



IPB University
— Bogor Indonesia —

Department of Statistics
Study Program in Statistics and Data Science

Klasifikasi Satu Arah (*One Way Classification*)

Prof. Dr. Ir. Khairil Anwar Notodiputro, MS

email: khairil@apps.ipb.ac.id

Ketua Program Studi
Statistika dan Sains Data



twitter: @kh_notodiputro

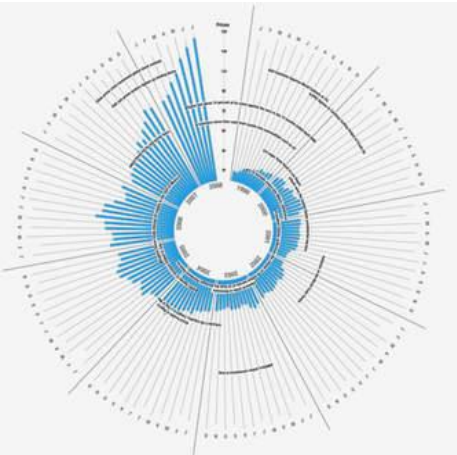


Klasifikasi Satu Arah?



IPB University
— Bogor Indonesia —

Department of Statistics
Statistics and Data Science Study Program



- Dalam praktik perbandingan beberapa (lebih dari dua) populasi kerap ditemui.
- Misal, berdasarkan data yang ada ingin diketahui apakah ada perbedaan hasil UTS dari 3 kelompok mahasiswa yang diajar dengan metode yang berbeda-beda.
- Dalam bidang pertanian sering dijumpai peneliti ingin membandingkan produktivitas (kg/ha) dari beberapa varietas padi.
- Juga dalam bidang kesehatan, ada 4 macam obat penurun tekanan darah yang ingin dibandingkan keampuannya.
- Semua ini adalah masalah **klasifikasi satu arah karena pengamatan yang ada hanya diklasifikasi dalam satu arah saja** yaitu perbedaan metode mengajar, perbedaan varietas, perbedaan jenis obat.



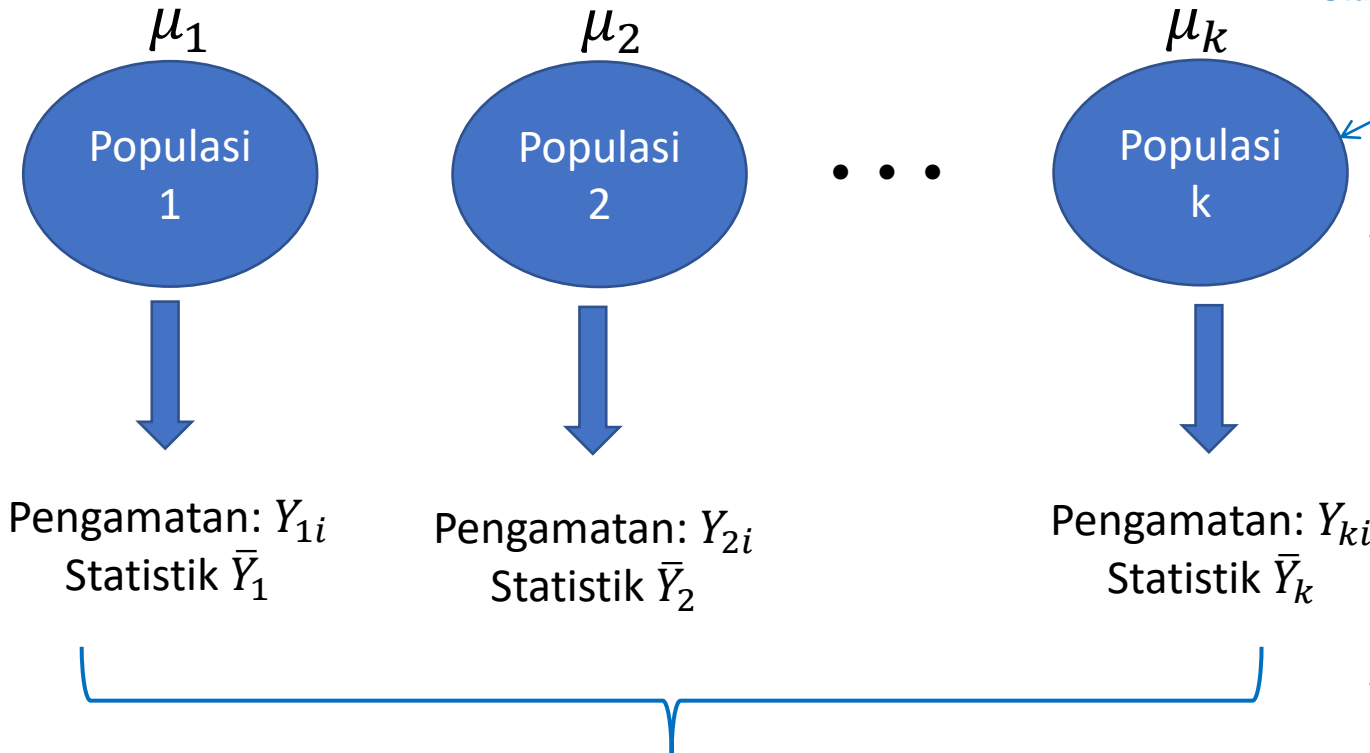
Klasifikasi Satu Arah



IPB University
— Bogor Indonesia —

Department of Statistics
Statistics and Data Science Study Program

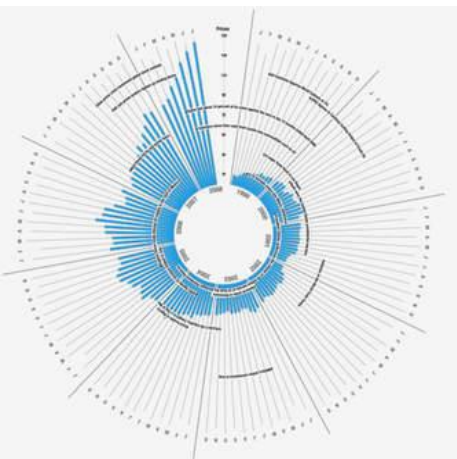
**Populasi bisa juga
dipandang sebagai grup.**



