



IPB University
— Bogor Indonesia —

Study Program
Statistics and Data Science
Department of Statistics

Responsi Metode Statistika (STA-1211)

PERTEMUAN 9

PEMBANDINGAN 2 POPULASI

Asisten: Laily Nissa Atul Mualifah



Inferensia
Statistika

Rataan 1 Populasi

σ diketahui

σ tidak diketahui

n besar

n kecil

Proporsi 1 Populasi

Selisih Rataan 2 Populasi
(Saling Bebas)

σ diketahui

σ tidak diketahui $\sigma_1 = \sigma_2$

σ tidak diketahui $\sigma_1 \neq \sigma_2$

n besar
 n kecil
 n besar
 n besar

Selisih Rataan 2 Contoh
Berpasangan

Selisih Proporsi 2 Populasi

Selisih Rataan 2 Populasi

(σ diketahui)

Statistik Uji

$$z_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \mu_0}{\sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}} \text{ dimana } \sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) + \left(\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}$$

Bentuk Hipotesis	Wilayah Penolakan H_0
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$	Tolak H_0 jika $ z_h > z_{\alpha/2}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	Tolak H_0 jika $z_h < -z_\alpha$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$	Tolak H_0 jika $z_h > z_\alpha$

Interval Kepercayaan

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Moe

$$-\text{Inf} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_\alpha \cdot \sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_\alpha \sigma < \mu_1 - \mu_2 < \text{Inf}$$

Selisih Rataan 2 Populasi

(σ tidak diketahui, $\sigma_1 = \sigma_2$)

Statistik Uji

$$z_h / t_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \mu_0}{\sigma \circ S(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} ; \quad s_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{S_{gab}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} ; \quad s_{gab}^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} ; \quad v = n_1 + n_2 - 2$$

Gunakan statistik uji z_h jika n besar dengan persamaan yang sama dengan t_h di atas

$t_{\alpha, v}$

$n-1$
 $(n_1 - 1) + (n_2 - 1)$

Bentuk Hipotesis	Wilayah Penolakan H_0
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$	Tolak H_0 jika $ t_h > t_{\frac{\alpha}{2}, v}$ $z_h > z_{\frac{\alpha}{2}}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	Tolak H_0 jika $t_h < -t_{\alpha, v}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$	Tolak H_0 jika $t_h > t_{\alpha, v}$

Interval Kepercayaan

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2, v} \sqrt{s_{gab}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2, v} \sqrt{s_{gab}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

$$s_{gab}^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} ; \quad v = n_1 + n_2 - 2$$

Selisih Rataan 2 Populasi

Statistik Uji

$$t_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \mu_0}{S_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}} \quad ; \quad S_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right) + \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)} \quad ;$$

Gunakan statistik uji z_h jika n besar dengan persamaan yang sama dengan t_h di atas

Bentuk Hipotesis	Wilayah Penolakan H_0
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$	Tolak H_0 jika $ t_h > t_{\frac{\alpha}{2};v}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	Tolak H_0 jika $t_h < -t_{\alpha;v}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$	Tolak H_0 jika $t_h > t_{\alpha;v}$

(σ tidak diketahui, $\sigma_1 \neq \sigma_2$)

$$v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\left[\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1 - 1)} + \left[\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2 - 1)}\right]}$$

Interval Kepercayaan

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2,v} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2,v} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\left[\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1 - 1)} + \left[\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2 - 1)}\right]}$$

Selisih Rataan 2 Contoh Berpasangan

Statistik Uji

$$z_h / t_h = \frac{\bar{d} - \mu_0}{s_d / \sqrt{n}}$$

derajat bebas t -

$$v = n - 1$$

Gunakan statistik uji z_h jika n besar dengan persamaan yang sama dengan t_h di samping

①	②	\bar{d}
30	25	5
25	27	-2
⋮	⋮	⋮
\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{d}

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

$$\bar{d}$$

$$s_d$$

Interval Kepercayaan

$$\bar{d} - t_{\alpha/2, (n-1)} \frac{s_d}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{d} + t_{\alpha/2, (n-1)} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}$$

