



IPB University  
— Bogor Indonesia —

# Matriks Kebalikan Umum

Bagus Sartono

Prodi Statistika dan Sains Data

IPB University

[bagusco@apps.ipb.ac.id](mailto:bagusco@apps.ipb.ac.id)

# Matriks Kebalikan Umum

# Definisi MKU

- Matriks kebalikan umum bagi  ${}^4_3 A_3$  dilambangkan  ${}^3_4 G_4$  adalah matriks yang memenuhi  $\boxed{AGA = A}$

- Notasi lain  $G \rightarrow A^-$

$$\begin{array}{l} A^{-1} \text{ m.k} \\ A^- \text{ m.k.u} \end{array}$$

- Jika  ${}^n_n A_n$  merupakan matriks non-singular, MKU bagi  $A$  tidak lain adalah  $A^{-1}$

$$\begin{array}{l} \Downarrow \\ \det(A) \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A A^{-1} A = I A = A \\ \hline \boxed{A^{-1} = G} \end{array}$$

# Algoritma memperoleh MKU

1. Tentukan pangkat dari **A**, misal  $k$
  2. Cari anak matriks persegi  $k \times k$  yang non-singular, misal **W**
  3. Cari matriks kebalikan **W**, yaitu  $\mathbf{W}^{-1}$
  4. Transpose matriks  $\mathbf{W}^{-1}$ , yaitu  $(\mathbf{W}^{-1})^T$
  5. Ganti unsur di **A** dengan unsur  $(\mathbf{W}^{-1})^T$  pada posisi yang sama dengan posisi anak matriks yang digunakan
  6. Ganti unsur **A** yang lain dengan 0 (nol)
  7. Transpose matriks tersebut, dan itulah matriks **G**
- MKU tidak unik, kecuali untuk **A** yang non-singular

# Ilustrasi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

m.k. 4 A?

$$\det(\mathbf{A}) = 0$$

$$r(\mathbf{A}) \neq 3$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \rightarrow 1 \neq 0$$

$$r(\mathbf{A}) = 2$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{W}^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

transpose

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

m.k. 4 A

1. Tentukan pangkat dari  $\mathbf{A}$ , misal  $k$   $k=2$
- $\Rightarrow$  2. Cari anak matriks persegi  $k \times k$  yang non-singular, misal  $\mathbf{W}$
3. Cari matriks kebalikan  $\mathbf{W}$ , yaitu  $\mathbf{W}^{-1}$
4. Transpose matriks  $\mathbf{W}^{-1}$ , yaitu  $(\mathbf{W}^{-1})^T$
5. Ganti unsur di  $\mathbf{A}$  dengan unsur  $(\mathbf{W}^{-1})^T$  pada posisi yang sama dengan posisi anak matriks yang digunakan
- $\Rightarrow$  6. Ganti unsur  $\mathbf{A}$  yang lain dengan 0 (nol)
7. Transpose matriks tersebut, dan itulah matriks  $\mathbf{G}$



IPB University  
— Bogor Indonesia —

# Matriks Kebalikan Umum dan SPL

Bagus Sartono  
Prodi Statistika dan Sains Data  
IPB University

[bagusco@apps.ipb.ac.id](mailto:bagusco@apps.ipb.ac.id)

# MKU dan SPL

# Definisi MKU

- Matriks kebalikan umum bagi  ${}_m\mathbf{A}_n$  dilambangkan  ${}_n\mathbf{G}_m$  adalah matriks yang memenuhi  $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$
- Notasi lain  $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{A}^-$
- Jika  ${}_n\mathbf{A}_n$  merupakan matriks non-singular, MKU bagi  $\mathbf{A}$  tidak lain adalah  $\mathbf{A}^{-1}$   
 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

# MKU dan SPL

Teorema: Suatu SPL konsisten  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  dengan  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  memiliki solusi  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Gb}$  dengan  $\mathbf{G}$  adalah matriks kebalikan umum bagi  $\mathbf{A}$

dengan kata lain, jika  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  dengan  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  adalah SPL konsisten dan  $\mathbf{G}$  adalah matriks kebalikan umum bagi  $\mathbf{A}$ , maka solusi bagi SPL tersebut adalah  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Gb}$

•  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  konsisten

•  $\mathbf{G}$  m.k.u. bagi  $\mathbf{A}$ ,

• definisikan  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Gb}$

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}}$$

solusi

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{Gb}}$$

solusi

$$\boxed{\mathbf{AGA} = \mathbf{A}}$$



$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$$

menyatakan

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{AGA}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{AGb} = \mathbf{b}$$

$$\boxed{\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}}$$

terbukti

# MKU dan SPL

Teorema: Suatu SPL konsisten  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  memiliki solusi  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Gb} + (\mathbf{GA} - \mathbf{I})\mathbf{z}$  dengan  $\mathbf{z}$  adalah sembarang vektor berukuran banyaknya kolom  $\mathbf{A}$ .

$$A\hat{x} = \underline{b}?$$

$$\begin{aligned} A\hat{x} &= A(\underline{Gb} + (\underline{GA} - \mathbf{I})\underline{z}) \\ &= \underline{AGb} + (\underline{AGA} - \underline{AI})\underline{z} \\ &= \underline{b} + (\underline{A} - \underline{A})\underline{z} \end{aligned}$$

$$\boxed{A\hat{x} = \underline{b}}$$

$$\tilde{x} = \underline{Gb} + (\underline{GA} - \mathbf{I})\underline{z}$$

solusi bagi SPL  $AX = \underline{b}$

$$\boxed{\tilde{x} = \underline{Gb}}$$

persy  
non-sing

$$\boxed{Ax = \underline{b}}$$

$$A_n : \det(A) \neq 0$$
$$G = A^{-1}$$

$$\begin{aligned} \hat{x} &= A^{-1}\underline{b} + (A^{-1}A - \mathbf{I})\underline{z} \\ &= A^{-1}\underline{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{I})\underline{z} \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{x} = A^{-1}\underline{b}} \text{ unik}$$



terima kasih



IPB University  
— Bogor Indonesia —