- Perbandingan beberapa populasi dapat dipandang sebagai klasifikasi satu arah, karena arahnya hanya sesuai nomor populasi.
- Untuk kasus lain kita bisa berhadapan dengan klasifikasi multi-arah.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$$H_1 : \text{Sedikitnya ada sepasang } \mu_i \neq \mu_j$$



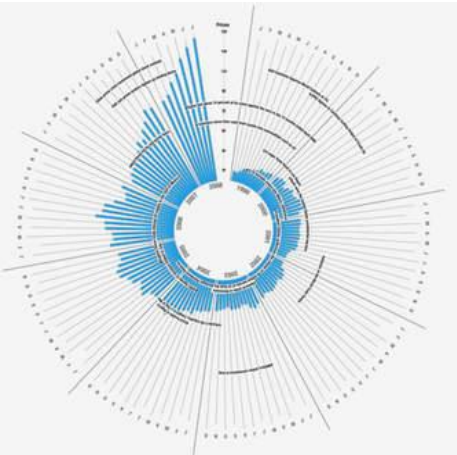
Apa itu Anova?



IPB University
— Bogor Indonesia —

Department of Statistics
Statistics and Data Science Study Program

- **ANOVA** singkatan dari *ANalysis Of Variance* (**Analisis Ragam**).
- Misal dalam studi kafein dengan 3 grup:
 - No caffeine
 - Mild dose
 - Jolt group
- Jumlah kopi dalam hal ini menjadi Level atau Klasifikasi, responnya adalah skor penilaian dari 5 penilai (*tester*).
- Grup perlakuan → individu yang diberi perlakuan level tertentu.
- Pengaruh klasifikasi adalah besarnya perbedaan nilai tengah nilai/skor antar level dari kopi tersebut.
- Jadi analisis ragam satu arah (one-way anova) digunakan untuk menguji apakah 3 atau lebih nilai tengah
- → **merupakan perluasan dari uji dua populasi.**



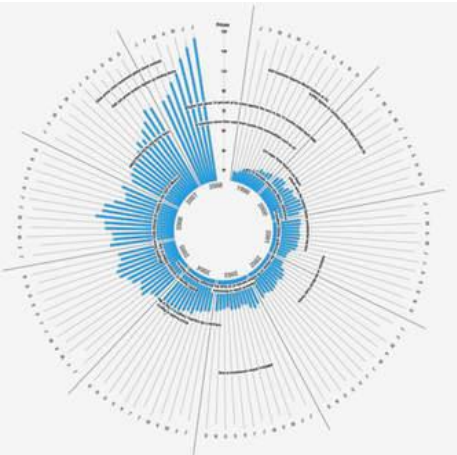
Apa itu Anova?



IPB University
— Bogor Indonesia —

Department of Statistics
Statistics and Data Science Study Program

- Peubah respon adalah peubah yang diperbandingkan.
- Peubah faktor adalah peubah kategori/klasifikasi yang mendefinisikan grup/populasi.
 - Dalam hal ini dianggap ada k contoh (grup/populasi)
- Kondisi atau asumsi:
 - Data berasal dari contoh acak
 - Ragam dari k populasi yang diperbandingkan sama.
 - Sisaan ε_{ij} atau data Y_{ij} menyebar normal.
- Misalkan kita memiliki 3 populasi/grup yang ingin diuji atau dibandingkan maka hipotesisnya adalah $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.
- Jadi kita belum membandingkan selisih $(\mu_1 - \mu_2)$ atau $(\mu_1 - \mu_3)$ atau $(\mu_2 - \mu_3)$, melainkan membandingkan secara umum dulu.



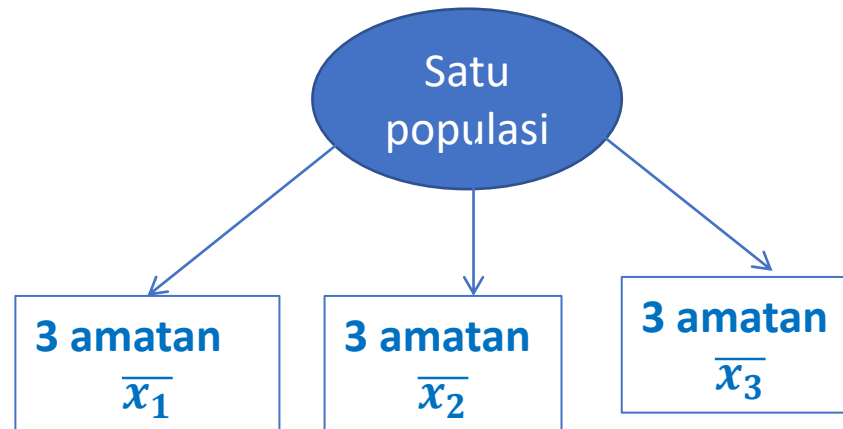
Mengapa Anova?



