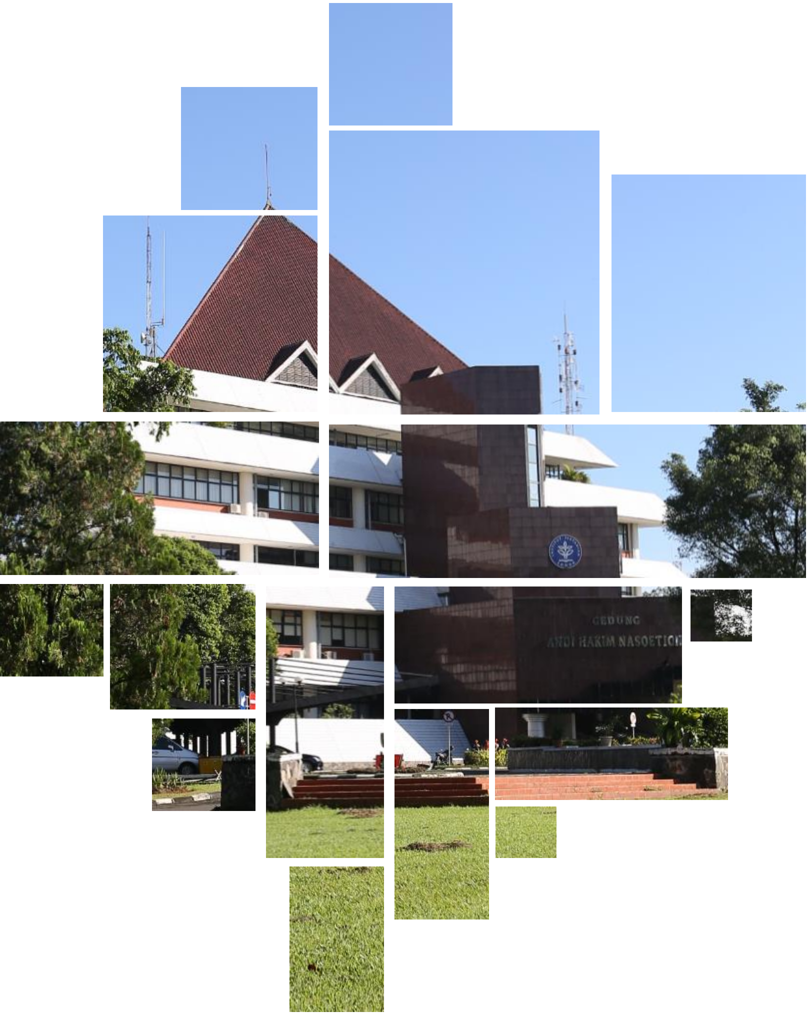
IPB University
Bogor Indonesia

Study Program
Statistics and Data Science
Department of Statistics



# Responsi Metode Statistika (STA-1211)

## PERTEMUAN 2 dan 3

Asisten: Laily Nissa Atul Mualifah

# Outline

- ❑ Ruang contoh dan Kejadian
- ❑ Permutasi dan Kombinasi
- ❑ Kaidah Penggandaan
- ❑ Peluang Kejadian
- ❑Kejadian Saling Bebas
- ❑ Peluang Bersyarat
- ❑ Kaidah Bayes

# RUANG CONTOH DAN KEJADIAN

**Ruang contoh** ($S$) merupakan kumpulan semua hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan. Banyaknya ruang contoh dinotasikan dengan $n(S)$.

**Ilustrasi:**

- Sebuah dadu dilempar sekali,maka ruang contohnya adalah $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. $n(S) = 6$
- Dua koin dilempar sekali,maka ruang contohnya adalah $S = \{HH, HT, TH, TT\}$. $n(S) = 4$

## Ilustrasi: Agresti *et al.*

**5.19 Three children** A couple plans to have three children. Suppose that the probability of any given child being female is 0.5, and suppose that the genders of each child are independent events.

