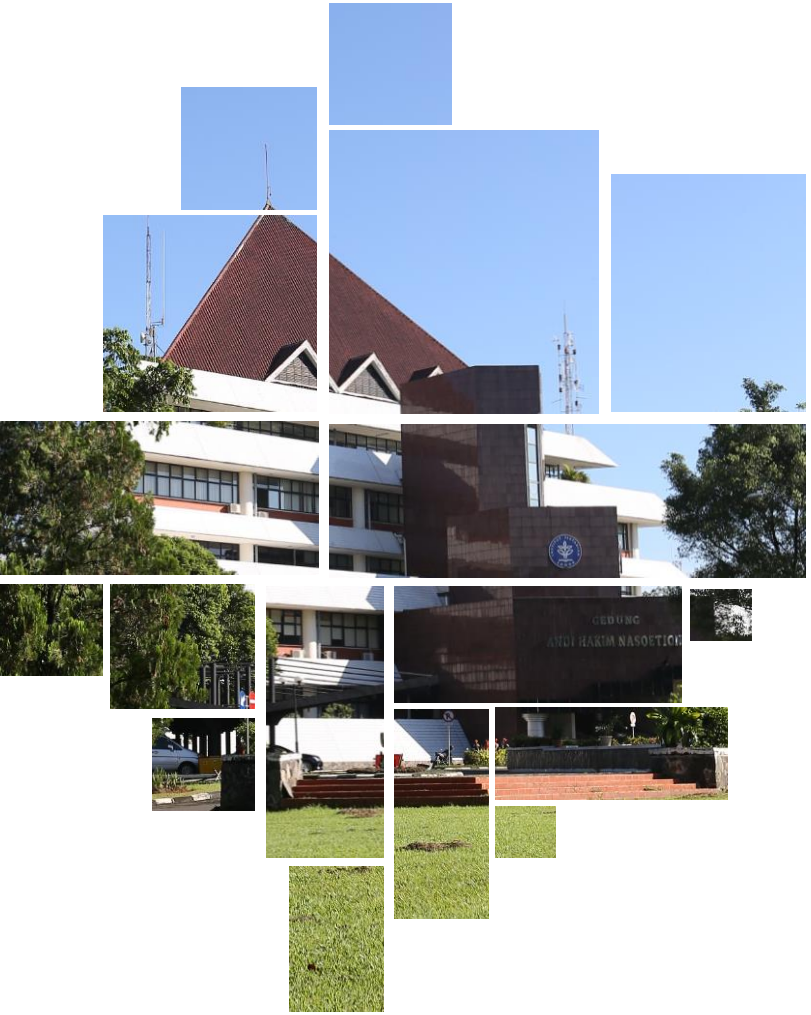
Study Program
Statistics and Data Science
Department of Statistics



Responsi Metode Statistika (STA-1211)

PERTEMUAN 4

Sebaran Peubah Acak (Diskret)

Asisten: Laily Nissa Atul Mualifah

Outline

- ❑ Peubah Acak
- ❑ Fungsi Peluang
- ❑ Nilai Harapan
- ❑ Ragam
- ❑ Sebaran Bernoulli
- ❑ Sebaran Binomial
- ❑ Sebaran Poisson

Peubah Acak

Peubah Acak merupakan fungsi yang memetakan ruang kejadian (domain) ke ruang bilangan riil.

Dinotasikan dengan huruf kapital.

Dua jenis peubah acak:

- Diskret: nilai berupa cacahan

  Misal: banyaknya sisi *head* dalam pelemparan koin, banyaknya anak perempuan dalam keluarga, banyaknya angka genap yang muncul dalam pelemparan dadu

- Kontinu: nilai berupa selang

  Misal: tinggi badan, suhu, lama waktu mengantri

Fungsi Peluang

Peubah acak Diskret:
Fungsi massa peluang (fmp) dari peubah acak diskret didefinisikan sebagai berikut:

$$f_X(x) = P(X = x) \qquad ,\text{untuk semua } x$$

Syarat suatu fungsi disebut fmp:

- $0 \leq P(X = x) \leq 1$
- $\sum_{\forall i} P(X = x_i) = 1$

Fungsi sebaran (kumulatif):

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} P(X = i)$$

Ilustrasi:

Pada suatu perusahaan tanaman terdapat 3 pegawai laki-laki dan 3 pegawai perempuan. Seorang *supervisor* akan memilih 2 pegawai secara acak untuk mengerjakan pekerjaan khusus. Misalkan X menyatakan banyaknya pegawai perempuan yang terpilih.

a) Carilah fungsi massa peluang bagi X

b) Carilah peluang sedikitnya 1 pegawai perempuan terpilih

Fungsi Peluang

Nilai X yang mungkin adalah: {0,1,2}

Banyaknya cara memilih 2 pegawai: $C_2^6 = 15$

Banyaknya cara memilih 0 perempuan: $C_0^3 \times C_2^3 = 3$

Banyaknya cara memilih 1 perempuan: $C_1^3 \times C_1^3 = 9$

Banyaknya cara memilih 2 perempuan: $C_2^3 \times C_0^3 = 3$

fungsi massa peluang bagi X

X	$P(X = x)$
0	1/5
1	3/5
2	1/5
$\sum_i P(X = x_i)$	1

Peluang sedikitnya 1 pegawai perempuan terpilih:

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X \geq 1) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Fungsi Peluang

Peubah acak Kontinu:
Fungsi kepekatan peluang (fkp) dari peubah acak kontinu Fungsi kepekatan peluang (fkp) dari peubah acak kontinu, $f_X(x)$, adalah suatu fungsi yang memenuhi:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Atau dapat dinyatakan sebagai:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Pada peubah acak kontinu $P(X = x) = 0$, peluang dari suatu interval nilai x dapat dicari dengan:

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx$$

Syarat suatu fungsi disebut fkp:
- $f_X(x) \geq 0$ untuk semua x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$

Fungsi Peluang

Ilustrasi:

Diberikan Y suatu peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang:

$$f(y) = \begin{cases} cy^2 & \text{untuk } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{untuk } y \text{ lainnya} \end{cases}$$

a) Carilah nilai c sehingga $f(y)$ merupakan fkp

b) Carilah $P(1 < y < 2)$

$$P(1 < y < 2) = \int_1^2 f(y)\, dy = \int_1^2 \frac{3}{8} y^2\, dy = \frac{1}{8} y^3 \Big]_1^2 = \frac{7}{8}$$

Syarat fkp adalah:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dy = 1$$

$$\int_0^2 cy^2\, dy = 1$$

$$\frac{c}{3} y^3 \Big]_0^2 = 1$$

$$\frac{8c}{3} = 1 \rightarrow c = \frac{3}{8}$$

Sehingga,

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{8} y^2 & \text{untuk } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{untuk } y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Nilai Harapan

Misalkan $g(X)$ suatu fungsi peubah acak X, didefinisikan nilai harapan $g(X)$ adalah:

- Peubah acak diskret

$$E(g(X)) = \sum_{\forall x} g(X)P(X = x)$$

Jika $g(X) = X$ maka

$$E(X) = \sum_{\forall x} xP(X = x)$$

- Peubah acak kontinu

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X)f(x)dx$$

Jika $g(X) = X$ maka

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Sifat-sifat nilai harapan:

Misalkan a dan b suatu konstanta

- $E(a) = a$
- $E(aX) = aE(X)$
- $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$
- $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$

Nilai Harapan

Ilustrasi Diskret:

Pada suatu perusahaan tanaman terdapat 3 pegawai laki-laki dan 3 pegawai perempuan. Seorang *supervisor* akan memilih 2 pegawai secara acak untuk mengerjakan pekerjaan khusus. Misalkan X menyatakan banyaknya pegawai perempuan yang terpilih. Carilah nilai harapan dari peubah acak X!

X	$P(X = x)$
0	1/5
1	3/5
2	1/5
$\sum_i P(X = x_i)$	1

Nilai harapan X :

$$E(X) = \sum_{\forall x} x\, P(X = x_i) = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) + 2P(X = 2)$$

$$= 0\left(\frac{1}{5}\right) + 1\left(\frac{3}{5}\right) + 2\left(\frac{1}{5}\right) = 1$$

Nilai Harapan

Ilustrasi Kontinu:

Peubah acak Y memiliki fungsi kepekatan peluang:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}y^2 & \text{untuk } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{untuk } y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Carilah nilai harapan dari peubah acak Y!