IPB University
— Bogor Indonesia —

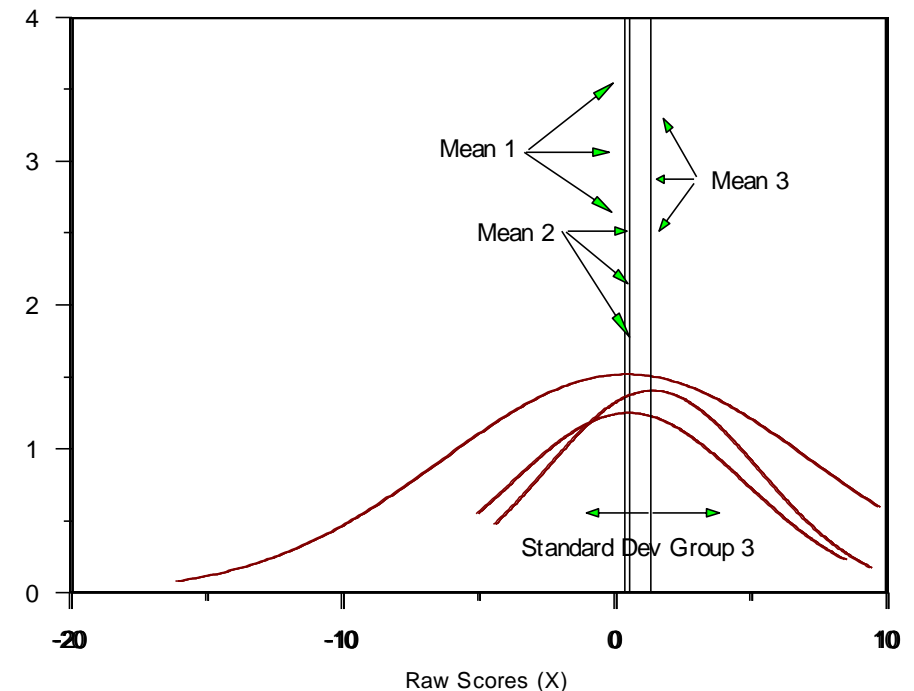
Department of Statistics
Statistics and Data Science Study Program

Misal kita ambil 3 contoh dari **satu populasi/grup** sebanyak 5 kali.
Maka hasilnya bisa nampak seperti gambar ini.



Besarnya rata-rata dari 3 kali contoh itu tidak akan persis sama, tapi mungkin akan sangat mirip. Akibatnya ragam dari 3 rata-rata tersebut akan kecil (relatif seragam).

Three Samples from the Same Population



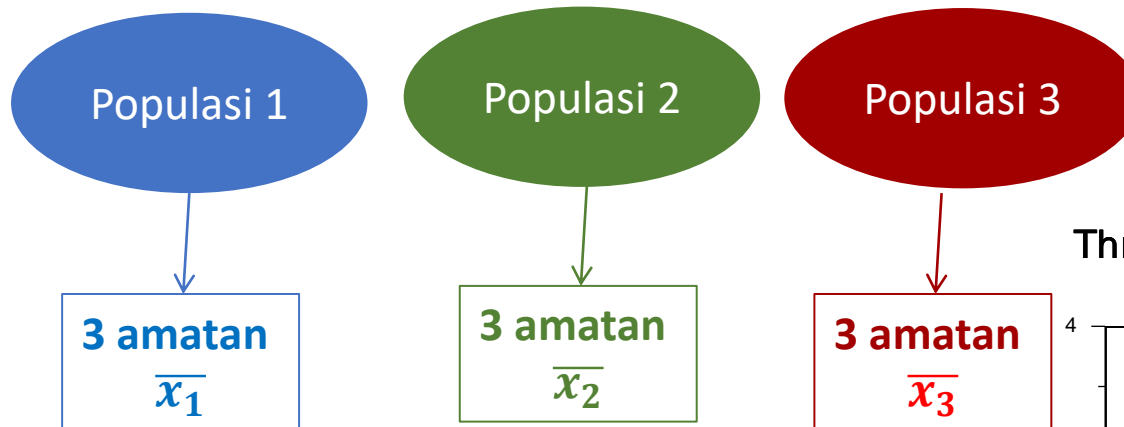
Mengapa Anova?



IPB University
— Bogor Indonesia —

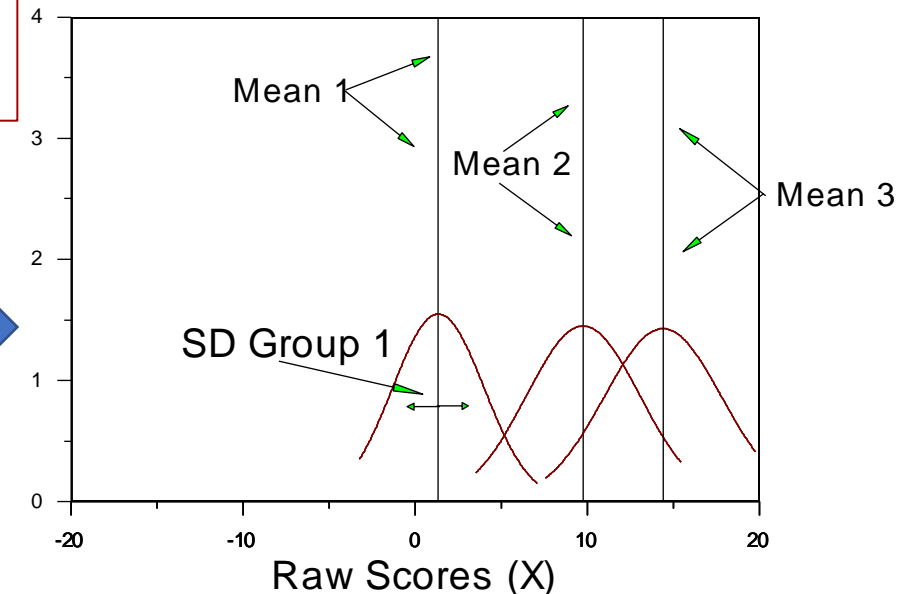
Department of Statistics
Statistics and Data Science Study Program

Sekarang, misal kita mengambil contoh dari **3 populasi/grup** yang berbeda. Hasilnya nampak seperti dalam gambar.



Perhatikan bahwa rata-rata ketiga contoh akan sangat berbeda-beda. Artinya ragam dari rata-rata itu besar (tidak seragam).

Three Samples from 3 Different Populations



Mengapa Anova?

