MUHAMMAD RIZKY NURHAMBALI
G1419022

TUGAS INDIVIDU ALJABAR MATRIKS

1. Buktikan $(A+B)+C = A+(B+C)$

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$; $B = [b_{ij}]_{m\times n}$; $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ => berdimensi sama

$(A+B)+C = A+(B+C)$

$[(a_{ij}+b_{ij})]_{m\times n} + [c_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} + [(b_{ij})+(c_{ij})]_{m\times n}$; untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$

Penjumlahan tiga buah matriks diperoleh dengan menjumlahkan unsur-unsur yang seletak pada masing-masing matriks. Penjumlahan juga hanya dapat dilakukan dari matriks sekatan yang sama / identik. Unsur-unsur matriks juga yang merupakan bilangan real menunjukkan sifat asosiatif pada penjumlahan matriks terbukti.

---

2. Matriks segitiga atas / bawah itu non-singular?

Matriks segitiga

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ => matriks segitiga atas, jhj $a_{ij} = 0$, untuk $i > j$, dan $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ => matriks segitiga bawah, jhj $a_{ij} = 0$, untuk $i < j$, dan $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$

Matriks non-singular : - pangkat penuh
- memiliki invers
- $\det(A) \neq 0$

$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \dots a_n$

Bukti / ?

Contoh matriks segitiga atas / bawah singular

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ => $\det(A) = 0$ (karena ada salah satu unsur yang nol (0)

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ => $\det(B) = 0$

Unsur matriks merupakan bilangan real, sehingga $\det(A)$ dapat bernilai 0 atau bukan nol (0).

Sehingga dapat disimpulkan matriks segitiga atas / bawah dapat singular atau non-singular

Contoh matriks segitiga non-singular : $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} = 49$

---

3. Matriks idempotent selalu non-singular?

Matriks idempoten => jhj $AA = A$

non-singular jika => $\det(A) \neq 0$

Determinan matriks idempoten:

$AA = A$

$\det(A) \cdot \det(A) = \det(A)$

$(\det(A))^2 = \det(A)$

$(\det(A))^2 - \det(A) = 0$

$\det(A) \cdot (\det(A) - 1) = 0$

$\det(A) = 0$ atau $\det(A) = 1$

Berdasarkan hal itu, matriks idempoten tidak selalu non-singular.

Bukti matriks idempoten singular:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ => $\det(A) = 0$

$AA = A$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

MUHAMMAD RIZKY NURHAMBALI
G14190022

4. Penjumlahan dua matriks miring simetrik = matrik miring simetrik?
Matriks miring simetrik : $A = [a_{ij}]_{n \times n} \Rightarrow A = -A^T \Rightarrow A^T = -A$

$a_{ij} = -a_{ij}$ untuk semua ij dan $a_{ii} = 0$ untuk semua $i = 1, 2, \dots, n$

Misalkan A dan B adalah matriks miring simetrik, dan $C = A + B$, maka :

$C = A + B$
$C = -A^T + (-B)^T$
$C = -(A^T + B^T)$
$C = -(A+B)^T$
$C = -C^T$

$C^T = (A+B)^T$
$C^T = A^T + B^T$
$C^T = -A - B$
$C^T = -(A+B)$
$C^T = -C$

Jadi, penjumlahan dua matriks miring simetrik akan menghasilkan miring simetrik (terbukti).

---

5. A = matriks idempotent, $A^k = A$ untuk semua integer $k > 1$?
A idempoten $\Rightarrow AA = A$
$A^k = A$

* Induksi matematika
Untuk $k = 2$; $A^2 = AA = A$
$p = k \Rightarrow A^k = A$ benar
Periksa $A^{k+1} = A$
$\hookrightarrow$ dari $p = k$ dan A idempoten sehingga : $A^{k+1} = A^k A = AA = A$ (terbukti)

---

6. $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$ Hitung determinan, teras, dan invers (jika ada)?!

