Sebaran Peluang

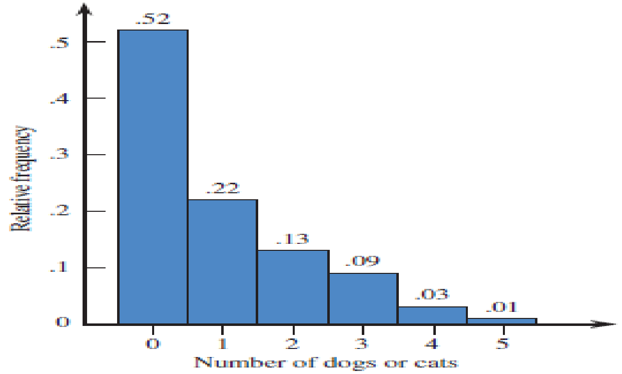
twitter: @kh_notodiputro

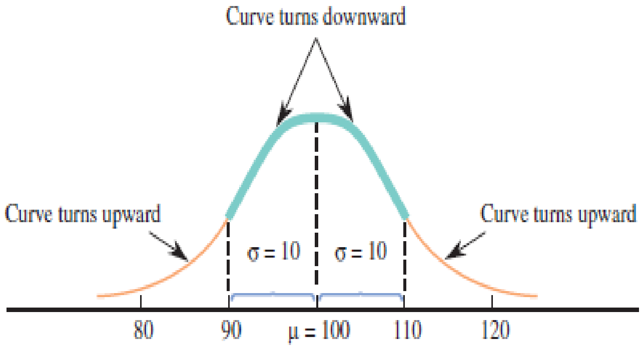
email: khairil@apps.ipb.ac.id

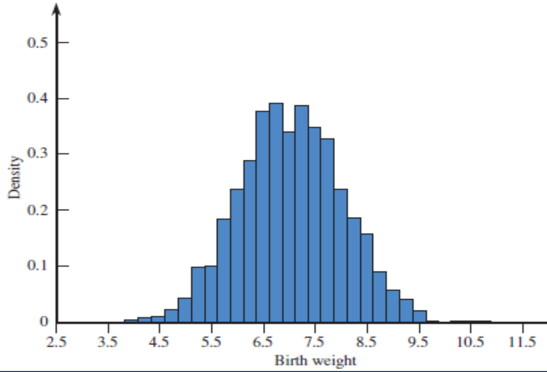
Prof. Dr. Ir. Khairil Anwar Notodiputro, MS

Guru Besar Tetap pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor

Metode Statistika
Kuliah 04





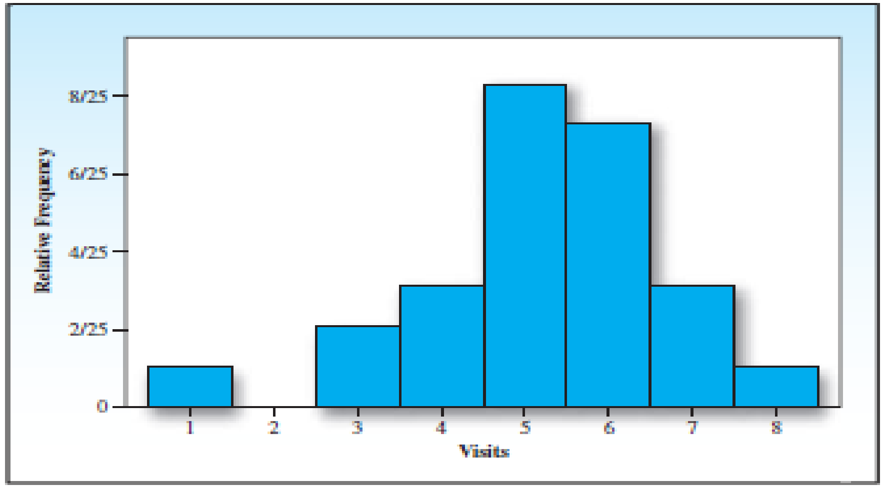


Sebaran Peluang
(*Probability Distribution*)

- Histogram menggambarkan sebaran frekuensi relatif dari peubah *X* yang bersifat numerik.
- Sebaran frekuensi itu menunjukkan:
  - Berapa saja nilai dari *X*
  - Berapa frekuensi dari setiap nilai *X*

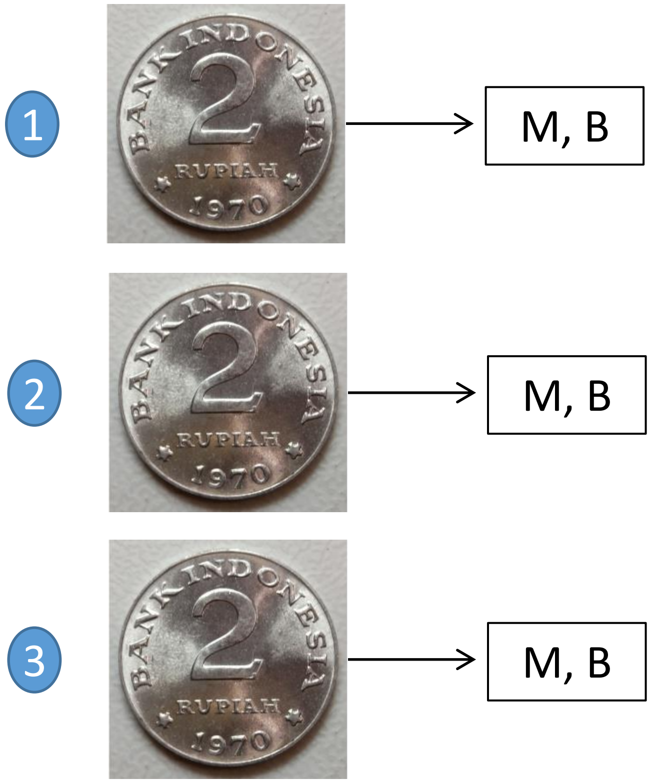
Number of Visits to Starbucks	Frequency	Relative Frequency
1	1	.04
2	—	—
3	2	.08
4	3	.12
5	8	.32
6	7	.28
7	3	.12
8	1	.04

- Kita juga sudah belajar menentukan ukuran pusatnya (*mean*) dan ukuran keragamannya (*standard deviation*)
- Pertanyaan: bgm bentuk sebaran frekuensi ini dalam jangka panjang (di-ulang^2)?
- Untuk menjawab pertanyaan ini kita perlu mendefinisikan apa itu peubah acak dan apa itu sebaran peluang?



