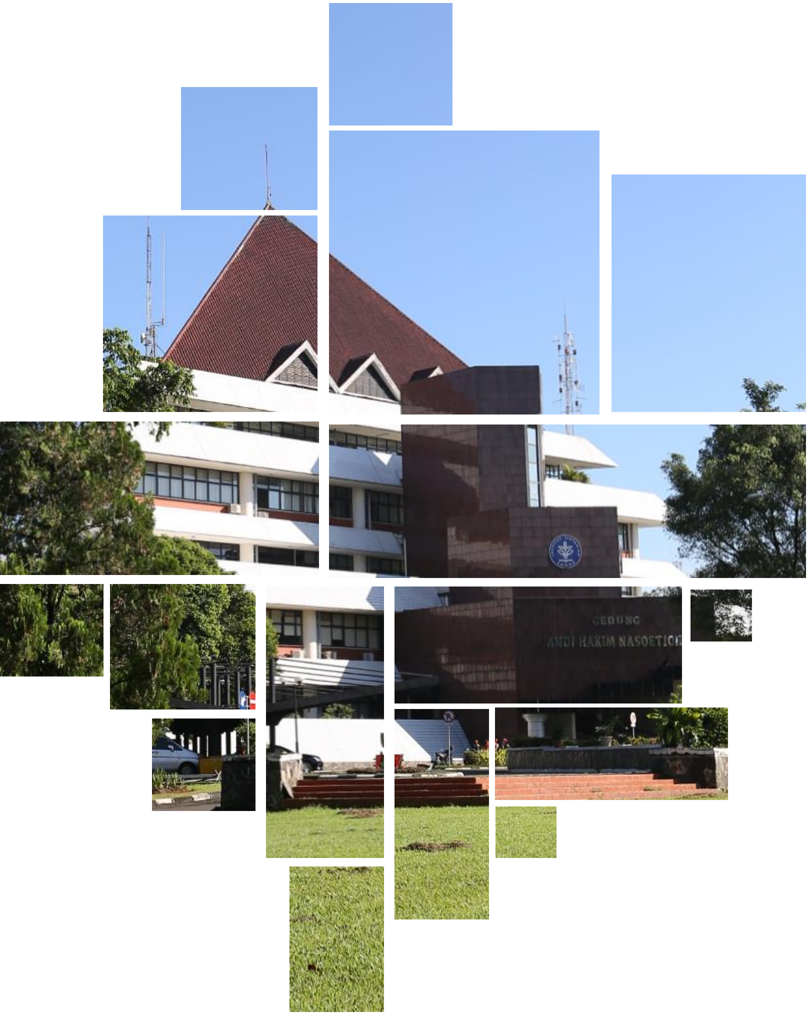
IPB University
Bogor Indonesia
Study Program
Statistics and Data Science
Department of Statistics



Responsi Metode Statistika (STA-1211)

PERTEMUAN 4

Sebaran Peubah Acak (Diskret)

Asisten: Laily Nissa Atul Mualifah

Outline

- ❑ Peubah Acak
- ❑ Fungsi Peluang
- ❑ Nilai Harapan
- ❑ Ragam
- ❑ Sebaran Bernoulli
- ❑ Sebaran Binomial
- ❑ Sebaran Poisson

Peubah Acak

Peubah Acak merupakan fungsi yang memetakan ruang kejadian (domain) ke ruang bilangan riil.

Dinotasikan dengan huruf kapital.

Dua jenis peubah acak:

mencacah

- Diskret: nilai ~~berupa cacahan~~ → hitungan

  Misal: banyaknya sisi *head* dalam pelemparan koin, banyaknya anak perempuan dalam keluarga, banyaknya angka genap yang muncul dalam pelemparan dadu

  alat

- Kontinu: nilai berupa selang → ukuran → $-\infty$ ∞

  Misal: tinggi badan, suhu, lama waktu mengantri

Fungsi Peluang

$x=0,\ f_x = \frac{3}{15}$

$x=1\ \ f_x = \frac{9}{15}$

$x=2 = \frac{3}{15}$

Peubah acak Diskret:

Fungsi massa peluang (fmp) dari peubah acak diskret didefinisikan sebagai berikut:

$f_X(x) = P(X = x)$, untuk semua x

Syarat suatu fungsi disebut fmp:

- $0 \leq P(X = x) \leq 1$
- $\sum_{\forall i} P(X = x_i) = 1$

$P(X \geq 1) = \frac{9}{15} + \frac{3}{15} = \frac{12}{15}$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

$1 - \frac{3}{15} = \frac{12}{15}$

Fungsi sebaran (kumulatif):

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} P(X = i)$$

Ilustrasi:

Pada suatu perusahaan tanaman terdapat 3 pegawai laki-laki dan 3 pegawai perempuan. Seorang *supervisor* akan memilih 2 pegawai secara acak untuk mengerjakan pekerjaan khusus. Misalkan X menyatakan banyaknya pegawai perempuan yang terpilih.

a) Carilah fungsi massa peluang bagi X

b) Carilah peluang sedikitnya 1 pegawai perempuan terpilih $x = \{1, 2\}$

$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2)$ 1

$= 1 - P(X < 1)$

$= 1 - P(X=0)$ 2

Fungsi Peluang

IPB University
Bogor Indonesia

Nilai X yang mungkin adalah: {0,1,2}

Banyaknya cara memilih 2 pegawai: $C_2^6 = 15$

Banyaknya cara memilih 0 perempuan: $C_0^3 \times C_2^3 = 3$

Banyaknya cara memilih 1 perempuan: $C_1^3 \times C_1^3 = 9$

Banyaknya cara memilih 2 perempuan: $C_2^3 \times C_0^3 = 3$

fungsi massa peluang bagi X

X	$P(X=x)$
0	1/5 $3/15$
1	3/5 $9/15$
2	1/5 $3/15$
$\sum_i P(X=x_i)$	1

Peluang sedikitnya 1 pegawai perempuan terpilih:

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2)$$

$$P(X \geq 1) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \quad \frac{12}{15}$$

Fungsi Peluang

Peubah acak Kontinu:

Fungsi kepekatan peluang (fkp) dari peubah acak kontinu Fungsi kepekatan peluang (fkp) dari peubah acak kontinu, $f_X(x)$, adalah suatu fungsi yang memenuhi:

$\Sigma f_X \leftarrow$

$$\boxed{F_X(x)} = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

$f_X(x)$, $1 \leq x < 3$

$P(X \leq 5) = \Sigma$

$\boxed{P(X=0) + P(X=1) \ldots}$

Atau dapat dinyatakan sebagai:

fmp X

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Pada peubah acak kontinu $P(X = x) = 0$, peluang dari suatu interval nilai x dapat dicari dengan: $P(X > a)$

$P(X=3)$, $P(X=2{,}5)$

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

$\rightarrow P(X \leq 5)$

Syarat suatu fungsi disebut fkp:

- $f_X(x) \geq 0$ untuk semua x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

Fungsi Peluang

IPB University — Bogor Indonesia —

$0 \le y \le 2$

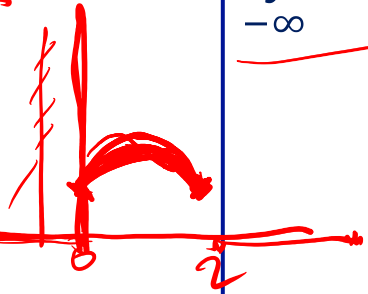
Ilustrasi:

$P(X=x)=0$

$P(X=0)=0$

Diberikan Y suatu peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang:

$$f(y) = \begin{cases} cy^2 & \text{untuk } 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{untuk } y \text{ lainnya} \end{cases}$$



a) Carilah nilai c sehingga $f(y)$ merupakan fkp

b) Carilah $P(1 < y < 2)$

Syarat fkp adalah:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} f_y\,dy + \int_{0}^{2} f_y\,dy + \int_{2}^{\infty} f_y\,dy$$

