No
Date

MAT 1211 Kalkulus 2 - Responsi 3

* Tugas Madiri

> Paket 1

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya :

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$$

Jawab :

- Rumus Eksplisit :

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

- Kekonvergenan :

$$-1 < (-1)^{n+1} < 1$$

$$-\frac{1}{n} < \frac{(-1)^{n+1}}{n} < 1/n \implies \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Berdasarkan teorema apit maka dapat disimpulkan $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = 0$, sehingga $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergen ke 0

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{3-8\cdot 2^n}{5+4\cdot 2^n}$$

Jawab :

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{3-8\cdot 2^n}{5+4\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2^n}-8}{\frac{5}{2^n}+4}$$

$$= \frac{0-8}{0+4} = \frac{-8}{4} = -2 \text{ (konvergen)}$$

- Diperoleh $L = -2$
- Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan
- Pilih $2^N = \frac{\frac{13}{\varepsilon}-5}{4}$

- Untuk $n > N > 0$ diperoleh :

$$|a_n - L| = \left|\frac{3-8\cdot 2^n}{5+4\cdot 2^n} + 2\right|$$

$$= \left|\frac{3-\cancel{8\cdot 2^n}+10+\cancel{8\cdot 2^n}}{5+4\cdot 2^n}\right|$$

$$= \frac{13}{5+4\cdot 2^n}$$

$$< \frac{13}{5+4\cdot 2^N}$$

$$= \frac{13}{5+4\cdot\left(\frac{\frac{13}{\varepsilon}-5}{4}\right)}$$

$$= \varepsilon$$

No
Date

- Dalam Analisis Pendahuluan diperoleh

$$\frac{13}{5+4\cdot 2^N} = \varepsilon \iff \frac{13}{\varepsilon} = 5+4\cdot 2^N$$

$$2^N = \frac{\frac{13}{\varepsilon}-5}{4}$$

$$N\ln 2 = \ln\left(\frac{13}{\varepsilon}-5\right) - \ln 4$$

$$N = \frac{\ln\left(\frac{13}{\varepsilon}-5\right) - \ln 4}{\ln 2}$$

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{\ln n}{n}$$

Jawab:

♪ Kemonotonan :

$$a(x) = \frac{\ln x}{x} \iff a'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Diperoleh

$a'(x) < 0 \iff 1-\ln x < 0 \iff \ln e < \ln x \iff e < x$: turun pada (e, ∞)

$a'(x) > 0 \iff 1-\ln x > 0 \iff \ln e > \ln x \iff e > x$: naik pada $(0, e)$

Sehingga dapat diasumsikan bukan barisan monoton.

=> Paket 3

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

0.9, 0.99, 0.999, 0.999, ...

Jawab :

♪ Rumus Eksplisit

$$a_n = 1 - 10^{-n} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

♪ kekonvergenan :

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^\infty} \rightarrow \text{konvergen ke } 0$$

(b) Dengan definisi limit, buktikan barisan $\{a_n\}$ berikut konvergen:

$$a_n = \frac{n+3}{3n-2}$$

Jawab :

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3n-2} \overset{LH}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{3n}{n}-\frac{2}{n}} = \frac{1+0}{3-2} = \frac{1}{3} \text{ (konvergen)}$$

- Diperoleh $L = \frac{1}{3}$
- Misalkan $\varepsilon > 0$ diberikan
- Pilih $N = \dfrac{\frac{11}{\varepsilon} + 6}{9}$

- Untuk $n > N > 0$ diperoleh:

$$
\begin{aligned}
|a_n - L| &= \left| \frac{n+3}{3n-2} - \frac{1}{3} \right| \\
&= \left| \frac{3n+9-3n+2}{9n-6} \right| \\
&= \frac{11}{9n-6} \\
&< \frac{11}{9N-6} \\
&= \frac{11}{9\left(\frac{\frac{11}{\varepsilon}+6}{9}\right)-6} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

- Dalam analisis pendahuluan diperoleh:

$$\frac{11}{9N-6} = \varepsilon \iff \frac{11}{\varepsilon} = 9N-6$$

$$N = \frac{\frac{11}{\varepsilon}+6}{9}$$

(c) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut:

$$a_n = \frac{n!}{10^n}$$

Jawab:

♪ Kemonotonan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\, 10^n}{10^{n+1} \cdot n!} = \frac{n+1}{10}$$

sehingga

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$: $\{a_n\}$ tak-naik untuk n : $1, 2, \ldots, 9$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$: $\{a_n\}$ naik untuk $n = 10, 11, \ldots$

♪ Keterbatasan

- Karena $\{a_n\}$ tak-naik untuk $n = 1, 2, \ldots 9$, maka $a_9 = \frac{9!}{10^9} \approx 3.628 \times 10^{-4}$ merupakan batas bawah bersamaan dengan a_{10} karena $\frac{9!}{10^9} = \frac{10!}{10^{10}}$

No
Date

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}{10\cdot 10\cdot 10\cdot \ldots \cdot 10}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{10}\cdot\frac{n}{10}$

$= +\infty$

- Disimpulkan $\{a_n\}$ tidak terbatas di atas

○> Paket 1

(a) Tulis rumus eksplisit barisan berikut dan tentukan kekonvergenannya:

$\cos\pi, \frac{\cos 2\pi}{4}, \frac{\cos 3\pi}{9}, \frac{\cos 4\pi}{16}, \ldots$

Jawab:

♪ Rumus Eksplisit:

$a_n = \cos(n\pi)\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$

♪ Kekonvergenan:

$-1 < \cos(n\pi) < 1$

$-\frac{1}{n^2} < \frac{\cos(n\pi)}{n^2} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Berdasarkan teorema apit maka dapat disimpulkan $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2} = 0$, sehingga $a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$ konvergen ke 0

(b) Diketahui $\{a_n\}$ konvergen ke A dan $\{b_n\}$ konvergen ke B. Buktikan (dengan definisi limit) $\{a_n + b_n\}$ konvergen ke $A+B$.

Jawab:

- Karena $\{a_n\}$ konvergen ke A maka $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ selalu dapat ditemukan $N_1 > 0$ sedemikian sehingga $n > N_1$ berlaku

$$|a_n - A| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

- Karena $\{b_n\}$ konvergen ke B maka $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ selalu dapat ditemukan $N_2 > 0$ sedemikian sehingga $n > N_2$ berlaku

$$|b_n - B| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

- Pilih $N = \max\{N_1, N_2\}$. Diperoleh:

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (A+B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\le |a_n - A| + |b_n - B| \\ &< \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

- Terbukti bahwa $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$ (konvergen)

No
Date

(C) Tentukan kemonotonan, keterbatasan, dan limit (jika ada) barisan berikut :

$a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$

Jawab :

- Kemonotonan :

$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{n\pi}{4} \to$ tidak ada (divergen)

Dapat disimpulkan $\sin \frac{n\pi}{4}$ bukan barisan monoton

JOYKO® 36 Lines, 6 mm