Peubah Acak
(*Random Variable*)

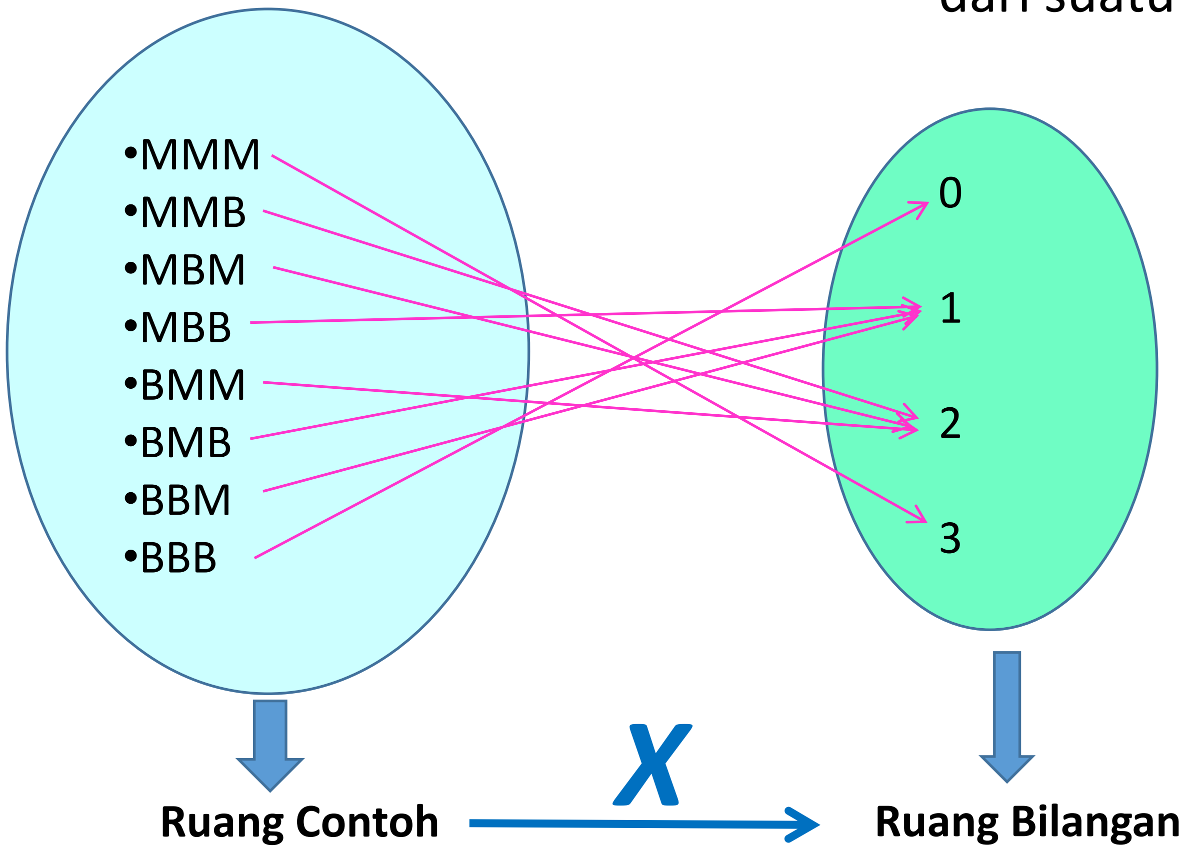
- Hasil dari percobaan atau percontohan acak disebut kejadian (*event*).
- Kejadian (*event*) mrp himpunan bagian dari ruang contoh.
- Perhatikan jika kita melempar mata uang sebanyak 3 kali maka berapa banyak sisi muka (M) yg muncul?



- **Ruang contoh** (*sample space*) dari percobaan acak ini adalah:
  - {MMM, MMB, MBM, MBB, BMM, BMB, BBM, BBB}
  - Jika X = jumlah sisi muka yg muncul maka X = {0,1,2,3}
  - $P(X=0) = 1/8$; $P(X=1) = 3/8$; $P(X=2) = 3/8$; $P(X=3) = 1/8$
- Perhatikan bhw X telah memetakan **unsur ruang contoh ke dalam bilangan nyata** → X disebut PEUBAH ACAK

Peubah Acak sebagai Pemetaan

Peubah acak adalah fungsi yang memetakan berbagai hasil dari suatu percobaan acak ke dalam ruang bilangan.



- X = jumlah sisi muka yang muncul adalah peubah acak.
- X memetakan berbagai hasil dari suatu percobaan acak (yaitu melempar 3 koin) ke dalam bilangan cacah.

$P(X=0) = 1/8$; $P(X=1) = 3/8$;
$P(X=2) = 3/8$; $P(X=3) = 1/8$

Sebaran Peluang Peubah Acak
(*Probability Distribution of Random Variables*)

- Dengan metode pendataan yang benar, dapat diperoleh angka dari peubah yang diamati
- Peubah yang diukur dari proses acak (mis. contoh acak), disebut peubah acak (*random variable*)
- Gunakan huruf kapital *X* utk peubah acak dan huruf kecil *x* untuk realisasinya.

Dadu dilempar 10 kali → *X* = banyaknya angka 2 → *x* = 3

Perhatikan bahwa X adalah peubah acak (sebelum diamati), sedangkan x adalah realisasinya (setelah diaamati)

- $P(X = 3) = {}_{10}C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \left(\frac{10!}{3!\,7!}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7$
- Kalau $X = 4 \rightarrow P(X = 4) = {}_{10}C_4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^6$
- $P(X = x)$ disebut sebaran peluang →

$$P(X = x) = {}_{10}C_x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{10-x}$$

