MAT211 Kalkulus II
K4 - Deret Takhingga

TBK (AKT)
IPB University

September 6, 2021

1 Deret Takhingga dan Jumlah Parsial

Barisan = *sequences*

Deret = *series*

Pertanyaan yang sama:

- Apakah deret konvergen atau divergen?
- Jika konvergen, konvergen ke mana?

Definition 1 (Deret Takhingga) *Misalkan diberikan barisan takhingga* $\{a_k\}$*, yaitu*

$$\{a_k\} = a_1, a_2, a_3, ...$$

Deret takhingga (kadangkala hanya disebut deret saja) adalah jumlah dari suku-suku suatu barisan takhingga $\{a_k\}$*, yaitu*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Definition 2 (Jumlah Parsial) *Jumlah parsial* $s_1, s_2, ..., s_n, ...$ *suatu deret takhingga* Σa_k *didefinisikan sebagai*

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Barisan $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *disebut sebagai* ***barisan jumlah parsial****. Ingat:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

2 Kekonvergenan Deret

Definition 3 *Deret takhingga Σa_k disebut **konvergen** ke suatu jumlah S, ditulis $\Sigma a_k = S$, jika **barisan jumlah parsial** $\{s_n\}$ dari deret tersebut konvergen ke S.*

- *Jika $\{s_n\}$ divergen, maka deret Σa_k divergen.*
- *Deret yang divergen dikatakan tidak memiliki jumlah.*

Example 4 *Deret*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

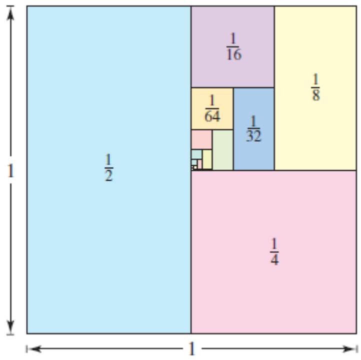
memiliki barisan jumlah parsial $\{s_n\}$ dengan

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
\frac{1}{2}s_n &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
s_n - \frac{1}{2}s_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \\
\frac{1}{2}s_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \\
s_n &= 1 - \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Diperoleh

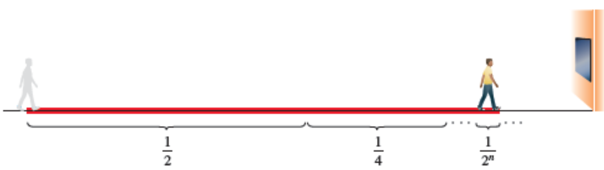
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

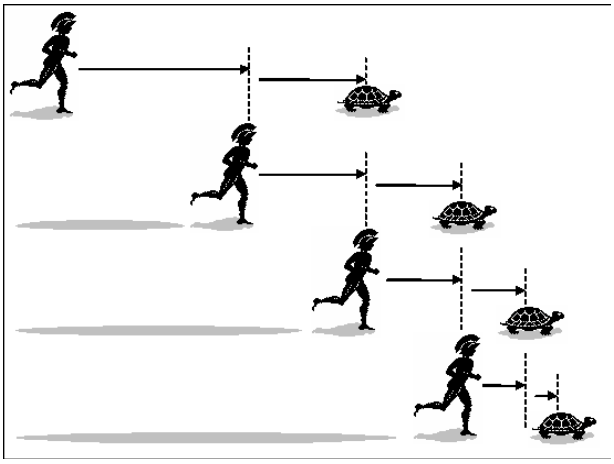
Karena barisan jumlah parsial konvergen, maka deret juga konvergen. Deret di atas dikenal sebagai deret geometrik.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = 1.$$

Zeno's paradox:





Example 5 *Deret*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots$$

memiliki barisan jumlah parsial $\{s_n\}$ *dengan*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n \text{ (tak terbatas).}$$

Barisan jumlah parsial divergen, sehingga deret divergen.

Example 6 *Deret*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots .$$

$$\begin{aligned} (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots &= 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 0 \\ -1 + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots &= -1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = -1 \end{aligned}$$

Barisan jumlah parsial $\{s_n\}$ *diberikan oleh:*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 & ; \ n \text{ genap} \\ -1 & ; \ n \text{ ganjil} \end{cases} .$$

Karena $\lim_{n\to\infty} s_n$ *tidak ada, maka barisan jumlah parsial divergen, deret juga divergen.*

3 Deret Geometrik

Definition 7 (Deret Geometrik) *Suatu deret takhingga disebut* ***deret geometrik*** *jika deret tersebut memiliki bentuk*

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1},$$

dengan r *dan* a *konstanta-konstanta real, di mana* $a \neq 0$ *dan* r *disebut rasio:*

$$\frac{ar}{a} = \frac{ar^2}{ar} = \frac{ar^3}{ar^2} = \cdots = r = \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ (konstan).}$$

Deret geometrik memiliki barisan jumlah parsial $\{s_n\}$ dengan

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}.$$

- $r = 1$

  $$s_n = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n} = an,$$

  sehingga

  $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} an = \infty \text{ (divergen)}.$$

- $r = -1$

  $$s_n = a - a + a - a + a - a + \cdots \pm a = \begin{cases} 0 & ; \quad n \text{ genap} \\ a & ; \quad n \text{ ganjil} \end{cases},$$

  sehingga $\lim_{n\to\infty} s_n$ tidak ada (deret divergen).