Kolom 1 sebagai tumpuan

$\det(B) = a_{11} C_{11} + a_{21} C_{21} + a_{31} C_{31}$
$= -2(-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} + 1(-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} + 0(-1)^{3+1} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$
$= (-2)(1)(4) + (1)(-1)(-12) + (0)(1)(-7)$
$= -8 + 12 + 0$
$= 4$

Teras
$tr(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = -2 + 3 + (-8) = -7$

Karena $\det(B) \neq 0$, maka B memiliki invers (cara di halaman selanjutnya).

MUHAMMAD RIZKY NURHAMBALI
G14190022

6. $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$ $\det(B) = 4$

$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} = -24 - (-28) = 4$

$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = (-1)(-8) = 8$

$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 + 0 = 4$

$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} = (-1)(-32-(-20)) = 12$

$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = 16$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = (-1)(-8) = 8$

$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} = -28 - (-15) = -13$

$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} = (-1)(14-(-5)) = -19$

$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -6 - 4 = -10$

$C = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 12 & 16 & 8 \\ -13 & -19 & -10 \end{bmatrix}$; $C^T = \begin{bmatrix} 4 & 12 & -13 \\ 8 & 16 & -19 \\ 4 & 8 & -10 \end{bmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot C^T$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 12 & -13 \\ 8 & 16 & -19 \\ 4 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -13/4 \\ 2 & 4 & -19/4 \\ 1 & 2 & -10/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3,25 \\ 2 & 4 & -4,75 \\ 1 & 2 & -2,5 \end{bmatrix}$$

7. SPL $\Rightarrow$ $\left.\begin{aligned} A - 4B + 2C &= -32 \\ 2A + B + 3C &= 2 \\ 4A + B + 7C &= -6 \end{aligned}\right\}$ Cari solusi dengan Eliminasi Gauss-Jordan

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -32 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}}_{b} \Rightarrow [A \vdots b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -32 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 7 & -6 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -32 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 7 & -6 \end{array}\right] \underset{E_{31(-4)}}{\overset{E_{21(-2)}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -32 \\ 0 & 9 & -1 & 66 \\ 0 & 17 & -1 & 122 \end{array}\right] \overset{E_{32(-17/9)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -32 \\ 0 & 9 & -1 & 66 \\ 0 & 0 & 8/9 & -8/3 \end{array}\right] \overset{E_{3(9)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -32 \\ 0 & 9 & -1 & 66 \\ 0 & 0 & 8 & -24 \end{array}\right]$$

Berdasarkan matriks gandeng terakhir, didapat $r(A|b) = r(A) = 3$ sehingga solusi SPL konsisten adalah unik.

$A - 4B + 2C = -32 \Rightarrow A - 4(7) + (2)(-3) = -32 \Rightarrow A = -32 + 6 + 28 = 2$
$9B - C = 66 \Rightarrow 9B - (-3) = 66 \Rightarrow 9B = 63 \Rightarrow B = 7$
$8C = -24 \Rightarrow C = -3$

Solusi $A = 2$, $B = 7$, $C = -3$ $\quad \underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Jika PDB dilanjutkan menghasilkan $[\tilde{A} : \tilde{b}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -32 \\ 0 & 9 & -1 & 66 \\ 0 & 0 & 8 & -24 \end{array}\right] \underset{E_{13}(-\frac{1}{4})}{\overset{E_{23}(\frac{1}{8})}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & -26 \\ 0 & 9 & 0 & 63 \\ 0 & 0 & 8 & -24 \end{array}\right] \overset{E_{12}(4/9)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 63 \\ 0 & 0 & 8 & -24 \end{array}\right] \underset{E_3(\frac{1}{8})}{\overset{E_2(\frac{1}{9})}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Matriks koefisien sistem linear berupa matriks identitas sekilas menunjukkan solusi yang identik dengan vektor konstanta, $\tilde{x} = \tilde{b}$.