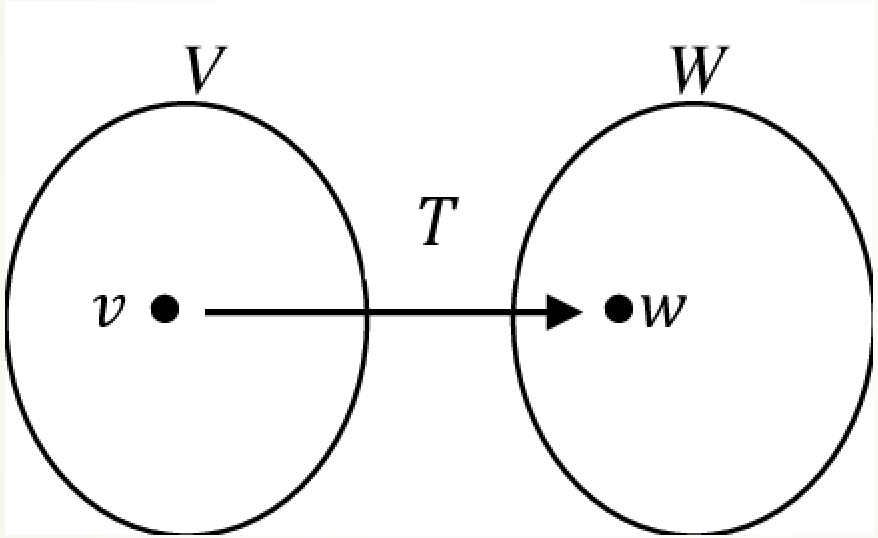
transformasi berti mengkonversi suatu nilai.

TRANSFORMASI LINIER



pada konteks analisis. apakah miu suatu besaran tertentu nggak? apa asumsi yang diperlukan? pada uji hipotesis idak dinyaktakan aumsi secara terusurat, melaiknan tersirat.
maka statistik ang digunakan menggunakan uji z atau jui t. jui z mengikuti distribusi normal, kalao ragam populasi diktathui (sebaran normal baku).
uji hipotesis = teorema limit pusat. maka x rata-rata akan diaproksimasi menggunakan disribusi normal (sampel) yang mengikutinya adalah x bar. sample acak, banyak kemungkinan yang ibsa kita ambil. sample ke dua mengashilkan rata-rata sendiri dan seterusnya.
jika asumsi itu dilanggar, (datanya tidak normal). maka konseep transformasi itu yang dilakukan (walau tidak sama dengan vektor).
sjika secara linier maka distribusi itu tidak akan berubah. analisis peubah ganda. kombinasi linear pada seluruh peubah yang kita amati.

I Made Sumertajaya

Statistika-FMIPA IPB

PEMETAAN VEKTOR

konsep pemetaan dipelajari ketika belajar fungsi

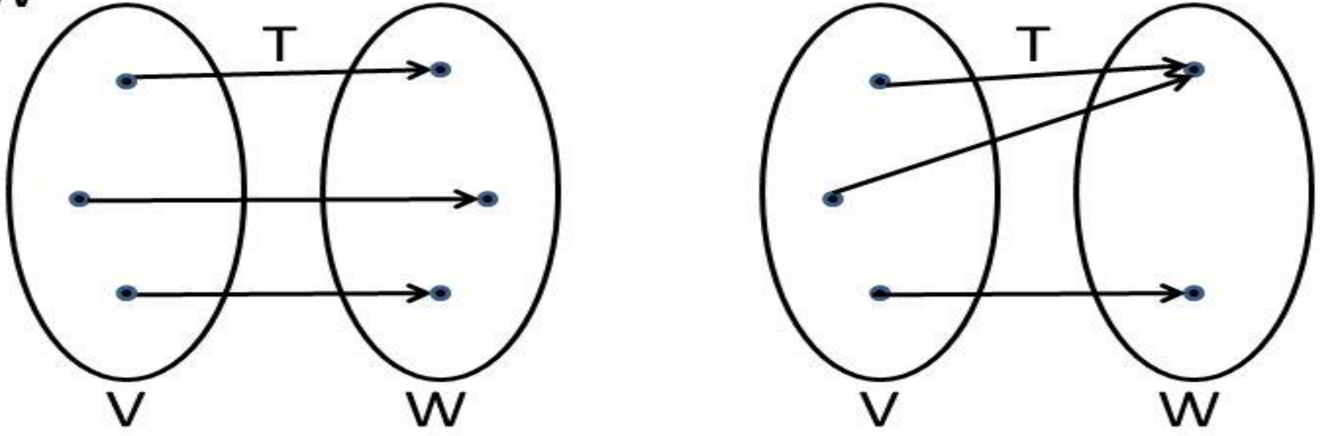
unsur-unsur yang ada pada fungsi u dikonversikan ke fungsi v. yang mengkonvesikan dalaha fungsi t.

