PRAKTIKUM ALJABAR MATRIKS

PERTEMUAN 9

Kombinasi Linear

Sebuah vektor $\underline{W}$ disebut kombinasi linear dari vektor $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ... , $\underline{v}_k$ pada V jika $\underline{W}$ dituliskan dalam bentuk:

$\underline{W} = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + ... + c_K\underline{v}_K$

dimana $c_1, c_2, \ldots, c_k$ suatu skalar bilangan riil

Contoh Soal:

1. Periksa apakah **w** = $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ merupakan kombinasi linear dari **v₁** = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan **v₂** = $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Pembahasan:

   $\underline{w} = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2$

   $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 - c_2 \\ c_1 + 3c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix}$

   $c_2 = 2$

   $-4 = 2c_1 - c_2$

   $-2 = 2c_1$

   $c_1 = -1$

   Karena $c_1 = -1$ dan $c_2 = 2$ juga memenuhi persamaan kedua

   Dengan demikian **w** adalah kombinasi linier dari $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_1$, dimana:

   $\underline{w} = -\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2$

2. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

   Periksa apakah D merupakan kombinasi linear dari A,B, dan C

   Pembasan:

   $D = k_1A + k_2B + k_3C$

   $$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

   $$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 \\ k_1 & k_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 & 2k_2 \\ 3k_2 & 4k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_3 & k_3 \\ 4k_3 & 5k_3 \end{bmatrix}$$

   $$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & k_1 + 2k_2 + k_3 \\ k_1 + 3k_2 + 4k_3 & k_1 + 4k_2 + 5k_3 \end{bmatrix}$$

   Dapat dituliskan menjadi:

   $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right]$ lakukan OBD sehingga: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

   Dari matriks diatas, kita peroleh bahwa $k_3 = -1$, $k_2 = 3$, $k_1 = 2$

   Dengan demikian, D merupakan kombinasi linear dari A, B, dan C, dimana:

   D = 2A + 3B - C

Terpaut Linear

Vektor $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ... , $\underline{v}_k$ dalam ruang vektor $\underline{V}$ disebut terpaut linear jika:

$a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + ... + a_K\underline{v}_K = \underline{0}$ terdapat a ≠ 0 untuk semua a

Contoh Soal:

1. Tunjukkan bahwa gugus vektor dibawah ini terpaut linear $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\-8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-8\\-15\\28\end{pmatrix}\right\}$

   Pembahasan:
   $a_1\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}2\\3\\-8\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}-8\\-15\\28\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
   $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1$
   Karena $a_1, a_2, a_3 \neq 0$, maka terbukti terpaut linear

Catatan: hanya bisa merentang pada R^1,R^2, dan tidak pada R^3, determinan = 0, rank tidak penuh, tidak merentang pada Rank, solusi tidak unik

Bebas Linear

Vektor $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, ... , $\underline{v}_k$ dalam ruang vektor $\underline{V}$ disebut bebas linear jika:

$a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + ... + a_K\underline{v}_K = \underline{0}$ terdapat a = 0 untuk semua a

Contoh Soal:

1. Apakah gugus vektor di bawah ini merupakan bebas linear? $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

   Pembahasan:
   $a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
   Hanya nilai $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ yang membuat vektor nol maka dapat dikatakan bahwa gugus vektor tersebut bebas linear

Catatan: bebas linear merentang pada rank tertinggi, determinan ≠0, rank penuh

Merentang Linear

S = {S_1,S_2, ... , S_K} disebut sebagai gugus yang merentang ruang vektor V jika dan hanya jika setiap vektor V dapat ditulliskan sebagai kombinasi linear yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$\underline{V} = c_1\underline{S}_1 + c_2\underline{S}_2 + ... + c_K\underline{S}_K$

Contoh Soal:

1. Apakah S = $\left\{S_1 = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ merentang pada R^2?

   Pembahasan:

   $a_1\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}, + a_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$; a,b ϵ R

Apakah SPL nya konsisten/ tidak?

Mari kita cek: r(A) = 2 ; r(A | b) = 2 -> konsisten

SPL konsisten, a_1 dan a_2 ada

Maka S adalah gugus yang merentang R^2

2. Apakah himpunan dibawah ini merentang pada R^2?
   $\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}\right\}$

Pembahasan:

$c_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, + c_2\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ~ $E_{21(2)}$

$\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 2 & x\\0 & 0 & 2x+y\end{array}\right)$

Solusi yang didapat tidak konsisten dan tidak mungkin sehingga tidak mungkin. Alasannya karena $0c_1$+ $0c_1$ = 2x+y ...?

Catatan:

Kalau ada gugus yang merentang, kemudian digabung dengan vektor lain maka gugus itu merentang

Sifat gugus yang merentang:

- *Sebuah vektor dapat direntang oleh lebih dari satu gugus yang merentang -> ada kemungkinan span(S1) = span(S1) = V*
- *Jika S adalah gugus yang merentang V dan didefinisikan Z = S U T (digabung dengan yang lain) maka Z adalah gugus yang merentang*

Landasan

Syatnya ialah:

1. Bebas linear

2. Merentang

Contoh Soal:

1. $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
   Apakah e_1 dan e_2 adalah landasan bagi E di ruang vektor R^2?
   Jawab:
   - adb kalau E membangun R^2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Untuk menentukan sistem ini memenuhi syarat yaitu E membangun ruang vektor R^2 cukup diperiksa nilai determinannya. det(E) = 1, maka e merupakan kombinasi linear dari E, sehingga E membangun ruang vektor R^2

- adb E merupakan bebas linear:

  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Hanya nilai $e_1 = e_2 = 0$ yang membuat 0, maka E dapat dikatakan bebas linear
- maka E merupakan basis/ladasan di ruang vektor R^2

Landasan Orthogonal

Syarat: BBL, Merentang, dan Tegak Lurus

Landasan Orthonormal

Syarat: BBL, Merentang, Tegak Lurus ($a^T \underline{b} = 0$), dan Panjangnya 1

Contoh Soal:

1. diketahui $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ vektor-vektor ortogonal dengan a ≠ 0, dan b ≠ 0. Tunjukkan $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ BBL

Jawab:

$c_1 \underline{a} + c_2 \underline{b} = \underline{0}$

$c_1 \underline{a^T}\, \underline{a} + c_2 \underline{a^T}\, \underline{b} = \underline{0}$

$c_1 \underline{a^T}\, \underline{a} + c_2\, 0 = \underline{0}$

$c_1 \underline{a^T}\, \underline{a} = \underline{0}$

$c_1 = 0$

$c_1 \underline{a} + c_2 \underline{b} = \underline{0}$

$0\, \underline{a} + c_2 \underline{b} = \underline{0}$

$c_2 \underline{b} = \underline{0}$

$c_2 = 0$

Karena c_1 dan $c_2 = 0$, maka $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ merupakan BBL