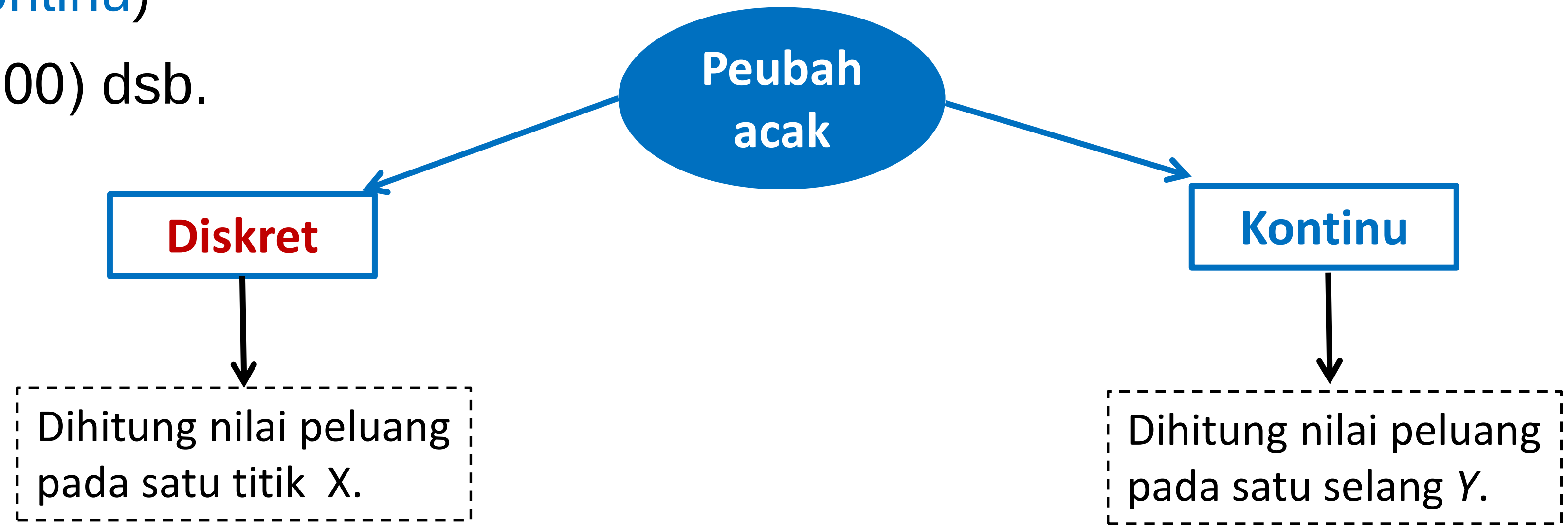
$${}_{10}C_x = \frac{10!}{x!(10-x)!}$$

Peubah Acak Diskret dan Kontinu

(*Discrete and Continuous Random Variables*)

- Peubah acak adalah suatu aturan untuk memberikan nilai numerik atas hasil percobaan acak (*randomized experiment*) atau percotohan acak (*random sampling*)
- Melempar dadu 10 kali, dan X = banyaknya angka 6 yang muncul

  Dengan demikian X = 0, 1, …, 10. (X adalah diskret)
- Bagaimana jika **peubah acak**nya **kontinu**?
- Misal, diambil contoh acak 30 petani lalu dicatat Y = pendapatan (ribu rupiah) petani per musim tanam. (Y adalah kontinu)
- Bisa dihitung $P(300 \leq Y \leq 500)$ dsb.



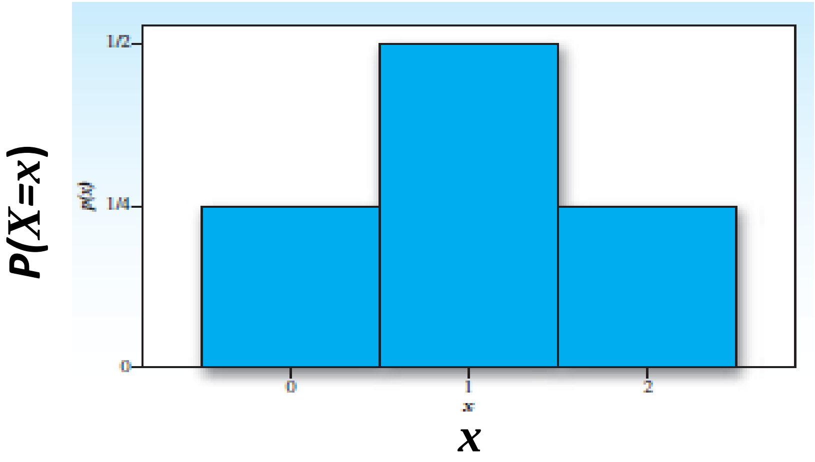
Definisi Sebaran Peluang
(*Definition of Probability Distribution*)

- Definisi sebaran peluang:

> **Definition** The probability distribution for a discrete random variable is a formula, table, or graph that gives the possible values of x, and the probability $p(x)$ associated with each value of x.

- Sebaran peluang dari peubah acak *X* adalah seluruh kemungkinan nilai *X* beserta nilai peluangnya, yaitu *P(X=x)*.

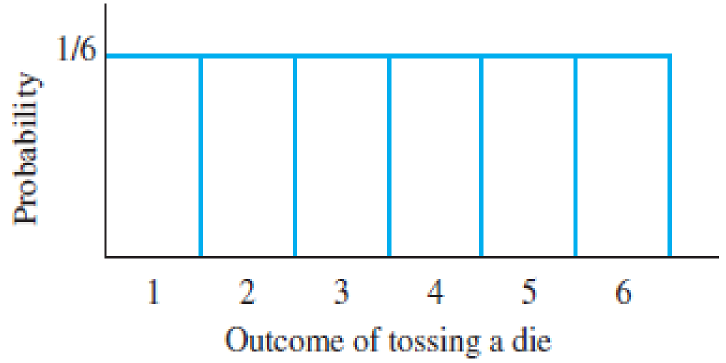
- Jika dua keping mata uang dilempar satu kali dan peubah acak *X* = banyaknya sisi depan (D) muncul:
  - $P(X=0) = \frac{1}{4}$, $P(X=1) = \frac{2}{4}$, *dan* $P(X=2) = \frac{1}{4}$.
  - *P(X=x)* utk *x = 0,1,2* disebut **sebaran peluang** dari *X*



Ilustrasi

Probability Distribution for Outcome of Tossing a Die

Possible Values, r, of the Random Variable X	*p(X = r)*
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6



- **Melempar 2 mata uang 500 kali**
- ***Y* = jumlah sisi muka mucul**

Frequency Distribution

y	Frequency	Relative Frequency
0	129	.258
1	242	.484
2	129	.258

Empiris

Probability Distribution

y	*P*(*y*)
0	.25
1	.50
2	.25

Teoretis

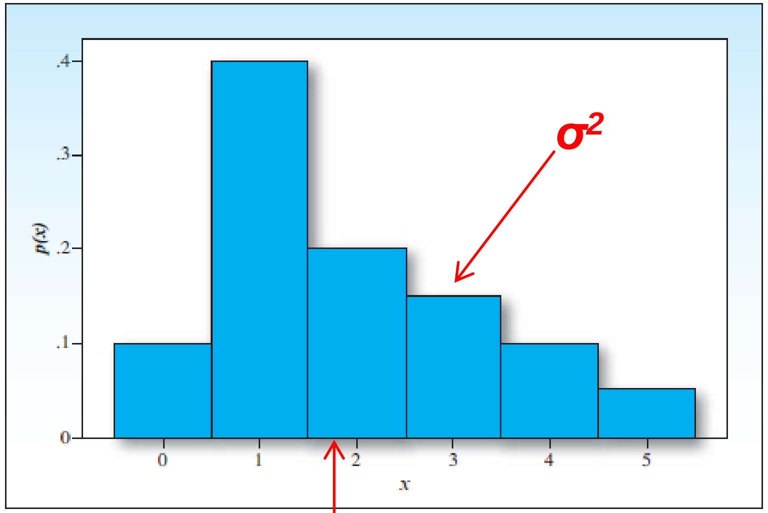
- Empiris mendekati teoritis.
- Empiris teramati, teoritis tidak teramati
- Empiris → sebaran frekuensi
- Teoritis → sebaran peluang

