5TH GRADE

Operasi Baris Elementer, Pangkat Matriks dan Matriks Kebalikan

Pertemuan 4 Aljabar Matriks

01

Operasi Baris Elementer dan Kaitannya dengan Determinan Matriks

3 Macam Operasi Baris Elementer

01 $E_{i(k)}$

Mengalikan baris ke-I dengan konstanta k

02 E_{ij}

Menukar baris ke-i dan baris ke-j

03 $E_{ij(k)}$

Mengalikan baris ke-j dengan k, kemudian menjumlahkannya dengan baris ke-i

Contoh Operasi Baris Elementer $E_{1(2)}$

A

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$E_{1(2)}$

Mengalikan baris pertama dengan konstanta 2

$E_{1(2)}$(A)

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Contoh Operasi Baris Elementer E_{12}

A

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

E_{12}

Menukar baris ke-1 dengan baris ke-2

$E_{1(2)}$(A)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Contoh Operasi Baris Elementer $E_{12(2)}$

A

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$E_{12(2)}$

Mengalikan baris ke-2 dengan konstanta 2, lalu menjumlahkan hasilnya dengan baris pertama, dimana baris yang berubah hanya baris pertama

$E_{12(2)}$(A)

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks Baris Elementer

01 $E_{1(2)}(I)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

02 $E_{12}(I)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

03 $E_{12(2)}(I)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer

Melakukan operasi baris elementer terhadap sebuah matriks nxm sama dengan melakukan perkalian matriks operasi baris berukuran nxn dengan matriks yang bersangkutan

A

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{M_{1(2)}}$A

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{E_{1(2)}}$(A)

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinan Matriks Baris Elementer

I

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{1(2)} = E_{1(2)}(I)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{det\left(M_{i(k)}\right) = k}$$

$$\det\left(M_{1(2)}\right) = 2$$

Determinan Matriks Baris Elementer

I

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{12} = E_{12}(I)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{det(M_{ij}) = -1}$$

$$\det(M_{12}) = -1$$

Determinan Matriks Baris Elementer

I

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{12(2)} = E_{12(2)}(I)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$det\left(M_{ij(k)}\right) = 1$$

$$\det(M_{12}(2)) = 1$$

Determinan Hasil Operasi Baris Elementer

01

Jika A adalah matriks persegi, maka:

$$\det\left(E_{i(k)}(A)\right) = k\det(A)$$

$$\det\left(E_{ij}(A)\right) = -\det(A)$$

$$\det\left(E_{ij(k)}(A)\right) = \det(A)$$

02

Jika A adalah matriks dengan determinan 0 (nol), maka operasi baris terhadap A akan menghasilkan matriks yang determinannya juga 0 (nol)

03

Jika A adalah matriks dengan determinan tidak nol, maka operasi baris terhadap A akan menghasilkan matriks yang determinannya juga tidak nol

02

Pangkat Matriks

Pangkat Matriks (Rank)

Pangkat dari sebuah matriks A_{mxn} dilambangkan dengan $r(A)$ adalah ordo anak matriks persegi A yang terbesar dan determinannya tidak sama dengan nol

A

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{8} \neq \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{3}$$

B

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B}) \neq \mathbf{3}$$

Ambil sub-matriks B dengan ukuran 2x2

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{det} = -\mathbf{2} \neq \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{2}$$

Pangkat Matriks (Rank)

01 Pangkat dari matriks tidak akan melebihi banyak baris dan kolomnya

02 Untuk A_{nxn} dengan $r(A) = n$, maka A disebut sebagai matriks berpangkat penuh (a full rank matrix)

03 Untuk A_{mxn} dengan $\mathrm{m} < \mathrm{n}$ dan $r(A) = m$,maka A disebut sebagai matriks berpangkat baris penuh (a full row rank matrix)

Pangkat Matriks (Rank)

04 Untuk A_{mxn} dengan $\mathrm{m} > \mathrm{n}$ dan $r(A)$ =n ,maka A disebut sebagai matriks berpangkat kolom penuh (a full coloumn rank matrix)

05 Operasi baris elementer tidak mengubah pangkat dari sebuah matriks

06 Pangkat dari matriks A sama dengan ordo matriks identitas pada bentuk kanonik A yang diperoleh melalui operasi baris/kolom elementer

03

Matriks Kebalikan

Matriks Kebalikan

Matriks kebalikan bagi A_{nxn} dilambangkan dengan A^{-1} adalah matriks yang memenuhi
$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

Untuk memperoleh matriks $B = [b_{ij}] = A^{-1}$ dapat dilakukan dengan menghitung $B = A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adjA$

Dengan adjA adalah matriks adjoin A, yaitu matriks yang berisi cofactor dari A kemudian di transpose

Cofactor : $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ dengan A_{ij} adalah matriks minor yaitu anak matriks A yang dibuang baris ke-i dan kolom ke-j nya

Contoh Matriks Kebalikan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

det(A) = 2x9 – 5x3 = 3

$C_{11} = 9$ $C_{12} = -3$

$C_{21} = -5$ $C_{22} = 2$

$$adj\mathbf{A} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Syarat Keberadaan Matriks Kebalikan

01

A^{-1} hanya aada untuk matriks A yang persegi

02

A^{-1} hanya ada jika $\det(A) \neq 0$

Matriks Singular dan Non-singular

01 Matriks persegi A disebut matriks singular jika dan hanya jika A tidak memiliki matriks kebalikan

02 Matriks persegi A yang memiliki matriks kebalikan disebut sebagai matriks non-singular

03 Matriks A non-singular -> matriks A berpangkat penuh -> $\det(A) \neq 0$

Sifat-Sifat Matriks Kebalikan

1.

$(A^{-1})^{-1} = A$

2.

A^{-1} bersifat unik

3.

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4.

Jika A adalah matriks orthogonal, maka $A^{-1} = A^T$

5.

Untuk A dan B non-singular berukuran sama, $(AN)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

6.

Jika A adalah matriks diagonal dengan unsur a_{ij} maka A^{-1} adalah matriks diagonal dengan unsur $1/a_{ij}$

7.

Jika A matriks simetrik, maka A^{-1} juga simetrik

04

R-Studio Time!!

05

Soal Latihan ^o^

Soal Latihan

Tentukan matriks A jika:

1. $(2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
2. $(-2A' + 3I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Soal Latihan

Tentukan kebalikan matriks A dibawah ini

1. $A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & -6 & 8 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

THANKS!

Do you have any questions?