Bentuk Hipotesis	Wilayah Penolakan H_0
$H_0 : \mu_D = \mu_0$ $H_1 : \mu_D \neq \mu_0$	Tolak H_0 jika $ t_h > t_{\alpha/2, v}$
$H_0 : \mu_D \geq \mu_0$ $H_1 : \mu_D < \mu_0$	Tolak H_0 jika $t_h < -t_{\alpha; v}$
$H_0 : \mu_D \leq \mu_0$ $H_1 : \mu_D > \mu_0$	Tolak H_0 jika $t_h > t_{\alpha; v}$

Selisih Proporsi 2 Populasi

$$z_h = \frac{p - p_0}{se}$$

Statistik Uji

$$z_h = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{n_2}}}$$

Bentuk Hipotesis	Wilayah Penolakan H_0
$H_0 : p_1 - p_2 = p_0$ $H_1 : p_1 - p_2 \neq p_0$	Tolak H_0 jika $ z_h > z_{\alpha/2}$
$H_0 : p_1 - p_2 \geq p_0$ $H_1 : p_1 - p_2 < p_0$	Tolak H_0 jika $z_h < -z_\alpha$
$H_0 : p_1 - p_2 \leq p_0$ $H_1 : p_1 - p_2 > p_0$	Tolak H_0 jika $z_h > z_\alpha$

Interval Kepercayaan

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{n_2}} < p_1 - p_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{n_2}}$$

? Contoh Soal

parameter : selisih rata-rata berpasangan

Suatu perusahaan vitamin ingin melihat pengaruh vitaminnya yang diklaim dapat menurunkan berat badan minimal sebesar 0,5 kg dalam sebulan. Untuk itu dipilih 10 sukarelawan. Data sebelum dan sesudah pemberian vitamin dalam sebulan adalah sebagai berikut:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
sebelum	58	69	56	67	55	56	62	67	67	56
sesudah	55	70	56	65	53	55	64	65	67	54

apakah klaim perusahaan tersebut benar?
(gunakan taraf nyata 5%).

$$H_0 : \mu_D \geq 0,5$$

$$H_1 : \mu_D < 0,5$$

$$\alpha : 0,05$$

$$\text{Statistik Uji : } t_n = \frac{\bar{d} - \mu_0}{s_d / \sqrt{n}} = \dots$$

$$\text{Titik kritis : } t_{\alpha, n-1} = \dots$$

$$p\text{-value } (T < t_{\text{hit}}) = P(T < 0,793) = \dots > 0,05$$



Solusi

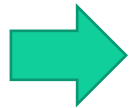
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
sebelum	58	69	56	67	55	56	62	67	67	56
sesudah	55	70	56	65	53	55	64	65	67	54
d	3	-1	0	2	2	1	-2	2	0	2

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{10} d_i}{n} = \frac{9}{10} = 0.9 \quad ; S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = 1.5951$$

HIPOTESIS

$$H_0 : \mu_D \geq \mu_0$$

$$H_1 : \mu_D < \mu_0$$



$$H_0 : \mu_D \geq 0.5$$

$$H_1 : \mu_D < 0.5$$

STATISTIK UJI

$$t_h = \frac{\mu_D - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \quad ; v = n - 1$$

$$t_h = \frac{0.9 - 0.5}{1.5951/\sqrt{10}} = 0.793$$

$$P(T < 0.793)$$

$$P(T < t_h) = 0.7759$$

Fungsi Excel:

T.DIST(0.793; 9; TRUE)

WILAYAH PENOLAKAN H_0

$$t_{\alpha, v} = t_{0.05, 9} = 1.8331$$

Tolak H_0 jika $t_h < -t_{\alpha, v}$ atau $p - value < 0.05$

Kesimpulan

karena $t_h (0.793) > -t_{\alpha, v} (-1.8331)$ dan $p - value (0.7759) > 0.05$ Maka **Tidak Tolak H_0** , pada tingkat kepercayaan 95% maka tidak cukup bukti untuk menyatakan bahwa klaim vitamin dapat menurunkan berat badan minimal sebesar 0,5 kg dalam sebulan salah (vitamin dapat menurunkan berat badan lebih dari 0,5 kg dalam sebulan).

