



IPB University
— Bogor Indonesia —

Study Program
Statistics and Data Science
Department of Statistics

Responsi Metode Statistika (STA-1211)

PERTEMUAN 9

PEMBANDINGAN 2 POPULASI

Asisten: Laily Nissa Atul Mualifah



**Inferensia
Statistika**

Rataan 1 Populasi

σ diketahui

σ tidak diketahui

n besar

n kecil

Proporsi 1 Populasi

**Selisih Rataan 2 Populasi
(Saling Bebas)**

σ diketahui

σ tidak diketahui $\sigma_1 = \sigma_2$

σ tidak diketahui $\sigma_1 \neq \sigma_2$

**Selisih Rataan 2 Contoh
Berpasangan**

Selisih Proporsi 2 Populasi

Selisih Rataan 2 Populasi

(σ diketahui)

Statistik Uji

$$z_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \mu_0}{\sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}} \text{ dimana } \sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) + \left(\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}$$

| Bentuk Hipotesis | Wilayah Penolakan H_0 |
|---|---|
| $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ | Tolak H_0 jika $ z_h > z_{\alpha/2}$ |
| $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$ | Tolak H_0 jika $z_h < -z_\alpha$ |
| $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ | Tolak H_0 jika $z_h > z_\alpha$ |

Interval Kepercayaan

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Selisih Rataan 2 Populasi

(σ tidak diketahui, $\sigma_1 = \sigma_2$)

Statistik Uji

$$t_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \mu_0}{S_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}} \quad ; \quad S_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{S_{gab}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \quad ; \quad S_{gab}^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad ; \quad v = n_1 + n_2 - 2$$

Gunakan statistik uji z_h jika n besar dengan persamaan yang sama dengan t_h di atas

| Bentuk Hipotesis | Wilayah Penolakan H_0 |
|---|--|
| 1 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ | Tolak H_0 jika $ t_h > t_{\frac{\alpha}{2}, v}$ |
| 2 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$ | Tolak H_0 jika $t_h < -t_{\alpha, v}$ |
| 3 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ | Tolak H_0 jika $t_h > t_{\alpha, v}$ |

Interval Kepercayaan

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2, v} \sqrt{S_{gab}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2, v} \sqrt{S_{gab}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

$$S_{gab}^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad ; \quad v = n_1 + n_2 - 2$$

Selisih Rataan 2 Populasi

(σ tidak diketahui, $\sigma_1 \neq \sigma_2$)

Statistik Uji

$$t_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \mu_0}{S(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} \quad ; \quad S(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right) + \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)} \quad ; \quad v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\left[\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1 - 1)} + \left[\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2 - 1)}\right]}\right]}$$

Gunakan statistik uji z_h jika n besar dengan persamaan yang sama dengan t_h di atas

| Bentuk Hipotesis | Wilayah Penolakan H_0 |
|---|--|
| $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ | Tolak H_0 jika $ t_h > t_{\frac{\alpha}{2};v}$ |
| $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$ | <p><i>inf < $\mu_1 - \mu_2$ < interval</i></p> <p>Tolak H_0 jika $t_h < -t_{\alpha;v}$</p> |
| $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ | Tolak H_0 jika $t_h > t_{\alpha;v}$ |

Interval Kepercayaan

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2,v} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2,v} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\left[\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1 - 1)} + \left[\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2 - 1)}\right]}\right]}$$

Selisih Rataan 2 Contoh Berpasangan

Statistik Uji

$$t_h = \frac{\bar{d} - \mu_0}{s_d / \sqrt{n}} ; \quad v = n - 1$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Gunakan statistik uji z_h jika n besar dengan persamaan yang sama dengan t_h di samping

| Bentuk Hipotesis | Wilayah Penolakan H_0 |
|---|--|
| $H_0 : \mu_D = \mu_0$ $H_1 : \mu_D \neq \mu_0$ | Tolak H_0 jika $ t_h > t_{\frac{\alpha}{2}, v}$ |
| $H_0 : \mu_D \geq \mu_0$ $H_1 : \mu_D < \mu_0$ | Tolak H_0 jika $t_h < -t_{\alpha; v}$ |
| $H_0 : \mu_D \leq \mu_0$ $H_1 : \mu_D > \mu_0$ | Tolak H_0 jika $t_h > t_{\alpha; v}$ |

