Angga Fathan Rofiqy - G1401211006

Tugas Mandiri 1

1) Wadah berisi 7 bola kecil ukuran sama, berwarna merah dan biru. Namun, beberapa jumlah bola merah & biru tidak diketahui. Diambil 3 bola sekaligus secara acak dan diperiksa warnanya, ternyata berwarna biru. Misal Y = banyak bola biru yg ada dalam wadah. Lengkapi tabel berikut dan jelaskan prosesnya secara step by step.

Jawab.

- Misal Y = Banyaknya bola biru dlm wadah
- Kemungkinan muncul : $Y = 0, 1, 2, 3, \dots 7$
- Asumsikan peluang munculnya sama sehingga prior $P(Y=y) = \frac{1}{8}$
- Likelihood : Diambil 3 bola sekaligus tanpa pengembalian dan ketiganya biru

→ Misal A = kondisi pengambilan 3 bola setelah dilakukan percobaan (A) diketahui bahwa 3 bola yg diambil adalah biru

↳ Maka dapat diketahui bahwa:

$P(Y=0|A) = P(Y=1|A) = P(Y=2|A) = 0$

↳ artinya likelihood untuk $y = 0, 1, 2$ bernilai 0 (mustahil) karena bola biru minimal muncul 3 kali.

→ likelihood untuk lainnya:

$$P(Y=y|A) = \frac{\binom{y}{3}\binom{7-y}{0}}{\binom{7}{3}}$$ → Sebaran hipergeometrik

→ Posteriornya : $\dfrac{\text{Prior} \times \text{likelihood}}{\sum(\text{Prior} \times \text{likelihood})}$

2.) Misalkan $X_1, X_2, \dots X_n$ menyebar bebas dan identik Poisson (θ). Apabila sebaran prior bagi θ dianggap menyebar Uniform $(1, 5)$, tentukan:

a) Sebaran posterior bagi θ

Jawab.

$\theta \sim$ Uniform $(1, 9)$

↳ prior : $P(\theta) : \begin{cases} 1/(5-1) = 1/4 & , 1 \leq \theta \leq 5 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$

$X \sim$ Poisson (θ)

↳ likelihood : $P(X|\theta) = \int_1^9 \dfrac{e^{-\theta} \cdot \theta^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2 \dots, n$

Sebaran posterior

$$P(\theta|X) = \frac{P(\theta) \times P(x|\theta)}{\int P(\theta) \times P(x|\theta)\, d\theta}$$

$$= \frac{1/4 \times ((\theta^x \cdot e^{-\theta})/x!)}{\int_1^5 1/4 ((\theta^x \cdot e^{-\theta})/x!) d\theta} \Rightarrow \propto e^{-\theta} \cdot \theta^{-x}$$

↳ sebaran posterior akan mengikuti sebaran gamma karena gamma adalah konjugat prior untuk distribusi Poisson.

$P(\theta|X) =$ gamma (α', β') dimana $\alpha' = \alpha + \sum x_i$, $\beta' = \beta + n$

b) Penduga bayes bagi θ

Jawab:

$$E(\theta|X) = \hat{\theta} = \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{1 + \sum x_i}{1 + n}$$

Y	Prior	Likelihood	Prior x Likelihood	Posterior
0	1/8	0	0	0
1	1/8	0	0	0
2	1/8	0	0	0
3	1/8	$\binom{3}{3}\binom{7-3}{0}/\binom{7}{3} = 1/35$	1/280	$(1/280)/(1/4) = 1/70$
4	1/8	$\binom{4}{3}\binom{7-4}{0}/\binom{7}{3} = 4/35$	4/280	$(4/280)/(1/4) = 2/35$
5	1/8	$\binom{5}{3}\binom{7-5}{0}/\binom{7}{3} = 10/35$	10/280	$(10/280)/(1/4) = 1/7$
6	1/8	$\binom{6}{3}\binom{7-6}{0}/\binom{7}{3} = 20/35$	20/280	$(20/280)/(1/4) = 2/7$
7	1/8	$\binom{7}{3}\binom{7-7}{0}/\binom{7}{3} = 1$	1/8	$(1/8)/(1/4) = 1/2$
	Total		1/4	1

c.) Credible Interval 95% bagi θ

Jawab:

Peluang θ diantara θ_1 dan θ_2 adalah 0,05

Dimana $\theta_1 \Rightarrow$ kuantil 0,025 dari distribusi gamma $\approx 1{,}14$

$\theta_2 \Rightarrow$ kuantil 0,975 dari distribusi gamma $\approx 3{,}25$

oleh karena itu, Credible Interval 95% bagi θ adalah antara 1,14 sampai 3,25.

