PEMBAHASAN KUIS

Benar/Salah

1. Dua matriks yang memiliki baris yang sama banyak selalu bisa dijumlahkan.
   Jawab: **SALAH**. Baris yang sama bukan berarti memiliki kolm yang sama. Penjumlahan matriks hanya dapat dilakukan untuk matriks yang memiliki ukuran sama.
2. Apabila matriks A dan B memiliki ukuran nxn, hasil perkalian matriks A dan B sama dengan hasil perkalian matriks B dan A.
   Jawab: **SALAH**. Meskipun matriks A dan B dapat dikalikan dan pasti memiliki hasil, perkalian matriks AB belum tentu sama dengan perkalian matriks BA.
3. Penjumlahan dari dua matriks SEGITIGA BAWAH yang berukuran sama akan selalu menghasilkan matriks SEGITIGA BAWAH.
   Jawab: **BENAR**. Elemen di atas diagonal utama merupakan unsur yang bernilai 0 sehingga ketika dijumlahkan akan menghasilkan 0 pula.
4. Matriks berikut merupakan matriks idempoten.
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   Jawab: **BENAR**. Matriks idempoten → $AA = A$
5. Tidak ada matriks ortogonal yang determinannya bernilai 0.
   Jawab: **BENAR**. Matriks ortogonal → $A^{-1} = A^T$ sehingga selalu memiliki invers.
6. Det(A) = 2
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
   Jawab: **SALAH**. $det(A) = 0 + 0 + 4 - (-8 + 3 + 0) = 9$
7. Jika A non-singular dan dua buah barisnya dipertukarkan posisinya, maka akan menghasilkan matriks yang juga non-singular.
   Jawab: **BENAR**. Operasi baris dasar tidak mengubah determinan matriks.
8. Pangkat dari matriks yang berukuran 5 x 5 adalah 5.
   Jawab: **SALAH**. Belum tentu matriks berukuran nxn memiliki pangkat n apabila determinannya 0.
9. Untuk A yang merupkan matriks berukuran 2x2 dan det(A)=0, maka Ax=b adalah SPL tak konsisten.
   Jawab: **SALAH**. Belum tentu karena bergantung pada nilai **b**. Apabila **b** memiliki elemen yang semuanya 0 maka akan menghasilkan SPL konsisten solusi banyak.
10. Syntax R berikut digunakan untuk melakukan OBE E_{ij}.
    ```
    function(A, baris1, baris2){
      A1 <- A[baris1,]
      A2 <- A[baris2,]
      A[baris1,] <- A2
      A[baris2,] <- A1
      return(A)
    }
    ```
    Jawab: **BENAR**.

Pilihan Ganda

1. Perkalian matriks berikut menghasilkan matriks …
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; B \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
   a. $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$
c. $\begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$
d. $\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$

Jawab:

$$\begin{bmatrix} (1\cdot 1)+(2\cdot 2) & (1\cdot 1)+(2\cdot 2) \\ (3\cdot 1)+(4\cdot 2) & (3\cdot 1)+(4\cdot 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$$

2. Determinan dari matriks berikut ini bernilai …

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

a. 18
b. 19
c. 20
d. 21

Jawab:

Jadikan baris ke-2 sebagai tumpuan, gunakan:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \ \ untuk\ sembarang\ baris\ ke-i$$

dengan:

- $C_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$
- A_{ij} adalah matriks minor; anak matriks A yang dibuang baris ke-i dan kolom ke-j

Sehingga:

$|A| = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} + a_{24}C_{24}$

$|A| = 0\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} + 7\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$|A| = 0 + 0 + 0 + 7\cdot 1\cdot(9+0+0-0-0-6) = 21$

3. Pangkat matriks dari matriks di bawah ini adalah …

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4

Jawab:

Terdapat tiga kolom dengan unsur sama (kolom ke-2, 3, dan 4) sehingga untuk matriks berukuran 3×3 akan menghasilkan determinan 0 sehingga pangkat matriks akan kurang dari

3. Nilai determinan ada, ketika mengambil anak matriks yang ukurannya 2×2, yaitu dari anak matriks $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ yang memiliki determinan -1.

4. Berapa teras matriks berikut?

$$\begin{bmatrix} 25 & 10 & 9 & 8 \\ 27 & 17 & 11 & 30 \\ 29 & 30 & 11 & 20 \\ 19 & 28 & 26 & 8 \end{bmatrix}$$

   a. 59
   b. 60
   c. 61
   d. 62

   Jawab:

   $tr(A) = \sum_{i=1}^{n=4} a_{ii} = 25 + 17 + 11 + 8 = 61$

5. Berapa solusi dari permasalahan SPL berikut.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 2x + 3y + z = 9 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

   a. x = 2, y = 1, z = 2
   b. x = 1, y = 2, z = 2
   c. x = 2, y = 2, z = 1
   d. x = 1, y = 1, z = 2

   Jawab:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 10 \\ 2 & 3 & 1 & \vdots & 9 \\ 3 & 1 & 2 & \vdots & 11 \end{bmatrix} \sim_{\substack{E_{21(-2)} \\ E_{31(-3)}}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 10 \\ 0 & -1 & -5 & \vdots & -11 \\ 0 & -5 & -7 & \vdots & -19 \end{bmatrix} \sim_{E_{32(-5)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 10 \\ 0 & -1 & -5 & \vdots & -11 \\ 0 & 0 & 18 & \vdots & 36 \end{bmatrix}$$

   Sehingga

   $18z = 36 \leftrightarrow z = 2$

   $-y - 5(2) = -11 \leftrightarrow -y = -1 \leftrightarrow y = 1$

   $x + 2(1) + 3(2) = 10 \leftrightarrow x = 10 - 2 - 6 = 2$

Esai

1. Jika A merupakan matriks persegi berukuran nxn dan $A^2 + 5A = I$. Buktikan bahwa A merupakan matriks non-singular.

1. A matriks persegi => $_nA_n$ Matriks non-singular: det (A) $\neq 0$

$A^2 + 5A = I_n$

$A(A + 5I_n) = I_n$ => 5 dikali matriks identitas agar tetap memiliki matriks dan sesuai dengan nilai sebelumnya.