Nilai harapan Y :

$$E(Y) = \int_0^2 y\, f(y) dy = \int_0^2 y\left(\frac{3}{8}y^2\right) dy$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{8}y^3 dy = \frac{3}{32}y^4\Big]_0^2 = \frac{3}{32}(2^4 - 0^4) = \frac{3}{2}$$

Ragam

- Peubah acak diskret

$$Var(X) = \sum_{\forall x} (x-\mu)^2 P(X=x)$$

- Peubah acak kontinu

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) d\,x$$

Alternatif formula dalam perhitungan nilai ragam dari suatu peubah acak:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Sifat-sifat ragam:

Misalkan a dan b suatu konstanta

- $Var(a) = 0$
- $Var(X) \geq 0$
- $Var(aX) = a^2 Var(X)$
- $Var(aX \pm b) = a^2 Var(X)$
- $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X, Y)$

Ragam

Ilustrasi Diskret:

Pada suatu perusahaan tanaman terdapat 3 pegawai laki-laki dan 3 pegawai perempuan. Seorang *supervisor* akan memilih 2 pegawai secara acak untuk mengerjakan pekerjaan khusus. Misalkan X menyatakan banyaknya pegawai perempuan yang terpilih. Carilah ragam dari peubah acak X!

X	$P(X = x)$
0	1/5
1	3/5
2	1/5
$\sum_i P(X = x_i)$	1

$$E(X^2) = \sum_{\forall x} x^2 \, P(X = x_i) = 0^2\left(\frac{1}{5}\right) + 1^2\left(\frac{3}{5}\right) + 2^2\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{7}{5}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{5} - 1^2 = \frac{2}{5}$$

Sebelumnya telah dicari

$E(X) = 1$

Ragam

Ilustrasi Kontinu:

Peubah acak Y memiliki fungsi kepekatan peluang:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}y^2 & \text{untuk } 0 \leq \text{y} \leq 2 \\ 0 & \text{untuk } y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Carilah ragam dari peubah acak Y!

$$E(Y) = \frac{3}{2}$$

$$E(Y^2) = \int_0^2 y^2 f(y)dy = \int_0^2 y^2 \left(\frac{3}{8}y^2\right) dy$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{8}y^5 dy = \frac{3}{40}y^5\Big]_0^2 = \frac{12}{5}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$= \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{48-45}{20} = \frac{3}{20}$$

Sebaran Bernoulli

Sebuah percobaan dengan dua kemungkinan hasil yaitu "gagal" atau "berhasil". Jika $X = 1$ maka "berhasil", dan $X = 0$ maka "gagal". Fungsi massa peluang dari peubah acak X adalah:

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x} \quad , x = 0,1$$

dengan,

p : peluang "berhasil"

Nilai harapan X : $E(X) = p$

Ragam X : $Var\ (X) = p(1 - p)$

Ilustrasi:

Sebuah koin seimbang dilempar sekali. Peubah X menyatakan hasil dari pelemparan koin tersebut, dimana $X = 1$ jika koin menunjukkan *head* dan $X = 0$ jika koin menunjukkan *tail*.

Fungsi massa peluang peubah acak X adalah:

$$P(X = 1) = 0.5^1(1 - 0.5)^{1-1} = 0.5$$

$$P(X = 0) = 0.5^0(1 - 0.5)^{1-0} = 0.5$$

Sebaran Binomial

Percobaan yang diulang sebanyak n kali dengan peubah acak X menyatakan banyaknya "berhasil" yang terjadi. Setiap percobaan peluang "berhasil" tetap, atau tiap percobaan saling bebas. Fungsi massa peluang dari peubah acak X adalah:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad , x = 0, 1, \ldots, n$$

dengan,

p : peluang "berhasil"

Nilai harapan X : $E(X) = np$

Ragam X : $Var\ (X) = np(1-p)$

Ilustrasi:

Batting average seorang pemain baseball adalah 0.25. Hitunglah peluang pemain tersebut berhasil memukul dua kali dalam lima kali pukulan.