Nilai Harapan
(*Expected Value*)

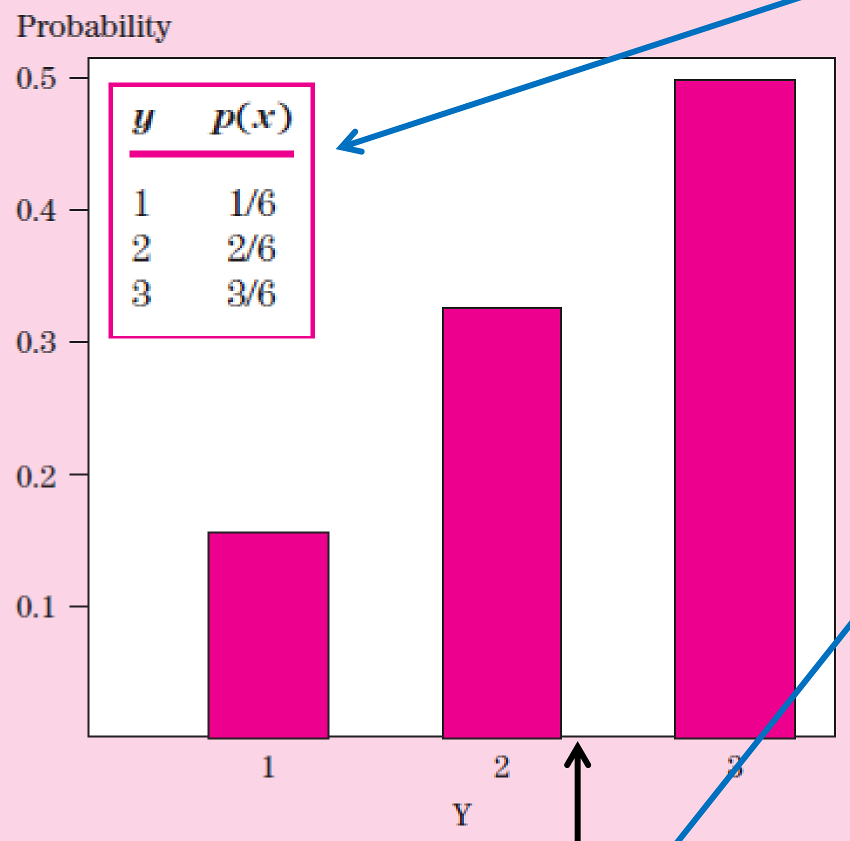
- Sebaran peluang memiliki nilaitengah, nilaitengah ini disebut Nilai Harapan (*expectation*)
- Jika peubah acak X diskret dengan sebaran peluang $P(X=x)$ maka nilai harapan dari X :
- $$E(X) = x_1P(x_1)+x_2P(x_2)+ \dots +x_nP(x_n) \quad \leftarrow \mu$$
- Jika peubah Y kontinu dengan kepekatan peluang $f(y)$ maka nilai harapan dari Y :
- $$E(Y) = \int y\, f(y)\, dy, \qquad -\infty < y < \infty \qquad \leftarrow \mu$$
- Ragam dapat pula diucapkan dalam nilaiharapan:

$$Var(Y) = E[Y- E(Y)]^2 \qquad \leftarrow \sigma^2$$

- Jika Y **diskret** maka $Var(Y) = \sum (y- \boldsymbol{\mu})^2 P(y)$
- Jika Y **kontinu** maka $Var(Y) = \int (y-\mu)^2 f(y)\, dy$



Nilai Harapan
(*Expected Value*)



y	$p(x)$
1	1/6
2	2/6
3	3/6

2.33

Sebaran peluang dari peubah acak *Y*

Nilaiharapan *Y* :

E(Y) $= 1(1/6) + 2(2/6) + 3(3/6)$
$= 2.33$

Var (Y) $= (1-2.33)^2(1/6) + (2-2.33)^2(2/6) + (3-2.33)^2(3/6)$
$= 0.2948 + 0.0363 + 0.2245$
$= 0.56$

Nilai Harapan
(Expected Value)

- Melempar 2 mata uang 500 kali
- *Y* = jumlah sisi muka mucul

Frequency Distribution

y	Frequency	Relative Frequency
0	129	.258
1	242	.484
2	129	.258

Empiris

Probability Distribution

y	$P(y)$
0	.25
1	.50
2	.25

Teoretis

Nilaiharapan *Y* :

$E(Y) = 0(0.25) + 1(0.5) + 2(0.25)$

μ $= 1.00$

$Var(Y) = (0-1.00)^2(0.25) + (1-1.00)^2(0.5) + (2-1.00)^2(0.25)$

$= 0.25 + 0.00 + 0.25$

σ^2 $= 0.50$

Diskusi Dulu.....

Sesi 1… beres!!! → Sesi 2…

Nilai Harapan
(*Expected Value*)

- Melempar 2 mata uang 500 kali
- *Y* = jumlah sisi muka mucul

Frequency Distribution

y	Frequency	Relative Frequency
0	129	.258
1	242	.484
2	129	.258

Probability Distribution

y	$P(y)$
0	.25
1	.50
2	.25

Nilaiharapan *Y* :

$$E(Y^2) = 0^2(0.25) + 1^2(0.5) + 2^2(0.25)$$
$$= 1.50$$
$$E(Y+3) = (0+3)(0.25) + (1+3)(0.5) + (2+3)(0.25)$$
$$= 4.00$$

Secara umum nilaiharapan dari *f(Y)* untuk peubah acak **diskret** :

$$E\,[f(Y)] = f(y_1)P(y_1) + \ldots + f(y_k)P(y_k)$$

Nilai Harapan
(*Expected Value*)

- **Melempar 2 mata uang 500 kali**
- ***Y* = jumlah sisi muka mucul**

Frequency Distribution

y	Frequency	Relative Frequency
0	129	.258
1	242	.484
2	129	.258

Empiris

Probability Distribution

y	$P(y)$
0	.25
1	.50
2	.25

Teoretis

$$\bar{X} = 0*0.258 + 1*0.484 + 2*0.258 = 1$$

$$s^2 = [(0-1)^2]*0.258 + [(1-1)^2]*0.484 + [(2-1)^2]*0.258 = 0.516$$

Ilustrasi

In a lottery conducted to benefit a local charity, 8000 tickets are to be sold at \$10 each. The prize is a \$24,000 compact car. If you purchase two tickets, what is your expected gain?