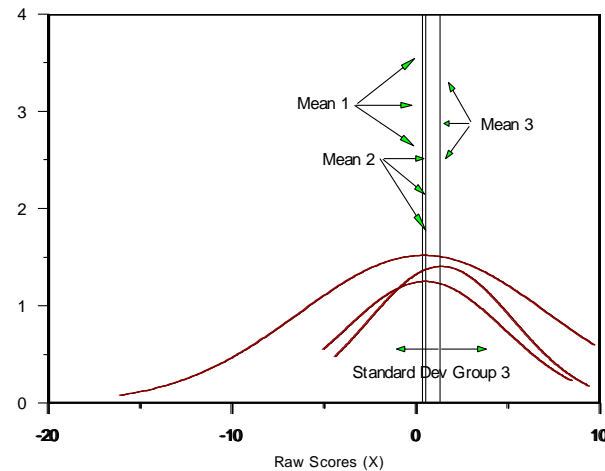


IPB University
— Bogor Indonesia —

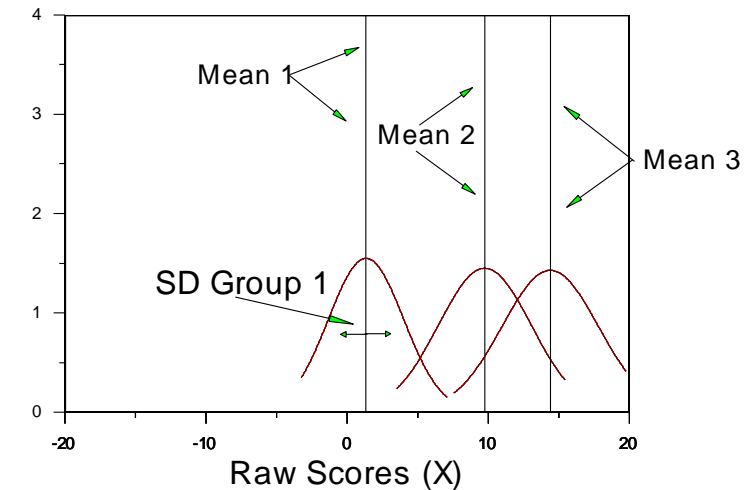
Department of Statistics
Statistics and Data Science Study Program

Andaikan dari suatu penelitian diperoleh hasil seperti gambar ini. Bagaimana kita bisa menebak bahwa ada perbedaan nilai tengah dari 3 populasi/grup tersebut?

Three Samples from the Same Population



Three Samples from 3 Different Populations



Tentu kita bisa, yaitu membandingkan ragam dari rata-rata (berdasarkan data) dengan ragam dari nilai-tengah seandainya semua nilaitengahnya sama. → **Perlu uji nilaitengah**

Diskusi Dulu.....



Sesi 1... beres!!!



Sesi 2...



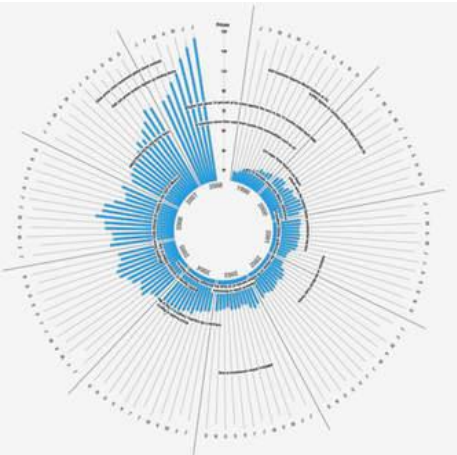
- H_0 : semua nilai tengah sama

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$$

- H_1 : sedikitnya ada sepasang nilai tengah $\mu_i \neq \mu_j$.

- **Ilustrasi:**

- Kelas STA211 dibagi menjadi 3 baris: depan, tengah, belakang
- Dosen mengamati bahwa semakin jauh mahasiswa dari posisi dosen maka semakin besar kemungkinan mahasiswa untuk tidak memperhatikan kuliah.
- Tidak memperhatikan kuliah \rightarrow berpotensi nilai ujian buruk
- Lalu dosen ini ingin tahu apakah mahasiswa yang duduk di baris paling belakang cenderung memperoleh nilai lebih buruk?



- Dosen mengambil contoh acak dari mahasiswa yang duduk di baris depan, tengah dan belakang berturut-turut 7, 9, dan 8.
- Nilai ujian mereka dicatat sebagai berikut:
 - Depan : 82, 83, 97, 93, 55, 67, 53
 - Tengah : 83, 78, 68, 61, 77, 54, 69, 51, 63
 - Belakang : 38, 59, 55, 66, 45, 52, 52, 61
- Beberapa statistik dari hasil ujian tersebut disajikan berikut ini.



	Depan	Tengah	Belakang
Ukuran contoh (n)	7	9	8
Rata-rata	75.71	67.11	53.50
Simpangan baku	17.63	10.95	8.96
Ragam	310.90	119.86	80.29



Tabel Analisis Ragam (Anova)



IPB University
— Bogor Indonesia —

Department of Statistics
Statistics and Data Science Study Program

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Grup	2	1902	950.8	5.90	0.009
Error	21	3386	161.3		
Total	23	5288			

Means

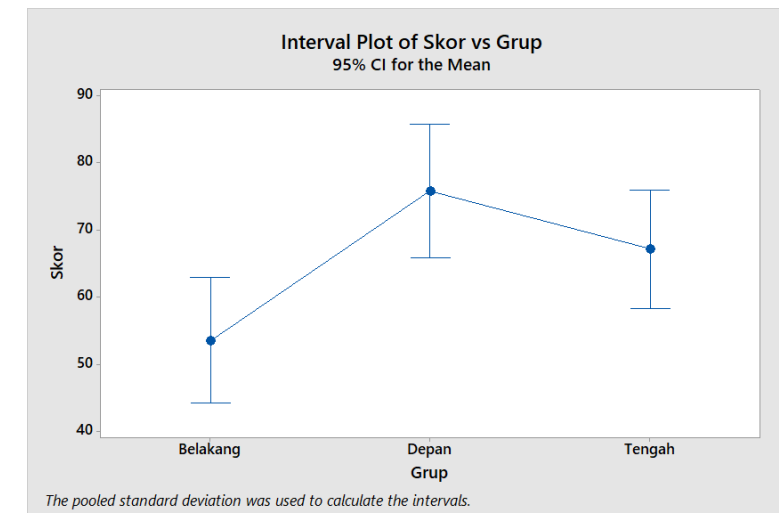
Grup	N	Mean	StDev	95% CI
Belakang	8	53.50	8.96	(44.16, 62.84)
Depan	7	75.71	17.63	(65.73, 85.70)
Tengah	9	67.11	10.95	(58.31, 75.91)

Annotations: Sumber (Source), Jumlah kuadrat (Sum of Squares), Nilai Hitung (Calculated Value), Nilai-p (P-value), Derajat bebas (Degrees of Freedom), Kuadrat Tengah (Mean Square).