$$0 + \int_{0}^{2} f_y\,dy + 0 = 1$$

$$\int_0^2 cy^2\,dy = 1$$

$$\frac{c}{3}y^3\Big]_0^2 = 1$$

$$\frac{8c}{3} = 1 \rightarrow c = \frac{3}{8}$$

Sehingga,

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}y^2 & \text{untuk } 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{untuk } y \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$P(1 < y < 2) = \int_1^2 f(y)\,dy = \int_1^2 \frac{3}{8}y^2\,dy = \frac{1}{8}y^3\Big]_1^2 = \frac{7}{8}$$

$$P(1<y<3) = P(1<y<2) + P(2<y<3)$$

$$+\ 0$$

Nilai Harapan → nilai tengah

Misalkan $g(X)$ suatu fungsi peubah acak X, didefinisikan nilai harapan $g(X)$ adalah:

- Peubah acak diskret

$$E(g(X)) = \sum_{\forall x} g(X) P(X = x)$$

Jika $g(X) = X$ maka

fmp

$$E(X) = \sum_{\forall x} x P(X = x)$$

- Peubah acak kontinu

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) f(x) dx$$

Jika $g(X) = X$ maka

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$x = 1$

Sifat-sifat nilai harapan:

Misalkan a dan b suatu konstanta

- $E(a) = a$
- $E(aX) = aE(X)$
- $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$
- $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$

Nilai Harapan

$E(g(x)) = \sum g(x)\, P(X = x)$

→ nilai tengah

fmp dari X

Ilustrasi Diskret:

Pada suatu perusahaan tanaman terdapat 3 pegawai laki-laki dan 3 pegawai perempuan. Seorang *supervisor* akan memilih 2 pegawai secara acak untuk mengerjakan pekerjaan khusus. Misalkan X menyatakan banyaknya pegawai perempuan yang terpilih. Carilah nilai harapan dari peubah acak X! $E(X)$

X	$P(X = x)$
0	1/5 = 3/15
1	3/5 9/15
2	1/5 3/15
$\sum_i P(X = x_i)$	1

Nilai harapan X : $E(X) = \sum_{x_i=0}^{2} x_i\, P(X = x_i)$

$$E(X) = \sum_{\forall x} x\, P(X = x_i) = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) + 2P(X = 2)$$

$= 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} = 1$

$$= 0\left(\frac{1}{5}\right) + 1\left(\frac{3}{5}\right) + 2\left(\frac{1}{5}\right) = 1$$

$E(X^2) = \sum x^2 P(X = x)$

$= 0^2 \cdot \frac{1}{5} + 1^2 \cdot \frac{3}{5} + 2^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$

Nilai Harapan

Ilustrasi Kontinu:

Peubah acak Y memiliki fungsi kepekatan peluang:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}y^2 & \text{untuk } \boxed{0 \le y \le 2} \\ 0 & \text{untuk } y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Carilah nilai harapan dari peubah acak Y! $E(Y)$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_y \, dy$$

$$= \int_0^2 y \cdot \frac{3}{8} y^2 \, dy$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{8} y^3 \, dy = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} y^4 \Big]_0^2 = \frac{3}{32}[16-0]$$

$$= \frac{3}{2} \checkmark$$

Nilai harapan Y :

$$E(Y) = \int_0^2 y\, f(y) dy = \int_0^2 y \left(\frac{3}{8} y^2\right) dy$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{8} y^3 dy = \frac{3}{32} y^4 \Big]_0^2 = \frac{3}{32}(2^4 - 0^4) = \frac{3}{2}$$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$
$= E(X.X) - E(X)E(X)$

simpangan baku

Ragam $= \sigma^2$

IPB University
— Bogor Indonesia —

- Peubah acak diskret

$$Var(X) = \sum_{\forall x} (x - \mu)^2 P(X = x)$$

$\mu = E(X)$

- Peubah acak kontinu

$E(X) = X$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) d\,x$$

Alternatif formula dalam perhitungan nilai ragam dari suatu peubah acak:

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

Covariant $(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Sifat-sifat ragam:

