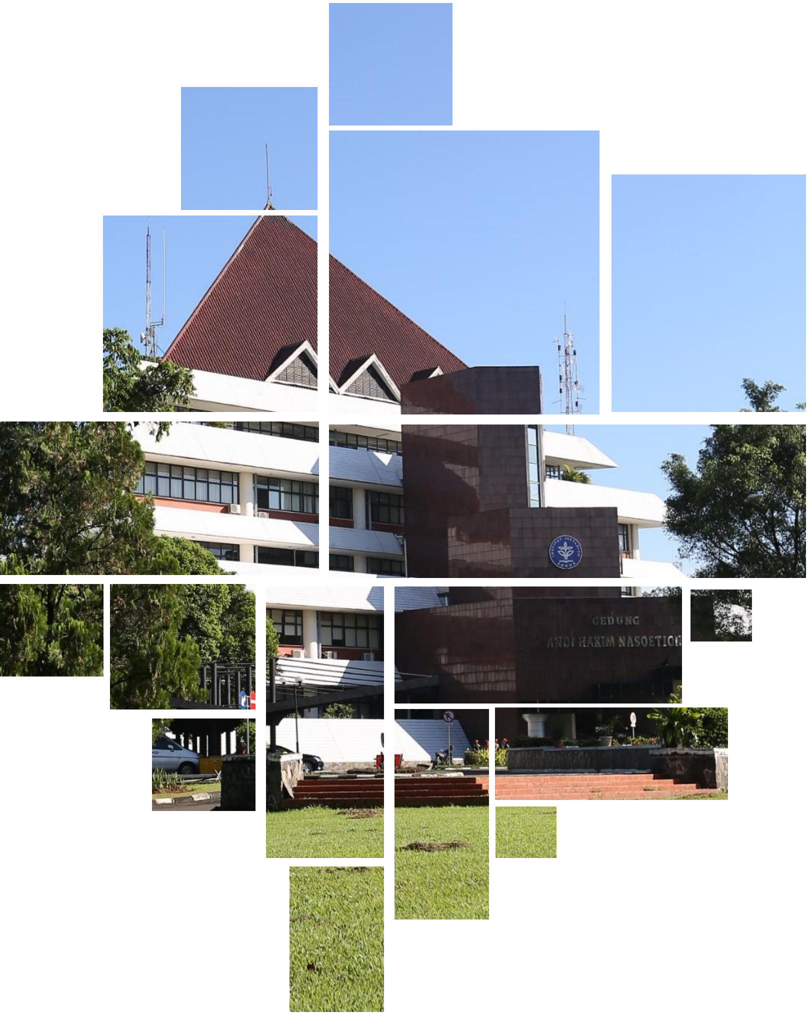
- O.B.E
- pangkat matriks [rank]
- matriks kebalikan [inverse]

Operasi Baris Elementer



disusun oleh:
Bagus Sartono
bagusco@apps.ipb.ac.id

Prodi Statistika dan Sains Data
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor

IPB University
Bogor Indonesia

- Tiga macam operasi baris elementer
  - $E_{i(k)}$: mengalikan baris ke-*i* dengan konstanta *k*
  - E_{ij} : menukar baris ke-*i* dan baris ke-*j*
  - $E_{ij(k)}$: mengalikan baris ke-*j* dengan *k*, kemudian menjumlahkannya dengan baris ke-*i*

Operasi Baris Elementer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E_{1(2)}$$

baris ke-1 dikalikan 2

$$E_{1(2)}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

E_{12}

baris ke-1 dipertukarkan dengan baris ke-2

$$E_{12}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$E_{12(2)}$

baris ke-2 dikalikan 2 dan selanjutnya dijumlahkan ke baris ke-1

catatan: yang berubah hanya baris ke-1

$$E_{12(2)}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks Baris Elementer

- Matriks yang dihasilkan dari operasi baris elementer terhadap matriks matriks identitas

$$\mathbf{M}_{1(2)} = E_{1(2)}(\mathbf{I}) = E_{1(2)}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12} = E_{12}(\mathbf{I}) = E_{12}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12(2)} = E_{12(2)}(\mathbf{I}) = E_{12}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinan Matriks Baris Elementer

$$\mathbf{M}_{1(2)} = E_{1(2)}(\mathbf{I}) = E_{1(2)}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{M}_{1(2)}) = 2$

$\det(\mathbf{M}_{i(k)}) = k$

$$\mathbf{M}_{12} = E_{12}(\mathbf{I}) = E_{12}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{M}_{12}) = -1$

