Math IPB

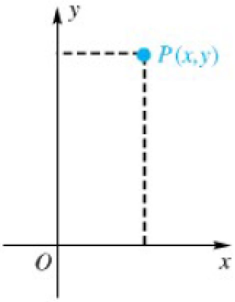
www.math.ipb.ac.id

Pertemuan ke-11: KOORDINAT POLAR

Departemen Matematika
FMIPA IPB

Bogor, 2017

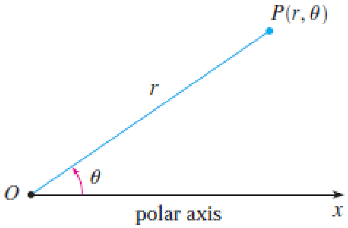
- Sebuah sistem koordinat menyatakan suatu titik pada bidang dengan sepasang bilangan terurut yang disebut koordinat.
- Sejauh ini kita telah menggunakan koordinat Cartesius, yang diperkenalkan oleh Descartes, yang merupakan jarak berarah dari dua sumbu yang saling tegak lurus.



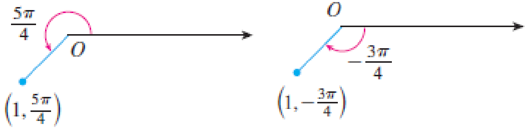
Koordinat Polar

- Pada bagian ini kita membahas suatu sistem koordinat yang disebut *sistem koordinat polar* atau *sistem koordinat kutub*.
- Sistem ini diperkenalkan oleh Newton, dan lebih mudah digunakan pada banyak kasus.
- Pada sistem ini, kita pilih sebuah titik pada bidang, yang disebut *titik kutub* atau *titik asal*, dan diberi lambang O.
- Lalu kita buat suatu garis yang berawal dari O, yang disebut *sumbu polar* atau *sumbu kutub*.
- Sumbu ini biasanya digambar secara horizontal ke kanan dan berimpit dengan sumbu-x pada koordinat Cartesius.

- Misalkan P adalah suatu titik pada bidang.
- Jika r adalah jarak dari O ke P, dan θ adalah sudut (biasanya diukur dalam radian) antara sumbu polar dan garis OP, maka pasangan berurut (r, θ) disebut *koordinat polar* dari titik P.

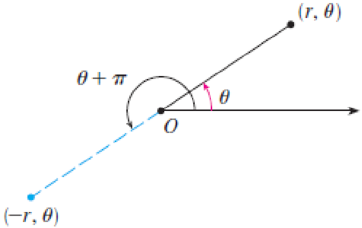


- Kita sepakati bahwa sudut adalah *positif* jika diukur berlawanan arah jarum jam dari sumbu polar dan *negatif* jika diukur searah jarum jam.



- Koordinat $(0, \theta)$ menyatakan titik asal, untuk sembarang nilai θ.

- Titik $(-r, \theta)$ dan (r, θ) terletak pada garis yang sama melalui O dan berjarak sama, yaitu $|r|$ dari O.



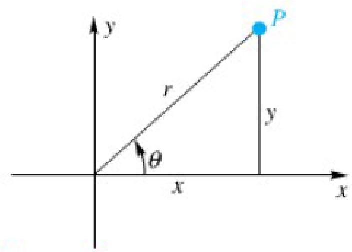
- Jika $r > 0$, titik (r, θ) terletak di kuadran yang sama dengan θ.

- Dalam koordinat Cartesius, setiap titik hanya memiliki satu penyajian.
- Dalam sistem koordinat polar, masing-masing titik mempunyai banyak penyajian.
- Titik (r, θ) dapat juga dinyatakan dengan

$$(r, \theta + 2n\pi) \qquad \text{atau} \qquad (-r, \theta + (2n+1)\,\pi)\,,$$

dengan n adalah bilangan bulat sembarang.

- Hubungan antara koordinat polar dengan koordinat Cartesius dapat dijelaskan sebagai berikut.



- Jika titik P mempunyai koordinat polar (r, θ) dan koordinat Cartesius (x, y), maka dengan bantuan gambar, dapat dilihat hubungan berikut:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \text{dan} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

- Jadi, jika kita tahu bahwa suatu titik P mempunyai koordinat polar (r, θ), maka koordinat Cartesiusnya adalah (x, y), dengan x dan y diberikan oleh

$$x = r\cos\theta \qquad \text{dan} \qquad y = r\sin\theta.$$

- Sebaliknya, jika kita tahu bahwa suatu titik P mempunyai koordinat Cartesius (x, y), maka koordinat polarnya adalah (r, θ), di mana r dan θ memenuhi hubungan berikut

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{dan} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Contoh

Plot titik-titik dengan koordinat polar berikut, kemudian tentukan koordinat Cartesiusnya.

1. $(1, 3\pi/2)$,
2. $(2, -2\pi/3)$,
3. $(-3, 3\pi/4)$.

Contoh

Nyatakan titik-titik koordinat Cartesius berikut dalam koordinat polar.

1. $(2, -2)$,
2. $(-3, 0)$,
3. $(-3, 3)$.

