Math IPB
www.math.ipb.ac.id

Pertemuan ke-7: DERET TAYLOR DAN MACLAURIN, DERET BINOMIAL

Departemen Matematika
FMIPA IPB

Bogor, 2017

Deret Taylor dan Maclaurin

- Pada bagian sebelumnya kita telah membahas penyajian deret pangkat untuk suatu kelas terbatas fungsi.
- Pada bagian ini kita menyelidiki masalah yang lebih umum: fungsi manakah yang mempunyai penyajian deret pangkat dan bagaimana menentukannya?

- Kita mulai dengan memisalkan f sebagai sembarang fungsi yang dapat dinyatakan sebagai deret pangkat

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \quad (1)$$

untuk $|x-a| < R$.

- Substitusi $x = a$ pada persamaan (1) menghasilkan $f(a) = c_0$.
- Jika kedua ruas persamaan (1) diturunkan, kita peroleh

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \quad (2)$$

untuk $|x-a| < R$.

- Substitusi $x = a$ pada persamaan (2) menghasilkan $f'(a) = c_1$.
- Jika kedua ruas persamaan (2) diturunkan, kita peroleh

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \quad (3)$$

untuk $|x-a| < R$.

- Substitusi $x = a$ pada persamaan (3) menghasilkan $f''(a) = 2c_2$.

- Jika kedua ruas persamaan (3) diturunkan, kita peroleh

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4 (x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5 (x-a)^2 + \cdots \quad (4)$$

untuk $|x-a| < R$.

- Substitusi $x = a$ pada persamaan (4) menghasilkan $f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$.
- Jika proses tersebut dilanjutkan, maka secara umum kita peroleh

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n,$$

atau

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Teorema

Jika f mempunyai penyajian deret pangkat di a, yaitu jika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \qquad |x-a| < R,$$

maka koefisiennya diberikan oleh

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

- Koefisien c_n di atas adalah tunggal (*unique*).

- Jadi, jika f memiliki penyajian deret pangkat di a, maka deretnya pasti berbentuk

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

- Suatu fungsi tidak dapat digambarkan oleh lebih dari satu deret pangkat dari $(x-a)$.
- Deret pada persamaan (5) disebut *deret Taylor dari fungsi f di a* (atau *di sekitar a* atau *yang berpusat di a*).

- Untuk kasus khusus $a = 0$, deret Taylor menjadi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots \end{aligned}$$

- Deret ini muncul cukup sering, sehingga diberi nama khusus sebagai *deret Maclaurin*.

Contoh

Tentukan deret Maclaurin untuk fungsi $f(x) = e^x$*, serta tentukan jari-jari kekonvergenannya.*

- Pertanyaan berikutnya adalah: bagaimana kita dapat menentukan apakah suatu fungsi adalah sama dengan deret Taylor-nya?.
- Dengan kata lain, jika f memiliki turunan pada semua orde, kapankah akan benar bahwa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \,?$$

- Untuk menjawab pertanyaan tersebut kita gunakan teorema berikut.

Teorema (Teorema Taylor)

Misalkan f adalah sebuah fungsi yang memiliki turunan pada semua tingkatan untuk $x \in (a-R, a+R)$. Syarat perlu dan cukup agar fungsi tersebut sama dengan deret Taylor-nya adalah

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

dengan $R_n(x)$ adalah suku sisa dalam rumus Taylor, yaitu

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

untuk sembarang $c \in (a-R, a+R)$.

- Untuk menerapkan Teorema Taylor, fakta berikut sering berguna.

Lema

Untuk setiap bilangan real x berlaku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Catatan:

1. Jika $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, maka deret Taylor untuk fungsi $f(x)$ mungkin saja konvergen pada suatu selang, tetapi tidak menggambarkan fungsi $f(x)$ pada selang tersebut.
2. Jika kita ingin mengetahui nilai fungsi $f(x)$ untuk x di sekitar a, maka lebih baik menggunakan deret Taylor untuk fungsi tersebut di a.

Contoh

Tentukan deret Taylor untuk $f(x) = e^x$ *di* $a = 2$ *dan buktikan bahwa fungsi tersebut adalah sama dengan deret Taylor-nya.*

Contoh

Tentukan deret Maclaurin untuk $f(x) = \sin x$*, dan buktikan bahwa deret tersebut adalah sama dengan* $\sin x$*, untuk semua* x*.*

- Pada dua deret pangkat (deret Taylor atau Maclaurin) yang menggambarkan dua fungsi, dapat dilakukan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian, dan hasilnya akan menggambarkan berturut-turut hasil penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian dari dua fungsi yang berpadanan.

