No. : Date. :

* Tugas Kelompok Kalkulus II Responsi Pertemuan 3

Nama : Uiwang Nur Thoriq

NIM : G1401211020

Kelas Responsi : R3

1.) a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$$\cos \pi, \frac{\cos 2\pi}{4}, \frac{\cos 3\pi}{9}, \frac{\cos 4\pi}{16}, \ldots$$

$$a_n = \frac{\cos n\pi}{n^2}$$

$$-1 \leq \cos n\pi \leq 1$$

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos n\pi}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

a_n konvergen ke 0.

b.) Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B. Buktikan (dengan definisi limit) $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke A+B.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = B$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$$

KIKY

No. : Date. :

Akan dibuktikan untuk setiap bilangan positif ϵ, ada bilangan positif N, sehingga jika $n \geq N$ maka $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (A+B)| &= |(a_n - A) + (b_n + B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| \\ &< \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = A + B$.

c.) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut :

$$a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$$

$$-1 \leq \sin n\pi \leq 1$$

$$-\frac{1}{4} \leq \sin n\pi \leq \frac{1}{4}$$ → Limit tidak ada., divergen → Tak terbatas.

	$\sin \frac{n\pi}{4}$		$\sin \frac{(n+1)\pi}{4}$
$n=1$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$<$	1
$n=2$	1	$>$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$n=3$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$>$	0
$n=4$	0	$>$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Tidak monoton

2) a.) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya.

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$$

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

KIKY

Date. :

$$-1 \le (-1)^{n+1} \le 1$$

$$-\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^{n+1}}{n} \le \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

a_n konvergen ke 0

b.) Dengan definisi limit, buktikan barisan (a_n) berikut konvergen :

$$a_n = \frac{3-8.2^n}{5+4.2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3-8.2^n}{5+4.2^n} = \frac{-8}{4} = -2 = L$$

Pilih $N = \dfrac{\ln\left(\frac{13}{\varepsilon}-5\right) - \ln 4}{\ln 2}$ atau $2^N = \dfrac{\frac{13}{\varepsilon}-5}{4}$

$$|a_n - L| = \left| \frac{3-8.2^n}{5+4.2^n} + 2 \right|$$

$$= \left| \frac{3-8.2^n + 10 + 8.2^n}{5+4.2^n} \right|$$

$$= \frac{13}{5+4.2^n}$$

$$\le \frac{13}{5+4.2^N}$$

$$= \frac{13}{5+4\left(\frac{\frac{13}{\varepsilon}-5}{4}\right)} = \varepsilon$$

Terbukti a_n konvergen.

KIKY

No. : Date. :

c.) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut

$a_n = \frac{\ln n}{n}$.

$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

$\frac{\ln n}{n}$ $\frac{\ln(n+1)}{n+1}$

a_n konvergen ke 0

a_n terbatas oleh 0 di bawah

$n=1$ $0 < 0{,}346$

$n=2$ $0{,}346 < 0{,}366$

$n=3$ $0{,}366 > 0{,}346$

$n=4$ $0{,}346 > 0{,}321$

a_n tidak monoton

- naik pada $n = 1, 2$
- turun pada $n = 3, 4, \ldots$

3.) a.) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya.

$0{,}9 \;,\; 0{,}99 \;,\; 0{,}999 \;,\; 0{,}9999 \;, \ldots$

$a_n = \frac{10^n - 1}{10^n}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{10^n - 1}{10^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{10^n\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)}{10^n} = 1$

a_n konvergen ke-1.

b.) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen :

$a_n = \frac{n+3}{3n-2}$.

$\lim_{n \to \infty} \frac{n+3}{3n-2} = \frac{1}{3} = L$

Pilih $N = \frac{11 + 6\varepsilon}{9\varepsilon}$

No. : Date. :

$$\left|a_n - L\right| = \left|\frac{n+3}{3n-2} - \frac{1}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{3n+9-3n+2}{9n-6}\right|$$

$$= \frac{11}{9n-6}$$

$$\leq \frac{11}{9N-6}$$

$$= \frac{11}{9\left(\frac{11+6\varepsilon}{9\varepsilon}\right)-6}$$

$= \varepsilon$. Terbukti a_n konvergen.

c.) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut.

$$a_n = \frac{n!}{10^n}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{\cancel{10^n}} \cdot \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} = \cancel{n!} \cdot \frac{10}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{10}{n+1}$$

a_n tidak monoton
- $n = 10, 11, 12, \ldots$ naik.
- $n = 1, 2, \ldots, 9$ tak naik

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{10.10.10\ldots.10} = \infty$$

a_n divergen

a_n tak terbatas di atas

KIKY