RUANG DAN ANAK RUANG VEKTOR

Definitions - Vectors

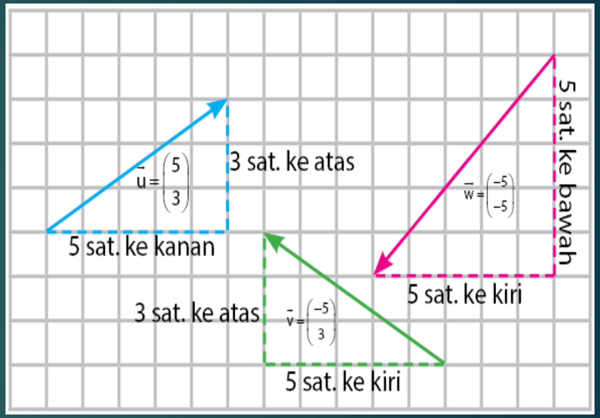
Vector - a single row or column of numbers

- Each individual entry is called an *element*
- denoted with **bold small letters**
- row vector

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- column vector

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$



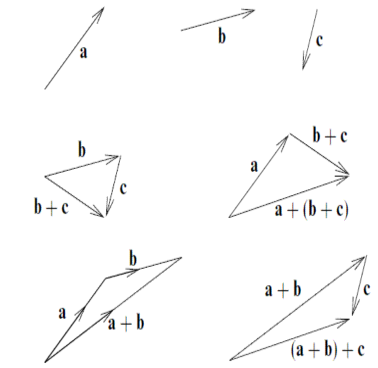


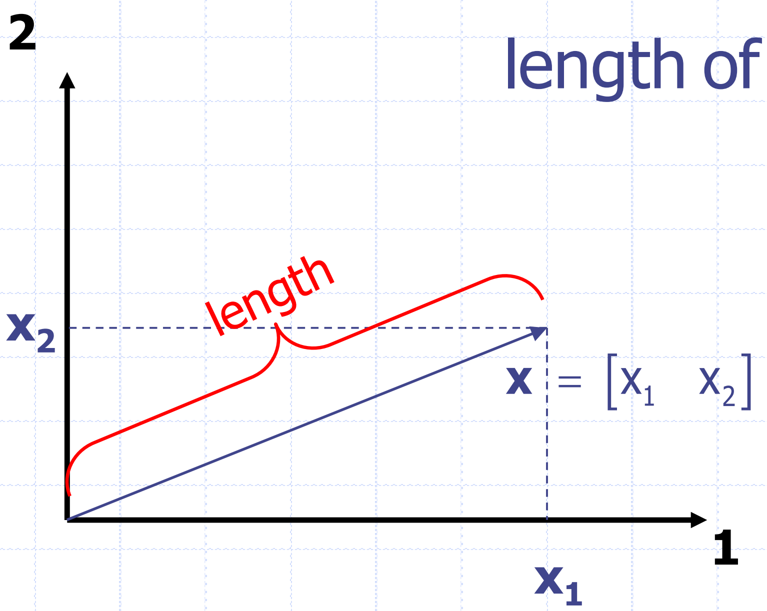
Figure 7.2 Addition of three vectors showing the associativity relation.

Geometry of Vectors

- Vectors have geometric properties of length and direction – for a vector

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

we have

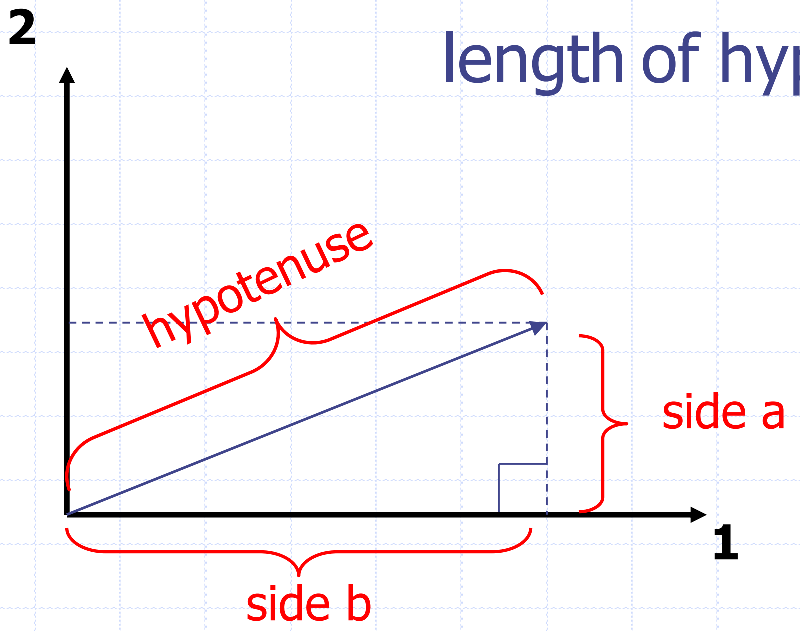


$$\text{length of } \mathbf{x} = L_x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2}$$
$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$
$$= \sqrt{x'x}$$

Why?