Untuk r lainnya diperoleh

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \\ rs_n &= ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ s_n - rs_n &= a - ar^n \\ (1-r)s_n &= a - ar^n \\ s_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r}. \end{aligned}$$

- $r > 1$

  $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ divergen}$$

- $r < -1$

  $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ divergen}$$

- $-1 < r < 1$

  $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \text{ (konvergen)}.$$

Example 8 *Tentukan* $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$.
$a = \frac{1}{2}, r = \frac{1/2^2}{1/2} = \frac{1}{2} \in (-1, 1)$, *sehingga deret konvergen:*

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

Example 9 *Tentukan* $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \cdots$.
$a = \frac{4}{3}, r = \frac{4/9}{4/3} = \frac{1}{3} \in (-1, 1)$, *sehingga deret konvergen:*

$$\frac{a}{1-r} = \frac{4/3}{1-1/3} = 2.$$

Example 10 *Bilangan repeated decimal* $0.125125125... = 0.\overline{125}$ *dapat dinyatakan dalam deret geometrik:*

$$\begin{aligned}
0.125125125... &= 0.125 \\
&\quad +0.000125 \\
&\quad +0.000000125 \\
&\quad +0.000000000125 + \cdots \\
&= \frac{125}{10^3} + \frac{125}{10^6} + \frac{125}{10^9} + \cdots \\
&= 125\left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \cdots\right) \\
\begin{matrix} a = \frac{1}{10^3} \\ r = \frac{1}{10^3} \end{matrix} &= 125 \cdot \frac{\frac{1}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} \\
&= 125 \cdot \frac{1}{1000 - 1} \\
&= \frac{125}{999}.
\end{aligned}$$

Cara lain:

$$\begin{aligned}
x &= 0.125125125.... \\
1000x &= 125.125125125.... \\
999x &= 125.00000000.... \\
x &= \frac{125}{999}.
\end{aligned}$$

Example 11 *Tentukan* $\frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + ... = 5(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...) = 5 \cdot 1 = 5.$

4 Uji Kedivergenan

Theorem 12 *Jika deret* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergen, maka* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0.$

Theorem 13 (Kontrapositif, Uji Kedivergenan) *Jika* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$ *maka deret* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergen.*

Jika $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen/divergen (tidak ada kesimpulan).

Example 14 *Periksa kekonvergenan deret* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2}{k^2+7}$.

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{2k^2}{k^2+7} = 2 \neq 0 \text{ (deret divergen).}$$

Example 15 *Periksa kekonvergenan deret* $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k$.

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \sin k = \text{tidaka ada (deret divergen).}$$

5 Deret Harmonik

Theorem 16 *Deret harmonik* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *divergen.*

Bukti. Nicole Oresme (1323-1382). Barisan jumlah parsial deret harmonik diberikan oleh $\{s_n\}$ dengan

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 1 + \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \\
s_4 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} > s_2 + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = s_2 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} \\
s_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} > s_4 + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{4}{2} \\
s_{16} &> s_8 + \left(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16}\right) = \tfrac{5}{2} \\
&\vdots \\
s_{2^n} &> \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}$$

Karena $\frac{n+1}{2} \to \infty$ maka $s_{2^n} \to \infty$ (divergen).

6 Deret Teleskop

Deret teleskop (*telescoping series*) atau deret kolaps (*collapse series*) adalah deret takhingga yang jumlah parsialnya terdiri atas sejumlah **berhingga** suku setelah pencoretan (*cancelation*).

Example 17 *Tentukan kekonvergenan deret* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.
Jumlah parsial:

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1},
\end{aligned}$$

sehingga

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Karena barisan jumlah parsial $\{s_n\}$ *konvergen, maka deret konvergen.*

Example 18 *Tentukan kekonvergenan deret* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$.

Jumlah parsial:

$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1/2}{k} - \frac{1/2}{k+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots \right).
\end{aligned}
$$

Tetapi

$$
\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

7 Sifat-sifat Deret Konvergen

Teorema (Sifat-sifat deret konvergen)

Jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *dan* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *keduanya konvergen dan* c *adalah konstanta bilangan nyata, maka*

1. *deret* $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ *adalah konvergen,*
2. *deret* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ *adalah konvergen.*

Selain itu juga berlaku

1. $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, *dan*
2. $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Example 19 *Tentukan kekonvergenan deret*