Syntax R:

```
sebelum<-c(58,69,56,67,55,56,62,67,67,56)
sesudah<-c(55,70,56,65,53,55,64,65,67,54)
t.test(sebelum,sesudah,mu=0.5,paired = T,
       alternative = 'less', conf.level = 0.95)
```

Paired t-test

data: sebelum and sesudah
 $t = 0.79298$, $df = 9$, $p\text{-value} = 0.7759$
 alternative hypothesis: true mean difference is less than 0.5
 95 percent confidence interval:
 -Inf 1.824668
 sample estimates:
 mean difference
 0.9

Norm.Inv
 t_h / q_{norm}
 Fungsi Excel: T.INV(0.95; 9)
 $1 - \alpha$



Contoh Soal

Parameter: selisih proporsi

Suatu pemungutan suara dilakukan oleh penduduk di suatu kota dan sekitarnya untuk mengetahui pendapat mereka tentang rencana pembangunan gedung pertemuan. Ternyata 120 diantara 200 penduduk kota dan 240 diantara 500 penduduk sekitar kota setuju dengan pembangunan tersebut. Ujilah hipotesis bahwa selisih persentase penduduk kota dan sekitar kota yang setuju dengan pembangunan gedung tidak melebihi 3%. Gunakan taraf nyata 0.02.

$$H_0 : p_1 - p_2 \leq 0,03$$

$$H_1 : p_1 - p_2 > 0,03$$

$$\alpha = 0,02$$



Solusi

$$\begin{aligned}
 n_1 &= 200 \\
 n_2 &= 500 \\
 \hat{p}_1 &= 120/200 = 0.6 \\
 \hat{p}_2 &= 240/500 = 0.48 \\
 \alpha &= 1\%
 \end{aligned}$$

WILAYAH PENOLAKAN H_0

$$z_\alpha = z_{0.02} = 2.0537$$

Fungsi Excel:

NORM.INV(0.98; 0; 1)

Tolak H_0 jika $z_h > z_\alpha$

Kesimpulan

karena $z_h (2.1833) > z_\alpha (2.0537)$

Maka **Tolak H_0** pada tingkat kepercayaan 98% maka cukup bukti untuk menyatakan bahwa selisih persentase penduduk kota dan sekitar kota yang setuju dengan pembangunan gedung melebihi 3%

HIPOTESIS

$$\begin{aligned}
 H_0 : p_1 - p_2 &\leq p_0 \\
 H_1 : p_1 - p_2 &> p_0
 \end{aligned}
 \rightarrow
 \begin{aligned}
 H_0 : p_1 - p_2 &\leq 0.03 \\
 H_1 : p_1 - p_2 &> 0.03
 \end{aligned}$$

STATISTIK UJI

$$\begin{aligned}
 z_h &= \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{n_2}}} \\
 &= \frac{0.6 - 0.48 - 0.03}{\sqrt{\frac{0.6(1 - 0.6)}{200} + \frac{0.48(1 - 0.48)}{500}}} \\
 &= 2.1833
 \end{aligned}$$

$$P(Z > z_h) = 0.0145 < 0.02$$

Fungsi Excel:

1-NORM.DIST(2.1833; 0; 1; TRUE)

selang kepercayaan

statistik: $z_h = 2.183$
 $P(Z > 2.183) = 1 - P(Z < 2.183) = 0.0145$
 nilai kritis: $z_\alpha = 2.0537$

Kesimpulan: Terima

? Contoh Soal

Seorang psikolog melakukan penelitian terkait hubungan antara pelecehan di masa anak-anak dan tindakan kriminal di masa remaja. Penelitian dilakukan terhadap 8 remaja yang mengalami pelecehan ketika masa pra-sekolah dan 20 remaja yang tidak mengalami pelecehan di masa pra-sekolah. Ringkasan data yang diperoleh disajikan dalam tabel.

Mengalami Pelecehan	Rata-rata Jumlah Tindak Kriminal	Simpangan Baku
Iya	2.48	1.94
Tidak	1.57	1.31

Berdasarkan hasil tersebut apakah dapat diklaim bahwa remaja yang mengalami pelecehan di masa anak-anak lebih banyak melakukan tindakan kriminal (gunakan taraf nyata 5%)? Asumsikan bahwa data dari kedua kelompok remaja tersebut menyebar normal dan ragamnya tidak sama.

$$\mu_1 > \mu_2$$

① $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0$
 $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

Solusi

$$\begin{aligned}n_1 &= 8 \\n_2 &= 20 \\ \bar{x}_1 &= 2.48 \\ \bar{x}_2 &= 1.57 \\ S_1 &= 1.94 \\ S_2 &= 1.31\end{aligned}$$

