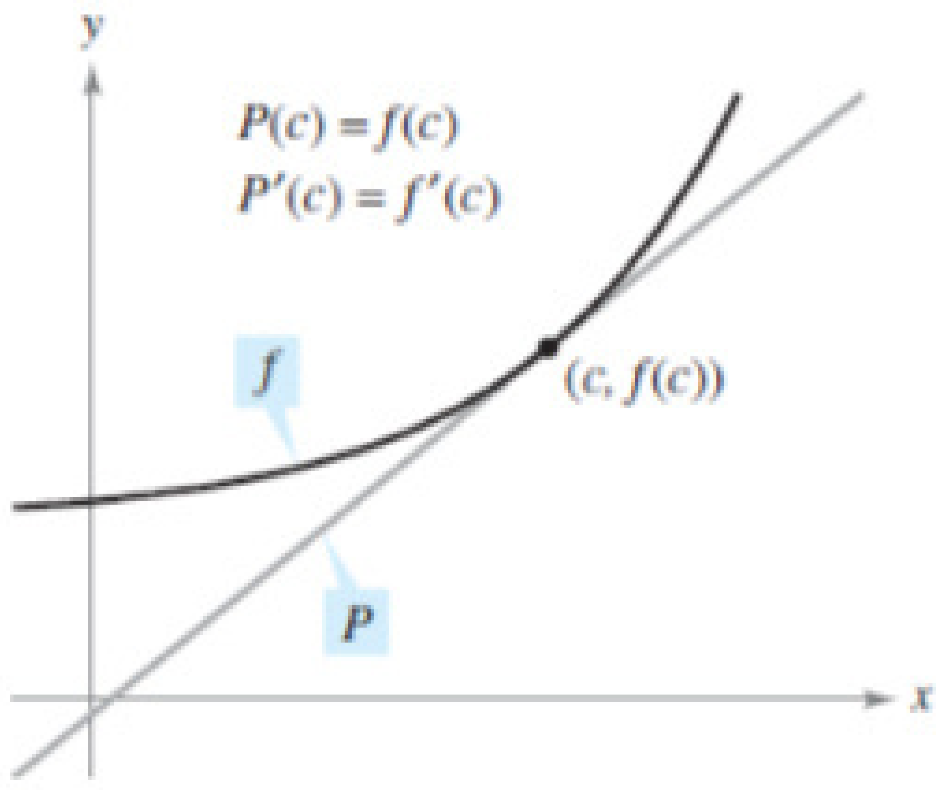
Pada bagian sebelumnya, kita telah membahas penyajian deret pangkat untuk suatu kelas terbatas fungsi, yaitu fungsi-fungsi yang berkaitan dengan

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

2.POLINOMIAL TAYLOR

Agar polinomial berderajat satu (linear) P dapat digunakan untuk menghampiri nilai fungsi f di $x = c$ haruslah dipenuhi:

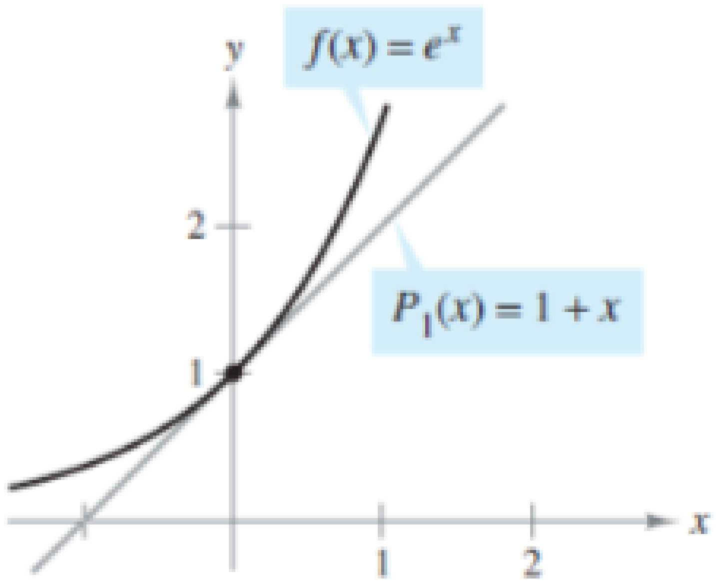
$$\begin{aligned} f(c) &= P(c), \\ f'(c) &= P'(c). \end{aligned}$$