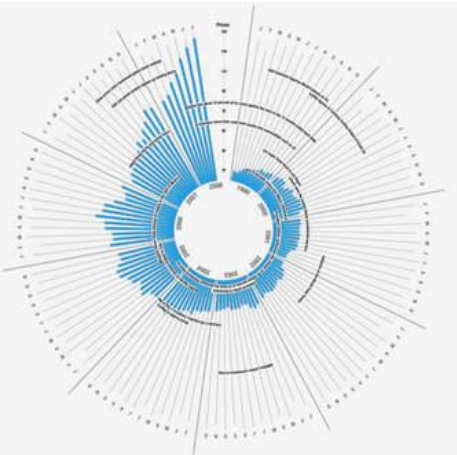
Perhatikan bahwa nilai-p lebih kecil dari 0.05, sehingga kita menolak H_0 .

Apa hipotesis nolnya dalam konteks ini?

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \rightarrow$ Tidak ada perbedaan nilai yang nyata antara peserta STA211 yang duduk di depan, tengah dan belakang.



- Keragaman adalah jumlah kuadrat dari simpangan antara pengamatan dengan nilaitengahnya.
- Jumlah kuadrat disingkat JK dan diikuti oleh keterangan dalam tanda kurung, seperti JK(A) atau JK(B).
- Perbedaan antar-pengamatan (individual) scr umum → **JK(Total)**.
- Perbedaan rata-rata contoh antar-populasi/grup → **JK(Grup)**
- Perbedaan antar-pengamatan (invidual) di dalam satu populasi → **JK(Sisa)**



Dekomposisi Keragaman



IPB University
— Bogor Indonesia —

Department of Statistics
Statistics and Data Science Study Program

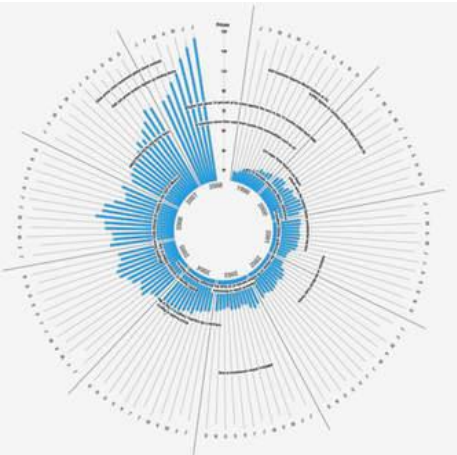
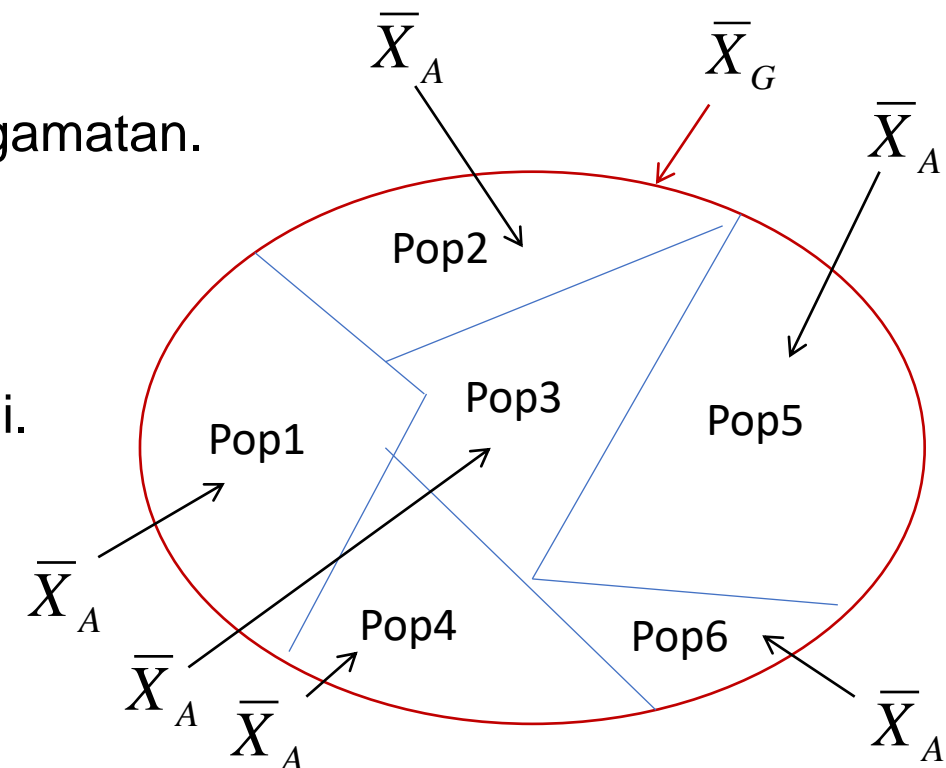
Keragaman JK(Total) dapat dipecah (dekomposisi) menjadi JK(Grup) dan JK(Dalam). Ini sebabnya mengapa disebut analisis ragam (anova).

Beberapa terminologi dalam ANOVA:

\bar{X}_G Rata-rata umum seluruh semua pengamatan.

\bar{X}_A Rata-rata grup atau populasi.

X_i Pengamatan untuk individu/objek ke-i.



