KOMBINASI LINIER – LANDASAN RUANG VEKTOR

I Made Sumertajaya

KOMBINASI LINIER

Misalkan $\underline{b}$, $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, ..., $\underline{a}_p$ merupakan vektor di ruang Euclid R^n.

Vektor $\underline{b}$ dikatakan **kombinasi linear** dari vektor-vektor $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, ..., $\underline{a}_p$ jika ada skalar-skalar $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sehingga $\underline{b} = x_1\, \underline{a}_1 + x_2\, \underline{a}_2 + \ldots + x_p\, \underline{a}_p$

skalar x_j disebut koefisien dari $\underline{a}_j$ untuk $j = 1, 2, \ldots, p$

Contoh:

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

apakah $\underline{b}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\underline{a}_1$ & $\underline{a}_2$?

$$\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2x_1\\2x_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\3x_2\\-x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\-2x_1+3x_2\\2x_1-x_2\end{pmatrix}$$

$\underline{x_2} = 3$

$5 \quad = 2x_1 - x_2$

$2x_1 = 8$

$\underline{x_1} \quad = 4$

karena ada x_1 dan x_2,
Maka vektor $\underline{b}$ kombinasi linear dari $\underline{a}_1$ & $\underline{a}_2$.

Gugus vektor A = $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_p\}$ dikatakan **terpaut linear** jika ada skalar-skalar x_1, x_2, ..., x_p yang tidak semuanya nol sehingga

$$\underline{0} = x_1\,\underline{a}_1 + x_2\,\underline{a}_2 + \ldots + x_p\,\underline{a}_p$$

Contoh soal:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

tunjukkan gugus vektor tersebut terpaut linear.

$$x_1\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 3 & 0\\4 & 2 & 6 & 0\\2 & 1 & 3 & 0\end{array}\right) \begin{matrix}E_{21(-2)}\\E_{31(-1)}\end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$

Misalkan $x_1 = k$ & $x_2 = p$

$2k + p = -3x_3$

$\frac{2k+p}{-3} = x_3$

Misalkan k = 1 & p = 1

$x_3 = \frac{2(1)+1}{-3}$

$x_3 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$

atau dengan cara lain

$\underline{a}_1 + \underline{a}_2 = \underline{a}_3$

$\underline{a}_1 + \underline{a}_2 - \underline{a}_3 = \underline{0}$

$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$

karena $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ maka $\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}\right\}$

terpaut linear.

Dalam hal lainnya A disebut **bebas linear**, apabila kombinasi linear vektor-vektor tersebut menjadi vektor nol hanya dipenuhi oleh skalar-skalar yang semuanya sama dengan nol

$\underline{0} = x_1\,\underline{a}_1 + x_2\,\underline{a}_2 + \ldots + x_p\,\underline{a}_p$

skalar $\forall x_j=0,\ j = 1, 2,\ldots,p$

Contoh soal:

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

apakah $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ bebas linear ?

$$x_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$x_1 = x_2 = 0$

karena $x_1 = x_2 = 0$, maka $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ bebas linear.

LANDASAN RUANG VEKTOR

Merentang Linear

Himpunan $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \ldots, \underline{v}_n\}$ disebut himpunan perentang untuk V jika dan hanya jika setiap vektor di V dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari vektor vektor ($\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \ldots, \underline{v}_n$)

Contoh soal :

Periksa apakah himpunan berikut merentang $\mathbb{R}^2$?