Solution Your gain x may take one of two values. You will either lose \$20 (i.e., your "gain" will be −\$20) or win \$23,980, with probabilities 7998/8000 and 2/8000, respectively. The probability distribution for the gain x is shown in the table:

x	$p(x)$
−\$20	7998/8000
\$23,980	2/8000

The expected gain will be

$$\mu = \Sigma xp(x) = (-\$20)\left(\frac{7998}{8000}\right) + (\$23{,}980)\left(\frac{2}{8000}\right) = -\$14$$

Dijual 8000 lembar undian dengan harga \$10 per lembar. Hadiahnya jika menang undian adalah mobil seharga \$24,000. Jika And membeli 2 lembar undian berapa harapan keuntungan yang akan diperoleh?

Jawab: Peubah acak yang menjadi perhatian adalah X = keuntungan atau "*gain*" yang diperoleh pembeli undian. Jika dibeli 2 lembar berarti harganya \$20. Jadi "*gain*" adalah Anda bisa kehilangan \$20 atau memperoleh \$23,980, dengan peluang berturut-turut sebesar 7998/8000 dan 2/8000.

x	$p(x)$
−\$20	7998/8000
\$23,980	2/8000

Dengan demikian nilaiharapannya:

μ = (-\$20)($\frac{7998}{8000}$) + (\$23,980)($\frac{2}{8000}$) = -\$14

Nilai negatif ini artinya Anda rugi dalam jangka panjang.

Ilustrasi

Determine the yearly premium for a \$10,000 insurance policy covering an event that, over a long period of time, has occurred at the rate of 2 times in 100. Let x equal the yearly financial gain to the insurance company resulting from the sale of the policy, and let C equal the unknown yearly premium. Calculate the value of C such that the expected gain $E(x)$ will equal zero. Then C is the premium required to break even. To this, the company would add administrative costs and profit.

Solution The first step in the solution is to determine the values that the gain x may take and then to determine $p(x)$. If the event does not occur during the year, the insurance company will gain the premium of $x = C$ dollars. If the event does occur, the gain will be negative; that is, the company will lose \$10,000 less the premium of C dollars already collected. Then $x = -(10{,}000 - C)$ dollars. The probabilities associated with these two values of x are 98/100 and 2/100, respectively. The probability distribution for the gain is shown in the table:

x = Gain	$p(x)$
C	98/100
$-(10{,}000 - C)$	2/100

Since the company wants the insurance premium C such that, in the long run (for many similar policies), the mean gain will equal zero, you can set the expected value of x equal to zero and solve for C. Then

$$\mu = E(x) = \Sigma x p(x)$$

$$= C\left(\frac{98}{100}\right) + [-10{,}000 + C]\left(\frac{2}{100}\right) = 0$$

or

$$\frac{98}{100}C + \frac{2}{100}C - 200 = 0$$

Solving this equation for C, you obtain $C = \$200$. Therefore, if the insurance company charged a yearly premium of \$200, the average gain calculated for a large number of similar policies would equal zero. The actual premium would equal \$200 plus administrative costs and profit.

Untuk kejadian yang memiliki peluang terjadi sebesar 2/200 sebuah asuransi memberi premi (uang santunan) sebesar \$10,000. Jika x = keuntungan perusahaan dari menjual jasa asuransi tersebut dan C = biaya per tahun yang harus dibayar oleh pengguna jasa asuransi, berapakah besaranya C agar E(x) = 0?

Perhatikan bahwa p(x=C) = 98/100 sedangkan p(x=-(10,000-C)) = 2/100. Selanjutnya

$$E(x) = C(98/100) + (-(10{,}000-C))(2/100)$$

$$= \frac{98}{100}C + \frac{2}{100}C - 200$$

Selanjutnya agar E(x) = 0, maka C = \$200.

Kesimpulan: **harga asuransi tersebut yang harus dibayar konsumen adalah \$200 supaya dalam jangka panjang perusahaan tidak rugi.**

Peubah Acak Bernoulli
(*Bernoulli Random Variables*)

Daniel Bernoulli (1720-1725)

- Dalam praktik, seringkali pengamatan yang diperhatikan bersifat **biner**: memiliki dua kemungkinan hasil "sukses" dan "gagal".
- Ingat contoh melempar sekeping mata uang? Hasilnya biner: sisi M atau B.
- Ingat contoh melempar sebuah dadu lalu diamati apakah angka 6 muncul atau tidak? Dalam hal ini hasinya juga biner: angka 6 atau bukan angka 6.
- Ini bisa diperluas dengan contoh lain, misalnya seseorang bisa saja
  - diterima atau ditolak aplikasi pengajuan kartu kredit
  - punya atau tidak punya kartu asuransi
  - memilih iya atau tidak di suatu diskusi

- Karena hanya ada dua kemungkinan hasil maka dalam pemodelan kita memiliki **peubah acak** X yang bernilai 1 jika terjadi "sukses" dan bernilai 0 jika terjadi "gagal"
- Jika p adalah peluang "sukses" maka peubah acak $X \sim$ **Bernoulli** (p)

Peubah Acak Bernoulli

(Bernoulli Random Variables)

Akan melakukan lemparan bebas. Jika peluang bola tersebut masuk ring sebesar 80% maka peluang bola tidak masuk ring adalah 20%

Akan melakukan tendangan pinalti. Jika peluang bola masuk sebesar 95% maka peluang bola tidak masuk sebesar 5%.