Teorema

Misalkan $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *dan* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *adalah dua deret pangkat yang masing-masing konvergen untuk paling tidak* $|x| < R$, *dengan* R *suatu bilangan nyata. Jika penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian dilakukan terhadap deret-deret tersebut dengan memperlakukannya sebagai suku banyak, maka deret-deret yang diperoleh akan konvergen untuk* $|x| < R$, *dan masing-masing menyatakan fungsi* $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$ *dan* $f(x)/g(x)$ *jika* $g(x) \neq 0$.

Contoh

Tentukan deret pangkat yang menggambarkan

1. $\ln|1+x| + e^x$.
2. $\ln|1+x| - e^x$.
3. $\ln|1+x|\, e^x$.
4. $\dfrac{\ln|1+x|}{e^x}$.

Deret Binomial

- Salah satu bentuk khusus dari deret Maclaurin adalah deret Binomial, yang disajikan pada teorema berikut.

Teorema (Deret Binomial)

Untuk setiap bilangan nyata p dan x dengan $|x| < 1$ berlaku

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots$$

dengan

$$\binom{p}{k} = \frac{p\,(p-1)\,(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}.$$

Bukti:

- Misalkan $f(x) = (1+x)^p$, maka kita peroleh $f(0) = 1$, $f'(0) = p$, $f''(0) = p(p-1)$, $f'''(0) = p(p-1)(p-2)$, dan seterusnya, sehingga kita peroleh deret Maclaurin dari fungsi f sebagai berikut

$$\begin{aligned}(1+x)^p &= 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

  untuk $|x| < 1$.
- Bukti bahwa $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ bisa dilihat pada buku-buku Kalkulus lanjut.

- Jika p adalah bilangan bulat positif, maka $\binom{p}{k} = 0$ untuk semua $k > p$, sehingga deret binomial takhingga sebelumnya menjadi deret dengan suku-suku terhingga.
- Dalam hal ini deret menjadi suku banyak seperti pada formula Binomial berikut.
- Untuk setiap bilangan real a dan b dengan $|a| < 1$ dan $|b| < 1$, serta untuk setiap bilangan bulat positif n, berlaku

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x}.$$

Contoh

Tentukan deret Maclaurin untuk fungsi

$$f(x) = \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$$

pada selang $-1 < x < 1$*.*

Jawab: Mula-mula tentukan deret Binomial untuk $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ *yang merupakan bentuk* $(1+x)^p$ *untuk* $p = -2$*. Kemudian gantilah* x *dengan* x^2*.*

Contoh

Tentukan deret pangkat yang menyatakan

$$\int \sqrt{1+x^4}dx.$$

Kemudian hampiri

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$$

dengan lima suku pertama deret di atas.
Jawab: Mula-mula tentukan deret Binomial untuk $(1+x)^{1/2}$ *yang merupakan bentuk khusus dari* $(1+x)^p$ *untuk* $p = 1/2$. *Kemudian gantilah* x *dengan* x^4, *lalu integralkan.*

Ringkasan:

Beberapa deret Maclaurin yang penting adalah:

1. $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \; x \in (-1, 1).$
2. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots,$
   $x \in (-1, 1).$
3. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \; x \in (-\infty, \infty).$
4. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots,$
   $x \in (-\infty, \infty).$
5. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots, \; x \in (-\infty, \infty).$

Bahan Responsi

Soal

Tentukan deret Maclaurin untuk fungsi $f(x)$ *berikut hingga suku dengan* x^5.

1. $f(x) = e^x \sin x$.
2. $f(x) = \cos x \ln(1+x)$.
3. $f(x) = e^x + x^3 + \sin x$.
4. $f(x) = (1+x)^{3/2}$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

Soal

Tentukan deret Taylor dalam $(x-a)$ hingga suku dengan $(x-a)^3$ untuk fungsi berikut.

1. $f(x) = e^x, \quad a = 1.$
2. $f(x) = \cos x, \quad a = \dfrac{\pi}{3}.$

Soal

Jika $f(x) = \sum a_n x^n$ *adalah suatu fungsi genap untuk* $x \in (-R, R)$, *maka buktikan bahwa* $a_n = 0$ *apabila* n *ganjil.*

Soal

Dengan menulis $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1-(1-x)}$ *dan dengan menggunakan deret pangkat bagi* $\dfrac{1}{1-x}$ *yang sudah dikenal, tentukan deret Taylor untuk* $\dfrac{1}{x}$ *dalam* $(x-1)$.

Tentang Slide

- Penyusun: Dosen Departemen Matematika FMIPA IPB
- Versi: 2017
- Media Presentasi: LaTeX - BEAMER (PDFLaTeX)