Geometry of Vectors

Recall the Pythagorean Theorem: in any right triangle, the lengths of the hypotenuse and the other two sides are related by the simple formula.



$$\text{length of hypotenuse} = L_h = \sqrt{L_a^2 + L_b^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$= \sqrt{x'x}$$

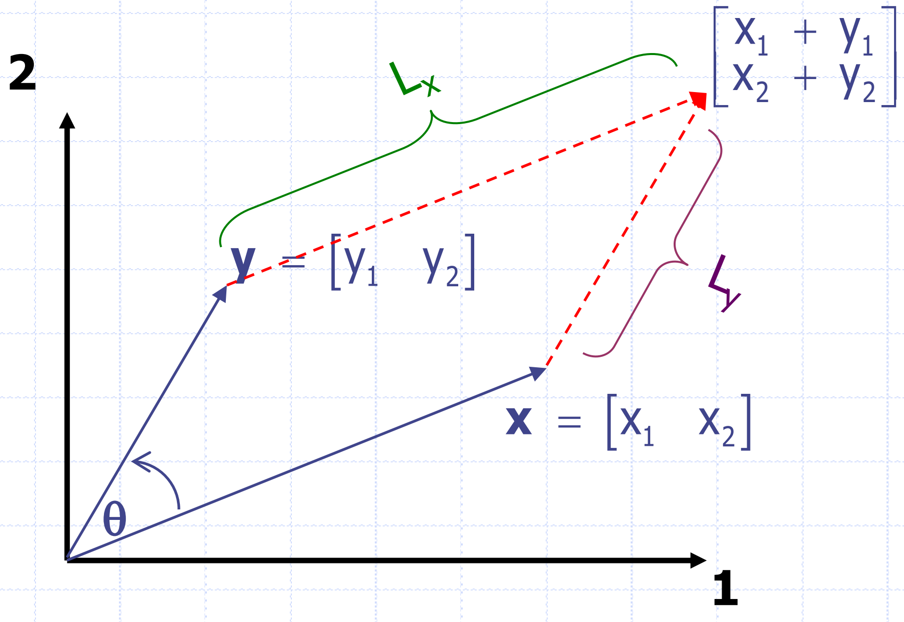
Geometry of Vectors

- Vector addition – for the vectors

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

we have

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$



Geometry of Vectors

- Scalar multiplication changes only the vector length – for the vector

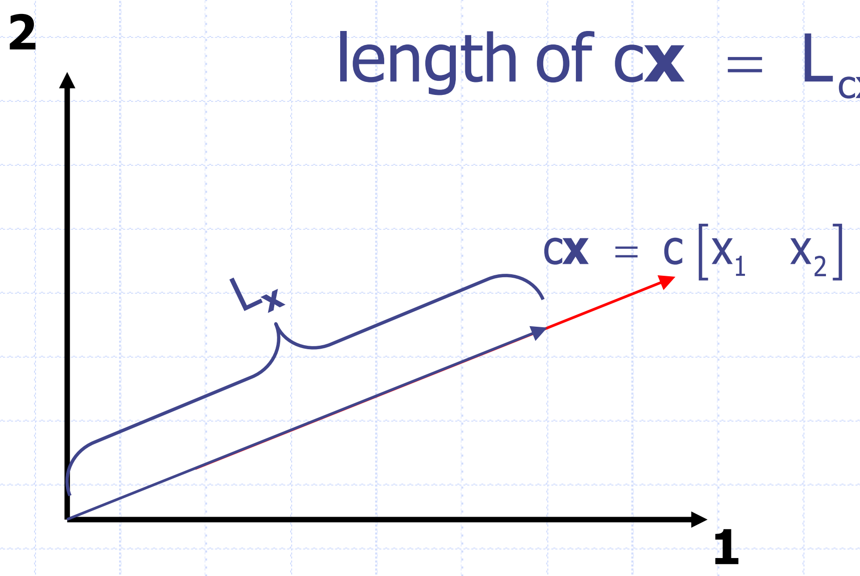
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

we have

$$\text{length of } c\mathbf{x} = L_{c\mathbf{x}} = \sqrt{c^2\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2\right)}$$

