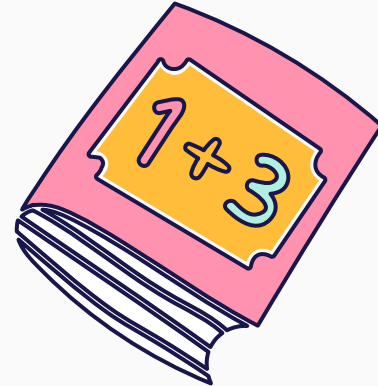
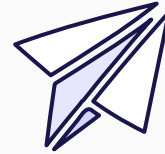


Operasi Baris Elementer, Pangkat Matriks dan Matriks Kebalikan

Pertemuan 4 Aljabar Matriks

$$2 + 2$$

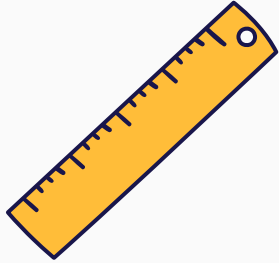
5TH GRADE



01

Operasi Baris Elementer dan Kaitannya dengan Determinan Matriks

$$2 + 2$$



3 Macam Operasi Baris Elementer

01

$E_{i(k)}$

Mengalikan baris ke- i dengan konstanta k

$$1 + 3$$

02

E_{ij}

Menukar baris ke- i dan baris ke- j

03

$E_{ij(k)}$

Mengalikan baris ke- j dengan k , kemudian menjumlahkannya dengan baris ke- i

$$2 + 2$$

Contoh Operasi Baris Elementer $E_{1(2)}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$E_{1(2)}$

• ————— • Mengalikan baris pertama dengan konstanta 2 • ————— •

$$E_{1(2)}(A) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Contoh Operasi Baris Elementer E_{12}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

E_{12}

Menukar baris ke-1 dengan baris ke-2

$E_{1(2)}(A)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Contoh Operasi Baris Elementer $E_{12}(2)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{E_{12}(2)} & E_{12}(2)(\mathbf{A}) \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{Mengalikan baris ke-2 dengan} \\ \text{konstanta 2, lalu menjumlahkan} \\ \text{hasilnya dengan baris pertama,} \\ \text{dimana baris yang berubah hanya} \\ \text{baris pertama} \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks Baris Elementer



01

$E_{1(2)}(I)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1 + 3$$

02

$E_{12}(I)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2 + 2$$

03

$E_{12(2)}(I)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer

Melakukan operasi baris elementer terhadap sebuah matriks $n \times m$ sama dengan melakukan perkalian matriks operasi baris berukuran $n \times n$ dengan matriks yang bersangkutan

$$\begin{array}{ccc} A & & M_{1(2)}A & & E_{1(2)}(A) \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\quad} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\quad} & \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Determinan Matriks Baris Elementer

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$M_{1(2)} = E_{1(2)}(I)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\det(M_{i(k)}) = k$$

$$\det(M_{1(2)}) = 2$$

Determinan Matriks Baris Elementer

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$M_{12} = E_{12}(I)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\det(M_{ij}) = -1$$

$$\det(M_{12}) = -1$$

Determinan Matriks Baris Elementer

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$M_{12(2)} = E_{12(2)}(I)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\det(M_{ij(k)}) = 1$$

$$\det(M_{12(2)}) = 1$$

Determinan Hasil Operasi Baris Elementer

01

Jika A adalah matriks persegi, maka:

$$\det(E_{i(k)}(A)) = k \det(A)$$

$$\det(E_{ij}(A)) = -\det(A)$$

$$\det(E_{ij(k)}(A)) = \det(A)$$

$$1 + 3$$

03

Jika A adalah matriks dengan determinan tidak nol, maka operasi baris terhadap A akan menghasilkan matriks yang determinannya juga tidak nol

$$2 + 2$$

02

Jika A adalah matriks dengan determinan 0 (nol), maka operasi baris terhadap A akan menghasilkan matriks yang determinannya juga 0 (nol)



02


$$2+2$$

Pangkat Matriks



Pangkat Matriks (Rank)

Pangkat dari sebuah matriks $A_{m \times n}$ dilambangkan dengan $r(A)$ adalah ordo anak matriks persegi A yang terbesar dan determinannya tidak sama dengan nol

