IPB University — Bogor Indonesia | Departemen Statistika

Sebaran Bentuk Kuadratik

Responsi 3 STA1333 Pengantar Model Linear

1. Vektor acak $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3]'$ menyebar multivariat normal dengan nilai tengah $\boldsymbol{\mu} = [1 \quad -1 \quad 0]'$ dan matriks varian kovarian

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Misalkan $\mathbf{A} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan sebaran $\mathbf{y}'\mathbf{Ay}$.

Jawab:

Corollary:

Diketahui $\mathbf{y}$ adalah vektor acak berukuran nx1 yang menyebar $\mathrm{MN}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ dan **A** berukuran nxn yang simetrik. $\mathbf{y}'\mathbf{Ay} \approx \chi^2_{(\mathrm{k},\lambda)}$ dengan $\lambda = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$ Jika dan hanya jik a **AV** idempoten dan $\mathrm{rank}(\mathbf{AV}) = \mathrm{k}$.

$$\mathbf{A}' = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\ (matriks\ A\ simetrik)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{AV} &= \mathbf{A\Sigma} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -{}^{1}/_{3} & 0 & {}^{2}/_{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ {}^{2}/_{3} & 0 & -{}^{1}/_{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{AV})(\mathbf{AV}) &= \mathbf{I}_3 \\ &= \mathbf{AV}\ (matriks\ AV\ idempoten) \end{aligned}$$

$\text{rank}(\mathbf{AV}) = \text{k} = 3$ karena $\mathbf{AV} = \mathbf{I}_3$

$$\lambda = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -{}^1/_3 & 0 & {}^2/_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ {}^2/_3 & 0 & -{}^1/_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 1/3$$

Sehingga $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} \approx \chi^2_{(3,1/3)}$.

2. Misalkan $\mathbf{x} = [\mathrm{x}_1 \quad \mathrm{x}_2]'$ menyebar $\mathrm{MN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, dengan $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$

$\mathrm{Q}_1 = (\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)^2$; $\mathrm{Q}_2 = (\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2)^2$.

a. Tunjukkan bahwa $\frac{\mathrm{Q}_1}{2(1-\rho)} \sim \chi^2$.

b. Periksa apakah Q_1 dan Q_2 saling bebas?

Jawab:

a. $\mathrm{Q}_1 = (\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)^2 = \mathrm{x}_1^2 - 2\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_2^2$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Misal: $\mathrm{P} = \frac{Q_1}{2(1-\rho)} = \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{2(1-\rho)}$

$$\mathbf{A}^* = \frac{1}{2(1-\rho)}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{*\prime} = \frac{1}{2(1-\rho)}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^* \textit{(matriks } A^* \textit{simetrik)}$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{V} = \mathbf{A}^*\mathbf{\Sigma}$$

$$= \frac{1}{2(1-\rho)}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} {}^1/_2 & -{}^1/_2 \\ -{}^1/_2 & {}^1/_2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{V})(\mathbf{A}^*\mathbf{V}) = \begin{bmatrix} {}^1\!/_2 & -{}^1\!/_2 \\ -{}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^1\!/_2 & -{}^1\!/_2 \\ -{}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} {}^1\!/_2 & -{}^1\!/_2 \\ -{}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^*\mathbf{V} \textit{ (matriks } A^*V \textit{ idempoten)}$$

Sehingga $\mathrm{P} = \frac{\mathrm{Q}_1}{2(1-\rho)} \approx \chi^2$.

b. Periksa apakah Q_1 dan Q_2 saling bebas?

$$Q_1 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \quad \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \quad \Rightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema:
Diketahui y adalah vektor acak berukuran nx1 yang menyebar $MN(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$. A_{nxn} dan B_{nxn} simetrik memiliki rank r_1 dan r_2. Jika **AVB** = $\mathbf{O}$ maka $\mathbf{y}'\mathbf{Ay}$ dan $\mathbf{y}'\mathbf{By}$ saling bebas.

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\ \textit{(matriks A simetrik)}$$

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{2x2} = \mathbf{B}\ \textit{(matriks B simetrik)}$$

Dikatakan saling bebas jika $\mathbf{AVB} = \mathbf{O}$

$$\mathbf{AVB} = \mathbf{A\Sigma B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{2x2}$$

Karena $\mathbf{A\Sigma B} = \mathbf{O}_{2x2}$ maka Q_1 dan Q_2 saling bebas.

3. Misalkan vektor acak $\mathbf{x} = [\mathrm{x}_1 \quad \mathrm{x}_2 \quad \mathrm{x}_3]'$ menyebar $\mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_3)$. Jika $\mathrm{Q} = \frac{1}{6}(\mathrm{x}_1^2 + 4\mathrm{x}_2^2 + \mathrm{x}_3^2 - 4\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + 2\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3 - 4\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3)$. Tunjukkan bahwa p.a $\mathrm{Q} \sim \chi^2_{(1)}$.