- Misal, p = P(sukses), maka fungsi massa peluang peubah acak $X \sim$ Bernoulli(p)

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}; x = 0,1$$

- Sehingga nilai harapan peubah acak X

$$E(X) = 0(1-p) + 1(p)$$
$$E(X) = p$$

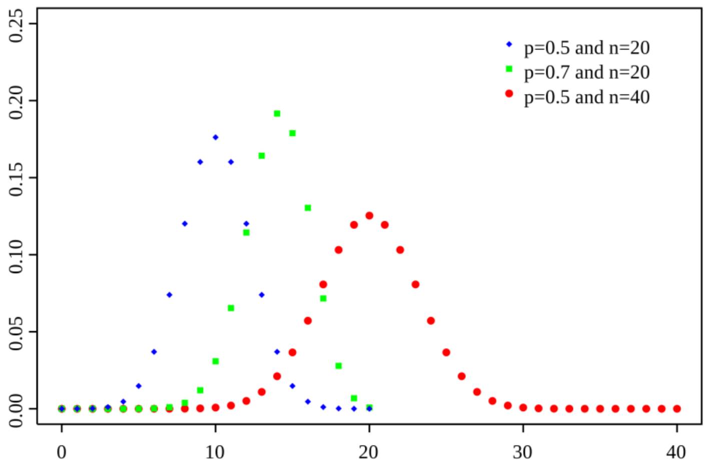
- Ragam peubah acak X

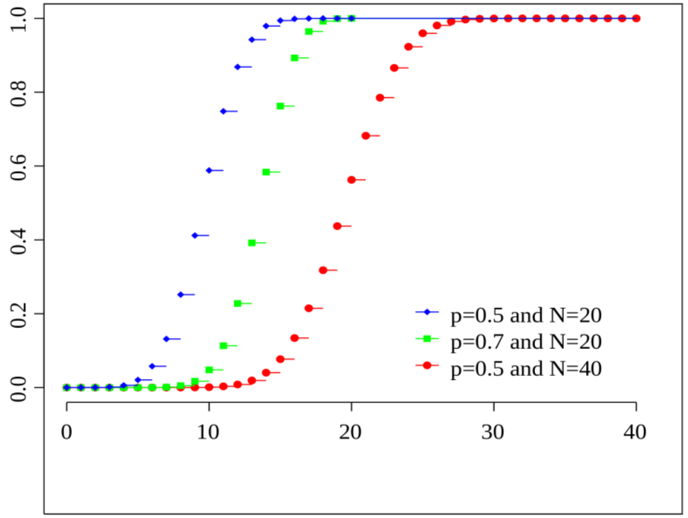
$$Var(X) = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2\, p$$
$$Var(X) = (1-p)[(0-p)^2 + (1-p)p]$$
$$Var(X) = p(1-p)$$

Peubah Acak Binom
(*Binomial Random Variables*)

- Peubah acak Binom dihasilkan dari proses sbb:

√ 1. The experiment consists of n identical trials.
√ 2. Each trial results in one of two outcomes. We will label one outcome a success and the other a failure.
√ 3. The probability of success on a single trial is equal to π and π remains the same from trial to trial.*
√ 4. The trials are independent; that is, the outcome of one trial does not influence the outcome of any other trial.
√ 5. The random variable y is the number of successes observed during the n trials.





- Koin dilempar sebanyak 3 kali, p.a. Y = banyaknya sisi muka yang muncul → proses Binom?
- No 1 → ya; No 2 → ya; No 3 → ya; No 4 → ya; No 5 → ya

Peubah Acak Binom
(*Binomial Random Variables*)

An article in the March 5, 1998, issue of *The New England Journal of Medicine* discussed a large outbreak of tuberculosis. One person, called the index patient, was diagnosed with tuberculosis in 1995. The 232 co-workers of the index patient were given a tuberculin screening test. The number of co-workers recording a positive reading on the test was the random variable of interest. Did this study satisfy the properties of a binomial experiment?

- Ada kotak berisi 4 jeruk masam dan 6 jeruk manis. Secara acak diambil 2 jeruk dan dicicipi. *X* = jumlah jeruk jeruk dengan rasa manis. Apakah ini proses Binom?

Peubah Acak Binom
(*Binomial Random Variables*)

Testing for Gender Bias in Promotions

Picture the Scenario

Example 1 introduced a case involving possible discrimination against female employees. A group of women employees has claimed that female employees are less likely than male employees of similar qualifications to be promoted.

Question to Explore

Suppose the large employee pool that can be tapped for management training is half female and half male. In a group recently selected for promotion, none of the 10 individuals chosen were female. What would be the probability of 0 females in 10 selections, if there truly were no gender bias?

Jika tidak ada bias gender (acak) maka *P(♂) = P(♀)*.

Misal ***X*** = banyaknya ♀ yang terpilih untuk promosi jabatan.

Jadi:

X ~ **Binom** (10, 0.5)

- Fungsi peluang dari *X* adalah $$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

- Peluang tdk satu pun terpilih ♀ utk promosi (*X* = 0):

$$P(0) = \frac{10!}{0!10!}(0.50)^0(0.50)^{10} = (0.50)^{10} = 0.001.$$

Kecil kemungkinan tidak bias gender, sepertinya promosi itu tidak acak.

Diskusi Dulu.....

Sesi 2… beres!!! → Sesi 3…

Peluang Binom

(*Binomial Probability*)

- Misal (dari pengalaman) peluang orang memilih qurban kambing 0.4 dan peluang memilih domba 0.6.
- Diamati 5 orang yang berqurban, satu sama lain tidak saling kenal dan membeli di tempat yg berbeda.
- K = pembeli memilih kambing → P(K) = 0.4
- D = pembeli memilih domba → P(D) = 0.6
- X = jumlah pembeli kambing → 0, 1, 2, 3, 4, 5

- X = 1 (5 kemungkinan) →

KDDDD	**DKDDD**	**DDKDD**	**DDDKD**	**DDDDK**

P(KDDDD) = P(K)P(D)P(D)P(D)P(D)

$$\begin{aligned} &= (.4)(.6)(.6)(.6)(.6) \\ &= (.4)(.6)^4 \\ &= .05184 \end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned} p(1) &= P(x=1) \\ &= \mathbf{P(KDDDD\ or\ DKDDD\ or\ DDKDD\ or\ DDDKD\ or\ DDDDK)} \\ &= .05184 + .05184 + .05184 + .05184 + .05184 \\ &= (5)(.05184) \\ &= .25920 \end{aligned}$$

Peluang Binom
(*Binomial Probability*)

- X =2 (10 kemungkinan) → $_5C_2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$ → $p(2) = P(x = 2)$
  $= P(KKDDD) + \ldots + DDDKK)$
  $= (10)(.4)^2(.6)^3$
  $= .34560$