Interval Kepercayaan

$$\bar{d} - t_{\alpha/2, (n-1)} \frac{s_d}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{d} + t_{\alpha/2, (n-1)} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

• Prefes

• Post test

• Prefes

\bar{d}
 s_d

Selisih Proporsi 2 Populasi

Statistik Uji

$$z_h = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{n_2}}} \rightarrow \text{le}$$

| Bentuk Hipotesis | Wilayah Penolakan H_0 |
|---|---|
| $H_0 : p_1 - p_2 = p_0$ $H_1 : p_1 - p_2 \neq p_0$ | Tolak H_0 jika $ z_h > z_{\alpha/2}$ |
| $H_0 : p_1 - p_2 \geq p_0$ $H_1 : p_1 - p_2 < p_0$ | Tolak H_0 jika $z_h < -z_\alpha$ |
| $H_0 : p_1 - p_2 \leq p_0$ $H_1 : p_1 - p_2 > p_0$ | Tolak H_0 jika $z_h > z_\alpha$ |

Interval Kepercayaan

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{n_2}} < p_1 - p_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{n_2}}$$

? Contoh Soal

selisih nilai berpasangan

Suatu perusahaan vitamin ingin melihat pengaruh vitaminnya yang diklaim dapat menurunkan berat badan minimal sebesar 0,5 kg dalam sebulan. Untuk itu dipilih 10 sukarelawan. Data sebelum dan sesudah pemberian vitamin dalam sebulan adalah sebagai berikut:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| sebelum | 58 | 69 | 56 | 67 | 55 | 56 | 62 | 67 | 67 | 56 |
| sesudah | 55 | 70 | 56 | 65 | 53 | 55 | 64 | 65 | 67 | 54 |

apakah klaim perusahaan tersebut benar?
(gunakan taraf nyata 5%).

$$H_0: \mu_0 \geq 0,5$$

$$H_1: \mu_0 < 0,5$$

$$\text{statistik uji: } t_h$$

$$\alpha = 0.05$$

$$t_h = \frac{\bar{d} - \mu_0}{s_d / \sqrt{n}}$$

$$\text{titik kritis: } t_{\alpha, v=n-1=9}$$

$$\bar{d} = 1,5$$
$$s_d = \sqrt{\frac{(3-1,5)^2 + \dots}{9}}$$

Kesimpulan: Terima H_0
 $P\text{-value} = P(T < 3,253)$
 $= \dots$



Solusi

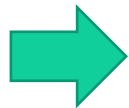
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| sebelum | 58 | 69 | 56 | 67 | 55 | 56 | 62 | 67 | 67 | 56 |
| sesudah | 55 | 70 | 56 | 65 | 53 | 55 | 64 | 65 | 67 | 54 |
| d | 3 | -1 | 0 | 2 | 2 | 1 | -2 | 2 | 0 | 2 |

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{10} d_i}{n} = \frac{9}{10} = 0.9 \quad ; S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = 1.5951$$

HIPOTESIS

$$H_0 : \mu_D \geq \mu_0$$

$$H_1 : \mu_D < \mu_0$$



$$H_0 : \mu_D \geq 0.5$$

$$H_1 : \mu_D < 0.5$$

STATISTIK UJI

$$t_h = \frac{\mu_D - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \quad ; v = n - 1$$

$$t_h = \frac{0.9 - 0.5}{1.5951/\sqrt{10}} = 0.793$$

-value

$$P(T < t_h) = 0.7759$$



Fungsi Excel:
T.DIST(0.793; 9; TRUE)

Syntax R:

```
sebelum<-c(58,69,56,67,55,56,62,67,67,56)
sesudah<-c(55,70,56,65,53,55,64,65,67,54)
t.test(sebelum,sesudah,mu=0.5,paired=T,
       alternative='less',conf.level=0.95)
```

Paired t-test

data: sebelum and sesudah
t = 0.79298, df = 9, p-value = 0.7759
alternative hypothesis: true mean difference is less than 0.5
95 percent confidence interval:
-Inf 1.824668
sample estimates:
mean difference
0.9

Norm.INV

WILAYAH PENOLAKAN H_0

$$t_{\alpha,v} = t_{0.05,9} = 1.8331$$



Fungsi Excel: T.INV(0.95; 9)

