Pertemuan ke-12: LUAS DAN GARIS SINGGUNG DALAM KOORDINAT POLAR

Departemen Matematika
FMIPA IPB

Bogor, 2017

Garis Singgung

- Untuk menentukan garis singgung pada kurva polar $r = f(\theta)$, kita anggap θ sebagai parameter dan menulis persamaan parametriknya sebagai

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \\ y &= r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta. \end{aligned}$$

- Dengan metode penentuan kemiringan garis singgung m pada kurva parametrik kita peroleh

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}.$$

- Kurva mempunyai garis singgung horizontal di titik dengan $dy/d\theta = 0$, asalkan $dx/d\theta \neq 0$.
- Kurva mempunyai garis singgung vertikal di titik dengan $dx/d\theta = 0$, asalkan $dy/d\theta \neq 0$.

Contoh

Diberikan kardioid $r = 1 + \sin\theta$.

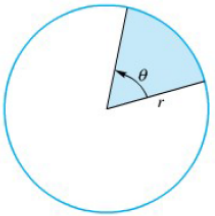
1. *Tentukan kemiringan garis singgungnya saat* $\theta = \pi/3$.
2. *Tentukan titik-titik pada kardioid tersebut di mana garis singgungnya horizontal atau vertikal.*

Luas

- Untuk menurunkan rumus luas daerah yang dibatasi kurva dalam persamaan polar, kita perlu menggunakan rumus luas sektor (juring) dari suatu lingkaran dengan jari-jari r, yaitu

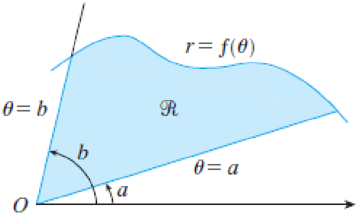
$$L = \frac{1}{2} r^2 \theta,$$

dengan θ adalah sudut pusat yang diukur dalam radian.

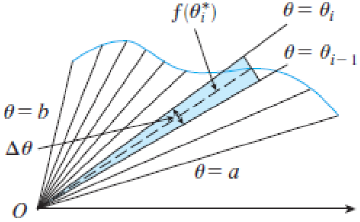


- Rumus ini didapat dari fakta bahwa luas sektor lingkaran adalah sebanding dengan sudut pusatnya.

- Misalkan $\mathcal{R}$ adalah daerah yang dibatasi kurva polar $r = f(\theta)$ dan oleh dua garis $\theta = a$ dan $\theta = b$, di mana f adalah kontinu dan taknegatif serta $0 \leq b - a \leq 2\pi$.



- Kita bagi selang $[a,b]$ menjadi n anak selang yang sama panjang, dengan titik-titik ujung θ_0, θ_1, ..., θ_n, dan panjang masing-masing anak selang adalah $\Delta\theta$.



- Dengan demikian, daerah $\mathcal{R}$ juga terbagi menjadi n daerah bagian, yang masing-masing memiliki sudut pusat $\Delta\theta$.

- Kita pilih $\theta_i^* \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$.
- Jika ΔL_i menyatakan luas daerah bagian ke-i, maka daerah ini dapat dihampiri dengan luas sektor lingkaran dengan jari-jari $f(\theta_i^*)$ dan sudut pusat $\Delta\theta$, yaitu

$$\Delta L_i \approx \frac{1}{2}\left(f\left(\theta_i^*\right)\right)^2 \Delta\theta$$

sehingga hampiran untuk total luas daerah $\mathcal{R}$ adalah

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f\left(\theta_i^*\right)\right)^2 \Delta\theta.$$

- Perhatikan bahwa jumlah di atas adalah sebuah jumlah Riemann, dan nilai hampiran akan semakin mendekati luas daerah $\mathcal{R}$ jika $n \to \infty$.
- Akhirnya, kita peroleh rumus untuk menentukan luas daerah $\mathcal{R}$ sebagai berikut

$$L = \int_a^b \frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Contoh

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh:

1. *Satu daun dari mawar berdaun empat* $r = 4\sin(2\theta)$.
2. *Limason* $r = 2 + \cos\theta$.

Contoh

Tentukan luas daerah yang terletak di dalam lingkaran $r = 3\cos\theta$ *dan di luar kardioid* $r = 1 + \cos\theta$.

Bahan Responsi

Soal

Tentukan kemiringan garis singgung pada kurva polar berikut di titik dengan nilai θ yang diberikan. Tentukan pola titik pada kurva tersebut di mana garis singgungnya horizontal atau vertikal.

1. $r = 3\cos\theta, \quad \theta = \pi/3.$
2. $r = \cos\theta + \sin\theta, \quad \theta = \pi/4.$
3. $r = 1 + \cos\theta, \quad \theta = \pi/6.$

Soal

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh

1. $r = 3 + \cos\theta.$
2. $r = 4 - 4\sin\theta.$
3. $r = 4\cos(3\theta).$
4. $r^2 = 5\cos(2\theta).$

Soal

Gambar limason $r = 3 - 6\sin\theta$.

1. *Tentukan luas daerah di dalam simpai yang kecil.*
2. *Tentukan luas daerah di dalam simpai yang besar dan di luar simpai yang kecil.*

Tentang Slide

- Penyusun: Dosen Departemen Matematika FMIPA IPB
- Versi: 2017
- Media Presentasi: LaTeX - BEAMER (PDFLaTeX)