A

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 8 \neq 0$$

$$r(A) = 3$$

B

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = 0$$

$$r(B) \neq 3$$

Ambil sub-matriks B dengan
ukuran 2x2



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det = -2 \neq 0$$

$$r(B) = 2$$

Pangkat Matriks (Rank)



01

Pangkat dari matriks tidak akan melebihi banyak baris dan kolomnya

02

Untuk $A_{n \times n}$ dengan $r(A) = n$, maka A disebut sebagai matriks berpangkat penuh (a full rank matrix)

03

Untuk $A_{m \times n}$ dengan $m < n$ dan $r(A) = m$, maka A disebut sebagai matriks berpangkat baris penuh (a full row rank matrix)

$$1 + 3$$

$$2 + 2$$

Pangkat Matriks (Rank)



04

Untuk $A_{m \times n}$ dengan $m > n$ dan $r(A) = n$, maka A disebut sebagai matriks berpangkat kolom penuh (a full column rank matrix)

05

Operasi baris elementer tidak mengubah pangkat dari sebuah matriks

06

Pangkat dari matriks A sama dengan ordo matriks identitas pada bentuk kanonik A yang diperoleh melalui operasi baris/kolom elementer

$$1 + 3$$

$$2 + 2$$

03

$$2+2$$

Matriks Kebalikan

Matriks Kebalikan

Matriks kebalikan bagi $A_{n \times n}$ dilambangkan dengan A^{-1} adalah matriks yang memenuhi

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Untuk memperoleh matriks $B = [b_{ij}] = A^{-1}$ dapat dilakukan dengan menghitung $B = A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}A$

Dengan $\text{adj}A$ adalah matriks adjoin A , yaitu matriks yang berisi cofactor dari A kemudian di transpose

Cofactor : $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ dengan A_{ij} adalah matriks minor yaitu anak matriks A yang dibuang baris ke- i dan kolom ke- j nya

Contoh Matriks Kebalikan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \quad \det(\mathbf{A}) = 2 \times 9 - 5 \times 3 = 3$$

$$C_{11} = 9 \quad C_{12} = -3$$

$$C_{21} = -5 \quad C_{22} = 2$$

$$\text{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Syarat Keberadaan Matriks Kebalikan

01

A^{-1} hanya ada untuk
matriks A yang persegi

02

A^{-1} hanya ada jika $\det(A) \neq 0$

Matriks Singular dan Non-singular



01

Matriks persegi A disebut matriks singular jika dan hanya jika A tidak memiliki matriks kebalikan

02

Matriks persegi A yang memiliki matriks kebalikan disebut sebagai matriks non-singular

03

Matriks A non-singular \rightarrow matriks A berpangkat penuh $\rightarrow \det(A) \neq 0$

$$1 \times 3$$

$$2 \times 2$$

Sifat-Sifat Matriks Kebalikan

1.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2.

A^{-1} bersifat unik

3.

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

4.

Jika A adalah matriks orthogonal, maka $A^{-1} = A^T$

5.


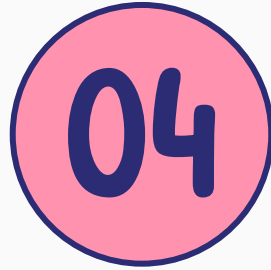
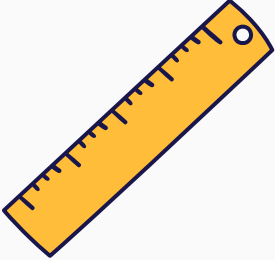
Untuk A dan B non-singular berukuran sama,
 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

6.

Jika A adalah matriks diagonal dengan unsur a_{ij} maka A^{-1} adalah matriks diagonal dengan unsur $1/a_{ij}$

7.

Jika A matriks simetrik, maka A^{-1} juga simetrik



04


$$2+2$$

R-Studio Time!!



05



$2+2$

Soal Latihan ^o^



Soal Latihan

Tentukan matriks A jika:

1. $(2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. $(-2A' + 3I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Soal Latihan

Tentukan kebalikan matriks A dibawah ini

$$1. \quad A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 & -6 & 8 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

THANKS!

1 + 3



Do you have any questions?



CREDITS: This presentation template was created by **Slidesgo**, including icons by **Flaticon** and infographics & images by **Freepik**