- Dalam sistem koordinat polar, suatu kurva umumnya dinyatakan dalam bentuk $r = f(\theta)$, untuk suatu fungsi f.

Contoh

Kurva apa yang dinyatakan oleh persamaan polar berikut:

1. $r = 3$,
2. $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Contoh

Buatlah sketsa kurva $r = 8 \sin \theta$ *dan tentukan persamaan Cartesiusnya.*

Contoh

Gambarlah grafik dari kurva berikut:

1. $r = 2 + 4\cos\theta$,
2. $|r| = 2 + 4\cos\theta$,
3. $r = 4\sin(2\theta)$,
4. $|r| = 4\sin(2\theta)$.

Irisan Kerucut dalam Koordinat Polar

- Pada bagian ini kita berikan suatu pendekatan yang lebih terpadu untuk ketiga jenis irisan kerucut berdasarkan fokus dan direktriksnya.
- Agar diperoleh persamaan polar yang relatif sederhana, kita letakkan fokus dari irisan kerucut tersebut di titik asal.

Teorema

Misalkan F adalah titik tetap (disebut fokus) dan l adalah garis tetap (disebut direktriks) pada suatu bidang datar. Misalkan e adalah bilangan positif tetap (disebut keeksentrikan atau eksentrisitas). Himpunan titik P pada bidang sedemikian rupa sehingga

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = e,$$

yaitu rasio jarak dari P ke F terhadap jarak dari P ke l adalah konstanta e, adalah suatu irisan kerucut.
Irisan kerucut tersebut merupakan:

1. *sebuah elips jika $e < 1$,*
2. *sebuah parabola jika $e = 1$,*
3. *sebuah hiperbola jika $e > 1$.*

Teorema

Persamaan polar yang berbentuk

1. $r = \dfrac{ed}{1 \pm e\cos\theta}$ *atau*
2. $r = \dfrac{ed}{1 \pm e\sin\theta}$

menyatakan suatu irisan kerucut dengan fokus (atau salah satu fokusnya) di titik asal dan keeksentrikan e*. Irisan kerucut tersebut adalah elips jika* $e < 1$*, parabola jika* $e = 1$ *dan hiperbola jika* $e > 1$*. Pada kasus (1) direktriksnya adalah garis* $x = \pm d$*, sedangkan pada kasus (2) direktriksnya adalah garis* $y = \pm d$*.*

Contoh

Tentukan persamaan polar irisan kerucut dengan fokus (salah satu fokus) di titik asal berikut:

1. *Parabola dengan direktriks* $y = -6$.
2. *Elips dengan* $e = 2/3$ *dan direktriks* $x = 4$.
3. *Hiperbola dengan* $e = 3/2$ *dan direktriks* $y = 6$.

Contoh

Untuk persamaan polar berikut, tentukan: jenis irisan kerucutnya, keeksentrikannya, persamaan direktriksnya, serta gambarlah grafiknya.

1. $r = \dfrac{4}{1 + 2\sin\theta}$.
2. $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$.
3. $r = \dfrac{6}{2 + \sin\theta}$.

Bahan Responsi

Soal

Gambarlah titik-titik dengan koordinat polar berikut dan tentukan koordinat Cartesiusnya.

1. $(4, \pi/3)$,
2. $(2, -\pi/2)$,
3. $(-5, \pi/6)$,
4. $(-4, -\pi/4)$.

Soal

Nyatakan titik-titik koordinat Cartesius berikut dalam koordinat polar.

1. $\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$,
2. $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$,
3. $\left(1, \sqrt{3}\right)$.

Soal

Buatlah sketsa dari kurva berikut dan tentukan persamaan Cartesiusnya.

1. $r = 6\cos\theta$,
2. $r = -4\sin\theta$,
3. $r\cos\theta + 6 = 0$,
4. $r = 2/\left(1 - \cos\theta\right)$.

Soal

Gambarlah grafik dari kurva berikut:

1. $r = 4 - 4\sin\theta,$
2. $r = 2 - 4\cos\theta,$
3. $r^2 = 4\cos(2\theta),$
4. $r = 5\cos(3\theta),$
5. $r = 5\sin(5\theta),$
6. $r = 2\theta, \quad \theta \geq 0.$

Soal

Tentukan persamaan polar irisan kerucut dengan fokus (salah satu fokus) di titik asal berikut:

1. *Parabola dengan direktriks* $x = 8$.
2. *Elips dengan* $e = 3/4$ *dan direktriks* $y = -6$.
3. *Hiperbola dengan* $e = 2$ *dan direktriks* $x = -6$.

Soal

Untuk persamaan polar berikut, tentukan: jenis irisan kerucutnya, keeksentrikannya, persamaan direktriksnya, serta gambarlah grafiknya.

1. $r = \dfrac{5}{2 - 2\sin\theta}$.
2. $r = \dfrac{6}{3 + 2\cos\theta}$.
3. $r = \dfrac{4}{2 - 3\cos\theta}$.
4. $r = \dfrac{6}{3 + 4\sin\theta}$.

Tentang Slide

- Penyusun: Dosen Departemen Matematika FMIPA IPB
- Versi: 2017
- Media Presentasi: LaTeX - BEAMER (PDFLaTeX)