1. Fungsi $f(x) = e^x$

   Polinom (linear): $P(x) = a_0 + a_1 x$

$$\begin{aligned} f(0) &= P(0) \Leftrightarrow 1 = a_0, \\ f'(0) &= P'(0) \Leftrightarrow 1 = a_1, \\ P(x) &= 1 + x. \end{aligned}$$



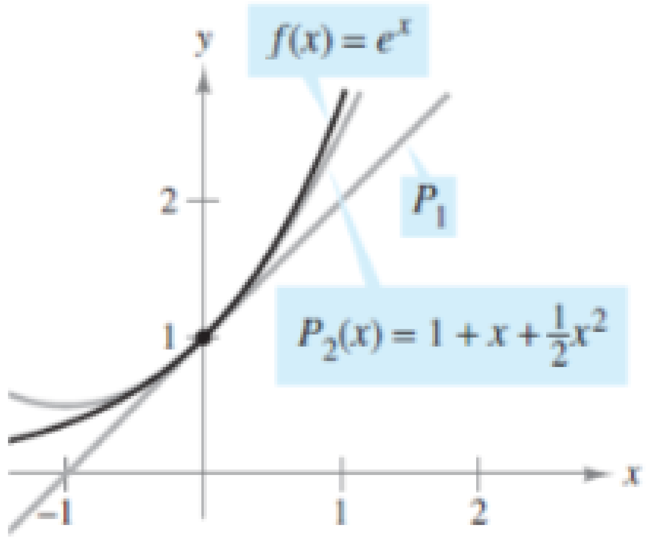
Jika kita menjauh dari titik $(0,1)$ maka kedua grafik juga akan menjauh (akurasi turun). Untuk meningkatkan akurasi perlu ditambahkan syarat baru, yaitu

$$f''(c) = P''(c) \Rightarrow P \text{ kuadratik.}$$

2. Fungsi $f(x) = e^x$

   Polinom: $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\begin{aligned} f(0) &= P(0) \Leftrightarrow 1 = a_0, \\ f'(0) &= P'(0) \Leftrightarrow 1 = a_1 + 2a_2(0) \Leftrightarrow a_1 = 1, \\ f''(0) &= P''(0) \Leftrightarrow 1 = 2a_2 \Leftrightarrow a_2 = \tfrac{1}{2}, \\ P(x) &= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$



Definition 1 *Jika f memiliki turunan ke-n maka polinomial*

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

*disebut **polinomial Taylor** berderajat n bagi f di sekitar $x = c$. Jika $c = 0$ maka*

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

*disebut **polinomial Maclaurin** berderajat n bagi f.*

3. SISA POLINOMIAL TAYLOR

Untuk mengukur akurasi hampiran fungsi $f(x)$ oleh polinomial Taylor $P_n(x)$ dapat digunakan konsep sisa (*remainder*) $R_n(x)$, dituliskan

$$f(x) \approx P_n(x),$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \Leftrightarrow R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Nilai mutlak dari $R_n(x)$ disebut dengan galat (*error*), yaitu

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|.$$

Theorem 2 (Taylor) *Jika f memiliki turunan ke-$(n+1)$ pada interval I yang memuat c, maka untuk setiap x di I terdapat $z \in (x, c)$ sedemikian sehingga*

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x),$$

dengan

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \\ |R_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \right| \leq \frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!} \max \left| f^{(n+1)}(z) \right|. \end{aligned}$$