$\det(\mathbf{M}_{ij}) = -1$

$$\mathbf{M}_{12(2)} = E_{12(2)}(\mathbf{I}) = E_{12}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{M}_{12(2)}) = 1$

$\det(\mathbf{M}_{ij(k)}) = 1$

Operasi Baris Elementer

- Melakukan operasi baris elementer terhadap sebuah matriks n x m sama dengan melakukan perkalian matriks operasi baris berukuran n x n dengan matriks yang bersangkutan.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad E_{1(2)}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{1(2)}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer

- Melakukan operasi baris elementer terhadap sebuah matriks n x m sama dengan melakukan perkalian matriks operasi baris berukuran n x n dengan matriks yang bersangkutan.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad E_{12}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer

- Melakukan operasi baris elementer terhadap sebuah matriks n x m sama dengan melakukan perkalian matriks operasi baris berukuran n x n dengan matriks yang bersangkutan.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad E_{12(2)}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12(2)}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinan hasil operasi baris elementer

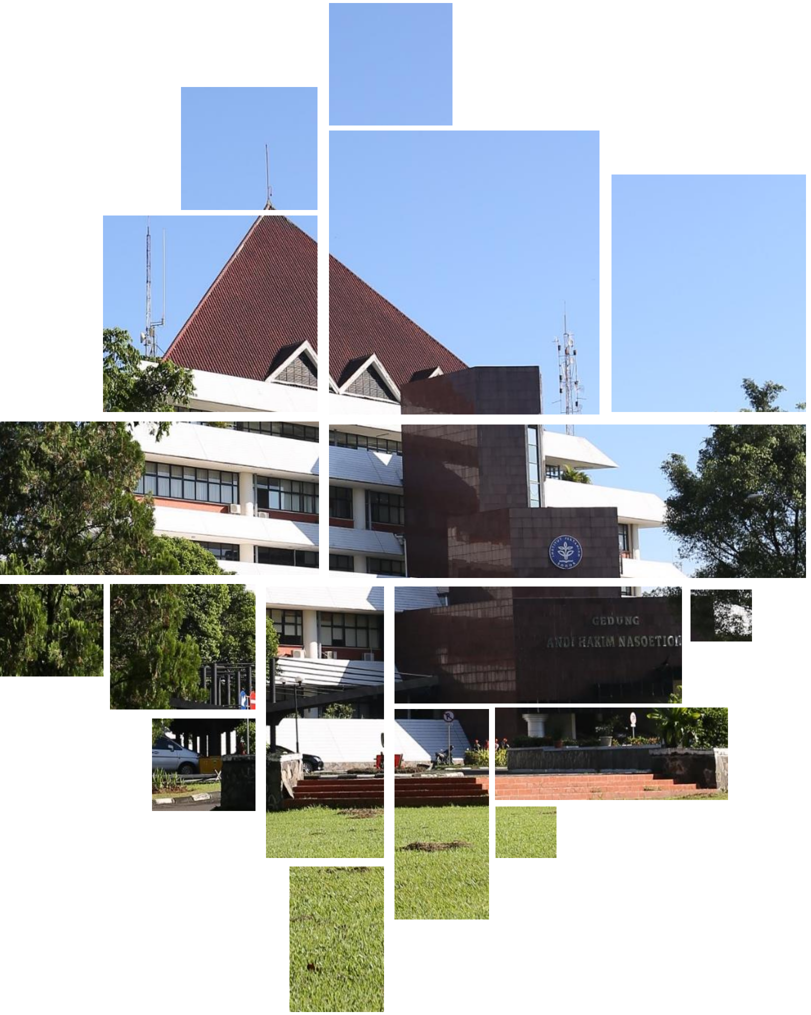
- Jika **A** adalah matriks persegi, maka:
  - $\det(E_{i(k)}(\mathbf{A})) = k \det(\mathbf{A})$
  - $\det(E_{ij}(\mathbf{A})) = -\det(\mathbf{A})$
  - $\det(E_{ij(k)}(\mathbf{A})) = \det(\mathbf{A})$