$$= \sqrt{c^2\left(x_1^2 + x_2^2\right)}$$

$$= c\sqrt{x'x}$$



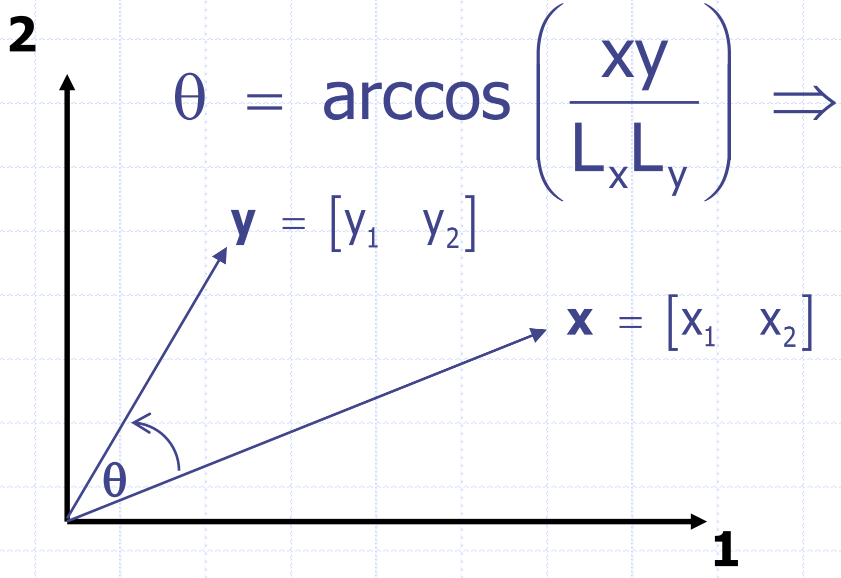
Geometry of Vectors

- Vector multiplication have angles between them – for the vectors

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

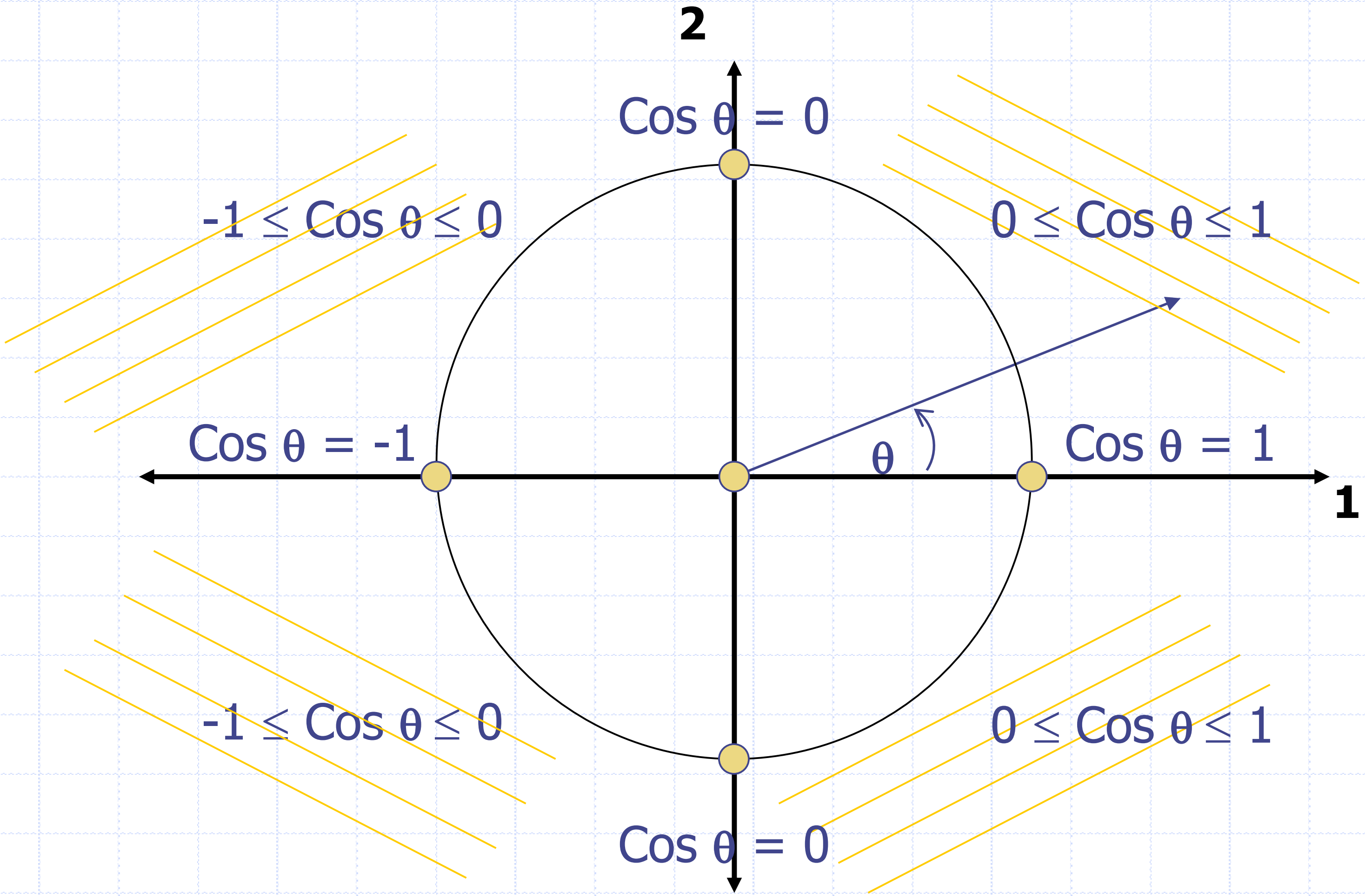
we have

$$\theta = \arccos\left(\frac{xy}{L_x L_y}\right) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{xy}{L_x L_y} = \frac{xy}{\sqrt{x'x}\sqrt{y'y}}$$



