

STK201 Aljabar Matriks

Semester Ganjil 2022/2023

PERTEMUAN #3

Teras dan Determinan

disusun oleh:
Bagus Sartono
bagusco@gmail.com
0852-1523-1823

Prodi Statistika dan Sains Data
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor



2022



IPB University
— Bogor Indonesia —

Outline

- Teras Matriks Persegi dan Sifat-Sifatnya
- Determinan Matriks Persegi dan Sifat-Sifatnya

Teras Matriks

Teras (Bahasa Inggris: *trace*) dari sebuah matriks persegi $n \times n$ dilambangkan $\text{tr}(\mathbf{A})$ didefinisikan sebagai $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Teras tidak lain adalah **penjumlahan dari unsur diagonal** matriks persegi

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(\mathbf{K}) = 1 + 2 + 1 + 6 = 10$$

Beberapa sifat teras matriks

- $\text{tr}(\mathbf{A}^T) = \text{tr}(\mathbf{A})$
- Untuk ${}_m\mathbf{A}_n$ dan ${}_n\mathbf{B}_m$ sembarang matriks real, $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$

Menghitung Teras Matriks di R

```
> D = matrix(c(3, 4, 5, 6, 3, 8, 9, 4, 9), ncol= 3, byrow=TRUE)
```

```
> D
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	3	4	5
[2,]	6	3	8
[3,]	9	4	9

```
> sum(diag(D))
```

```
[1] 15
```

Determinan Matriks: definisi

- Determinan dari suatu matriks persegi $\mathbf{A}_n = [a_{ij}]_{n \times n}$ dilambangkan $\det(\mathbf{A})$ atau $|\mathbf{A}|$, didefinisikan sebagai:
- untuk $n = 1$, $\det(\mathbf{A}) = a_{11}$
- untuk $n = 2$, $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- untuk $n > 2$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad \text{untuk sembarang baris ke-} i, \text{ atau}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad \text{untuk sembarang kolom ke-} j$$

dengan

$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$, dan

\mathbf{A}_{ij} adalah matriks minor yaitu anak matriks \mathbf{A} yang dibuang baris ke- i dan kolom ke- j nya

Contoh menghitung determinan

$$\mathbf{A} = [2]$$

$$\det(\mathbf{A}) = 2$$

$$\mathbf{B} = [4]$$

$$\det(\mathbf{B}) = 4$$

$$\mathbf{C} = [3]$$

$$\det(\mathbf{C}) = 3$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{D}) &= 1(1) - 2(3) \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{F}) &= 1(2) - 4(3) \\ &= -10 \end{aligned}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{G}) &= 2(2) - 4(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Contoh menghitung determinan

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad \text{untuk sembarang baris ke-}i$$

misal gunakan baris ke-3 sebagai tumpuan

$$\det(\mathbf{H}) = a_{31} C_{31} + a_{32} C_{32} + a_{33} C_{33}$$

$$= 1 (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 1 (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 0 (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 (1) (0) + 1 (-1) (-10) + 0 (1) (-5)$$

$$= 10$$

Determinan Matriks Diagonal dan Segitiga Atas/Bawah

Jika $_n\mathbf{A}_n$ adalah matriks diagonal, maka

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \dots \times a_{nn}$$

Jika $_n\mathbf{A}_n$ adalah matriks segitiga atas/bawah, maka

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \dots \times a_{nn}$$

Sifat-Sifat Determinan

- Jika **A** memiliki baris atau kolom yang seluruhnya bernilai 0 (nol) maka $\det(\mathbf{A}) = 0$
- Jika **A** memiliki sedikitnya dua baris atau dua kolom yang unsurnya bernilai sama maka $\det(\mathbf{A}) = 0$

Sifat-Sifat Determinan

- Jika **A** dan **B** adalah matriks persegi berukuran sama, maka $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{B})$
- Jika matriks **B** diperoleh dengan cara menukar posisi dari dua buah baris (atau kolom) matriks **A**, maka $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$

Sifat-Sifat Determinan

- Jika matriks **B** memiliki unsur yang sama dengan matriks **A** kecuali pada satu baris ke- i , $\mathbf{b}_i = c\mathbf{a}_i$ maka $\det(\mathbf{B}) = c \det(\mathbf{A})$
- Jika c adalah sebuah konstanta dan **A** adalah matriks persegi berukuran $n \times n$, maka $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$

Menghitung Determinan Matriks di R

```
> A = matrix(c(1,0,2,0,1,2,2,2,1), ncol=3, byrow=TRUE)
```

```
> A
```

```
      [,1] [,2] [,3]  
[1,]     1     0     2  
[2,]     0     1     2  
[3,]     2     2     1
```

```
> det(A)
```

```
[1] -7
```

```
> B = matrix(c(1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 5, 7), ncol=3, byrow=TRUE)
```

```
> B
```

```
      [,1] [,2] [,3]  
[1,]     1     2     3  
[2,]     2     3     4  
[3,]     3     5     7
```

```
> det(B)
```

```
[1] 0
```



IPB University
— Bogor Indonesia —

Inspiring Innovation with Integrity
in Agriculture, Ocean and Biosciences for a Sustainable World



IPB University
— Bogor Indonesia —



IPB University
— Bogor Indonesia —



IPB University
— Bogor Indonesia —



IPB University
— Bogor Indonesia —