Statistik: t_h

Titik kritis: $t_{\alpha/2}, v=26$

② $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

$$s(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{(1.94)^2}{8} + \frac{(1.31)^2}{20}} = 0.7458$$

③ $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

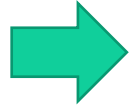
$$\left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1 - 1)} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2 - 1)} \right]$$

$$= \frac{\left(\frac{(1.94)^2}{8} + \frac{(1.31)^2}{20}\right)^2}{\left[\frac{\left(\frac{(1.94)^2}{8}\right)^2}{(8 - 1)} + \left[\frac{\left(\frac{(1.31)^2}{20}\right)^2}{(20 - 1)}\right]\right]} = 10$$

● HIPOTESIS

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$$



$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

● STATISTIK UJI

$$t_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \mu_0}{S(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$$

$$t_h = \frac{2.48 - 1.57 - 0}{0.7458} = \underline{1.2202}$$

$$P(T > 1.2202) = 0.1252$$

> 0,05

● WILAYAH PENOLAKAN H_0

$$t_{\alpha, v} = t_{0.05, 10} = 1.8125$$

Tolak H_0 jika $t_h > t_{\alpha, v}$

● Kesimpulan

karena $t_h (1.2202) < t_{0.05, 10} (1.8125)$

Maka **Tidak Tolak H_0** , pada tingkat kepercayaan 95% maka tidak cukup bukti untuk menyatakan bahwa remaja yang mengalami pelecehan di masa anak-anak lebih banyak melakukan tindakan criminal.

? Contoh Soal

Seorang psikolog melakukan penelitian terkait hubungan antara pelecehan di masa anak-anak dan tindakan kriminal di masa remaja. Penelitian dilakukan terhadap 52 remaja yang mengalami pelecehan ketika masa pra-sekolah dan 67 remaja yang tidak mengalami pelecehan di masa pra-sekolah. Ringkasan data yang diperoleh disajikan dalam table di samping.

Mengalami Pelecehan	Rata-rata Jumlah Tindak Kriminal	Simpangan Baku
Iya	2.48	1.94
Tidak	1.57	1.31

Berdasarkan hasil tersebut apakah dapat diklaim bahwa remaja yang mengalami pelecehan di masa anak-anak lebih banyak melakukan tindakan kriminal (gunakan taraf nyata 5%)? Asumsikan bahwa data dari kedua kelompok remaja tersebut menyebar normal dan ragamnya sama.

🔑 Solusi

$$n_1 = 52$$

$$n_2 = 67$$

$$\bar{x}_1 = 2.48$$

$$\bar{x}_2 = 1.57$$

$$S_1 = 1.94$$

$$S_2 = 1.31$$

$$\begin{aligned} s_{gab}^2 &= \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \\ &= \frac{(52 - 1)(1.94)^2 + (67 - 1)(1.31)^2}{52 + 67 - 2} \\ &= \frac{51 \times 3.7636 + 66 \times 1.7161}{117} \end{aligned}$$

$$s_{gab}^2 = 2.6086$$

$$\begin{aligned} s_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} &= \sqrt{s_{gab}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \\ &= \sqrt{2.6086 \left(\frac{1}{52} + \frac{1}{67} \right)} = 0.2985 \end{aligned}$$

● HIPOTESIS

$$\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \cancel{\delta_0} \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \cancel{\delta_0} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{array}$$

● STATISTIK UJI

$$z_h = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \cancel{\delta_0}}{s(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$$

$$z_h = \frac{2.48 - 1.57 - 0}{0.2985} = \underline{3.0486}$$

$$\rightarrow P(Z > 3.0486) = 1 - P(Z < 3.0486)$$

● WILAYAH PENOLAKAN H_0

$$z_\alpha = z_{0.05} = \underline{1.645}$$

Tolak H_0 jika $z_h > z_\alpha$

● Kesimpulan

karena $z_h (3.0486) > z_{0.05} (1.645)$

Maka **Tolak H_0** , pada tingkat kepercayaan 95% maka cukup bukti untuk menyatakan bahwa remaja yang mengalami pelecehan di masa anak-anak lebih banyak melakukan tindakan criminal.



IPB University

— Bogor Indonesia —

Inspiring Innovation with Integrity
in Agriculture, Ocean and Biosciences for a Sustainable World