- X =3 (10 kemungkinan) → $p(3) = (10)(.4)^3(.6)^2 = 0.2304$
- $X = r$ → $p(r) = {_5C_r}\,(.4)^r(.6)^{5-r}$
- Secara umum jika ada n kali percobaan dg peluang sukses masing-masing sebesar p maka X = jumlah sukses dalam percobaan itu mrp p.a. Binom dengan:

$$p(x) = P(x \text{ successes among } n \text{ trials})$$
$$p(x) = {_nC_x}\,p^x(1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Binomial Distribution

Peluang Binom
(*Binomial Probability*)

- Untuk hewan qurban tadi, jika ada 12 pembeli yang disurvei, dan X = banyaknya pembeli domba maka

$$p(x) = \frac{12!}{x!(12-x)!}(.6)^x(.4)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 12$$

- Untuk $X = 4$ →

$$\begin{aligned} p(4) &= P(x = 4) \\ &= \frac{12!}{4!8!}(.6)^4(.4)^8 \\ &= (495)(.6)^4(.4)^8 \\ &= .042 \end{aligned}$$

- Selanjutnya:

$$\begin{aligned} P(4 \le x \le 7) &= p(4) + p(5) + p(6) + p(7) \\ &= \frac{12!}{4!8!}(.6)^4(.4)^8 + \cdots + \frac{12!}{7!5!}(.6)^7(.4)^5 \\ &= .042 + .101 + .177 + .227 \\ &= .547 \end{aligned}$$

⟺

$$\begin{aligned} P(4 < x < 7) &= P(x = 5 \text{ or } x = 6) \\ &= p(5) + p(6) \\ &= .278 \end{aligned}$$

Peluang Binom

(*Binomial Probability*)

Suppose that a sample of households is randomly selected from all the households in the city in order to estimate the percentage in which the head of the household is unemployed. To illustrate the computation of a binomial probability, suppose that the unknown percentage is actually 10% and that a sample of $n = 5$ (we select a small sample to make the calculation manageable) is selected from the population. What is the probability that all five heads of the households are employed?

Solution We must carefully define which outcome we wish to call a success. For this example, we define a success as being employed. Then the probability of success when one person is selected from the population is $\pi = .9$ (because the proportion unemployed is .1). We wish to find the probability that $y = 5$ (all five are employed) in five trials.

$$P(y = 5) = \frac{5!}{5!(5-5)!}(.9)^5(.1)^0$$

$$= \frac{5!}{5!\,0!}(.9)^5(.1)^0$$

$$= (.9)^5 = .590$$

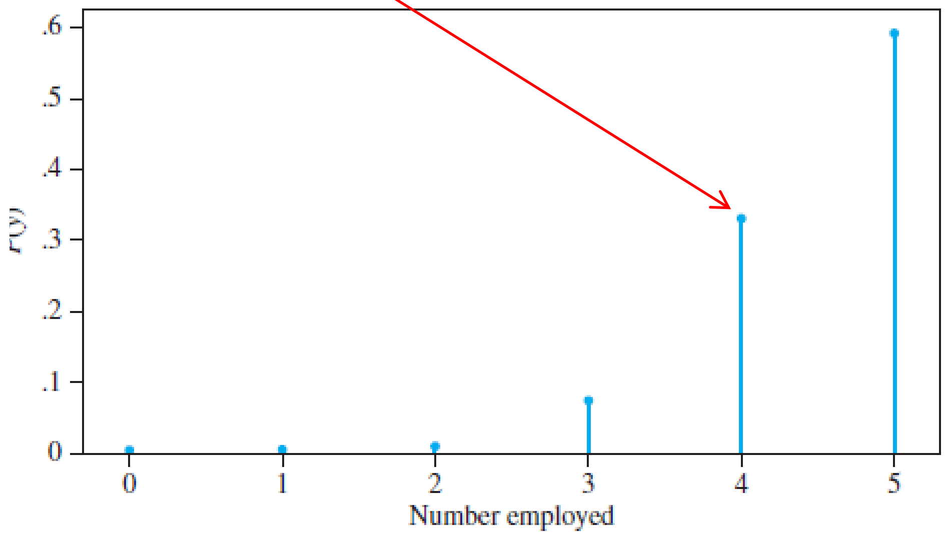
Berapa peluang Y = 4?

$$P(4) = \frac{5!}{4!(5-4)!}(.9)^4(.1)^1$$

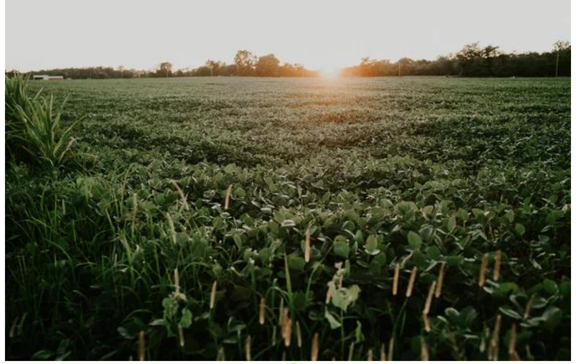
$$= \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(4)(3)(2)(1)(1)}(.9)^4(.1)$$

$$= 5(.9)^4(.1)$$

$$= .328$$



Dari Bernoulli ke Binom



- Perhatikan peubah acak X_i = $\begin{cases} 1, jika\ sukses \\ 0, jika\ gagal \end{cases}$
- Peubah acak X_i menyebar Bernoulli dengan peluang sukses sebesar *p.*
- Jika ini diulang secara bebas satu sama lain sebanyak n kali, dan diamati peubah acak Y = jumlah sukses dari n peubah acak X_i tersebut, maka peubah acak Y merupakan peubah acak Binom.
- Jadi $Y \sim \boldsymbol{Binom}\ (n, p)$ ← *Binomial distribution*

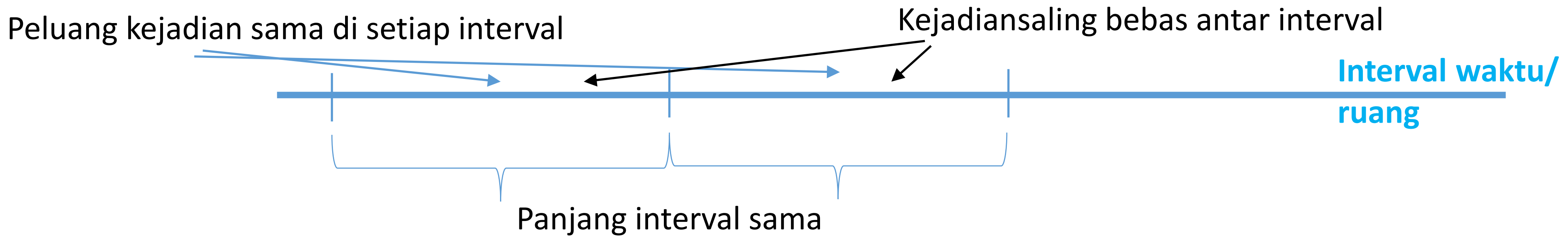
- Misal kita menanam 1 butir kedelai yang berpeluang tumbuh sebesar 0.80 maka peubah acak X_i = $\begin{cases} 1, jika\ kedelai\ tumbuh \\ 0, \quad jika\ kedelai\ mati \end{cases}$ merupakan peubah acak Bernoulli (0.80).
- Jika yang ditanam sebanyak 100 kedelai lalu diamati peubah acak *Y* = X_1 + … + X_{100} maka $Y \sim Binom\ (100{,}0.8)$