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Jawab : Mencari solusi untuk persamaan

$\alpha 1 \, \underline{v}_1 + \alpha 2 \, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} \alpha 1 \\ \alpha 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Solusi :

$\alpha 1 = 2a - 3b$

$\alpha 2 = 2b - a$

Jadi, karena $\alpha 1$ dan $\alpha 2$ ada yang memenuhi maka $\underline{v}_1$ dan $\underline{v}_2$ merentang di $\mathbb{R}^2$

Jika V ruang vektor dan $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \ldots, \underline{v}_n\}$ adalah himpunan vektor-vektor di V, maka S dinamakan landasan untuk V jika kedua syarat di bawah ini terpenuhi:

1. S bebas linear
2. S membangun V

Teorema

Jika $S = \{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \ldots, \underline{v}_n \}$ adalah landasan untuk ruang vector V , maka $\forall \underline{x} \in V$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\underline{x} = k_1\underline{v}_1 + k_2\underline{v}_2 + k_3\underline{v}_3 + \cdots + k_n\underline{v}_n$$

Contoh soal

Misal S={$\underline{y}_1$, $\underline{y}_2$, $\underline{y}_3$} dengan $\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{y}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\underline{y}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Tunjukkanlah bahwa S adalah landasan untuk $\mathbb{R}^3$?

Jawab: Ambil $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, kemudian ditunjukkkan apakah $\underline{b}$ merupakan kombinasi linear dari S, ditulis :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1k_1 \\ 2k_1 \\ 1k_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_2 \\ 5k_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3k_3 \\ 3k_3 \\ 8k_3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1+2k_2+3k_3 \\ 2k_1+5k_2+3k_3 \\ k_1+0+8k_3) \end{pmatrix}$. Sehingga dapat ditulis dalam sistem persamaan linear dan matriks seperti berikut:

Misalkan elemen yang diambil terletak pada kolom 1, maka nilai determinan dapat ditentukan dengan cara minor kofaktor sebagai berikut:

$det\ (S) = \sum sij\ -1\ i{+}jMij$

$det\ (S) = s_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + s_{21}(-1)^{2+1}M_{21} + s_{31}(-1)^{3+1}M_{31}$

$det\ (S) = 1(-1)^2\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} + 2\ (-1)^3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + 1(-1)^4\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$det\ (S) = 1\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} + (\text{-}2)\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$det\ (S) = 1\ (40 - 0) + (-2)\ (16 - 0) + 1(6 - 15)$

$det\ (S) = 1\ (40) + (-2)\ (16) + 1(-9)$

$det\ (S) = 40 + (-32) + (-9)$

$det\ (S) = 40 + (-41)$

$det\ (S) = -1$

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = b_1 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$2k_1 + 5k_2 + 3k_3 = b_2 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$k_1 + 8k_3 = b_3 \quad \ldots\ldots (3)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

dengan:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan sistem ini memenuhi syarat yakni S membangun ruang vektor $\mathbb{R}^3$ cukup diperiksa nilai determinannya. Jika det (S) $\neq 0$, maka *b* merupakan kombinasi linear dari S, sehingga S membangun $\mathbb{R}^3$

Karena nilai determinan dari sistem linear tersebut tidak sama dengan nol [$det\ (S) \neq 0$], maka b dapat ditemukan dan merupakan kombinasi linear dari S, sehingga y_1, y_2 dan y_3 membangun $\mathbb{R}^3$. Dengan demikian S memenuhi sifat membangun ruang vektor.

Untuk membuktikan S bebas linear, ambil $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, kemudian akan ditunjukkan apakah $\underline{0}$ merupakan kombinasi linear dari S, ditulis:

$\underline{0} = l_1\underline{y}_1 + l_2\underline{y}_2 + l_3\underline{y}_3$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = l1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + l2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + l3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l1 \\ 2l1 \\ l1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2l2 \\ 5l2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3l3 \\ 3l3 \\ 8l3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l1 + 2l2 + 3l3 \\ 2l1 + 5l2 + 3l3 \\ l1 + 0 + 8l3 \end{pmatrix}$$

Sehingga dapat ditulis dalam sistem persamaan linear dan matriks seperti berikut:

$l1 + 2l2 + 3l3 = 0$ ….. (1)

$2l1 + 5l2 + 3l3 = 0$ ….. (2)

$l1 + 8l3 = 0$ ….. (3)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinan dari system persamaan di atas memiliki nilai determinan tidak sama dengan nol, $det\ S \neq 0$, maka matriks koefisiennya mempunyai invers sehingga system linear ini mempunyai penyelesaian tunggal yaitu $l1 = l2 = l3 = 0$, sehingga S bebas linear

Jadi, karena S mempunyai sifat bebas linear dan membangun $\mathbb{R}^3$, maka S adalah basis untuk ruang vector $\mathbb{R}^3$.