Jawab:

Corollary:

Diketahui $\mathbf{y}$ adalah vektor acak berukuran nx1 yang menyebar $\mathrm{MN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$ dan **A** berukuran nxn yang simetrik. $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} \approx \chi^2_{(\mathrm{k})}$ Jika dan hanya jika **A** idempoten dan $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{k}$.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \; \textit{(matriks A simetrik)}$$

$$\mathbf{AA} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 \\ -12 & 24 & -12 \\ 6 & -12 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \textit{ (matriks A idempoten)}$$

Karena $\mathbf{x} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_3)$ dan matriks A simetrik idempoten sehingga peubah acak $\mathrm{Q} \sim \chi^2_{(1)}$.

db k diperoleh dari:

$$\mathrm{rank(A)} = \mathrm{tr(A)} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

Corollary:

Diketahui $\mathbf{y}$ adalah vektor acak berukuran nx1 yang menyebar $\mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ dan **A** simetrik maka $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} \approx \chi^2_{(\mathrm{k})}$. Jika **A** idempoten maka $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{k}$ dengan

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$$

4. Jika $\mathbf{y} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_3)$ dan $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, dan $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

a. Tentukan sebaran $\frac{\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}}{\sigma^2}$.

b. Apakah $\frac{\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}}{\sigma^2}$ dan $\frac{\mathbf{B}\mathbf{y}}{\sigma^2}$ bersifat saling bebas?

c. Apakah $\frac{\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}}{\sigma^2}$ dan $y_1+y_2+y_3$ bersifat saling bebas?

Jawab:

a. Sebaran dari $\frac{\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}}{\sigma^2}$

Corollary:

Diketahui $\mathbf{y}$ adalah vektor acak berukuran nx1 yang menyebar $\mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{I})$ dan **A** simetrik. $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} \approx \chi^2_{(\mathrm{k},\lambda)}$ dengan $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$ Jika dan hanya jika **A** idempoten maka $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{k}$.

Misal:

$$\frac{\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}}{\sigma^2} = \mathbf{y}'\mathbf{A}^*\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{A}^* = \frac{\mathbf{A}}{\sigma^2}$$

$$\mathbf{A}^{*\prime} = \frac{1}{3\sigma^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{*} \textit{(matriks } A^{*} \textit{simetrik)}$$

$$(\mathbf{A}^{*})(\mathbf{A}^{*}) = \frac{1}{3\sigma^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{3\sigma^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9\sigma^4}\begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \neq \mathbf{A}^{*} \textit{(bukan matriks } A^{*} \textit{ idempoten)}$$

Karena matriks A^{*} simetrik dan tidak idempoten maka sebaran $\frac{\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}}{\sigma^2}$ tidak dapat ditentukan.

b. Apakah $\frac{\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}}{\sigma^2}$ dan $\frac{\mathbf{B}\mathbf{y}}{\sigma^2}$ bersifat saling bebas?

Misal:

$$\frac{\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}}{\sigma^2} = \mathbf{y}'\mathbf{A}^*\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{A}^* = \frac{\mathbf{A}}{\sigma^2}; \mathbf{A}^* = \frac{1}{3\sigma^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathbf{B}\mathbf{y}}{\sigma^2} = \mathbf{B}^*\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{B}^* = \frac{\mathbf{B}}{\sigma^2}; \mathbf{B}^* = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema:

Diketahui y adalah vektor acak berukuran nx1 yang menyebar $\mathrm{MN}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ dan $\mathrm{A}_{\mathrm{nxn}}$ simetrik dan $\mathrm{B}_{\mathrm{mxn}}$. Jika **BVA = O** maka $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ dan $\mathbf{B}\mathbf{y}$ saling bebas.

$$\mathbf{A}^{*'} = \frac{1}{3\sigma^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^* \textit{(matriks } A^* \textit{simetrik)}$$

Dikatakan saling bebas jika $\mathbf{B}^*\mathbf{V}\mathbf{A}^* = \mathbf{O}$

$$\mathbf{B}^*\mathbf{V}\mathbf{A}^* = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3\sigma^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{O}_{2x3}$$

Karena $\mathbf{B}^*\mathbf{V}\mathbf{A}^* \neq \mathbf{O}_{2x3}$ maka $\frac{\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}}{\sigma^2}$ dan $\frac{\mathbf{B}\mathbf{y}}{\sigma^2}$ bersifat tidak saling bebas.

c. Apakah $\frac{\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}}{\sigma^2}$ dan $y_1 + y_2 + y_3$ bersifat saling bebas?

Misal:

$$\frac{\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}}{\sigma^2} = \mathbf{y}'\mathbf{A}^*\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{A}^* = \frac{\mathbf{A}}{\sigma^2}; \mathbf{A}^* = \frac{1}{3\sigma^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{y};\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema:

Diketahui y adalah vektor acak berukuran nx1 yang menyebar $\mathrm{MN}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ dan $\mathrm{A}_{\mathrm{nxn}}$ simetrik dan $\mathrm{B}_{\mathrm{mxn}}$. Jika **BVA** = **O** maka $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ dan $\mathbf{B}\mathbf{y}$ saling bebas.

$$\mathbf{A}^{*'} = \frac{1}{3\sigma^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{*} \textit{(matriks } A^{*} \textit{simetrik)}$$

Dikatakan saling bebas jika $\mathbf{BVA}^{*} = \mathbf{O}$

$$\mathbf{BVA}^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3\sigma^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{1x3}$$

Karena $\mathbf{BVA}^{*} = \mathbf{O}_{1x3}$ maka $\frac{\mathbf{y'Ay}}{\sigma^2}$ dan y_1+y_2+y_3 bersifat saling bebas.

Terima Kasih

IPB University
Bogor Indonesia

Departemen Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jl Meranti Wing 22 Level 4
Kampus IPB Darmaga - Bogor 16680
0251-8624535 | http://stat.ipb.ac.id