Misalkan a dan b suatu konstanta

$Var(1) = 0$ $\quad E(a) = a$

$E(aX) = aE(X)$

- $Var(a) = 0$
- $Var(X) \geq 0$
- $Var(aX) = a^2 Var(X)$
- $Var(aX \pm b) = a^2 Var(X)$ $= Var(aX) \pm Var(b)$
- $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm \boxed{2Cov(X,Y)}$

$$Var(aX) = a^2 Var(X)$$

Ragam

IPB University — Bogor Indonesia

Ilustrasi Diskret:

Pada suatu perusahaan tanaman terdapat 3 pegawai laki-laki dan 3 pegawai perempuan. Seorang *supervisor* akan memilih 2 pegawai secara acak untuk mengerjakan pekerjaan khusus. Misalkan X menyatakan banyaknya pegawai perempuan yang terpilih. Carilah ragam dari peubah acak X!

fmp X

X	$P(X=x)$
0	1/5
1	3/5
2	1/5
$\sum_i P(X=x_i)$	1

$E(X)=1$

Sebelumnya telah dicari $E(X)=1$

$E(X^2)=\frac{7}{5}$ ✓

$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{7}{5}-1^2=\boxed{\frac{2}{5}}$

$$E(X^2)=\sum_{\forall x} x^2\,P(X=x_i)=0^2\left(\frac{1}{5}\right)+1^2\left(\frac{3}{5}\right)+2^2\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{7}{5}$$

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{7}{5}-1^2=\frac{2}{5}$$

Ragam

IPB University — Bogor Indonesia

Ilustrasi Kontinu:

Peubah acak Y memiliki fungsi kepekatan peluang:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}y^2 & \text{untuk } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{untuk } y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Carilah ragam dari peubah acak Y!

$E(Y) = \frac{3}{2}$ ✓

$E(Y^2) = \int^2 y^2 \cdot \frac{3}{8} y^2 \, dy$

✓ $= \int_0^2 \frac{3}{8} y^4 \, dy = \frac{3}{40} y^5 \Big]_0^2 = \frac{3}{40} \cdot 32 = \frac{12}{5}$

$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$

$= \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{3}{20}$

$$E(Y) = \frac{3}{2}$$

$$E(Y^2) = \int_0^2 y^2 f(y) dy = \int_0^2 y^2 \left(\frac{3}{8} y^2\right) dy$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{8} y^5 dy = \frac{3}{40} y^5 \Big]_0^2 = \frac{12}{5}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$= \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{48 - 45}{20} = \frac{3}{20}$$

Sebaran Bernoulli

$n = 1$ x
hasil : "gagal" "sukses"

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ {H,T} 2 $= \frac{1}{5}$ $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$n = 1$x

- Sebuah percobaan dengan dua kemungkinan hasil yaitu "gagal" atau "berhasil". Jika $X = 1$ maka "berhasil", dan $X = 0$ maka "gagal". Fungsi massa peluang dari peubah acak X adalah: $X \sim \text{Bernoulli}(p = p)$

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad , x = 0,1$$

peluang gagal

dengan,

p : peluang "berhasil"

Nilai harapan X : $E(X) = p$

Ragam X : $Var\ (X) = p(1-p)$

Ilustrasi:

Sebuah koin seimbang dilempar sekali. $n = 1$
Peubah X menyatakan hasil dari pelemparan koin tersebut, dimana $X = 1$ jika koin menunjukkan *head* dan $X = 0$ jika koin menunjukkan *tail*.

$X \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$

Fungsi massa peluang peubah acak X adalah: $x = ?$ $P(X = x) = ?$

$$P(X = 1) = 0.5^1(1-0.5)^{1-1} = 0.5$$

$$P(X = 0) = 0.5^0(1-0.5)^{1-0} = 0.5$$

fmp : $f_X(x) = \begin{cases} 1/2 , & x = 0 \\ 1/2 , & x = 1 \end{cases}$

$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \rightarrow n=1 \rightarrow \binom{1}{x} p^x q^{1-x}$ $\quad \frac{1!}{1!\,0!}$

Sebaran Binomial

Percobaan yang diulang sebanyak n kali dengan peubah acak X menyatakan banyaknya "berhasil" yang terjadi. Setiap percobaan peluang "berhasil" tetap, atau tiap percobaan saling bebas. Fungsi massa peluang dari peubah acak X adalah:

