Responsi 8. Aljabar Matriks

RUANG VEKTOR DAN ANAK RUANG VEKTOR

Ruang Vektor

Andaikan V adalah gugus yang di dalamnya berlaku operasi penjumlahan dan perkalian skalar, $\underline{u}, \underline{v}$, dan $\underline{w}$ anggota V dan c, d adalah skalar. Maka V disebut ruang vektor jika memenuhi 10 aksioma:

1. $\underline{u} + \underline{v}$ ada di dalam V atau tertutup terhadap operasi penjumlahan
2. $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$
3. $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$
4. V memuat vektor nol sehingga untuk setiap $\underline{u}$ pada V berlaku $\underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$
5. Untuk setiap $\underline{u}$ pada V terdapat $(-\underline{u})$ sehingga berlaku $\underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{0}$
6. $c.\underline{u}$ ada di dalam V atau tertutup terhadap operasi perkalian skalar
7. $c\,(\underline{u} + \underline{v}) = c\underline{u} + c\underline{v}$
8. $(c + d)\underline{u} = c\underline{u} + d\underline{u}$
9. $c(d\underline{u}) = cd(\underline{u})$
10. $1.\underline{u} = \underline{u}$

Ruang euclides ordo n (R^n)

Operasi yang dapat dilakukan:

1. Penjumlahan
   $\underline{u} + \underline{v} = (\underline{u_1} + \underline{v_1}, \underline{u_2} + \underline{v_2}, \dots, \underline{u_n} + \underline{v_n})$
2. Perkalian dengan skalar k
   $k\underline{u} = (k\underline{u_1}, k\underline{u_2}, \dots, k\underline{u_n})$
3. Perkalian titik
   $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u_1 v_1} + \underline{u_2 v_2} + \dots + \underline{u_n v_n}$
4. Panjang vektor
   $\|\underline{u}\| = \sqrt{\underline{u_1}^2 + \underline{u_2}^2 + \cdots + \underline{u_3}^2}$
5. Jarak dua vektor
   $d(\underline{u}, \underline{v}) = \|\underline{u} - \underline{v}\| = \sqrt{(\underline{u_1} - \underline{v_1})^2 + (\underline{u_2} - \underline{v_2})^2 + \cdots + (\underline{u_n} + \underline{v_n})^2}$

Contoh:

$\underline{u} = (1,2,3,4)$, $\underline{v} = (6,7,8,9)$ maka

$\underline{u} + \underline{v} = (1 + 6, 2 + 7, 3 + 8, 4 + 9) = (7,9,11,13)$

$\underline{u} \cdot \underline{v} = 1x6 + 2x7 + 3x8 + 4x9 = 80$

$\|\underline{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$
$d(\underline{u}, \underline{v}) = \|\underline{u} - \underline{v}\| = \sqrt{(1-6)^2 + (2-7)^2 + (3-8)^2 + (4-9)^2} = 10$

Anak Ruang Vektor

Misalkan W sub himpunan dari sebuah ruang vektor V maka W merupakan anak ruang vektor jika memenuhi:

1. $W \neq \{\}$
2. $W \subseteq V$
3. Jika $\underline{u}, \underline{v} \in W$ maka $\underline{u} + \underline{v} \in W$ atau tertutup terhadap operasi penjumlahan vektor
4. Jika $\underline{u} \in W$ dan $c \in \mathbb{R}$ maka $c\underline{u} \in W$ atau tertutup terhadap operasi perkalian skalar

Contoh Soal

1. Diketahui $u = \{\underline{u} | \underline{u} = [0\ u]', u \in \mathbb{R}\}$, apakah u merupakan anak ruang vektor?
   Jawab:
   - Dicek apakah u tertutup terhadap operasi penjumlahan vektor
     $[0\ u_1]' + [0\ u_2]' = [0\ \ u_1 + u_2]' \in u$ (tertutup)
   - Dicek apakah u tertutup terhadap operasi perkalian skalar
     $c[0\ u_1]' = [0\ cu_1]' \in u$ (tertutup)

   Karena u tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian maka u merupakan anak ruang vektor

2. Diketahui v= $\{v | \underline{v} = [v\ 1]', v \in \mathbb{R}\}$, apakah v merupakan anak ruang vektor?
   Jawab:
   - Dicek apakah v tertutup terhadap operasi penjumlahan vektor
     $[v_1\ 1]' + [v_2\ \ 1]' = [\ v_1 + v_2\ \ \ 2\ ]' \notin v$ (tidak tertutup)

     Seharusnya $[v_1 + v_2\ \ 1]'$
   - Dicek apakah v tertutup terhadap operasi perkalian skalar
     $c[\ v_1\ \ 1]' = [cv_1\ c]' \notin v$ (tidak tertutup)

     Seharusnya $[cv_1\ \ 1]'$

   Karena v tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian maka v bukan anak ruang vektor

3. Jika V adalah himpunan vektor 3x1 dengan bentuk

$$\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$$

   Untuk a bilangan real. Periksa apakah V adalah sebuah anak ruang vektor dari R^3!

Jawab:

$$V = \left\{ \underline{V} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

Karena R^3 maka dimisalkan 3 himpunan vektor

$\underline{V_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 \\ 3a_1 \end{pmatrix}$, $\underline{V_2} = \begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2 \\ 3a_2 \end{pmatrix}$, dan $\underline{V_3} = \begin{pmatrix} a_3 \\ 2a_3 \\ 3a_3 \end{pmatrix}$

- Dicek apakah V tertutup terhadap operasi penjumlahan vektor

$$\underline{V_1} + \underline{V_2} + \underline{V_3} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 \\ 3a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2 \\ 3a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 \\ 2a_3 \\ 3a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 \\ 3a_1 + 3a_2 + 3a_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ 2(a_1 + a_2 + a_3) \\ 3(a_1 + a_2 + a_3) \end{pmatrix} \in V$$

  Tertutup

- Dicek apakah V tertutup terhadap operasi perkalian skalar
  Cukup dicek pada salah satu himpunan vektor

$$c\underline{V_1} = c \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 \\ 3a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ 2ca_1 \\ 3ca_1 \end{pmatrix} \in V$$

  Tertutup

Maka V merupakan anak ruang vektor dari R^3.

4. Jika W adalah himpunan vektor 3x1 dengan bentuk

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ ab \end{pmatrix}$$

Untuk a dan b bilangan real. Periksa apakah W adalah anak ruang vektor dari R^3!

Jawab:

$$W = \left\{ \underline{W} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ ab \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Karena R^3 maka dimisalkan 3 himpunan vektor

$\underline{W_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_1b_1 \end{pmatrix}$, $\underline{W_2} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ a_2b_2 \end{pmatrix}$, dan $\underline{W_3} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ a_3b_3 \end{pmatrix}$

- Dicek apakah W tertutup terhadap operasi penjumlahan vektor

$$\underline{W_1} + \underline{W_2} + \underline{W_3} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_1b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ a_2b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ a_3b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{pmatrix} \notin W$$

  Tidak tertutup
  Seharusnya $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ berbentuk $(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$

- Dicek apakah W tertutup terhadap operasi perkalian skalar
  Cukup dicek pada salah satu himpunan vektor

$$c\underline{W_1} = c\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_1b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ cb_1 \\ ca_1b_1 \end{pmatrix} \in W$$

Tertutup

Karena W tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan vektor maka W bukan anak ruang vektor dari R^3.