- Jika U dan V adalah ruang vektor dan T adalah suatu fungsi yang mengasosiasikan vektor unik di V dengan setiap vektor yang terletak di U, maka dikatakan T memetakan U di dalam V.
  - T: U → V
  - Jika T mengasosiasikan vektor **v** dengan vektor **u**, maka **v** = T(**u**)
  - **v** adalah bayangan dari **u** dibawah T
  - Ruang vektor U dikatakan domain T

pemetaan satu-satu. nilai dari 1 daerah fungsi. setiap elemen tepat meiliki 1 kawan.

Transformasi satu - satu

$T : V \longrightarrow W$ adalah transformasi linier satu - satu jika T merupakan pemetaan vektor dalam V ke vektor dalam W



T : satu - satu

T : bukan satu - satu

Untuk semua **u** dan **v** dalam V

$\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \longrightarrow \mathbf{T(u)} \neq \mathbf{T(v)}$

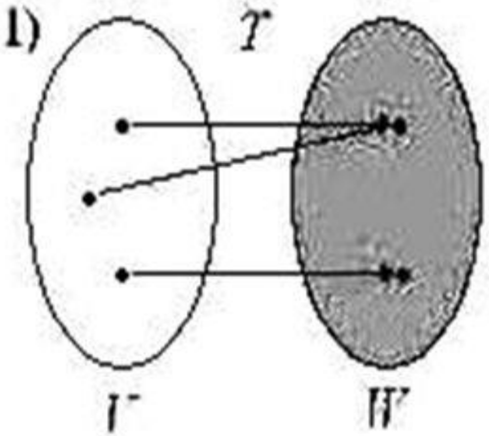
$\mathbf{T(u)} = \mathbf{T(v)} \longrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$

asalakan setiap untu disetiap fungis mimliki tpat meiliki 1 kawan. tapi bisa kawannya sama.

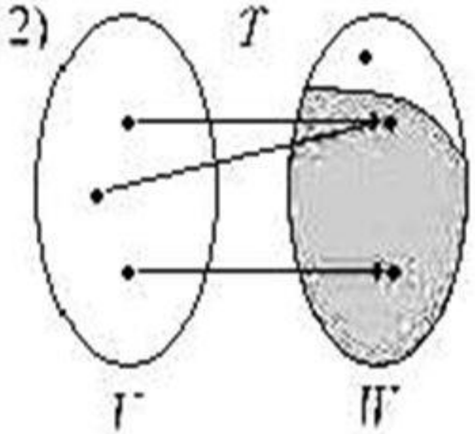
Transformasi Onto :

T : V $\longrightarrow$ W adalah transformasi linier onto untuk semua **w** dalam W jika minimal terdapat 1 **v** dalam V sehingga :

$$\boxed{\mathbf{w} = T(\mathbf{v})}$$



T : onto



T : bukan onto

Contoh 1:

Contoh :

Transformasi $T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ dinyatakan dengan :

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ x-y \\ 0 \end{bmatrix}$$

merupakan transformasi satu-satu atau onto ?

Jawab :

Misalkan : $T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$,maka : $\begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 - y_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 - y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Sehingga diperoleh : $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$

Jadi : $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ maka T adalah satu-satu

Kenapa T bukan pemetaan ONTO ?

CONTOH 2:

- Misalkan **u** = (x, y) adalah suatu vektor di R^2

  Dan ada sebuah fungsi T(**u**) = (x, x + y, x - y) yang memetakan R^2 ke R^3

  Maka jika **u** = (1,1) tentukan T(**u**)!

TRANSFORMASI LINIER

- Jika T: U → V adalah suatu fungsi dari ruang vektor U ke dalam ruang vektor V, maka F dikatakan **transformasi linier** jika:
  - T(**u** + **v**) = T(**u**) + T(**v**) untuk semua vektor **u** dan **v** di V
  - T(k**u**) = k T(**u**) untuk semua vektor **u** di dalam V dan semua skalar k

CONTOH 3

Misalkan T: $R^2 \rightarrow R^2$ adalah fungsi yang didefinisikan oleh T(**v**) = (2x, y) dengan **v** = (x, y) di R^2. buktikan bahwa T merupakan transformasi linier

Jawab :

- Misalkan u = (x1, y1) dan v = (x2, y2)
- Bukti pertama:

T(u + v) = T((x1, y1) + (x2, y2))
= T(x1+x2, y1+y2)
= (2(x1+x2), (y1+y2))
= ((2x1, y1) + (2x2, y2))
T(u + v) = T(u) + T(v) => terbukti

- Bukti kedua:

T(ku) = T(kx1, ky1)
= (2kx1, ky1)
= k (2x1, y1)
T(ku) = k T(u) => terbukti

Jadi, T adalah transformasi linier.

Contoh 4

Misalkan T merupakan suatu transformasi dari M_{2x2} ke R yang didefinisikan oleh $T(A) = det\ (A)$, untuk setiap $A \in M_{2x2}$, Apakah T merupakan Transformasi linier.

JAWAB: Apakah tertutup terhadap perkalian scalar?