$X \sim Binom(n, p)$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad , x = 0, 1, \ldots, n$$

minimal $3x$

$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

dengan,

p : peluang "berhasil"

$P(X \geq 3) = 1 - P(X<3)$

$= 1 - [P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)]$

Nilai harapan X : $E(X) = np$

Ragam X : $Var(X) = np(1-p)$

Ilustrasi: $\frac{1}{4}$, $1-p = \frac{3}{4}$

Batting average seorang pemain baseball adalah 0.25. Hitunglah peluang pemain tersebut berhasil memukul dua kali dalam lima kali pukulan. $n=5$ $\quad x=2$

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} 0.25^2 (1-0.25)^{5-2}$$

$$= \frac{5!}{2!\,3!} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$= 10 \frac{27}{1024} = 0.26367 = 26.37\%$$

Sebaran Poisson

→ kejadian yg jarang (rare case)

IPB University
Bogor Indonesia

Sebaran Binomial dengan: $X \sim Pois(\lambda)$

$$\left.\begin{array}{l} n \to \infty \\ p \to 0 \end{array}\right\} \text{maka } \lambda = np$$

rata² - nilai tengah

dimana $\lambda > 0$. Fungsi massa peluang peubah acak X yang berdistribusi Poisson adalah:

$$\boxed{P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}} \quad , x = 0,1,2, \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

Nilai harapan $X : E(X) = \lambda$

Ragam $X : Var\ (X) = \lambda$

Ilustrasi:

Rata-rata banyaknya kecelakaan pesawat komersial per bulan adalah sebanyak 3.5. Hitunglah:

$X = 1$ bulan → λ

$12X$ 1 th

a) Peluang bulan depan terjadi kecelakaan paling sedikit 2 kejadian → $P(X \geq 2)$

b) Nilai harapan banyaknya kecelakaan dalam satu tahun → $E(12) = ?$

$E(12X)$:

$E(X = 12\lambda) = ?$

$12E(X)$

$E(X) = 12\lambda$?

$E(X) \neq 12$?

Sebaran Poisson

Diketahui: $X \sim Pois(\lambda)$ $\quad X \sim Pois(n\lambda)$

12λ

X: banyaknya kecelakaan dalam $\boxed{\text{satu bulan}}$

$X \sim Pois(3.5)$

a) $P(X \geq 2)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$
$$= 1 - P(X \leq 1)$$
$$= 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}$$
$$= 1 - \left\{\frac{e^{-3.5} . 3.5^0}{0!} + \frac{e^{-3.5} . 3.5^1}{1!}\right\} = 1 - 0.13589 = 0.864111$$

b) $E(12X) = 12E(X) = 12 \times 3.5 = 42$

Sebaran Poisson (pendekatan Binomial

Ilustrasi:

$X \sim \text{Binom}(n, p)$

Misalkan peluang dari suatu barang yang diproduksi oleh suatu mesin mengalami kerusakan adalah 0.1. Hitunglah peluang dari 10 barang akan mengandung paling banyak 1 barang yang rusak.

p

n

x

$X \sim \text{Pois}(\lambda)$

$\lambda = np$

<u>Dengan sebaran Binomial</u>:

$X \sim \text{Binom}(10, 0.1)$

$n = 10$

$p = 0.1$

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= \binom{10}{0} 0.1^0 (1 - 0.1)^{10-0} + \binom{10}{1} 0.1^1 (1 - 0.1)^{10-1} = 0.7361$$

<u>Dengan sebaran Poisson</u>:

$X \sim \text{Pois}(10 \times 0.1 = 1)$

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= \frac{e^{-1} 1^0}{0!} + \frac{e^{-1} 1^1}{1!} = 0.73576$$

Latihan

peluang ?

sebaran ?

Mendenhall, *et al.*, 2013

$n = 5 \begin{cases} L = 3 \\ P = 2 \end{cases}$

4.89 Gender Bias? A company has five applicants for two positions: two women and three men. Suppose that the five applicants are equally qualified and that no preference is given for choosing either gender. Let x equal the number of women chosen to fill the two positions.

n (ruang contoh)

n (ruang kejadian)

a. Find $p(x)$.

b. Construct a probability histogram for x.