- Jika **A** adalah matriks dengan determinan 0 (nol), maka operasi baris terhadap **A** akan menghasilkan matriks yang determinannya juga 0 (nol).
- Jika **A** adalah matriks dengan determinan tidak nol, maka operasi baris terhadap **A** akan menghasilkan matriks yang determinannya juga tidak nol. [**kecuali saat k = 0 saat operasi $E_{i(k)}$**]

$$
\begin{aligned}
\det(E_{i(k)}(\mathbf{A})) &= \det(\mathbf{M}_{i(k)} \times \mathbf{A})\\
&= \det(\mathbf{M}_{i(k)}) \times \det(\mathbf{A})\\
&= k \times \det(\mathbf{A})\\
&= k \times \det(\mathbf{A})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(E_{ij}(\mathbf{A})) &= \det(\mathbf{M}_{ij} \times \mathbf{A})\\
&= \det(\mathbf{M}_{ij}) \times \det(\mathbf{A})\\
&= -1 \times \det(\mathbf{A})\\
&= -\det(\mathbf{A})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(E_{ij(k)}(\mathbf{A})) &= \det(\mathbf{M}_{ij(k)} \times \mathbf{A})\\
&= \det(\mathbf{M}_{ij}) \times \det(\mathbf{A})\\
&= 1 \times \det(\mathbf{A})\\
&= \det(\mathbf{A})
\end{aligned}
$$



Pangkat Matriks

disusun oleh:
Bagus Sartono
bagusco@apps.ipb.ac.id

Prodi Statistika dan Sains Data
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor

Pangkat Matriks (Rank)

- Pangkat dari sebuah matriks ${}_m\mathbf{A}_n$, dilambangkan $r(\mathbf{A})$, adalah ordo anak matriks persegi **A** yang terbesar dan determinannya tidak sama dengan nol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

det(A) = 8

ordo-nya 3

Pangkat(A) = r(A) = 3

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

det(**B**) = 0

r(B) tidak sama dengan 3

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

det = -2

jadi r(B) = 2

Pangkat Matriks (Rank)

- Jelas bahwa untuk sebuah matriks ${}_m\mathbf{A}_n$, maka $r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$, atau dengan kata lain pangkat dari matriks tidak akan melebihi banyak baris dan kolomnya.

Matriks Berpangkat Penuh

- Untuk ${}_n\mathbf{A}_n$ dengan r(**A**) = n, maka **A** disebut sebagai matriks berpangkat penuh (*a full-rank matrix*)
- Untuk ${}_m\mathbf{A}_n$ dengan $m < n$ dan $r(\mathbf{A}) = m$, maka **A** disebut sebagai matriks berpangkat baris penuh (*a full-row-rank matrix*)
- Untuk ${}_m\mathbf{A}_n$ dengan $m > n$ dan $r(\mathbf{A}) = n$, maka **A** disebut sebagai matriks berpangkat kolom penuh (*a full-column-rank matrix*)

A adalah matriks persegi *nxn* yang determinan tidak nol…

- r(**A**) = n
- **A** matriks berpangkat penuh

Pangkat Matriks (Rank)

- Operasi baris/kolom elementer tidak mengubah pangkat dari sebuah matriks
- Pangkat dari matriks **A** sama dengan ordo matriks identitas pada bentuk kanonik **A** yang diperoleh melalui operasi baris/kolom elementer.

Menghitung Pangkat Matriks di R

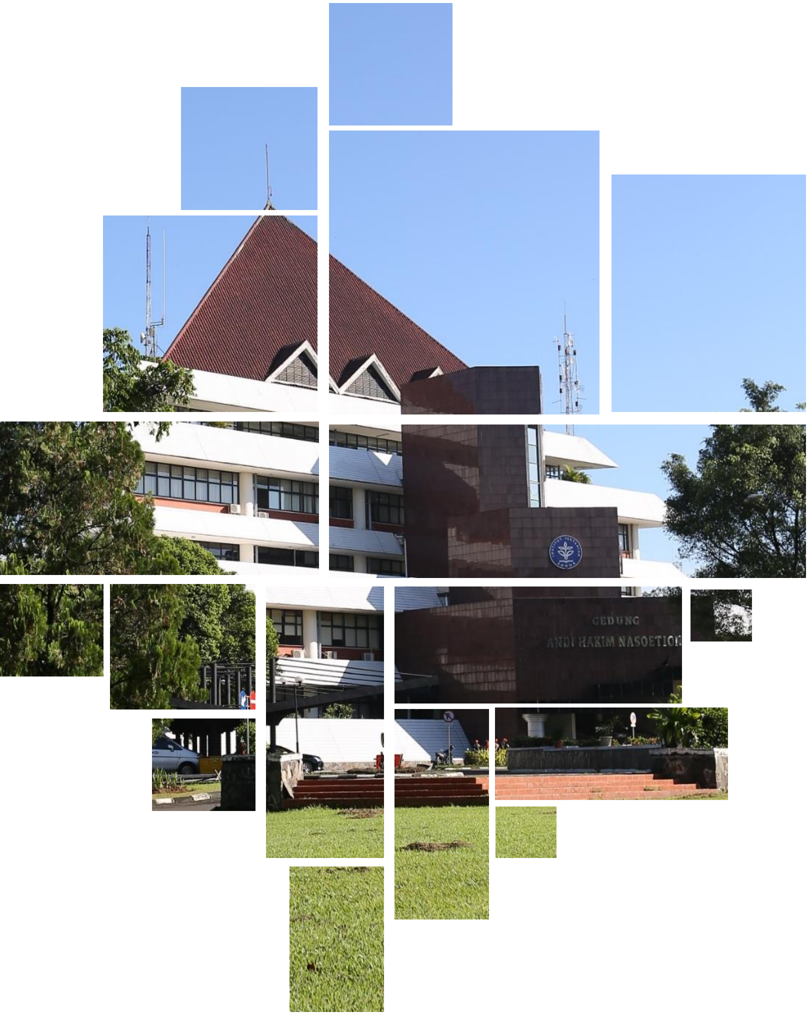
```
> A = matrix(c(1,0,2,0,1,2,2,2,1), ncol=3, byrow=TRUE)
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    2
[2,]    0    1    2
[3,]    2    2    1

> library(Matrix)
> rankMatrix(A)[1]
[1] 3
```