4. DERET TAYLOR

- Misalkan f adalah sembarang fungsi yang dapat dinyatakan sebagai deret pangkat

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots, \quad |x-a| < R, \\ f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \\ f''(x) &= 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + \cdots \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(x-a) + \cdots. \end{aligned}$$

- Jika $x = a$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(a) &= c_0, \\ f'(a) &= c_1, \\ f''(a) &= 2c_2, \\ f'''(a) &= 2 \cdot 3c_3, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(a) &= n!c_n \Leftrightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \end{aligned}$$

Theorem 3 *Jika f dapat dinyatakan dalam deret pangkat*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad |x-a| < R,$$

*maka koefisien c_n bersifat **tunggal** dan diberikan oleh*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

- Deret pangkat di atas disebut deret Taylor.
- Jika $a = 0$, maka disebut deret Maclaurin.

Example 4 *Tentukan deret Maclaurin untuk fungsi $f(x) = e^x$, serta tentukan jari-jari kekonvergenannya.*

Karena

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1,$$

maka diperoleh deret Maclaurin

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots .$$

Karena menurut Uji Banding Mutlak (Uji Rasio):

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1,$$

Theorem 5 *Syarat perlu dan cukup agar fungsi tersebut sama dengan deret Taylor-nya adalah*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Lemma 6 *Untuk setiap bilangan real x berlaku*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Example 7 *Tentukan deret Taylor untuk $f(x) = e^x$ di $a = 2$ dan buktikan bahwa fungsi tersebut adalah sama dengan deret Taylor-nya.*

Karena $f^{(n)}(x) = e^x$ maka diperoleh $f^{(n)}(2) = e^2$, sehingga

$$\begin{aligned} e^x &= e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \cdots \\ &= e^2\left(1 + (x-2) + \frac{1}{2!}(x-2)^2 + \frac{1}{3!}(x-2)^3 + \cdots\right). \end{aligned}$$

Untuk menunjukkan bahwa fungsi tersebut adalah sama dengan deret Taylor-nya, akan ditunjukkan $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, sbb:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-2)^{n+1}, \quad x < z < 2, \\ &= \frac{e^z}{(n+1)!}(x-2)^{n+1} \\ |R_n(x)| &\leq \frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)!}\max|e^z| \\ |R_n(x)| &\leq \frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)!}e^2. \end{aligned}$$

$$-\frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)!}e^2 \leq R_n(x) \leq \frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)!}e^2.$$

Diperoleh (dari lema di atas):

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)!}e^2 &= 0, \\ \lim_{n\to\infty} -\frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)!}e^2 &= 0, \end{aligned}$$

sehingga menurut teorema Apit

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Example 8 *Tentukan deret Maclaurin untuk* $f(x) = \sin x$ *dan buktikan bahwa deret tersebut adalah sama dengan* $\sin x$ *untuk semua* x.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, \\ f'(x) &= \cos x, \\ f''(x) &= -\sin x, \\ f'''(x) &= -\cos x, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Deret Maclaurin:

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 - 1\cdot x^3 + 0\cdot x^4 + 1\cdot x^5 + \cdots \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots . \end{aligned}$$

Untuk menunjukkan bahwa fungsi tersebut adalah sama dengan deret Maclaurin-nya, akan ditunjukkan $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, *sbb:*

$$f^{(n)}(x) = \pm \sin x \text{ atau } f^{(n)}(x) = \pm \cos x.$$

$$\begin{aligned} |R_n(x)| \le \frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!} \max \left| f^{(n+1)}(z) \right| \quad &\Leftrightarrow \quad |R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max\{|\pm \sin x|, |\pm \cos x|\} \\ &\Leftrightarrow \quad |R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 1. \end{aligned}$$

Karena $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ *ketika* $n \to \infty$ *(berdasarkan lema), maka* $R_n(x) \to 0$ *ketika* $n \to \infty$.