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} 0.25^2 (1 - 0.25)^{5-2}$$

$$= \frac{5!}{2!\,3!} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$= 10 \frac{27}{1024} = 0.26367$$

Sebaran Poisson

Sebaran Binomial dengan:

$$\left.\begin{array}{l} n \to \infty \\ p \to 0 \end{array}\right\} \text{maka } \lambda = np$$

dimana $\lambda > 0$. Fungsi massa peluang peubah acak X yang berdistribusi Poisson adalah:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!} \quad , x = 0,1,2, \dots$$

Nilai harapan X : $E(X) = \lambda$

Ragam X : $Var\ (X) = \lambda$

Ilustrasi:

Rata-rata banyaknya kecelakaan pesawat komersial per bulan adalah sebanyak 3.5. Hitunglah:

a) Peluang bulan depan terjadi kecelakaan paling sedikit 2 kejadian

b) Nilai harapan banyaknya kecelakaan dalam satu tahun

Sebaran Poisson

Diketahui:

X: banyaknya kecelakaan dalam satu bulan

$X \sim Pois(3.5)$

$a)$ $P(X \geq 2)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\} \\ &= 1 - \left\{\frac{e^{-3.5}.\,3.5^0}{0!} + \frac{e^{-3.5}.\,3.5^1}{1!}\right\} = 1 - 0.13589 = 0.864111 \end{aligned}$$

$b)$ $E(12X) = 12E(X) = 12 \times 3.5 = 42$

Sebaran Poisson (pendekatan Binomial

Ilustrasi:

Misalkan peluang dari suatu barang yang diproduksi oleh suatu mesin mengalami kerusakan adalah 0.1. Hitunglah peluang dari 10 barang akan mengandung paling banyak 1 barang yang rusak.

Dengan sebaran Binomial:

$X \sim \text{Binom}(10, 0.1)$

$n = 10$

$p = 0.1$

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$
$$= \binom{10}{0} 0.1^0 (1 - 0.1)^{10-0} + \binom{10}{1} 0.1^1 (1 - 0.1)^{10-1} = 0.7361$$

Dengan sebaran Poisson:

$X \sim \text{Pois}(10 \times 0.1 = 1)$

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$
$$= \frac{e^{-1} 1^0}{0!} + \frac{e^{-1} 1^1}{1!} = 0.73576$$

Latihan

Mendenhall, *et al.*, 2013

4.89 Gender Bias? A company has five applicants for two positions: two women and three men. Suppose that the five applicants are equally qualified and that no preference is given for choosing either gender. Let x equal the number of women chosen to fill the two positions.

a. Find $p(x)$.

b. Construct a probability histogram for x.

Latihan

Mendenhall, *et al.*, 2013

4.87 RU Texting? The proportion of adults (18 years or more) who admit to texting while driving is 47%.[7] Suppose you randomly select three adult drivers and ask if they text while driving.

a. Find the probability distribution for x, the number of drivers in the sample who admit to texting while driving.

b. Construct a probability histogram for $p(x)$.

c. What is the probability that exactly one of the three drivers texts while driving?

d. What are the population mean and standard deviation for the random variable x?

Latihan

Mendenhall, *et al.*, 2013

5.33 Taste Test for PTC The taste test for PTC (phenylthiocarbamide) is a favorite exercise for every human genetics class. It has been established that a single gene determines the characteristic, and that 70% of Americans are "tasters," while 30% are "non-tasters." Suppose that 20 Americans are randomly chosen and are tested for PTC.

a. What is the probability that 17 or more are "tasters"?

b. What is the probability that 15 or fewer are "tasters"?

Latihan

Mendenhall, *et al.*, 2013

5.45 Accident Prone According to a study conducted by the Department of Pediatrics at the University of California, San Francisco, children who are injured two or more times tend to sustain these injuries during a relatively limited time, usually 1 year or less. If the average number of injuries per year for school-age children is two, what are the probabilities of these events?

a. A school-age child will sustain two injuries during the year.

b. A school-age child will sustain two or more injuries during the year.

c. A school-age child will sustain at most one injury during the year.

Latihan

Mendenhall, *et al*., 2013

5.44 **Intensive Care** The number x of people entering the intensive care unit at a particular hospital on any one day has a Poisson probability distribution with mean equal to five persons per day.

a. What is the probability that the number of people entering the intensive care unit on a particular day is two? Less than or equal to two?

b. Is it likely that x will exceed 10? Explain.

TERIMAKASIH
‘Semoga Sukses’

IPB University
— Bogor Indonesia —

Department of Statistics
Jl. Meranti W22 L4
Kampus IPB Dramaga Bogor 16680
Telp.: 0251-8624535
E-mail: statistika@apps.ipb.ac.id