



Math IPB

www.math.ipb.ac.id

Pertemuan ke-10: PERNYATAAN PARAMETRIK KURVA DALAM BIDANG

Departemen Matematika
FMIPA IPB

Bogor, 2017

aplikasi dalam komputer, bagaimana game dino bisa bergerak berdasarkan waktu (t). waktu sebagai paramater, sehingga disebut persamaan parametrik.

nanti kita akan belajar juga bagaimana persmaan spiral, sinkloid, dll

- Sejauh ini kita telah membahas kurva-kurva bidang datar dengan memberikan:
 - 1 y sebagai fungsi dari x , yaitu $y = f(x)$,
 - 2 x sebagai fungsi dari y , yaitu $x = g(y)$, atau
 - 3 menyatakan hubungan x dan y dengan mendefinisikan y secara implisit sebagai fungsi dari x , yaitu $f(x, y) = 0$.
- Kenapa kita perlu membahas persamaan parametrik dan koordinat polar?
- Sejumlah kurva, seperti sikloid, paling mudah diselesaikan jika variabel x dan y diberikan dalam variabel ketiga t , yang disebut parameter, yaitu $x = f(t)$, $y = g(t)$.
- Kurva lainnya, seperti kardioid, memiliki penjelasan yang paling memuaskan jika kita menggunakan sistem koordinat baru, yang disebut koordinat polar.

Persamaan Parametrik

- Sejumlah jenis kurva, seperti kurva yang menggambarkan lintasan sebuah partikel, tidak mungkin dijelaskan dengan suatu persamaan berbentuk $y = f(x)$.
- Pada kasus ini, kita perlu menyatakan koordinat x dan y dari partikel tersebut sebagai fungsi dari waktu t , sehingga kita menuliskannya sebagai $x = f(t)$ dan $y = g(t)$.

Definisi (Kurva Parametrik)

Jika x dan y keduanya dinyatakan sebagai fungsi dari variabel ketiga t (disebut parameter), maka persamaan $x = f(t)$, $y = g(t)$ disebut persamaan parametrik. Setiap nilai t menentukan sebuah titik (x, y) . Dengan berubahnya t , titik $(x, y) = (f(t), g(t))$ berubah dan menelusuri sebuah kurva yang disebut kurva parametrik.

- Secara umum, kurva dengan persamaan parametrik

$$x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b$$

mempunyai *titik awal* $(f(a), g(a))$ dan *titik akhir* $(f(b), g(b))$.

- Parameter t tidak harus menyatakan waktu, meskipun dalam banyak penerapan kurva parametrik parameter t menyatakan waktu.
- Kurva parametrik antara lain digunakan untuk menyatakan huruf-huruf dan lambang-lambang lainnya pada printer laser.

Contoh

Buatlah sketsa dari kurva yang didefinisikan oleh persamaan parametrik

$$x = t^2 - 2t, y = t + 1$$

untuk

1 $0 \leq t \leq 4$

2 $t \in \mathbb{R}$.

Kemudian identifikasi kurva di atas.

Contoh

Tentukan kurva apa yang dinyatakan oleh persamaan parametrik

- 1 $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi,$
- 2 $x = \sin(2t), y = \cos(2t), 0 \leq t \leq 2\pi,$
- 3 $x = \sin t, y = \sin^2 t.$

Buatlah sketsanya, dan beri tanda panah yang menunjukkan arah membesarnya nilai t .

Contoh

- *Kurva yang ditelusuri oleh titik P pada tepi lingkaran ketika lingkaran menggelinding sepanjang garis lurus disebut sikloid.*
- *Jika lingkaran berjari-jari r dan menggelinding sepanjang sumbu- x serta jika P adalah titik asal, maka dapat ditunjukkan bahwa persamaan parametrik dari sikloid yang terbentuk adalah*

$$x = r(\theta - \sin \theta), \quad y = r(1 - \cos \theta); \quad \theta \in \mathbb{R}$$

- *Satu lengkungan sikloid berasal dari satu putaran lingkaran yang berpadanan dengan $0 \leq \theta \leq 2\pi$.*

- Sebelumnya telah dibahas bahwa beberapa kurva parametrik $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $y = F(x)$, dengan mengeliminasi parameternya.
- Jika kita substitusikan $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ pada persamaan $y = F(x)$, maka kita dapatkan

$$g(t) = F(f(t)).$$

- Jika F , f , dan g memiliki turunan, maka Aturan Rantai memberikan

$$g'(t) = F'(f(t))f'(t) = F'(x)f'(t).$$

- Jika $f'(t) \neq 0$, maka

$$F'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

- Karena kemiringan garis singgung pada kurva $y = F(x)$ di $(x, F(x))$ adalah $m = F'(x)$, maka dengan persamaan sebelumnya kita dapat menentukan persamaan garis singgung pada kurva parametrik tanpa harus mengeliminasi parameternya.
- Dengan notasi Leibniz, kita dapat menulis ulang persamaan tersebut sebagai berikut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

dengan syarat $dx/dt \neq 0$.