Dekomposisi Keragaman



IPB University
— Bogor Indonesia —

Department of Statistics
Statistics and Data Science Study Program

Pengaruh grup/populasi adalah selisih antara rata-rata grup/populasi dengan rata-rata keseluruhan.

$$\text{Pengaruh} = \bar{X}_A - \bar{X}_G$$

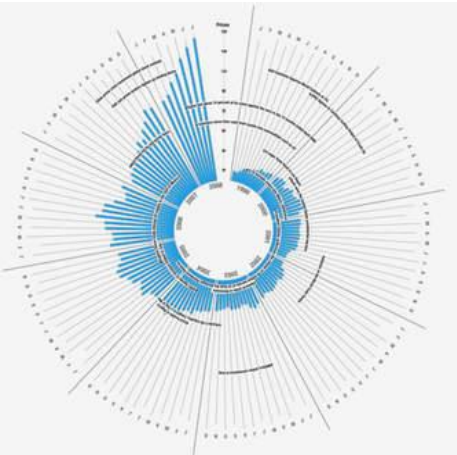
Sisaan adalah selisih antara pengamatan dengan rata-rata grup/populasi.

$$\text{Sisaan} = X_i - \bar{X}_A$$

Model:

$$X_i = \bar{X}_G + (\bar{X}_A - \bar{X}_G) + (X_i - \bar{X}_A)$$

Pengamatan ke-i Rata-rata umum + Pengaruh grup/populasi + Sisaan



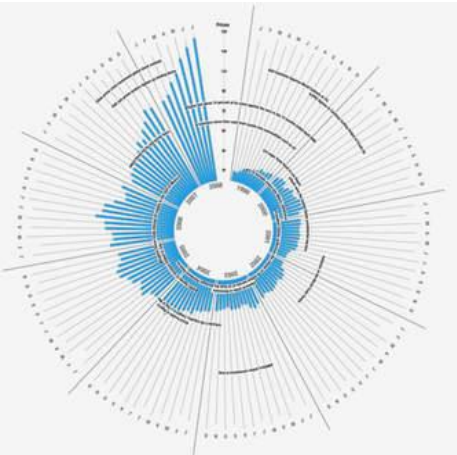
Tabel analisis ragam (ANOVA) yang sederhana mengandung 3 jumlah kuadrat.

$$SS_{tot} = \sum (X_i - \bar{X}_G)^2 \quad \text{Jumlah kuadrat total}$$

$$SS_W = \sum (X_i - \bar{X}_A)^2 \quad \text{Jumlah kuadrat sisa}$$

$$SS_B = \sum N_A (\bar{X}_A - \bar{X}_G)^2 \quad \text{Jumlah kuadrat antar-grup atau antar-populasi}$$

$$SS_{TOT} = SS_B + SS_W$$



Diskusi Dulu.....



Sesi 2... beres!!!



Sesi 3...

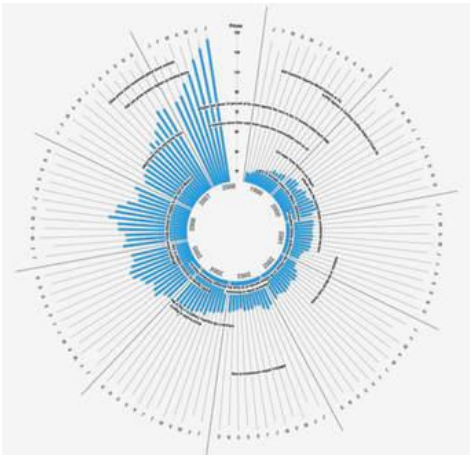


Teknis Perhitungan



IPB University
— Bogor Indonesia —

Department of Statistics
Statistics and Data Science Study Program



Grup	Pengamatan	Rata2
No	75, 77, 79, 81, 83	79
Mild	80, 82, 84, 86, 88	84
Jolt	70, 72, 74, 76, 78	74

Rata2 umum $\bar{X}_G = 79$

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Group	2	250.0	125.00	12.50	0.001
Error	12	120.0	10.00		
Total	14	370.0			



$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

H_1 : Sedikitnya ada sepasang $\mu_i \neq \mu_j$

Karena nilai-p < 0.05 maka H_0 ditolak. Artinya ada perbedaan dari nilai ketiga kopi tersebut.

$$SS_{tot} = \sum (X_i - \bar{X}_G)^2 = (75-79)^2 + (77-79)^2 + \dots + (78-79)^2 = 370.0 \rightarrow \text{JK (Total)}$$

$$SS_W = \sum (X_i - \bar{X}_A)^2 = (75-79)^2 + (77-79)^2 + \dots + (78-74)^2 = 120.0 \rightarrow \text{JK (Sisa)}$$

$$SS_B = \sum N_A (\bar{X}_A - \bar{X}_G)^2 = (79-79)^2 + (79-79)^2 + \dots + (74-79)^2 = 250.0 \rightarrow \text{JK (Grup/Pop)}$$

Perhatikan bahwa JK (Total) = JK (Grup) + JK (Sisa)