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \left(3(\tfrac{1}{8})^k - 5(\tfrac{1}{3})^{k+1} \right).
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\left(3(\tfrac{1}{8})^k - 5(\tfrac{1}{3})^{k+1}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} 3(\tfrac{1}{8})^k - \sum_{k=1}^{\infty} 5(\tfrac{1}{3})^{k+1} \\
&= 3\sum_{k=1}^{\infty}(\tfrac{1}{8})^k - 5\sum_{k=1}^{\infty}(\tfrac{1}{3})^{k+1} \\
&= 3 \cdot \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}} - 5 \cdot \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n &= -1+1-1+1-1+\cdots \ \textit{(divergen)}, \\
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} &= 1-1+1-1+1-1+\cdots \ \textit{(divergen)}, \\
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} &= 0+0+0+\cdots \ \textit{(konvergen)}.
\end{aligned}
$$

Teorema

Jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergen dan* $c \neq 0$ *adalah konstanta bilangan nyata, maka deret* $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ *adalah divergen.*

Example 20 *Deret* $\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots$ *divergen.*

$$
\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right)
$$

divergen, karena deret $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ *merupakan deret harmonik yang divergen.*

8 Deret Positif: Uji Integral

- Pada bagian sebelumnya telah dibahas deret, yang jika konvergen maka dengan mudah dapat ditentukan jumlahnya, yaitu deret geometrik dan deret kolaps.
- Pada bagian ini dikaji kekonvergenan deret yang lebih umum dimulai dengan mengkaji deret positif.
- Deret positif adalah deret yang suku-sukunya terdiri atas bilangan-bilangan taknegatif.

8.1 Uji jumlah terbatas

Theorem 21 *Deret positif* Σa_k *konvergen jika dan hanya jika jumlah parsialnya terbatas di atas.*

Example 22 *Deret* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ *konvergen.*

Bukti. Perhatikan bahwa deret memiliki suku-suku taknegatif:

$$\begin{aligned}
k! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k \\
&\geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 \\
&= 2^{k-1} \\
k! &\geq 2^{k-1} \\
\frac{1}{k!} &\leq \frac{1}{2^{k-1}} \\
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ merupakan deret geometrik dengan $r = \frac{1}{2}$ (konvergen ke $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$). Menurut uji jumlah terbatas, deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ juga konvergen.

8.2 Uji integral

Theorem 23 *Jika f kontinu, positif, dan taknaik pada $[1, \infty)$ maka*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ konvergen jika dan hanya jika } \int_1^{\infty} f(x)\, dx \text{ konvergen.}$$

Example 24 *Deret-p (dengan $p > 0$) berikut:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

konvergen jika dan hanya jika $p > 1$.

- $f(x) = \frac{1}{x^p} = x^{-p}$: pada $[1, \infty)$ bersifat kontinu, positif, dan taknaik.

  $$f'(x) = -\frac{p}{x^{p+1}} < 0 \ (f \text{ turun}).$$

- Jika $p = 1$, maka deret-p di atas menjadi **deret harmonik** (divergen):

  $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

- Secara umum dapat diuji melalui kekonvergenan

  $$\int_1^{\infty} f(x)\, dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx.$$

  (sudah dibahas di topik integral takwajar).

Example 25 *Deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergen.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$$

merupakan deret-p dengan $p = \frac{1}{2} < 1$ (divergen).

Example 26 *Deret* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln(k+1)}$ *divergen.*

- *Misal* $f(x) = \frac{1}{x \ln(x+1)}$.
- *Pada* $[1, \infty)$ *fungsi* f *bersifat kontinu, positif, taknaik?*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x \ln(x+1))^{-1} \\ &= -1 \cdot (x \ln(x+1))^{-2} \cdot \left(\ln(x+1) + \frac{x}{x+1} \right) \\ &= -\frac{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}}{(x \ln(x+1))^2} \\ &< 0 \text{ (} f \text{ fungsi turun).} \end{aligned}$$

Tugas Randi Satria menghitung integral tak-wajar berikut:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln(x+1)}\, dx =$$

9 Ekor Suatu Deret

- Awal suatu deret tidaklah penting untuk kekonvergenan atau kedivergenannya.
- Yang penting untuk diselidiki adalah ekornya, yaitu:

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$$

dengan N adalah suatu bilangan bulat positif yang besar, sehingga untuk uji kekonvergenan, kita dapat mengabaikan beberapa suku awal dari suatu deret.

- Tetapi, jumlah dari suatu deret adalah tergantung dari semua sukunya, termasuk suku awalnya.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \\ &= s_{N-1} + T_N. \end{aligned}$$

- s_{N-1} merupakan jumlah parsial,
- T_N adalah ekor deret (*tail of series, remainder*),
- Untuk menunjukkan deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, kita dapat mengabaikan penjumlahan suku-suku awal $\sum_{k=1}^{N-1} a_k$ dan cukup menunjukkan kekonvergenan ekor deret $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$.

Theorem 27 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergen jika dan hanya jika* $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ *konvergen.*

Misalkan deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen ke S maka

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + \cdots &= S \\
\sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k &= S \\
s_{N-1} + T_N &= S.
\end{aligned}$$

Karena

$$\lim_{N\to\infty} s_{N-1} = S \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} s_{N-1} = s_{N-1} + T_N$$

maka

$$\lim_{N\to\infty} T_N = 0 \text{ (konvergen).}$$