TRY

**a.** Write out all outcomes in the sample space for the genders of the three children.

Ruang contoh:

| Anak ke-1 | Anak ke-2 | Anak ke-3 | | |
|---|---|---|---|---|
| Laki-laki | Laki-laki | Laki-laki | $\Longrightarrow$ | LLL |
| | | Perempuan | $\Longrightarrow$ | LLP |
| | Perempuan | Laki-laki | $\Longrightarrow$ | LPL |
| | | Perempuan | $\Longrightarrow$ | LPP |
| Perempuan | Laki-laki | Laki-laki | $\Longrightarrow$ | PLL |
| | | Perempuan | $\Longrightarrow$ | PLP |
| | Perempuan | Laki-laki | $\Longrightarrow$ | PPL |
| | | Perempuan | $\Longrightarrow$ | PPP |

$n(S) = 8$

# RUANG CONTOH DAN KEJADIAN

IPB University
Bogor Indonesia

**Kejadian** (*event*) merupakan kumpulan titik contoh atau himpunan bagian dari ruang contoh. Ruang kejadian dinotasikan dengan huruf kapital misal A. Banyaknya ruang kejadian dinotasikan dengan $n(A)$.

**Ilustrasi:**

- Kejadian yang diharapkan dari pelemparan sebuah dadu adalah sisi yang muncul bilangan ganjil, maka ruang kejadiannya adalah A$= \{1,3,5\}$

**Ilustrasi: Agresti *et al.***

**5.19 Three children** A couple plans to have three children. Suppose that the probability of any given child being female is 0.5, and suppose that the genders of each child are independent events.

TRY

**a.** Write out all outcomes in the sample space for the genders of the three children.

**b.** What should be the probability associated with each outcome?

Using the sample space constructed in part a, find the probability that the couple will have

**c.** two girls and one boy.

**d.** at least one child of each gender.

- Kejadian yang diharapkan adalah memiliki 2 anak perempuan dan 1 laki-laki, maka ruang kejadiannya $\mathrm{B} = \{\mathrm{LPP}, \mathrm{PPL}, \mathrm{PLP}\}$
- Kejadian yang diharapkan adalah memiliki 1 anak laki-laki atau 1 anak perempuan, maka ruang kejadiannya $\mathrm{C} = \{\mathrm{LPP}, \mathrm{PPL}, \mathrm{PLP}, \mathrm{LLP}, \mathrm{LPL}, \mathrm{PLL}\}$

# PERMUTASI & KOMBINASI

| | Tanpa Pengembalian | Dengan Pengembalian |
|---|---|---|
| Terurut | $P_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ | $n^r$ |
| Tidak Terurut | $C_r^n = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ | $C_r^{n+r-1}$ |

# PERMUTASI & KOMBINASI

**Ilustrasi (Permutasi)**:

Dari 10 karyawan di sebuah perusahaan akan diambil 3 orang untuk mendapatkan sebuah hadiah. Orang pertama yang terambil akan mendapatkan $100, orang kedua mendapatkan $50 dan orang ketiga mendapatkan $25. Berapa banyaknya cara memilih 3 karyawan?

Karena urutan karyawan mempengaruhi besarnya hadiah yang diterima, maka urutan menjadi penting, sehingga digunakan permutasi. Banyaknya cara memilih karyawan adalah:

$$P_3^{10} = \frac{10!}{(7)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Menghitung permutasi dengan R:

```
> factorial(10)/factorial(7)
[1] 720
```

# PERMUTASI & KOMBINASI

- Permutasi dari $r$ objek yang sama

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_r!}$$

**Ilustrasi:**

Seseorang akan merangkai lampu hias secara berderet. Warna lampu hias terdiri dari 3 merah, 5 biru, 2 hijau, dan 4 putih. Banyaknya susunan lampu adalah

$$\binom{14}{3, 5, 2, 4} = \frac{14!}{3!\, 5!\, 2!\, 4!} = 2522520$$

```
> factorial(14)/(factorial(3)*factorial(5)*
factorial(2)*factorial(4))
[1] 2522520
```

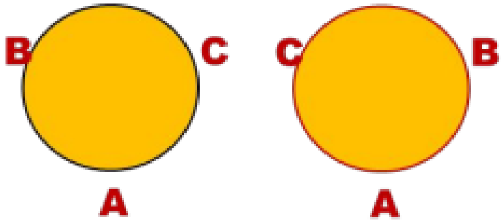
- Permutasi Melingkar

$$(n-1)!$$

**Ilustrasi:**

Tiga orang, missal A, B, dan C akan duduk mengelilingi meja bundar. Banyaknya kemungkinan susunan duduk:

$$(3-1)! = 2! = 2$$



# PERMUTASI & KOMBINASI

IPB University
Bogor Indonesia

**Ilustrasi Kombinasi:**

Di dalam sebuah kantong terdapat 6 kelereng putih, 4 kelereng biru, dan 3 kelereng merah. Berapa banyaknya cara mengambil 4 kelereng dari kantong?