3.) Misalkan $X_1, X_2 .. X_n$ menyebar bebas dan identik Beta$(2,\theta)$, dengan $\theta > 0$

a.) Tentukan Jeffreys' prior bagi θ.

Jawab.

$B(\alpha,\beta) = B(2,\theta) \rightarrow \alpha = 2,\ \beta = \theta$

$$I(\theta) = E\left[\frac{-d^2 \log f(x;\theta)}{d\theta^2}\right]$$

$$= E\left[\frac{d^2 \log\left(\theta^{2x-1}(1-\theta)^{2-2x}\right)}{d\theta^2}\right]$$

$$= E\left[\frac{d(2x-1)}{d\theta^2}\log(\theta) + \frac{d(2-2x)}{d\theta^2}\log(1-\theta)\right]$$

$$= E\left[\frac{-2}{\theta^2}\log(\theta) - \frac{2}{(1-\theta)^2}\log(1-\theta)\right]$$

ingat bahwa $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{2}{2+\theta}$

$$= \frac{-2}{\left(\frac{2}{2+\theta}\right)^2}\log\left(\frac{2}{2+\theta}\right) - \frac{2}{\left(1-\frac{2}{2+\theta}\right)^2}\log\left(1-\frac{2}{2+\theta}\right)$$

$$= \frac{2}{(\theta^2(1-\theta)^2)}$$

$\rightarrow$ didapatkan Jeffreys's prior bagi θ adalah

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{\frac{2}{\theta^2(1-\theta)^2}}$$

b.) Pendugaan bayes bagi θ

Penduga bayes = prior $\times$ likelihood

$$= \frac{1}{C}\sqrt{\frac{2}{\theta^2(1-\theta)^2}} \times \theta^{2x-1}(1-\theta)^{2-2x}$$

dengan C = konstanta normalisasi

4.) Misalkan diketahui $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ menyebar bebas dan identik normal (μ, σ^2) yg mana μ tidak diketahui, sedangkan σ^2 diketahui. Apabila sebaran prior bagi μ adalah Normal $(3, \theta^2)$ dan nilai θ^2 diketahui, tentukan:

a.) Sebaran posterior bagi μ

Jawab:

$\mu \sim N(3, \theta^2)$

- $$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} e^{-\frac{(\mu-3)^2}{2\theta^2}}$$

- Likelihood: $f(y_1, y_2, \ldots y_n \mid \mu) =$
$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} e^{-\frac{(y_i-\mu)^2}{2\theta^2}}$$

- Posterior: $f(\mu \mid y_1, y_2 .. y_n)$
$$\propto \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} e^{-\frac{(\mu-3)^2}{2\theta^2}}$$

b.) Penduga bayes bagi μ

Jawab:

Dari posterior tersebut, diketahui μ distribusi normal

$$\text{mean } \mu = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sigma^2} + \frac{3}{\theta^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\theta^2}}$$

$$\text{var } \mu = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\theta^2}}$$

Penduga bayes bagi μ adalah nilai harapan dari posterior

$$\hat{\mu} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sigma^2} + \frac{3}{\theta^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\theta^2}}$$

c.) Credible interval 95% bagi μ

$$\hat{\mu} - 1{,}96\sqrt{\text{var}} \le \mu \le \hat{\mu} + 1{,}96\sqrt{\text{var}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sigma^2} + \frac{3}{\theta^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\theta^2}} - 1{,}96\sqrt{\frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\theta^2}}} \le \mu \le \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sigma^2} + \frac{3}{\theta^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\theta^2}} + 1{,}96\sqrt{\frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\theta^2}}}$$