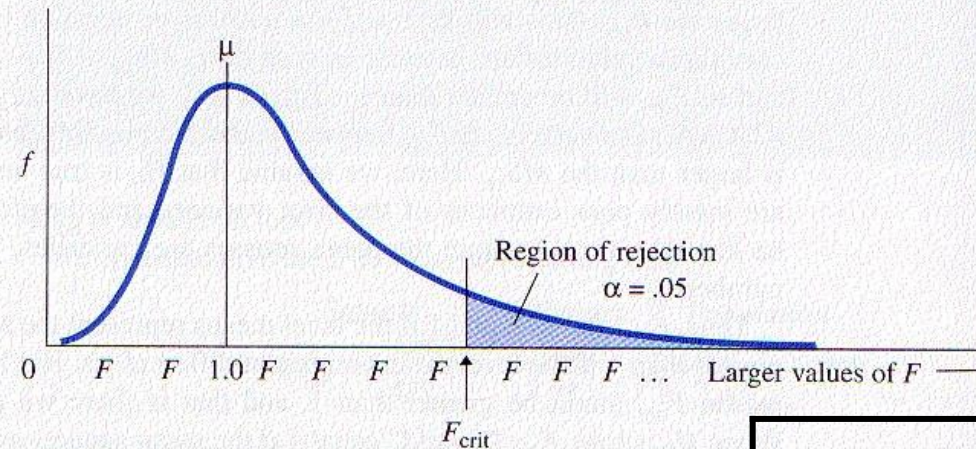
Tabel F



IPB University
— Bogor Indonesia —

Department of Statistics
Statistics and Data Science Study Program

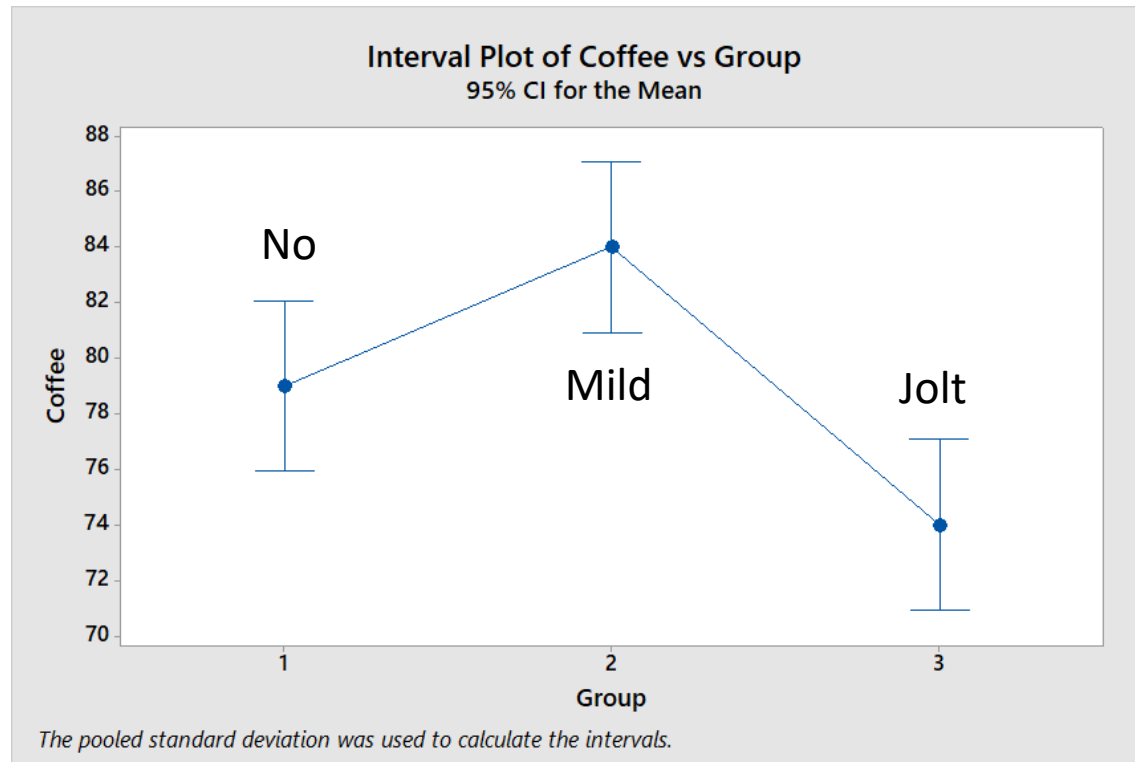
FIGURE 17.2 Sampling Distribution of F When H_0 Is True



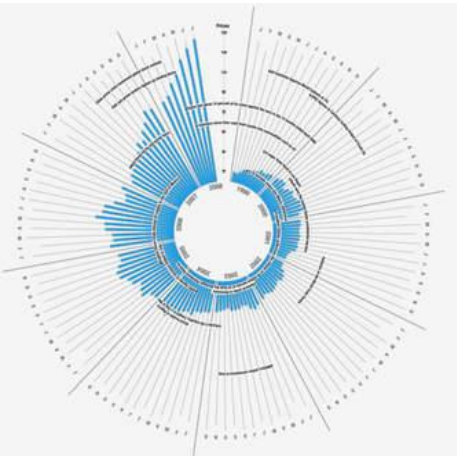
Ingat bhw dari perhitungan tadi diperoleh $F_{hitung} = 12.5$, sedangkan dari tabel F diperoleh $F_{(2,12)0.05} = 3.89$, jadi H_0 ditolak. Artinya ada perbedaan dari nilai (skor) ketiga kopi tersebut.

	Numerator df: df_B				
df_W	1	2	3	4	5
5 5%	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05
1%	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0
10 5%	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33
1%	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64
12 5%	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11
1%	9.33	6.94	5.95	5.41	5.06
14 5%	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96
1%	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70

Plot perbandingan rata-rata populasi



- Hasil plot ini mengindikasikan penilaian tertinggi adalah kopi Mild disusul oleh kopi NoCaffeine, terakhir adalah kopi Jolt.
- Tapi ingat, angka2 tsb adalah statistik yang bisa berubah-ubah sesuai dengan sebarannya. Bisa saja ini terjadi secara kebetulan.
- Untuk itu perlu pengujian hipotesis untuk membandingkan parameternya.



- Jika uji F (dari tabel analisis ragam) nyata, artinya menolak H_0 , maka berarti terjadi perbedaan nilai tengah antar grup/populasi yang dibandingkan.
- Masalahnya kita belum tahu grup mana saja yang berbeda?
- Seandainya ada 3 nilai tengah (μ_1, μ_2, μ_3) yang dibandingkan maka berbagai kemungkinan bisa terjadi:

$$\mu_1 \neq \mu_2 \text{ atau } \mu_1 \neq \mu_3 \text{ atau } \mu_2 \neq \mu_3.$$

- Coba pikirkan, jika ada 6 grup yang dibandingkan, maka ada berapa banyak kemungkinannya?
- Ada banyak cara untuk menguji perbandingan ini. Kita coba satu saja, yaitu UJI TUKEY. Uji-uji yang lain silakan dipelajari sendiri.