- Dari persamaan tersebut dapat dilihat bahwa kurva mempunyai garis singgung horizontal jika $dy/dt = 0$ (asalkan $dx/dt \neq 0$), dan kurva mempunyai garis singgung vertikal jika $dx/dt = 0$ (asalkan $dy/dt \neq 0$).
- Untuk mengetahui kecekungan kurva, maka kita perlu mengetahui d^2y/dx^2 . Ini dapat diperoleh dengan menggantikan y pada persamaan sebelumnya dengan dy/dx , sehingga diperoleh

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} (dy/dx)}{dx/dt}.$$

Contoh

Sebuah kurva C didefinisikan oleh persamaan parametrik $x = t^2$ dan $y = t^3 - 3t$.

- 1 Tentukan dy/dx dan d^2y/dx^2 .
- 2 Tunjukkan bahwa C mempunyai dua garis singgung di titik $(3,0)$ dan tentukan persamaannya.
- 3 Tentukan titik pada C di mana garis singgungnya horizontal atau vertikal.
- 4 Tentukan interval di mana kurva naik atau turun, dan di mana ia cekung ke atas atau cekung ke bawah.
- 5 Buatlah sketsa kurva tersebut.

- Kita tahu bahwa luas di bawah kurva $y = F(x)$ dari $x = a$ ke $x = b$ adalah $L = \int_a^b f(x) dx$, dengan syarat $F(x) \geq 0$.
- Jika kurva diberikan oleh persamaan parametrik $x = f(t)$, $y = g(t)$, dan ditelusuri satu kali jika nilai t naik dari α ke β , maka kita dapat mengadaptasi rumus luas di atas dengan menggunakan *aturan substitusi* untuk *integral tentu*, sebagai berikut

$$L = \int_a^b y dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) f'(t) dt,$$

atau

$$L = \int_{\beta}^{\alpha} g(t) f'(t) dt,$$

jika $(f(\beta), g(\beta))$ adalah titik ujung kiri.

Contoh

Tentukan luas di bawah satu lengkungan sikloid $x = r(\theta - \sin \theta)$,
 $y = r(1 - \cos \theta)$.

Soal

Buatlah sketsa kurva berikut, dan beri tanda panah yang menunjukkan arah membesarnya nilai t . Kemudian tentukan persamaan Cartesiusnya.

1 $x = 2t + 4, y = t - 1.$

2 $x = 1 - 2t, y = t^2 + 4, 0 \leq t \leq 3.$

Soal

Tentukan persamaan Cartesius kurva berikut. Kemudian buatlah sketsanya dan beri tanda panah arah penelusuran kurva ketika nilai parameter naik.

1 $x = \sqrt{t}, y = 2 - t.$

2 $x = 2 \cos \theta, y = \frac{1}{2} \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

3 $x = 2 \cos \theta, y = \sin^2 \theta.$

4 $x = \ln t, y = \sqrt{t}, t \geq 1.$

Soal

Jelaskan pergerakan partikel dengan posisi (x, y) bila t berubah dalam selang yang diberikan.

1 $x = 4 - 4t, y = 2t + 5, 0 \leq t \leq 2.$

2 $x = 2 + \cos t, y = 3 + \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi.$

Soal

Tentukan dy/dx dan d^2y/dx^2 dari persamaan parametrik berikut:

1 $x = t - t^3, y = 2 - 5t.$

2 $x = t^4 - 1, y = t - t^2.$

Soal

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva di titik yang terkait dengan nilai parameter yang diberikan:

1 $x = 2t^2 + 1, y = \frac{1}{3}t^3 - t, t = 3.$

2 $x = \theta \sin \theta, y = \theta \cos \theta, \theta = \pi.$

Soal

Tentukan titik pada kurva berikut di mana garis singgungnya horizontal atau vertikal. Gunakan analisis selang di mana kurva naik atau turun untuk membuat sketsa grafiknya.

1 $x = t^3 - 3t, y = 3t^2 - 9.$

2 $x = t^3 - 3t^2, y = t^3 - 3t.$

Soal

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva:

1 $x = \cos t, y = e^t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, x = 0, y = 1.$

2 $x = t - 1/t, y = t + 1/t, \text{ dan } y = 2.5.$

- Penyusun: Dosen Departemen Matematika FMIPA IPB
- Versi: 2017
- Media Presentasi: \LaTeX - BEAMER (PDF \LaTeX)