$|A(A+5I_n)| = |I_n|$

$|A||A+5I_n| = |I_n|$ => det. matriks identitas selalu bernilai 1.

$|A||A+5I_n| = 1$

$|A| = \frac{1}{|A+5I_n|}$

$|A+5I_n|$ => determinannya akan menghasilkan angka bukan nol (0) karena ada penjumlahan dengan $5I_n$ terlebih dahulu.

sehingga $|A| = \frac{1}{|A+5I_n|}$ akan memiliki suatu nilai yang tidak sama dengan nol (0)

Oleh karena itu terbukti A merupakan matriks non-singular.

2. Jika A matriks ortogonal dan simetri serta $B = \frac{1}{2}(I_n - A)$.
   a. Buktikan $I_n - B$ matriks idempoten.
      Jawab:
      $A'A = AA' = I_n$
      $A = A'$
      $B = \frac{1}{2}(I_n - A)$
      - $BB = \frac{1}{2}(I_n - A)\frac{1}{2}(I_n - A)$
        $BB = \frac{1}{4}(I_nI_n - I_nA - AI_n + AA)$
        $BB = \frac{1}{4}(I_n - 2A + AA)$
        $BB = \frac{1}{4}(I_n - 2A + AA')$
        $BB = \frac{1}{4}(I_n - 2A + I_n)$
        $BB = \frac{1}{4}(2I_n - 2A)$
        $BB = \frac{1}{2}(I_n - A) = B \leftrightarrow BB = B$
   b. Jika $tr(A) = \alpha\ dan\ \alpha \in R$, tentukan $tr(B)$.
      Jawab:
      $tr(B) = tr\left(\frac{1}{2}(I_n - A)\right)$
      $tr(B) = \frac{1}{2}\ tr(I_n - A)$
      $tr(B) = \frac{1}{2}\left(tr(I_n) - tr(A)\right)$
      $tr(B) = \frac{1}{2}(n - \alpha)$

Soal-Jawab Susulan

1. Jika A'A=A, maka A simetrik dan idempoten.
   Jawab: **BENAR**
   $A = A'A$
   - $[A = A'A]'$ (Transpose kedua ruas)
     $A' = A'A$
     $A' = A$ (Terbukti simetri)
   - $A = A'A \; karena \; simetri \; maka \; A' = A$
     $A = AA$ (terbukti idempoten)

2. Jika matriks A berordo 4 $\det(2A) = 32$, maka $\det(A^{-2}) = \frac{1}{4}$
   Jawab: **BENAR**
   $\det(2A) = 32$
   $2^4 \det(A) = 32$
   $16 \det(A) = 32$
   $\det(A) = 2$

   $\det(A^{-2}) = \frac{1}{\det(A^2)} = \frac{1}{\det(A) \cdot \det(A)} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

3. Dalam mencari matriks kebalikan umum (MKU), kita mengambil sebuah anak matriks yang singular.
   Jawab: **SALAH.** Seharusnya mengambil anak matriks yang non-singular.
4. Sama dengan soal PG Nomor 3.
5. Berapakah solusi dari permasalahan SPL berikut.

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 2a - b - c = 1 \\ -3a - 4b - c = 2 \end{cases}$$

   a. a=1, b=2, c=3
   b. a=-1, b=-2, c=-3
   c. a=1, b=2, c=-3
   d. a=1, b=-2, c=3

   Jawab:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ -3 & -4 & -1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \sim_{\substack{E_{21(-2)} \\ E_{31(3)}}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -5 & -3 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \sim_{E_{32\left(\frac{2}{5}\right)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -5 & -3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \vdots & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$\frac{4}{5}c = \frac{12}{5} \leftrightarrow c = 3$

$-5b - 3(3) = 1 \leftrightarrow -5b = 10 \leftrightarrow b = -2$

$a + 2(-2) + 1(3) = 0 \leftrightarrow a = 0 + 4 - 3 = 1$

Esai

1. Jika matriks $U = 2V + U'$ dan $W - U + V = 0$, periksa apakah W matriks simetri?

Jawab:
$U = 2V + U'$
$U - U' = 2V$
$\frac{1}{2}(U - U') = V$

$W - U + V = 0$
$W = U - V$
$W = U - \frac{1}{2}(U - U')$
$W = U - \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U'$
$W = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U'$

$W' = \left(\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U'\right)'$
$W' = \frac{1}{2}U' + \frac{1}{2}U$
$W' = W$ (Terbukti W adalah matriks simetri)

2. Hitung nilai determinan dari matriks di bawah ini.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Jawab: Sama dengan kuis (bukan susulan) soal PG nomor 2.

3. Buktikan hasilkali dua matriks segitiga atas / bawah juga akan menghasilkan matriks segitiga atas / bawah.
Jawab:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ 0 & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2n} + a_{23}b_{3n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa hasil kali 2 matriks segitiga atas/bawah juga akan menghasilkan matriks segitiga atas/bawah