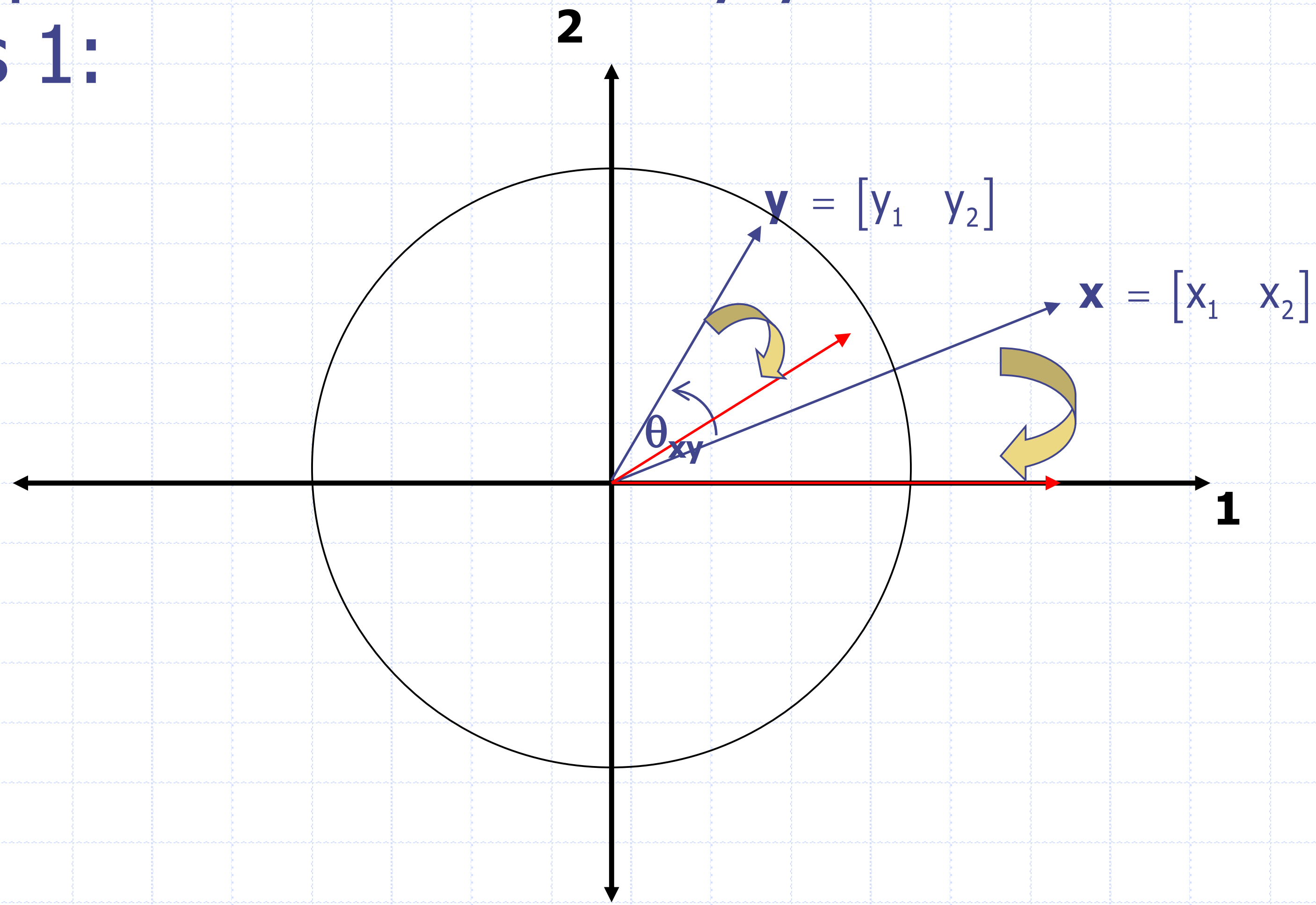
A Little Trigonometry Review

- The Unit Circle



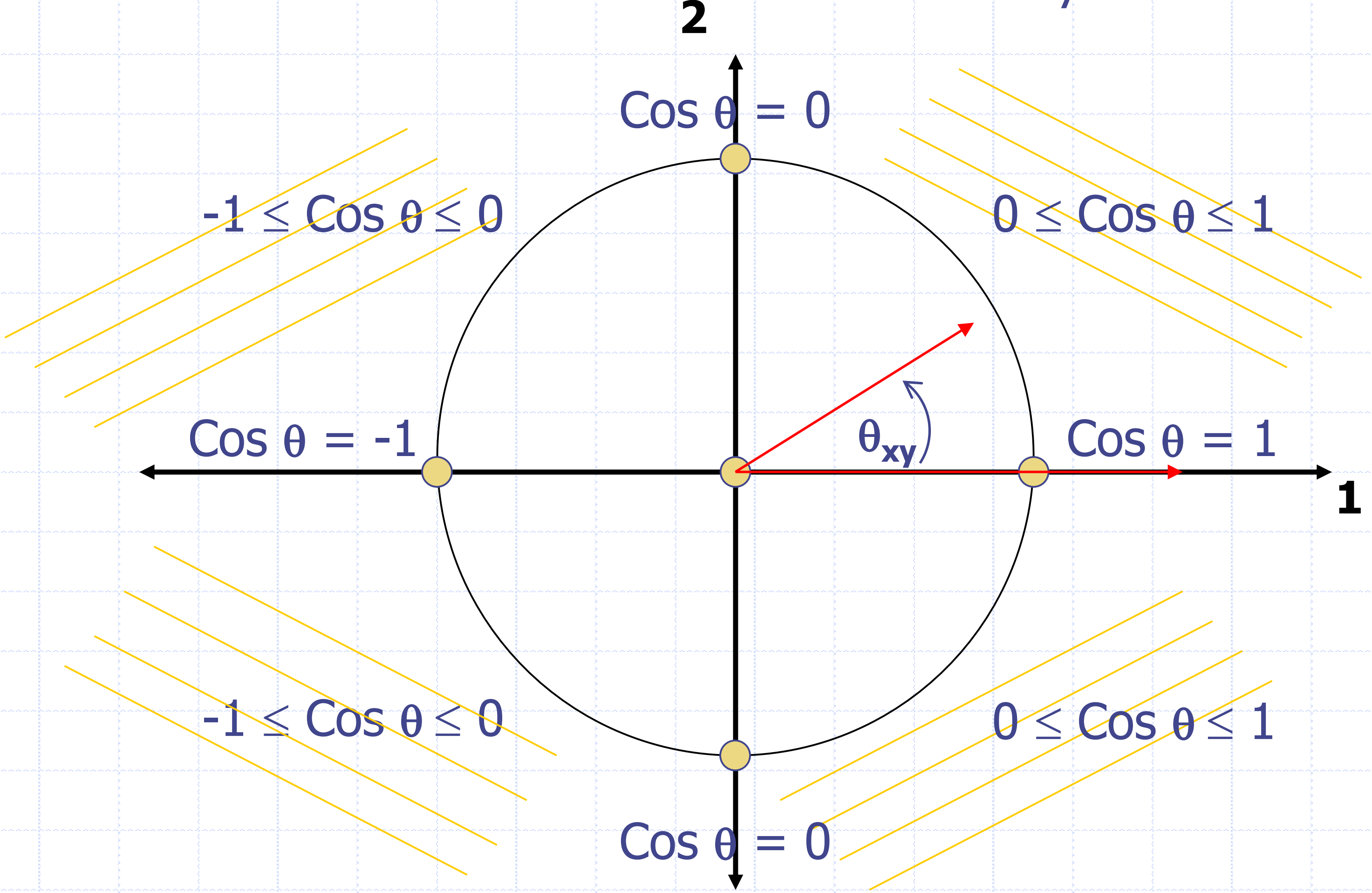
A Little Trigonometry Review

Suppose we rotate x any y so x lies on axis 1:



A Little Trigonometry Review

What does this imply about r_{xy}?