Pada kasus ini urutan kelereng tidak dianggap penting. Kelereng PMPP dianggap sama dengan PPPM, MPPP, dan PPMP. Banyaknya cara yaitu

$$C_4^{13} = \frac{13!}{9!\,4!}$$

$$= \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{4!}$$

$$= 715$$

Dengan R:

```
> choose(13,4)
[1] 715
```

# KAIDAH PENGGANDAAN

Penggandaan digunakan jika setiap kemungkinan dibentuk dari komponen-komponen yang saling bebas.

## Ilustrasi Penggandaan: Mendenhall, *et al.*

**4.26 What to Wear?** You own 4 pairs of jeans, 12 clean T-shirts, and 4 wearable pairs of sneakers. How many outfits (jeans, T-shirt, and sneakers) can you create?

Banyaknya kemungkinan *outfit* yang bisa dipilih adalah:

$$4 \times 12 \times 4 = 192$$

Dengan R

```
> prod(4,12,4)
[1] 192
```

# KAIDAH PENGGANDAAN

**Ilustrasi Penggandaan:**

Di dalam sebuah kantong terdapat 6 kelereng putih, 4 kelereng biru, dan 3 kelereng merah. Berapa banyaknya cara mengambil 2 kelereng putih dan 1 kelereng merah dari kantong?

Pada kasus ini urutan kelereng tidak dianggap penting. Kelereng PMPP dianggap sama dengan PPPM, MPPP, dan PPMP. Banyaknya cara yaitu

$$C_2^6 \times C_1^3 = \frac{6!}{2!\,4!} \times \frac{3!}{1!\,2!} = 45$$

Dengan R:

```
> choose(6,2)*choose(3,1)
[1] 45
```

# PELUANG KEJADIAN

- **Peluang** adalah rasio banyaknya kejadian yang diharapkan dan semua kejadian yang mungkin dari suatu percobaan jika percobaan tersebut pada kondisi yang sama.

- **Aksioma** peluang:

1. $0 \leq \mathrm{P}(\mathrm{A_i}) \leq 1$, untuk $i = 1,2,\dots,n$
2. Jumlah peluang semua kejadian dalam ruang contoh adalah
$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{A_i}) = 1$$
3. $\mathrm{P}(\mathrm{A_1} + \mathrm{A_2} + \cdots + \mathrm{A_m}) = \mathrm{P}(\mathrm{A_1}) + \mathrm{P}(\mathrm{A_2}) + \cdots + \mathrm{P}(\mathrm{A_m})$, jika $\mathrm{A_1}, \mathrm{A_1}, \dots, \mathrm{A_m}$ merupakan kejadian-kejadian yang terpisah.

Sifat-sifat peluang:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A^C) = 1 - P(A)$
- $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Jika $A \subset B$ maka $P(A) \leq P(B)$
- Jika $A$ dan $B$ saling lepas maka $P(A \cap B) = 0$
- Jika $A$ dan $B$ saling bebas maka $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

# PELUANG KEJADIAN

**Ilustrasi Peluang:**

Sebanyak 3 bola diambil secara acak dari sebuah kotak yang berisi 3 bola berwarna kuning, 5 hijau dan 4 biru. Berapa peluang bola yang terambil adalah semua bola berwarna sama

Banyaknya ruang contoh adalah:

$$C_3^{12} = \frac{12!}{3!\,9!} = 220$$

Menggunakan R:

```
> choose(12,3)
[1] 220
```

Kejadian yang mungkin adalah:

- Semua bola berwarna kuning atau
- Semua bola berwarna hijau atau
- Semua bola berwarna biru

Banyaknya ruang kejadian:

$$C_3^3 C_0^9 + C_3^5 C_0^7 + C_3^4 C_0^8 = 1 + 10 + 4 = 15$$

```
> a=choose(3,3)*choose(9,0)
> b=choose(5,3)*choose(7,0)
> c=choose(4,3)*choose(8,0)
> a+b+c
[1] 15
```

$$\text{Peluang kejadian} = \frac{15}{220} = 0.06818$$

# PELUANG KEJADIAN

IPB University — Bogor Indonesia —

## Ilustrasi Peluang: Agresti, *et al*.

**5.23 Seat belt use and auto accidents** Based on records of automobile accidents in a recent year, the Department of Highway Safety and Motor Vehicles in Florida reported the counts who survived (S) and died (D), according to whether they wore a seat belt (Y = yes, N = no). The data are presented in the contingency table shown.