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_{2x2}$

maka untuk setiap $\alpha \in$ R berlaku

$$\det(\alpha A) = \det\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_3 & \alpha a_4 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha^2 (a_1 a_2 - a_3 a_4) = \alpha^2 \det(A)$$

Dengan demikian $T(\alpha A) = \alpha^2 \det(A) \in$ R, tetapi $T(\alpha A) \neq \alpha T(A)$. Sehingga tidak tertutup terhadap perkalian scalar. Bukti ini cukup untuk menyatakan bahwa T(A) bukan Transformasi linier

MATRIKS TRANSFORMASI

- Misalkan A adalah suatu matriks berorde mxn. Jika notasi matriks digunakan untuk vektor di R^m dan R^n, maka dapat didefinisikan suatu fungsi T: $R^n \rightarrow R^m$ dengan

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

  Jika **x** adalah matriks n x 1, maka hasil kali **Ax** adalah matriks m x 1; jadi T memetakan R^n ke dalam R^m dan T linier

Teorema

Jika $T: R^n \rightarrow R^m$ adalah transformasi linier, dan jika $\mathbf{e_1}, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ adalah basis baku untuk R^n, maka T adalah perkalian oleh A atau $T(x) = Ax$

dimana A adalah matriks yang mempunyai vektor kolom $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$

CONTOH

- Carilah matriks baku (A) untuk tranformasi

  T: $R^3 \rightarrow R^2$ yang didefinisikan oleh

  $T(x) = (x_1+x_2, x_2+x_3)$, untuk setiap $x = (x_1, x_2, x_3)$ dalam R^n

- T: $R^3 \rightarrow R^2$
- Basis baku dari R^3 adalah:
  - e1 = (1, 0, 0) → T(e1) = (1 + 0, 0 + 0) = (1, 0)
  - e2 = (0, 1, 0) → T(e2) = (0 + 1, 1 + 0) = (1, 1)
  - e2 = (0, 0, 1) → T(e3) = (0 + 0, 0 + 1) = (0, 1)
- Maka matriks **A** nya adalah vektor kolom yang diperoleh dari T(e1), T(e2), dan T(e3), yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- Buktikan jawaban tersebut!

SIFAT-SIFAT TRANSFORMASI LINIER

- Jika T: V→W adalah transformasi linier, maka
  - T(**0**) = **0**
  - T(-**v**) = -T(**v**) untuk semua **v** di V
  - T(**v**-**w**) = T(**v**) – T(**w**) untuk semua **v** dan **w** di V

CONTOH SOAL

Misalkan T merupakan suatu transformasi dari M_{2x2} ke R yang didefinisikan oleh $T(A) = det\ (A)$, untuk setiap $A \in M_{2x2}$, Apakah T merupakan Transformasi linier.

Jawab :

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_{2x2}$

maka untuk setiap $\alpha \in$ R berlaku

$$\det(\alpha A) = \det\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_3 & \alpha a_4 \end{pmatrix} = \alpha^2(a_1a_2 - a_3a_4) = \alpha^2\det(A)$$

Perhatikan bahwa $det(\alpha A) \neq \alpha\ det(A)$. Jadi ***T* bukan transformasi linier**.

CONTOH SOAL

Diketahui T : P_2 (Polinom orde-2) → R^2, dengan

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a-b \\ a-c \end{pmatrix}$$

a. Apakah T merupakan transformasi linear

b. Tentukan $T(1+x+x^2)$

Jawab :

a.(i) Ambil unsur sembarang P_2,

$$\bar{u} = u_1 + u_2 x + u_3 x^2 \qquad \bar{v} = v_1 + v_2 x + v_3 x^2$$

Sehingga

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)x + (u_3 + v_3)x^2$$

Perhatikan bahwa

$$T(\bar{u}+\bar{v}) = T\left((u_1+v_1)+(u_2+v_2)x+(u_3+v_3)x^2\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1+v_1)-(u_2+v_2) \\ (u_1+v_1)-(u_3+v_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1-u_2)+(v_1-v_2) \\ (u_1-u_3)+(v_1-v_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1-u_2 \\ u_1-u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1-v_2 \\ v_1-v_3 \end{pmatrix}$$

$$= T\left(u_1+u_2x+u_3x^2\right)+T\left(v_1+v_2x+v_3x^2\right)$$

Memenuhi $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u})+T(\bar{v})$

Ambil unsur sembarang P2, dan $\alpha \in$ R, sehingga

$$\overline{u} = u_1 + u_2 x + u_3 x^2$$

$$
\begin{aligned}
T(\alpha \overline{u}) &= T\left(\alpha\ u_1 + u_2\ x + u_3 x^2\right) \\
&= \begin{pmatrix} (\alpha u_1 - \alpha u_2) \\ (\alpha u_1 - \alpha u_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(u_1 - u_2) \\ \alpha(u_1 - u_3) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 - u_3 \end{pmatrix} \\
&= \alpha T\ \left(u_1 + u_2 x + u_3 x^2\right) \\
&= \alpha T(\overline{u})
\end{aligned}
$$

Jadi, **T merupakan transformasi linear**

b. $T(1+x+x^2) = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Suatu transformasi linear $T : V \rightarrow W$ dapat direpresentasikan dalam bentuk :

$$T(\bar{u}) = A\bar{u} \quad \text{untuk setiap} \quad \bar{u} \in V.$$

➔ A dinamakan matriks transformasi dari T.

TERIMA KASIH