Example 9 *Fungsi berikut tidak terus menerus terturunkan, sehingga representasi* f *dalam deret Maclaurin pun tidak ada:*

$$f(x) = |x|^3 = \begin{cases} x^3 & ; \quad x \ge 0 \\ -x^3 & ; \quad x < 0 \end{cases}.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0, \\ f''(0) &= 0, \\ f'''(0) & \quad \text{tidak ada (karena } f'''_+(0) = 6 \text{ dan } f'''_-(0) = -6), \end{aligned}$$

sehingga f *tidak memiliki representasi deret Maclaurin.*

Pada deret Taylor atau Maclaurin yang menggambarkan dua fungsi, dapat dilakukan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian, dan hasilnya akan menggambarkan berturut-turut hasil penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian dari dua fungsi yang berpadanan.

Teorema

Misalkan $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *dan* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *adalah dua deret pangkat yang masing-masing konvergen untuk paling tidak* $|x| < R$, *dengan* R *suatu bilangan nyata. Jika penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian dilakukan terhadap deret-deret tersebut dengan memperlakukannya sebagai suku banyak, maka deret-deret yang diperoleh akan konvergen untuk* $|x| < R$, *dan masing-masing menyatakan fungsi* $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)\,g(x)$ *dan* $f(x)/g(x)$ *jika* $g(x) \neq 0$.

5. DERETBINOMIAL

Salah satu bentuk khusus dari deret Maclaurin adalah deret Binomial, yang disajikan pada teorema berikut.

Theorem 13 *Untuk setiap bilangan real p dan x dengan $|x| < 1$ berlaku*

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots,$$

dengan

$$\begin{aligned}\binom{p}{k} &= \frac{p!}{k!(p-k)!} \\ &= \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-(k-2))(p-(k-1))(p-k)!}{k!(p-k)!} \\ &= \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-(k-2))(p-(k-1))}{k!}\end{aligned}$$

- Bukti: misal $f(x) = (1+x)^p$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^p \Rightarrow f(0) = 1, \\ f'(x) &= p(1+x)^{p-1} \Rightarrow f'(0) = p, \\ f''(x) &= p(p-1)(1+x)^{p-2} \Rightarrow f''(0) = p(p-1), \\ f'''(x) &= p(p-1)(p-2)(1+x)^{p-3} \Rightarrow f'''(0) = p(p-1)(p-2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

sehingga diperoleh deret Maclaurin

$$\begin{aligned} (1+x)^p &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots . \end{aligned}$$

- Bukti bahwa $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ dapat dilihat pada buku-buku Kalkulus lanjut.
- Jika p adalah bilangan bulat positif, maka

$$\binom{p}{k} = 0, \quad k > p,$$

sehingga deret binomial takhingga sebelumnya menjadi deret dengan suku-suku ter-hingga.

$$\begin{aligned} (1+x)^2 &= 1 + \binom{2}{1}x + \binom{2}{2}x^2 + \binom{2}{3}x^3 + \cdots \\ &= 1 + 2x + x^2 + 0 + 0 + 0 + \cdots . \end{aligned}$$

Dalam hal ini deret menjadi suku banyak seperti pada **formula Binomial** berikut. Untuk setiap bilangan real a dan b dengan $|a| < 1$ dan $|b| < 1$, serta untuk setiap bilangan bulat positif n, berlaku

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Example 14 *Tentukan deret Maclaurin untuk fungsi*

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} g(x) &= (1+x)^{-2} \\ &= 1 + \binom{-2}{1} x + \binom{-2}{2} x^2 + \binom{-2}{3} x^3 + \cdots \\ &= 1 + \frac{(-2)}{1!} x + \frac{(-2)(-3)}{2!} x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!} x^3 + \cdots \\ &= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots , \end{aligned}$$

sehingga

$$f(x) = g(x^2) = 1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + \cdots .$$

THANK YOU