TRY

| Outcome of auto accident by whether subject wore seat belt | | | |
|---|---|---|---|
| **Wore Seat Belt** | **Survived (S)** | **Died (D)** | **Total** |
| Yes (Y) | 412,368 | 510 | **412,878** |
| No (N) | 162,527 | 1,601 | **164,128** |
| **Total** | **574,895** | **2,111** | **577,006** |

**a.** What is the sample space of possible outcomes for a randomly selected individual involved in an auto accident? Use a tree diagram to illustrate the possible outcomes. (*Hint:* One possible outcome is YS.)

**b.** Using these data, estimate (i) P(D), (ii) P(N).

**c.** Estimate the probability that an individual did not wear a seat belt and died.

a) Ruang contoh dari percobaan tersebut adalah $S = \{\mathrm{YS}, \mathrm{YD}, \mathrm{NS}, \mathrm{ND}\}$


| Outcome of auto accident by whether subject wore seat belt | | | |
|---|---|---|---|
| **Wore Seat Belt** | **Survived (S)** | **Died (D)** | **Total** |
| Yes (Y) | 412,368 | 510 | **412,878** |
| No (N) | 162,527 | 1,601 | **164,128** |
| **Total** | **574,895** | **2,111** | **577,006** |


b) $\mathrm{P(D)} = \dfrac{2111}{577006}$ dan $\mathrm{P(N)} = \dfrac{164128}{577006}$


| Outcome of auto accident by whether subject wore seat belt | | | |
|---|---|---|---|
| **Wore Seat Belt** | **Survived (S)** | **Died (D)** | **Total** |
| Yes (Y) | 412,368 | 510 | **412,878** |
| No (N) | 162,527 | 1,601 | **164,128** |
| **Total** | **574,895** | **2,111** | **577,006** |


c) $\mathrm{P(N} \cap D) = \dfrac{1601}{577006}$

# PELUANG KEJADIAN

IPB University — Bogor Indonesia

## Ilustrasi Peluang: Agresti, *et al*.

**5.16 More true-false questions** Your teacher gives a true-false pop quiz with 10 questions.

TRY

**a.** Show that the number of possible outcomes for the sample space of possible sequences of 10 answers is 1024.

**b.** What is the complement of the event of getting *at least* one of the questions wrong?

**c.** With random guessing, show that the probability of getting *at least* one question wrong is approximately 0.999.

a) Karena jawaban dari setiap pertanyaan saling bebas, maka banyaknya ruang contoh dapat dihitung menggunakan kaidah penggandaan yaitu

$$\mathrm{n}(S) = 2 \times 2 \ldots \times 2 = 2^{10} = 1024$$

b) Komplemen dari kejadian minimal satu jawaban salah adalah semua jawaban benar

c) Peluang minimal satu jawaban salah adalah

$$1 - peluang\ semua\ jawaban\ benar$$

Dari ruang contoh banyaknya kejadian semua jawaban benar adalah satu kejadian yaitu $\{\mathrm{BBBBBBBBBB}\}$, sehingga peluang semua jawaban benar adalah $1/1024$

Sehingga peluang minimal satu jawaban salah adalah

$$1 - \frac{1}{1024} = 0.9990234$$

# PELUANG KEJADIAN

## Ilustrasi Peluang: Mendenhall, *et al*.

**4.4 Free Throws** A particular basketball player hits 70% of her free throws. When she tosses a pair of free throws, the four possible simple events and three of their associated probabilities are as given in the table:

| Simple Event | Outcome of First Free Throw | Outcome of Second Free Throw | Probability |
|---|---|---|---|
| 1 | Hit | Hit | .49 |
| 2 | Hit | Miss | ? |
| 3 | Miss | Hit | .21 |
| 4 | Miss | Miss | .09 |