Landasan Ortogonal

DEFINISI :

Himpunan $S = \{\boldsymbol{u}1, \boldsymbol{u}2, \ldots, \boldsymbol{u}k\}$ pada R^n adalah himpunan orthogonal jika $<\boldsymbol{u}i, \boldsymbol{u}j> = 0$, untuk setiap $i \neq j$.

Landasan Ortonormal

DEFINISI :

Himpunan $S = \{\boldsymbol{u}1, \boldsymbol{u}2, \ldots, \boldsymbol{u}k\}$ pada R^n adalah ortonormal jika :

1. S adalah orthogonal
2. Setiap vektor dalam S adalah vektor satuan, yaitu $||\boldsymbol{u}i|| = 1$, untuk setiap i.

Contoh soal

Himpunan $S = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$, dengan $\boldsymbol{u}_1 = [0, 1, 0]$ dan $\boldsymbol{u}_2 = [1, 0, 1]$ adalah ortogonal, karena :

$$<\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2> = 0(1) + 1(0) + 0(1) = 0$$

Karena $\|\boldsymbol{u}_1\| = 1$ dan $\|\boldsymbol{u}_2\| = \sqrt{2}$ maka S bukan himpunan ortonormal.

Dengan menormalisasikan masing-masing vektor dari S, diperoleh :

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1/\|\boldsymbol{u}_1\| = 1[0, 1, 0] = [0, 1, 0], \quad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2/\|\boldsymbol{u}_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, 1] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ adalah himpunan yang ortonormal, karena :

(i). $<\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2> = 0.\frac{1}{\sqrt{2}} + 1.0 + 0.\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

(ii). $\|\boldsymbol{v}_1\| = 1$ dan $\|\boldsymbol{v}_2\| = 1$

Proses mengorthogonalkan antar vector dapat dilakukan melalui proses orthogonalisasi Gram-Schmidt.

Prosesnya dapat dilihat pada slide vector geometri

Apa hubungannya ???

MERENTANG

+

BBL

→

LANDASAN

Latihan

1. Carilah mana himpunan vektor berikut yang merupakan suatu anak ruang bagi $\boldsymbol{R^4}$
   - $\left\{\underline{\boldsymbol{x}}' = [\boldsymbol{x_1}\ (\boldsymbol{1} + \boldsymbol{x_1})\ \boldsymbol{x_3}\ \boldsymbol{5}] \middle| \boldsymbol{x_1}\ \boldsymbol{dan}\ \boldsymbol{x_3} \in \boldsymbol{R}\right\}$
   - $\left\{\underline{\boldsymbol{x}}' = [\boldsymbol{x_1}\ \boldsymbol{x_2}\ \boldsymbol{x_3}\ \boldsymbol{x_4}] \middle| \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_3} \leq \boldsymbol{x_4} |\right\}$
   - $\left\{\underline{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{R^4} \middle| \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{2}\underline{\boldsymbol{u}}\right\}$, *A adalah matriks 4x4*

2. Diketahui vektor $\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Apakah vector-vektor $\underline{v_1}, \underline{v_2}, dan\ \underline{v_3}$ merentang vector-vektor dalam R^3 ? Apakah vector-vektor $\underline{v_1}, \underline{v_2}, dan\ \underline{v_3}$ landasan bagi ruang R^3? Jika ya, carilah landasan orthogonalnya.

TERIMA KASIH.....

-- Sampai ketemu minggu depan......-