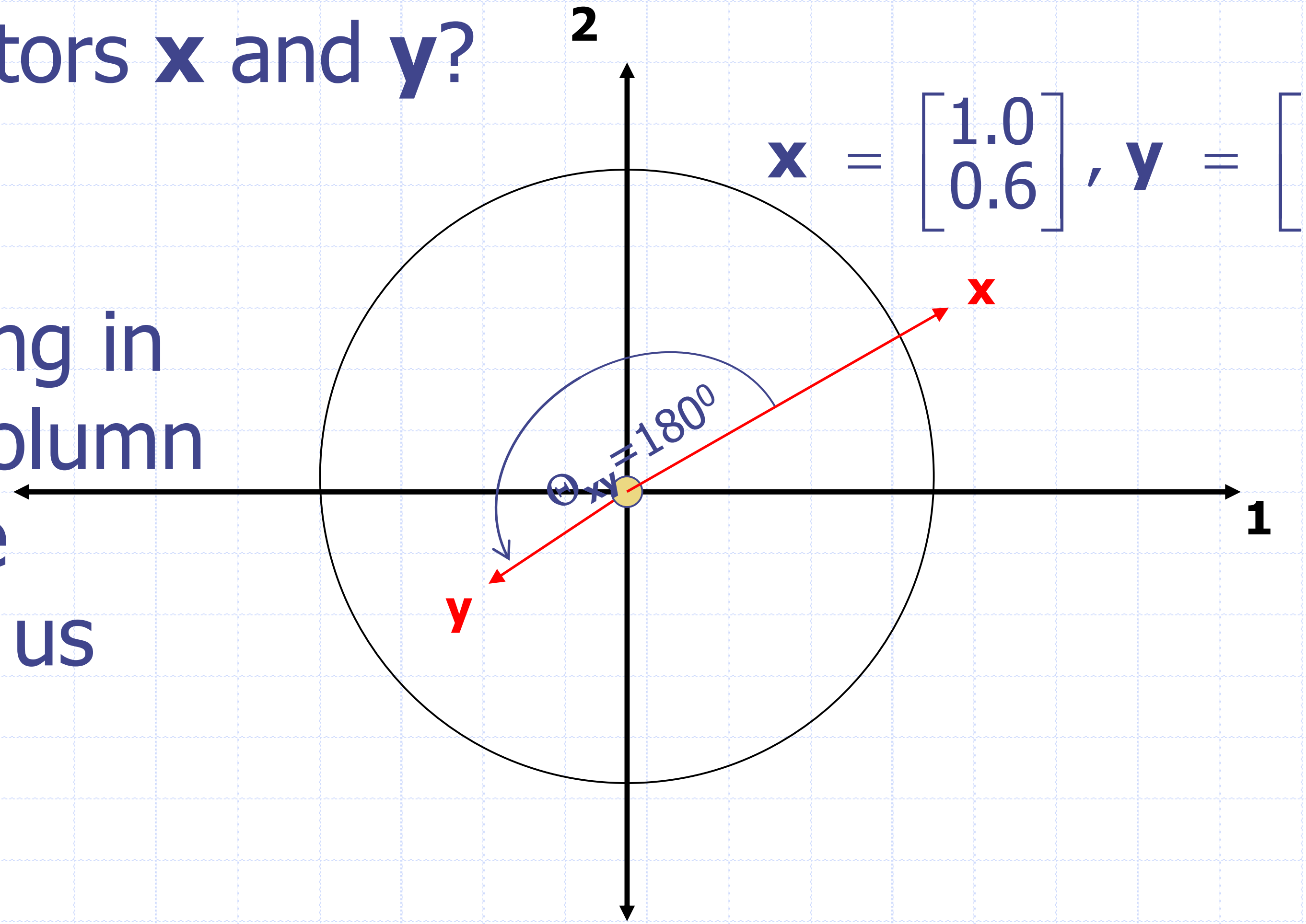


Geometry of Vectors

What is the correlation between the vectors **x** and **y**?

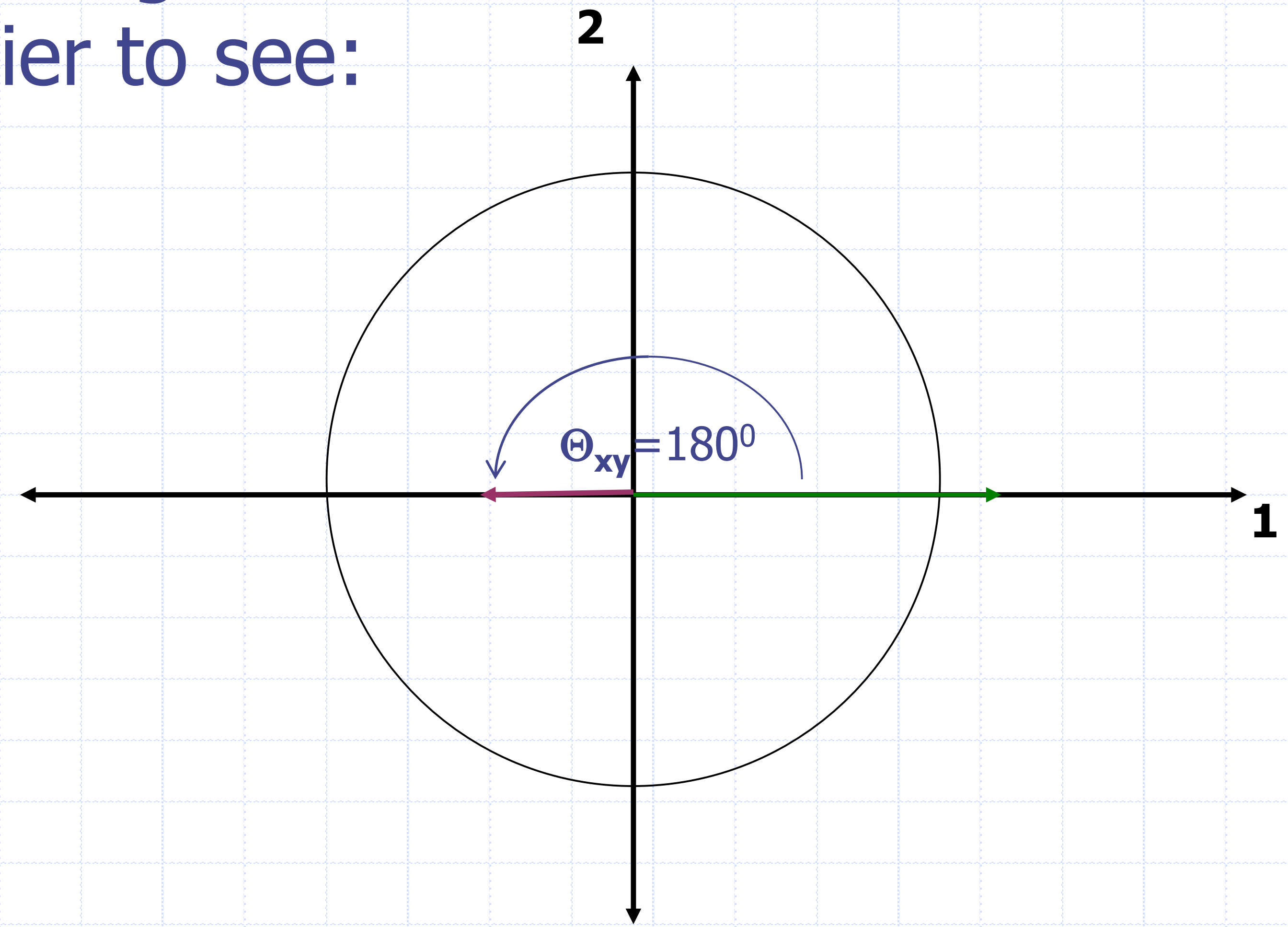
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.3 \end{bmatrix}$$

Plotting in the column space gives us



Geometry of Vectors

Rotating so **x** lies on axis 1 makes it easier to see:



Geometry of Vectors

What is the correlation between the vectors **x** and **y**?