**a.** Find the probability that the player will hit on the first throw and miss on the second.

**b.** Find the probability that the player will hit on at least one of the two free throws.

a) Berdasarkan aksioma peluang, total dari peluang seluruh kejadian adalah 1. Sehingga peluang memukul pada lemparan pertama dan terlewat pada lemparan kedua adalah:

$$1 - (0.49 + 0.21 + 0.09) = 0.21$$

b) Kejadian memukul setidaknya satu kali pada lemparan pertama atau kedua adalah: $\{\mathrm{HH}, \mathrm{HM}, \mathrm{MH}\}$

Sehingga peluangnya adalah:

$$0.49 + 0.21 + 0.21 = 0.91$$

# KEJADIAN SALING BEBAS

- Kejadian saling bebas adalah kejadian-kejadian yang tidak saling mempengaruhi
- Jika $A$ dan $B$ merupakan kejadian yang saling bebas, maka

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Ilustrasi:

Peluang bayi lahir berjenis kelamin laki-laki adalah 0.6. Jika jenis kelamin anak pertama (A) dan anak kedua (B) saling bebas, maka peluang jenis kelamin anak pertama laki-laki dan anak kedua perempuan adalah

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0.6 \times 0.4 = 0.24$$

# PELUANG BERSYARAT



Peluang bersyarat adalah peluang suatu kejadian (A) jika kejadian lain (B) diketahui sudah terjadi

Peluang A bersyarat B dinotasikan dengan $\mathrm{P(A|B)}$, dimana

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$$

dengan $\mathrm{P(B)} > 0$

Jika kejadian A dan B saling bebas maka:

$$\mathrm{P(A \cap B)} = \mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B)}$$
$$\mathrm{P(A|B)} = \mathrm{P(A)}$$
$$\mathrm{P(B|A)} = \mathrm{P(B)}$$

Contoh:

Dalam sebuah kotak terdapat 4 bola merah dan 3 bola kuning. Jika diambil dua buah bola dengan pengembalian, berapakah peluang bola kedua berwarna kuning (A) jika pada pengambilan pertama diketahui berwarna merah (B)?

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) = \frac{3}{7}$$

# PELUANG BERSYARAT

IPB University — Bogor Indonesia

## Ilustrasi Peluang: Mendenhall, *et al*.

**4.52** An experiment can result in one or both of events $A$ and $B$ with the probabilities shown in this probability table:

| | $A$ | $A^c$ |
|---|---|---|
| $B$ | .34 | .46 |
| $B^c$ | .15 | .05 |

Find the following probabilities:

**a.** $P(A)$ **b.** $P(B)$ **c.** $P(A \cap B)$

**d.** $P(A \cup B)$ **e.** $P(A|B)$ **f.** $P(B|A)$

$$P(A) = 0.34 + 0.15 = 0.49$$

$$P(B) = 0.34 + 0.46 = 0.80$$

$$P(A \cap B) = 0.34$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.49 + 0.80 - 0.34 = 0.95$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.34}{0.80} = 0.425$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.34}{0.49} = 0.6939$$

# PELUANG BERSYARAT

IPB University
— Bogor Indonesia —

## Ilustrasi Peluang: Agresti, *et al*.

**5.39 Happiness in relationship** Are people happy in their romantic relationships? The table shows results from the 2012 General Social Survey for adults classified by gender and happiness.

| | Level of Happiness | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Gender** | **Very Happy** | **Pretty Happy** | **Not Too Happy** | **Total** |
| Male | 69 | 73 | 4 | **146** |
| Female | 78 | 80 | 13 | **171** |
| **Total** | **147** | **153** | **17** | **317** |

**a.** Estimate the probability that an adult is very happy in his or her romantic relationship.

**b.** Estimate the probability that an adult is very happy (i) given that he is male and (ii) given that she is female.

$$a)\ P(VH) = \frac{147}{317} = 0.4637$$

$$b)\ P(VH|M) = \frac{P(VH \cap M)}{P(M)} = \frac{69/317}{146/317} = \frac{69}{146} = 0.4726$$

$$c)\ P(VH|F) = \frac{P(VH \cap F)}{P(F)} = \frac{78/317}{171/317} = \frac{78}{171} = 0.4561$$

# PELUANG BERSYARAT

IPB University — Bogor Indonesia

## Ilustrasi Peluang: Mendenhall, *et al*.

**4.62 Smoking and Cancer** A survey of people in a given region showed that 20% were smokers. The probability of death due to lung cancer, given that a person smoked, was roughly 10 times the probability of death due to lung cancer, given that a person did not smoke. If the probability of death due to lung cancer in the region is .006, what is the probability of death due to lung cancer given that a person is a smoker?