5. Pada suatu survei dipilih secara acak mahasiswa sebanyak n=100. Mereka kemudian ditanya apakah "setuju" atau "tidak setuju" terhadap kebijakan baru di kampusnya. Misalkan peubah acak Y adalah jumlah mhs yang menjawab "setuju". Misalkan pula θ adalah peluang bahwa seorang mahasiswa akan menjawab "setuju". Kemudian berdasarkan data yang diperoleh pada survei tersebut ternyata ada 69 orang mhs menjawab "setuju".

a) Apabila digunakan sebaran posterior bagi θ adalah Beta (4,7), tentukan sebaran posterior bagi θ.

Jawab:

Diket: y = Jumlah mhs yg menjawab "setuju"

θ = Peluang mhs menjawab "setuju"

n = 100

Prior : $\theta \sim Beta(\alpha;\beta) = \theta \sim Beta(4,7)$

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\Gamma(4)\times\Gamma(7)}{\Gamma(4+7)} = \frac{3!\,6!}{10!} = \frac{1}{840}$$

$$\text{Prior} : P(\theta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\,\theta^{(4-1)}(1-\theta)^{7-1}$$

$$= \frac{1}{1/840}\,\theta^3(1-\theta)^6$$

$$= 840\cdot\theta^3(1-\theta)^6$$

$$\text{Likelihood} : P(y|\theta) = \binom{100}{69}\theta^{69}\cdot(1-\theta)^{35}$$

$$\text{Posterior} : P(\theta|y) = \frac{P(y|\theta)\cdot P(\theta)}{P(y)} \propto \binom{100}{69}\cdot\theta^{69}(1-\theta)^{35}\cdot 840\cdot\theta^3(1-\theta)^6$$

$$\propto \theta^{69-1}(1-\theta)^{42-1}$$

Sebaran posteriornya adalah Beta (69,42)

b) Tentukan penduga bayes bagi θ

$$\hat{\theta} : \frac{\alpha\,\text{posterior}}{\alpha\,\text{posterior} + \beta\,\text{posterior}} = \frac{69}{69+42} = \frac{69}{111} = 0{,}6216$$

c) Lakukan pengujian hipotesis

$H_0: \theta = 0.6$ vs $H_1: \theta = 0{,}4$. Jelaskan kesimpulan anda

→ Hipotesis untuk H_0:

$$P(\theta=0{,}6|y) = \frac{Beta(69,42)(0{,}6)}{Beta(69,42)(0{,}6) + Beta(69,42)(0{,}4)}$$

$$= \frac{0{,}6^{(69-1)}\cdot 0{,}4^{(42-1)}}{0{,}6^{(69-1)}\cdot 0{,}4^{(42-1)} + 0{,}4^{(69-1)}\cdot 0{,}6^{(42-1)}} = 0{,}9999982$$

Hipotesis posterior untuk H_1:

$$P(\theta=0{,}4|y) = \frac{Beta(69,42)(0{,}4)}{Beta(69,42)(0{,}4) + Beta(69,42)(0{,}6)}$$

$$= 0{,}0000176$$

Kesimpulan

$P(\theta=0{,}6|y) > P(\theta=0{,}4|y)$

maka terima H_0, yaitu $\theta = 0{,}6$

d) Lakukan pengujian hipotesis

$H_0: \theta = 0{,}6$ vs $H_1: \theta \neq 0{,}6$ pada taraf nyata 0,05

Jelaskan kesimpulan anda.

Jawab:

Probabilitas posterior bahwa θ di luar interval $(0{,}6-\delta)$ hingga $(0{,}6+\delta)$ menggunakan kuantil ke-0,025 dan ke-0,975 dari $B(69,42)$

• kuantil ke 0.025:

$P(\theta <$ kuantil $0{,}025) = 0{,}025 \approx 0{,}497$

• kuantil ke 0,975:

$P(\theta <$ kuantil $0{,}975) = 0{,}975 \simeq 0{,}748$

→ Didapatkan probabilitas posterior bahwa θ berada di luar interval $\approx 0{,}055 > 0{,}05$

Sehingga terima H_0, yaitu $\theta = 0{,}6$