Tolak H_0 jika $t_h < -t_{\alpha,v}$ atau $p - value < 0.05$

Kesimpulan

karena $t_h (0.793) > -t_{\alpha,v} (-1.8331)$ dan $p - value (0.7759) > 0.05$
Maka **Tidak Tolak H_0** , pada tingkat kepercayaan 95% maka tidak cukup bukti untuk menyatakan bahwa klaim vitamin dapat menurunkan berat badan minimal sebesar 0,5 kg dalam sebulan salah (vitamin dapat menurunkan berat badan lebih dari 0,5 kg dalam sebulan).

? Contoh Soal

selisih proporsi 2 populasi - Binomial

Suatu pemungutan suara dilakukan oleh penduduk di suatu kota dan sekitarnya untuk mengetahui pendapat mereka tentang rencana pembangunan gedung pertemuan. Ternyata 120 diantara 200 penduduk kota dan 240 diantara 500 penduduk sekitar kota setuju dengan pembangunan tersebut. Ujilah hipotesis bahwa selisih persentase penduduk kota dan sekitar kota yang setuju dengan pembangunan gedung tidak melebihi 3%. Gunakan taraf nyata 0.02.

$$H_0 : p_1 - p_2 \leq 0.03$$

$$H_1 : p_1 - p_2 > 0.03$$

Statistika uji = $z_h = \dots$

Solusi

$$n_1 = 200$$

$$n_2 = 500$$

$$\hat{p}_1 = 120/200 = 0.6$$

$$\hat{p}_2 = 240/500 = 0.48$$

$$\alpha = 1\%$$

WILAYAH PENOLAKAN H_0

$$z_\alpha = z_{0.02} = 2.0537$$

Fungsi Excel:
NORM.INV(0.98; 0; 1)

Tolak H_0 jika $z_h > z_\alpha$

$$z_h = 2.18 > z_{\text{tabel}} = 2.0537$$

$$p\text{-value} = 0.014 < \alpha = 0.02$$

Kesimpulan

karena $z_h (2.1833) > z_\alpha (2.0537)$

Maka **Tolak H_0** , pada tingkat kepercayaan 98% maka cukup bukti untuk menyatakan bahwa selisih persentase penduduk kota dan sekitar kota yang setuju dengan pembangunan gedung melebihi 3%

HIPOTESIS

$$H_0 : p_1 - p_2 \leq p_0$$

$$H_1 : p_1 - p_2 > p_0$$

$$H_0 : p_1 - p_2 \leq 0.03$$

$$H_1 : p_1 - p_2 > 0.03$$

STATISTIK UJI

$$z_h = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{n_2}}}$$

$$= \frac{0.6 - 0.48 - 0.03}{\sqrt{\frac{0.6(1 - 0.6)}{200} + \frac{0.48(1 - 0.48)}{500}}}$$

$$P(Z > Z_h) = 0.0145$$

Fungsi Excel:

1-NORM.DIST(2.1833; 0; 1; TRUE)

? Contoh Soal

Seorang psikolog melakukan penelitian terkait hubungan antara pelecehan di masa anak-anak dan tindakan kriminal di masa remaja. Penelitian dilakukan terhadap 8 remaja yang mengalami pelecehan ketika masa pra-sekolah dan 20 remaja yang tidak mengalami pelecehan di masa pra-sekolah. Ringkasan data yang diperoleh disajikan dalam tabel.

| Mengalami Pelecehan | Rata-rata Jumlah Tindak Kriminal | Simpangan Baku |
|---------------------|----------------------------------|----------------|
| Iya | 2.48 | 1.94 |
| Tidak | 1.57 | 1.31 |

Berdasarkan hasil tersebut apakah dapat diklaim bahwa remaja yang mengalami pelecehan di masa anak-anak lebih banyak melakukan tindakan kriminal (gunakan taraf nyata 5%)? Asumsikan bahwa data dari kedua kelompok remaja tersebut menyebar normal dan **ragamnya tidak sama**.

t_{hit} - 

Solusi

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$$

t_{hit} =

$$s_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}$$

$$t_{hit} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}} = \frac{2.48 - 1.57}{\sqrt{\frac{(1.94)^2}{8} + \frac{(1.31)^2}{20}}} = 0.7458$$