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.3 \end{bmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{xy}}{L_{\mathbf{x}}L_{\mathbf{y}}} = \frac{\mathbf{xy}}{\sqrt{\mathbf{x'x}}\sqrt{\mathbf{y'y}}}$$

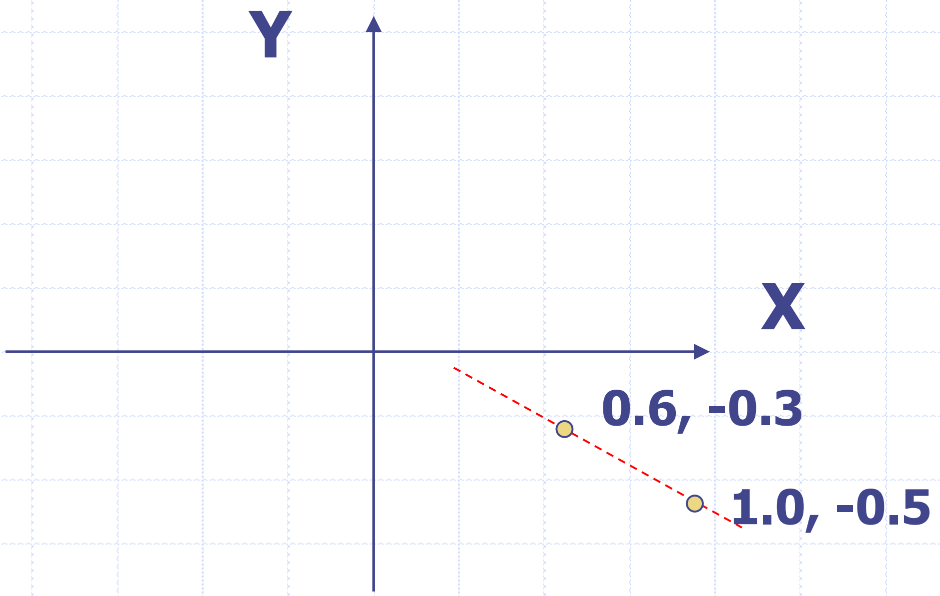
$$= \frac{1.0\,(-0.5) + 0.6\,(-0.3)}{\sqrt{1.0\,(1.0) + 0.6\,(0.6)}\sqrt{-0.5\,(-0.5) + (-0.3)\,(-0.3)}}$$

$$= \frac{-0.68}{\sqrt{1.36}\sqrt{0.34}} = -1.00$$

Geometry of Vectors

Of course, we can see this by plotting the these values in the x,y (row) space:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.3 \end{bmatrix}$$



Geometry of Vectors

What is the correlation between the vectors **x** and **y**?

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -0.50 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{xy}}{L_x L_y} = \frac{\mathbf{xy}}{\sqrt{\mathbf{x'x}}\sqrt{\mathbf{y'y}}}$$

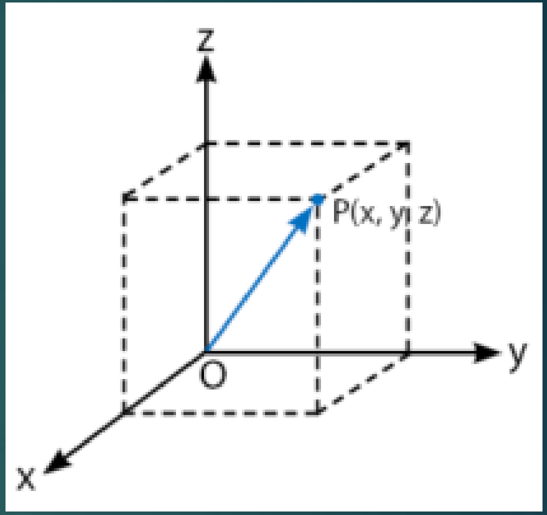
$$= \frac{1.0\,(-0.50) + 0.4\,(1.25)}{\sqrt{1.0\,(1.0) + 0.4\,(0.4)}\sqrt{-0.50\,(-0.50) + (1.25)\,(1.25)}}$$

$$= \frac{0.00}{\sqrt{1.16}\sqrt{1.8125}} = 0.00$$

RUANG VEKTOR

Ilustrasi

- Dalam logika umum ruang perkuliahan dikatakan berdimensi 3, setiap dindingnya merupakan bidang datar berdimensi 2, dan batas antar dinding berupa garis berdimensi satu , sedangkan titik pojoknya berdimensi 0. Jadi ruang berdimensi lebih rendah terdapat di dalam ruang berdimensi lebih besar.



Ruang Vektor Umum

Misalkan $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ dan $k, l \in Riil$

V dinamakan **ruang vektor** jika terpenuhi aksioma :

1. ***V* tertutup terhadap operasi penjumlahan**

   Untuk setiap $\bar{u}, \bar{v} \in V$ maka $\bar{u} + \bar{v} \in V$

2. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

3. $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$

4. Terdapat $\bar{0} \in V$ sehingga untuk setiap $\bar{u} \in V$

   berlaku $\bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}$

5. Untuk setiap $\bar{u} \in V$ terdapat $(-\bar{u})$ sehingga

   $\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$

6. ***V* tertutup thd operasi perkalian dengan skalar**.