Asumsikan bahwa jumlah pengamatan per grup/populasi sama.
HSD merupakan kependekan dari *honestly significant difference*.

$$HSD_{\alpha} = q_{\alpha} \sqrt{\frac{MS_W}{N_A}} \quad \alpha \text{ adalah salah jenis I (misal 0.05).}$$

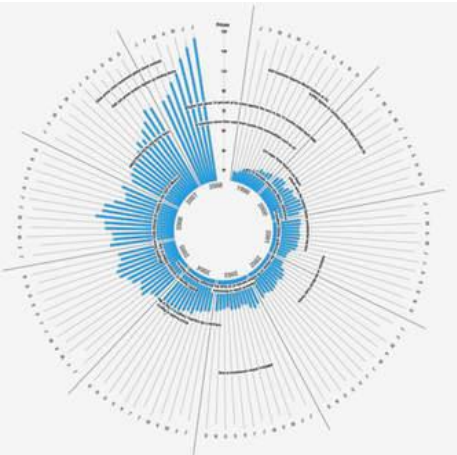
q_{α} Merupakan nilai dari tabel *studentized range statistic* untuk α tertentu, df_W (12 dalam contoh tadi) dan k , banyaknya grup/populasi (3 dalam contoh tadi).

MS_W Kuadrat tengah sisa (10.0 dalam contoh tadi).

N_A Banyaknya pengamatan dalam tiap grup (5 dlm contoh tadi).

$$HSD_{.05} = 3.77 \sqrt{\frac{10}{5}} = 5.33$$

Dari Tabel MS_W Hasilnya untuk contoh tadi. N_A



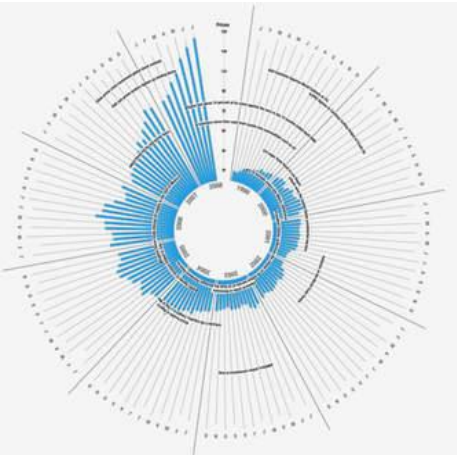
Untuk memutuskan nilai tengah mana saja yang berbeda, kita bandingkan besarnya selisih antar-nilai tengah dengan nilai kritis dari uji Tukey.

Perhatikan bahwa selisih berbagai nilai tengah adalah:

- a. Grup 1 vs. 2, selisihnya $79-84 = -5$ (harga mutaknya 5, positif).
- b. Grup 1 vs. 3 selisihnya $79-74 = 5$
- c. Grup 2 vs. 3 selisihnya $84-74 = 10$.

Karena 10 lebih besar dari 5.33, maka perbedaan ini nyata (*significant*), artinya skor penilaian kopi Mild dengan kopi Jolt berbeda.

Perbedaan yang lain (grup 1 vs. 2 dan grup 1 vs. 3) tidak nyata.



Bisanya hasil dari uji Tukey disajikan (divisualisasikan) menggunakan garis (terlebih dahulu diurutkan dari rata-rata terkecil ke terbesar):

Jolt

NoCaffeine

Mild

- Dua grup yang dihubungkan dengan garis artinya **TIDAK** berbeda nyata, seperti antara Jolt dengan NoCaffeine, juga antara NoCaffeine dengan Mild.
- Tetapi antara Mild dengan Jolt **tidak dihubungkan** dengan garis karena keduanya berbeda nyata (*significant*)

Tugas (diskusikan)



IPB University
— Bogor Indonesia —

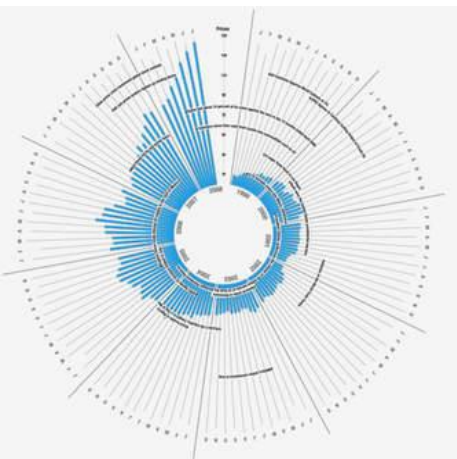
Department of Statistics
Statistics and Data Science Study Program

Suatu penelitian ingin membandingkan pengaruh pemberian sarapan kepada anak SD 7-10 tahun. Untuk itu dipilih 16 siswa yang kemudian dikelompokkan menjadi 3 kelompok. Kelompok pertama tidak diberi sarapan, kelompok kedua diberi sarapan secukupnya, kelompok ketiga diberi sarapan berlebih dengan membebaskan siswa mengambil sendiri makanan sepuasnya. Kepada semua orang tua dari 16 siswa ini diminta agar anaknya tidak diberi sarapan sebelum berangkat ke sekolah. Hasilnya yaitu durasi (menit) anak-anak itu memberikan perhatian pada pelajaran sehabis sarapan dicatat sebagai berikut:



Kelompok	Durasi anak-anak memberi perhatian thd pelajaran
Kel. I	8, 7, 9, 13, 10, 11
Kel. II	14, 16, 12, 17, 11
Kel III	10, 12, 16, 15, 12

Buatlah analisis ragam berdasarkan data ini. Lakukan uji Tukey untuk menentukan sarapan yang mana yang memungkinkan anak maksimal dalam memberikan perhatian pada pelajaran. Catatan: Ulangan tidak sama, uji Tukey perlu dimodifikasi (Baca: Uji Tukey-Kramer).



😊 **THANK YOU** 😊



IPB University
— Bogor Indonesia —

Department of Statistics
Study Programs in Statistics and Data Science