Diketahui:

$P(S) = 0.20$

$P(D|S) = 10P(D|S^C)$

$P(D) = 0.006$

| | $S$ | $S^C$ | Total |
|---|---|---|---|
| $D$ | ? | ? | 0.006 |
| $D^C$ | ? | ? | 0.994 |
| Total | 0.2 | 0.8 | 1 |

Ditanyakan: $P(D|S)$

$$P(D|S) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)}$$

$$10P(D|S^C) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)}$$

$$10\frac{P(D \cap S^C)}{P(S^C)} = \frac{P(D \cap S)}{P(S)}$$

$$10\frac{P(D) - P(D \cap S)}{P(S^C)} = \frac{P(D \cap S)}{P(S)}$$

$$10\frac{0.006 - P(D \cap S)}{0.8} = \frac{P(D \cap S)}{0.2}$$

$$P(D \cap S) = \frac{0.012}{2.8} = 0.0043$$

$$P(D|S) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} = \frac{0.0043}{0.2} = 0.0215$$

# KAIDAH BAYES

Suatu ruang sampel S dipartisi menjadi $k$ gugus $B_1, B_2, \dots, B_k$ dengan $B_i \cap B_j = \emptyset$ dan $P(B_i) > 0$

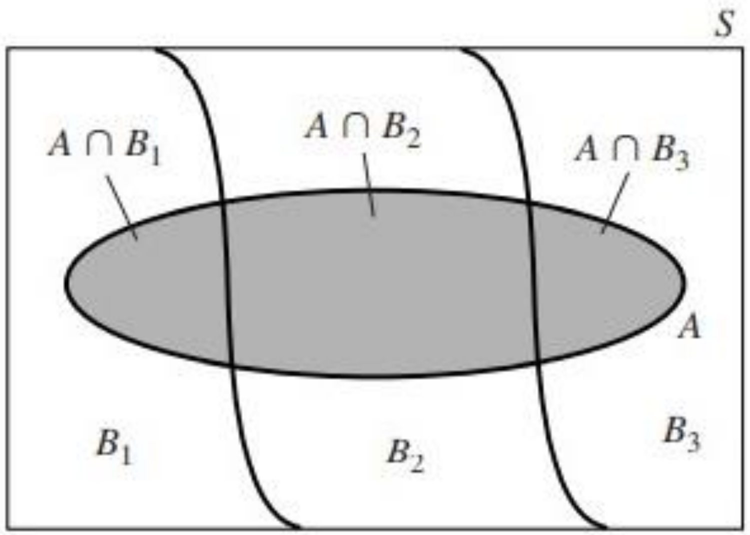
A merupakan suatu subset dari S dan $(B_1, B_2, \dots, B_k)$ partisi S, maka A dapat diuraikan sebagai $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_k)$

Peluang kejadian A adalah (**Kaidah Total**):

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)$$

•Menggunakan sifat peluang bersyarat, maka peluang $B_j$ bersyarat A adalah:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}$$




Contoh:

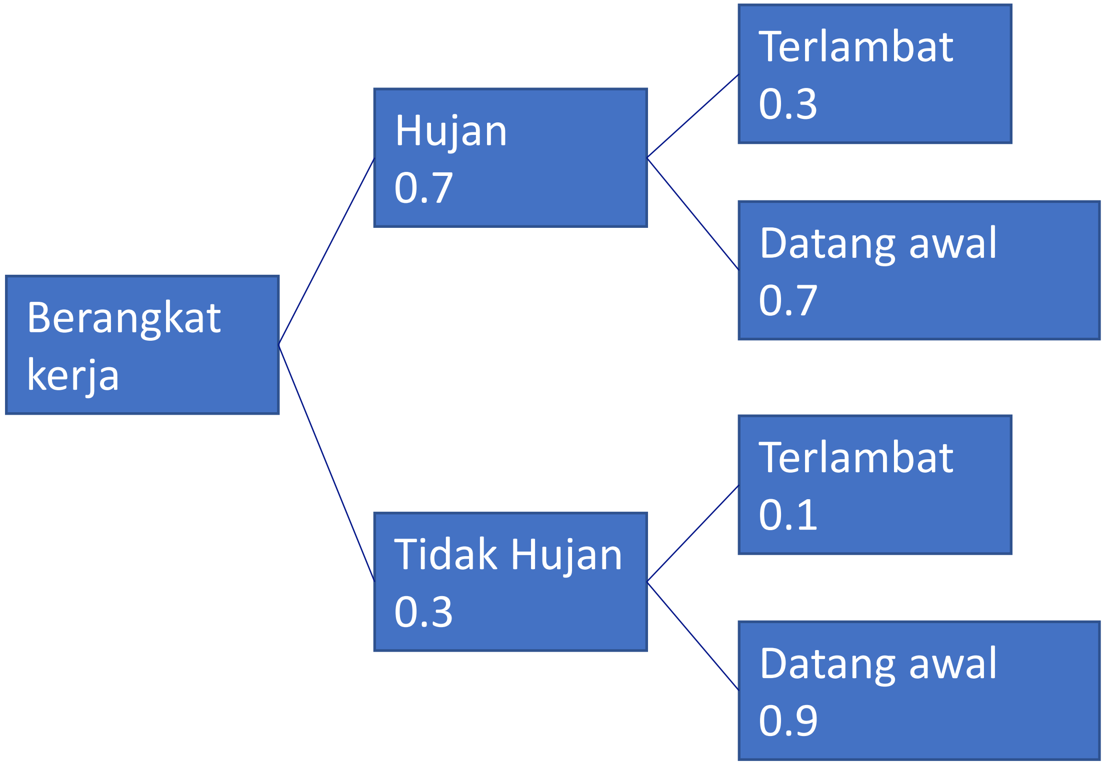
Pada hari hujan peluang Joe terlambat bekerja 0.3, pada hari tidak hujan peluang dia terlambat 0.1. Peluang besok hujan adalah adalah 0.7.

a) Carilah peluang Joe berangkat lebih awal besok

b) Jika diketahui Joe datang lebih awal, berapa peluang terjadi hujan

# KAIDAH BAYES






Jawab:

$T$: Joe datang terlambat

$H$: Hari hujan

a) Kaidah Peluang Total

$$P(T^C) = P(T^C|H)P(H) + P(T^C|H^C)P(H^C)$$
$$= 0.7 \times 0.7 + 0.9 \times 0.3 = 0.76$$

b) Aturan Bayes

$$P(H|T^C) = \frac{P(H \cap T^C)}{P(T^C)}$$
$$= \frac{P(T^C|H)P(H)}{P(T^C)} = \frac{0.7 \times 0.7}{0.76} = 0.6447$$

# KAIDAH BAYES

IPB University — Bogor Indonesia

## Ilustrasi Peluang: Mendenhall, *et al*.

**4.69 Bayes' Rule** A sample is selected from one of two populations, $S_1$ and $S_2$, with probabilities $P(S_1) = .7$ and $P(S_2) = .3$. If the sample has been selected from $S_1$, the probability of observing an event $A$ is $P(A|S_1) = .2$. Similarly, if the sample has been selected from $S_2$, the probability of observing $A$ is $P(A|S_2) = .3$.

**a.** If a sample is randomly selected from one of the two populations, what is the probability that event $A$ occurs?

**b.** If the sample is randomly selected and event $A$ is observed, what is the probability that the sample was selected from population $S_1$? From population $S_2$?

a) $P(A)$

$$P(A) = P(A|S_1)P(S_1) + P(A|S_2)P(S_2)$$
$$= 0.2 \times 0.7 + 0.3 \times 0.3 = 0.14 + 0.09$$
$$= 0.23$$

b) $P(S_1|A)$ dan $P(S_2|A)$

$$P(S_1|A) = \frac{P(A|S_1)P(S_1)}{P(A)} = \frac{0.2 \times 0.7}{0.23}$$
$$= 0.6087$$

$$P(S_2|A) = \frac{P(A|S_2)P(S_2)}{P(A)} = \frac{0.3 \times 0.3}{0.23}$$
$$= 0.3913$$

# TERIMAKASIH
# ‘Semoga Sukses’

IPB University
— Bogor Indonesia —

Department of Statistics
Jl. Meranti W22 L4
Kampus IPB Dramaga Bogor 16680
Telp.: 0251-8624535
E-mail: statistika@apps.ipb.ac.id