$n(S) = C^5_2 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$

$X = \{0, 1, 2\}$

$X = 0 \rightarrow n(A) = C^3_2 \cdot C^2_0 = 3 \rightarrow P(X=0) = \frac{3}{10}$

$X = 1 \rightarrow n(A) = C^3_1 \cdot C^2_1 = 6 \rightarrow P(X=1) = \frac{6}{10}$

$X = 2 \rightarrow C^3_0 \cdot C^2_2 = 1 \rightarrow P(X=2) = \frac{1}{10}$

$\sum \quad 1$

$p(x) = \begin{cases} 3/10, & x = 0 \\ 6/10, & x = 1 \\ 1/10, & x = 2 \end{cases}$

P(x)

histogram

Latihan

Peluang ?

Sebaran ? Binom

$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, $q \to 1-p$

$X = \{0,1,2,3\}$

0 1 2 3

Mendenhall, *et al.*, 2013

4.87 RU Texting? The proportion of adults (18 years or more) who admit to texting while driving is 47%.[7] Suppose you randomly select three adult drivers and ask if they text while driving.

$p = 0{,}47$ $n = 3$

a. Find the probability distribution for x, the number of drivers in the sample who admit to texting while driving.

b. Construct a probability histogram for $p(x)$.

c. What is the probability that exactly one of the three drivers texts while driving? $P(X=1)$

d. What are the population mean and standard deviation for the random variable x? $E(X)$, $\sqrt{Var(X)}$

$P(X=0) \to \binom{3}{0}(0{,}47)^0(0{,}53)^3 = \ldots ?$

$P(X=1) \to \binom{3}{1}(0{,}47)^1(0{,}53)^2 = \ldots ?$

$P(X=2) \to \binom{3}{2}(0{,}47)^2(0{,}53)^1 = \ldots ?$

$P(X=3) \to \binom{3}{3}(0{,}47)^3(0{,}53)^0 = \ldots ?$

Peluang

Sebaran Binomial

Latihan

IPB University
Bogor Indonesia

Mendenhall, *et al.*, 2013

5.33 Taste Test for PTC The taste test for PTC (phenylthiocarbamide) is a favorite exercise for every human genetics class. It has been established that a single gene determines the characteristic, and that

P

70% of Americans are "tasters," while 30% are "non-tasters." Suppose that

n

20 Americans are randomly chosen and are tested for PTC.

a. What is the probability that 17 or more are "tasters"? → $P(X \geq 17) = \ldots?$

b. What is the probability that 15 or fewer are "tasters"? → $P(X \leq 15)$

Sebaran $X \sim Pois(2)$

Latihan

Mendenhall, *et al.*, 2013

5.45 Accident Prone According to a study conducted by the Department of Pediatrics at the University of California, San Francisco, children who are injured two or more times tend to sustain these injuries during a relatively limited time, usually 1 year or less. If the average number of injuries per year for school-age children is two, what are the probabilities of these events?

px

nx

λ

a. A school-age child will sustain two injuries during the year. $\rightarrow P(X=2)$?

b. A school-age child will sustain two or more injuries during the year. $P(X \geq 2)$?

c. A school-age child will sustain at most one injury during the year. $P(X \leq 1)$?

Latihan

Mendenhall, *et al.*, 2013

5.44 Intensive Care The number x of people entering the intensive care unit at a particular hospital on any one day has a Poisson probability distribution with mean equal to five persons per day. $\lambda = 5$

a. What is the probability that the number of people entering the intensive care unit on a particular day is two? Less than or equal to two? $P(x=2), P(x \leq 2) = ?$

b. Is it likely that x will exceed 10? Explain.

$P(x>10) = ?$

TERIMAKASIH
‘Semoga Sukses’

Department of Statistics
Jl. Meranti W22 L4
Kampus IPB Dramaga Bogor 16680
Telp.: 0251-8624535
E-mail: statistika@apps.ipb.ac.id