Untuk setiap $\bar{u} \in V$ dan $k \in Riil$ maka $k\bar{u} \in V$

7. $k\left(\bar{u} + \bar{v}\right) = k\bar{u} + k\bar{v}$

8. $\left(k + l\right)\bar{u} = k\bar{u} + l\bar{u}$

9. $k\left(l\bar{u}\right) = l\left(k\bar{u}\right) = \left(kl\right)\bar{u}$

10. $1.\bar{u} = \bar{u}$

Berdasarkan definisi ruang vector di atas, dapat diringkas sebagai berikut:

Ruang vector merupakan himpunan yang anggotanya berupa vektor-vector dimana tertutup terhadap operasi penjumlahan antar vector dan operasi perkalian vector dengan skalar. V={v1,v2,...} memiliki sifat:

- 1. Tertutup terhadap operasi penjumlahan v1,v2 ϵ V maka v1+v2 ϵ V
- 2. Tertutup terhadap operasi perkalian k ϵ R, v ϵ V maka kv ϵV

Kedua syarat tersebut diatas harus dipenuhi agar dapat disebut sebagai ruang vektor.

Contoh :

1. Himpunan vektor Euclides dengan operasi standar (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar).

   Notasi : R^n (Ruang Euclides orde n)

2. Himpunan matriks berukuran m x n

   dengan operasi standar (penjumlahan matriks

   dan perkalian matriks dengan skalar),

   Notasi : M_{mxn} (Ruang Matriks mxn)

3. Himpunan polinom pangkat n dengan operasi standar.

   Notasi : P_n (Ruang Polinom orde n)

Latihan:

- Apakah himpunan berunsur vector berikut ini merupakan ruang vektor?
- 1. $A=\{(x, y, x+2y); x, y \in R\}$
- 2. $B=\{(x, y, 3xy); x, y \in R\}$

Ruang Euclides orde *n*

Operasi-Operasi pada ruang vektor Euclides:

- Penjumlahan

$$\bar{u} + \bar{v} = \left(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n\right)$$

- Perkalian dengan skalar Riil sebarang (k)

$$k\bar{u} = \left(ku_1, ku_2, \ldots, ku_n\right)$$

- Perkalian Titik (*Euclidean inner product*)

$$\bar{u} \bullet \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

- Panjang vektor didefinisikan oleh :

$$\|\bar{u}\| = (\bar{u} \bullet \bar{u})^{1/2} = \sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + \ldots + u_n{}^2}$$

- Jarak antara dua vektor didefinisikan oleh :

$$d\left(\bar{u}, \bar{v}\right) = \|\bar{u} - \bar{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

Contoh :

Diketahui $\bar{u} = (1, 1, 2, 3)$ dan $\bar{v} = (2, 2, 1, 1)$

Tentukan panjang vektor dan jarak antara kedua vektor tersebut

Jawab:

Panjang vektor :

$$\|\bar{u}\| = (\bar{u} \bullet \bar{u})^{1/2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Jarak kedua vektor

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{u} - \bar{v}\| = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{7}$$

ANAK RUANG VEKTOR

Misalkan W merupakan subhimpunan dari sebuah ruang vektor V

W dinamakan **anak vektor** (*subspace*) V

jika W juga merupakan ruang vektor

yang tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar.

Syarat W disebut anak vektor dari V adalah :

1. $W \neq \{\,\}$
2. $W \subseteq V$
3. Jika $\bar{u}, \bar{v} \in W$ maka $\bar{u} + \bar{v} \in W$
4. Jika $\bar{u} \in W$ dan $k \in$ Riil maka $k\bar{u} \in W$

Contoh :

Tunjukan bahwa himpunan W yang berisi semua matriks orde 2x2 dimana setiap unsur diagonalnya adalah nol merupakan anak vektor dari ruang vektor matriks 2x2

Jawab :

1. $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ maka $W \neq \{ \}$
2. Jelas bahwa $W \subset M2x2$
3. Ambil sembarang matriks $A, B \in W$

   Tulis

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa :

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ini menunjukan bahwa $A + B \in W$

4. Ambil sembarang matriks $A \in$ W dan $k \in$ Riil maka

$$kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ ka_2 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

Ini menunjukan bahwa $kA \in W$

Jadi, W merupakan anak vektor dari M2x2.

Contoh :

Periksa apakah himpunan *D* yang berisi semua matriks orde 2x2 yang determinannya nol merupakan anak vektor dari ruang vektor M2x2

Jawab :

Ambil sembarang matriks A, B $\in$ W

Pilih $a \neq b$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$, jelas bahwa *det* (A) = 0

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$$, jelas bahwa *det* (A) = 0

Perhatikan bahwa :

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Karena $a \neq$ b

Maka $det\ (A + B) = a^2 - b^2 \neq 0$

Jadi D bukan merupakan anak vektor
karena tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan

☺ Terima Kasih ☺