Sebaran Poisson

- Pada bagian ini kita membahas peubah acak diskret yang sering berguna dalam memperkirakan **banyaknya kejadian selama interval waktu atau ruang tertentu**.
- Misalnya, jumlah kedatangan pelanggan di tempat cuci mobil dalam satu jam, jumlah perbaikan yang dibutuhkan di 10 km jalan raya, atau banyaknya kebocoran di 100 km pipa air PDAM.
- Jika dua sifat berikut ini terpenuhi, peubah acak yang dihasilkan mengikuti sebaran peluang **Poisson**.

PROPERTIES OF A POISSON EXPERIMENT

1. The probability of an occurrence is the same for any two intervals of equal length.
2. The occurrence or nonoccurrence in any interval is independent of the occurrence or nonoccurrence in any other interval.



Sebaran Poisson

Fungsi Peluang dari peubah acak X **Poisson** dengan parameter μ → X ~ Poisson(μ)

POISSON PROBABILITY FUNCTION

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \qquad \textbf{(5.11)}$$

where

$f(x)$ = the probability of x occurrences in an interval
μ = expected value or mean number of occurrences in an interval
e = 2.71828

The Poisson probability distribution is often used to model random arrivals in waiting line situations.

Nilai harapan x = μ

Ragam x = μ

- Untuk sebaran peluang Poisson, X adalah peubah acak diskret yang merupakan banyaknya kejadian dalam suatu selang ruang atau waktu (*space and time intervals*)
- Fungsi peluang Poisson $f(x)$ dapat diterapkan untuk nilai $x = 0, 1, 2, \ldots$ tanpa batas.
- Jika x membesar maka $f(x)$ mendekati nol, shg peluang nilai x yang lebih besar diabaikan.

Ilustrasi (kejadian dalam selang waktu)

- Kita tertarik pada banyaknya kedatangan mobil di drive-thru restoran ayam goreng selama periode 15 menit pada pagi hari kerja.
- Asumsi: peluang kedatangan mobil adalah sama untuk dua periode waktu yang sama panjangnya.
- Asumsi: ketidakdatangan mobil yang satu dengan mobil kedua bebas satu sama lain.
- Dari pengalaman selama ini diketahui rata-rata mobil yang tiba dalam waktu 15 menit adalah 10.
- Misalkan X= banyaknya mobil yang datang dalam waktu 15 menit.
- Bagian manajemen ingin mengetahui berapa peluang mobil yang datang sebanyak 5 dalam periode 15 menit, hitunglah peluangnya!

Misalkan X = banyaknya mobil yang datang dalam periode 15 menit

Karena diketahui bhw $\mu = 10$, maka
$X \sim$ Poisson($\mu = 10$)

$$P(X = x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = \frac{10^x e^{-10}}{x!}; x = 0,1,2, \ldots$$

Peluang tepat 5 mobil datang dalam periode 15 menit → $P(X = 5)$

$$P(X = 5) = \frac{10^5 e^{-10}}{5!} = 0.0378$$

Nilaitengah dari p.a X … →$E(X) = \mu = 10$

Ragam dari p.a X … →$Var(X) = \sigma^2 = 10$

Ilustrasi (kejadian dalam ruang)

- Kita prihatin dengan kerusakan berupa lubang besar di jalan raya satu bulan setelah pelapisan ulang.
- Asumsi: peluang kerusakan adalah sama untuk dua interval jalan raya dengan panjang yang sama dan saling bebas satu sama lain.
- Gunakan sebaran Poisson untuk menjawabnya.
- Misalkan diketahui bahwa kerusakan lubang besar satu bulan setelah pelapisan ulang terjadi dengan rata-rata dua lubang per km.
- Tentukan peluang tidak ada kerusakan lubang besar pada bagian tertentu dari jalan raya sepanjang tiga km.

- Kita tertarik pada selang jarak 3 km, maka nilai harapan banyaknya lubang besar yang terjadi pada jarak 3 km jalan raya setara dengan $\mu = \left(2 \frac{lubang}{km}\right) 3km = 6\ lubang$
- Maka misalkan X = banyaknya kerusakan lubang besar pada bagian tertentu dari jalan raya sepanjang 3 km → $X \sim$ Poisson($\mu = 6$)

$$P(X = x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = \frac{6^x e^{-6}}{x!}; x = 0,1,2, \ldots$$

Peluang tidak ada kerusakan → P($X = 0$)

$$P(X = 0) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} = 0.0025$$

Kecil kemungkinan tidak akan terjadi kerusakan lubang besar pada bagian 3 km jalan raya.

Diskusikan

A corporation is proposing to select two of its current regional managers as vice presidents. In the history of the company, there has never been a female vice president. The corporation has six male regional managers and four female regional managers. Make the assumption that the 10 regional managers are equally qualified and hence all possible groups of two managers should have the same chance of being selected as the vice presidents. Now find the probability that both vice presidents are male.

Pekerjaan Rumah

Percobaan melempar sekeping uang logam setimbang. *X*= banyaknya sisi muka (*head*) yang muncul. *P(X=5)* bisa dihitung:

```
> choose(10,5) * (1/2)^5 * (1/2)^(10-5)
[1] 0.2461
```

Atau menggunakan fungsi d():

```
> dbinom(5, size=10, prob=1/2)
[1] 0.2461
```

Jelaskan apa yg dihitung dengan perintah-perintah ini?

```
> sum(dbinom(0:6,size=10,prob=1/2))
[1] 0.8281
> pbinom(6,size=10,p=1/2)
[1] 0.8281
> sum(dbinom(7:10,size=10,prob=1/2))
[1] 0.1719
> pbinom(6,size=10,p=1/2)
[1] 0.1719
> pbinom(6,size=10,p=1/2, lower.tail=FALSE)
```



Thank You

email: khairil@apps.ipb.ac.id

twitter: @kh_notodiputro