Menghitung Pangkat Matriks di R

```
> A = matrix(c(1,0,2,0,1,2,2,2,1,2,2,1), ncol=3, byrow=TRUE)
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    2
[2,]    0    1    2
[3,]    2    2    1
[4,]    2    2    1

> library(Matrix)
> rankMatrix(A)[1]
[1] 3
```



Matriks Kebalikan

inverse matrix

disusun oleh:

Bagus Sartono

bagusco@apps.ipb.ac.id

Prodi Statistika dan Sains Data

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Institut Pertanian Bogor

IPB University — Bogor Indonesia —

Matriks Kebalikan

Matriks kebalikan bagi ${}_n\mathbf{A}_n$ dilambangkan $\mathbf{A}^{-1}$ adalah matriks yang memenuhi $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$

Menghitung Matriks Kebalikan

- Untuk memperoleh matriks $\mathbf{B} = [b_{ij}] = \mathbf{A}^{-1}$ dapat dilakukan dengan menghitung

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj\mathbf{A}$$

- dengan *adj***A**, matriks adjoint **A**, yaitu matriks yang berisi *cofactor* dari **A** kemudian di-transpose
- cofactor:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$$

$\mathbf{A}_{ij}$ adalah matriks minor yaitu anak matriks **A** yang dibuang baris ke-*i* dan kolom ke-*j* nya

Contoh

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

det(A) = 2x9 – 5x3 = 3

$C_{11} = 9$ $C_{12} = -3$

$C_{21} = -5$ $C_{22} = 2$

$$adj\mathbf{A} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Syarat keberadaan matriks kebalikan

- $\mathbf{A}^{-1}$ hanya ada untuk matriks **A** yang persegi
- $\mathbf{A}^{-1}$ hanya ada jika det(**A**) $\neq 0$

Matriks Singular dan Non-Singular

- Matriks persegi **A** disebut matriks ***singular*** jika dan hanya jika tidak ada matriks **B** sehingga **AB**=**BA**=**I**, atau **A** tidak memiliki matriks kebalikan
- Matriks persegi **A** yang memiliki kebalikan disebut sebagai ***matriks non-singular***
- Matriks **A** non-singular $\Leftrightarrow$ **A** berpangkat penuh $\Leftrightarrow$ det(**A**) $\neq 0$

Sifat-Sifat

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}^{-1}$ bersifat unik
- $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$
- untuk **A** dan **B** yang non-singular dan berukuran sama, $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Sifat-Sifat

- Jika **A** adalah matriks diagonal dengan unsur diagonal a_{ii}, maka $\mathbf{A}^{-1}$ adalah matriks diagonal dengan unsur diagonal $1/a_{ii}$

- Jika **A** adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{T}$

- Jika **A** matriks simetrik, maka $\mathbf{A}^{-1}$ juga simetrik

Menghitung Matriks Kebalikan di R

```
> A <- matrix(c(1, 2, 3, 1, 3, 4, 1, 4, 3), nrow=3,
byrow=TRUE)
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    1    3    4
[3,]    1    4    3

> A.invers <- solve(A)
> A.invers
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  3.5   -3  0.5
[2,] -0.5    0  0.5
[3,] -0.5    1 -0.5
```

Terima Kasih

IPB University

Bogor Indonesia

Inspiring Innovation with Integrity

in Agriculture, Ocean and Biosciences for a Sustainable World