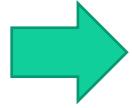
$$v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\left[\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1 - 1)} + \left[\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2 - 1)}\right]}\right]}$$

$$= \frac{\left(\frac{(1.94)^2}{8} + \frac{(1.31)^2}{20}\right)^2}{\left[\frac{\left(\frac{(1.94)^2}{8}\right)^2}{(8 - 1)} + \left[\frac{\left(\frac{(1.31)^2}{20}\right)^2}{(20 - 1)}\right]}\right]} = 10$$

● HIPOTESIS

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$$



$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

● STATISTIK UJI

$$t_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \mu_0}{S(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$$

$$t_h = \frac{2.48 - 1.57 - 0}{0.7458} = 1.2202$$

$$P(T > 1.2202) = 0.1252 > 0.05$$

Total H_0 $t_h > t_{\text{tabel}}$
Total H_0 $p\text{-value} < \alpha$

● WILAYAH PENOLAKAN H_0

$$t_{\alpha, v} = t_{0.05, 10} = 1.8125$$

Tolak H_0 jika $t_h > t_{\alpha, v}$

● Kesimpulan

karena $t_h (1.2202) < t_{0.05, 10} (1.8125)$

Maka Tidak Tolak H_0 , pada tingkat kepercayaan 95% maka tidak cukup bukti untuk menyatakan bahwa remaja yang mengalami pelecehan di masa anak-anak lebih banyak melakukan tindakan criminal.

? Contoh Soal

Seorang psikolog melakukan penelitian terkait hubungan antara pelecehan di masa anak-anak dan tindakan kriminal di masa remaja. Penelitian dilakukan terhadap 52 remaja yang mengalami pelecehan ketika masa pra-sekolah dan 67 remaja yang tidak mengalami pelecehan di masa pra-sekolah. Ringkasan data yang diperoleh disajikan dalam table di samping.

| Mengalami Pelecehan | Rata-rata Jumlah Tindak Kriminal | Simpangan Baku |
|---------------------|----------------------------------|----------------|
| Iya | 2.48 | 1.94 |
| Tidak | 1.57 | 1.31 |

Berdasarkan hasil tersebut apakah dapat diklaim bahwa remaja yang mengalami pelecehan di masa anak-anak lebih banyak melakukan tindakan kriminal (gunakan taraf nyata 5%)? Asumsikan bahwa data dari kedua kelompok remaja tersebut menyebar normal dan **ragamnya sama**.

🔑 Solusi

$$n_1 = 52$$

$$n_2 = 67$$

$$\bar{x}_1 = 2.48$$

$$\bar{x}_2 = 1.57$$

$$S_1 = 1.94$$

$$S_2 = 1.31$$

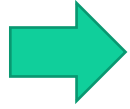
$$\begin{aligned} s_{gab}^2 &= \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \\ &= \frac{(52 - 1)(1.94)^2 + (67 - 1)(1.31)^2}{52 + 67 - 2} \\ &= \frac{51 \times 3.7636 + 66 \times 1.7161}{117} \end{aligned}$$

$$s_{gab}^2 = 2.6086$$

$$\begin{aligned} s_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} &= \sqrt{s_{gab}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \\ &= \sqrt{2.6086 \left(\frac{1}{52} + \frac{1}{67} \right)} = 0.2985 \end{aligned}$$

● HIPOTESIS

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \cancel{0}$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \cancel{0}$$



$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

● STATISTIK UJI

$$z_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \cancel{0}}{s_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}$$

$$z_h = \frac{2.48 - 1.57 - 0}{0.2985} = 3.0486$$

● WILAYAH PENOLAKAN H_0

$$z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$$

Tolak H_0 jika $z_h > z_\alpha$

● Kesimpulan

karena $z_h (3.0486) > z_{0.05} (1.645)$

Maka **Tolak H_0** , pada tingkat kepercayaan 95% maka cukup bukti untuk menyatakan bahwa remaja yang mengalami pelecehan di masa anak-anak lebih banyak melakukan tindakan criminal.



IPB University

— Bogor Indonesia —

Inspiring Innovation with Integrity
in Agriculture, Ocean and Biosciences for a Sustainable World