# Pengujian Hipotesis dalam Model Tidak Berpangkat Penuh: One Way Classification

IPB University
Bogor Indonesia

# Cakupan Materi

6.1. **Pengujian Hipotesis Linier Umum**

6.2. **Reparameterisasi pada model klasifikasi satu arah**

6.3. **Pengujian hipotesis kontras perlakuan**

# Rangkuman Materi Sebelumnya

Misalkan $\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dimana $X$ adalah matriks berukuran $n \ x \ p$ dengan rank $r \leq p, E[\varepsilon] = 0$, dan var $\varepsilon = \sigma^2 I$.

- setiap komponen dari $X\beta$ estimable.
- Jika $z = a_1 t_1' \beta + a_2 t_2' \beta + \cdots + a_k t_k' \beta$ merupakan kombinasi linier dari fungsi-fungsi yang estimable, maka z juga estimable.
- Pendugaan ragam galat, $s^2$ yaitu: $s^2 = \frac{SS_{Res}}{n-r}$, merupakan penduga tak bias bagi $\sigma^2$.
- Selang Kepercayaan bagi **t'β** (*n-r* df): **t'b** ± $\mathbf{t}_{\alpha/2} \sqrt{\boldsymbol{t}'(X'X)^c \boldsymbol{t}}$

(.....**Baca materi minggu lalu**......)

# Pengujian Hipotesis Linier Umum

Suatu hipotesis yang dapat diuji disebut ***TESTABLE***.

Suatu $\mathrm{H}_0$ dapat diuji bila ada satu set fungsi yang dapat diduga $\underline{c}_1'\underline{\beta}, \underline{c}_2'\underline{\beta}, \dots, \underline{c}_m'\underline{\beta}$ sehingga $\mathrm{H}_0$ benar jika dan hanya jika $\underline{c}_1'\underline{\beta} = \underline{c}_2'\underline{\beta} = \cdots = \underline{c}_m'\underline{\beta} = \underline{0}$

$\underline{c}_1', \underline{c}_2', \dots, \underline{c}_m'$ saling bebas linier atau $C\underline{\beta} = \underline{0}$

Lihat Teladan 6.1.(1)

# Pengujian Hipotesis Linier Umum

**Teladan 6.1. (1)***
**Apakah fungsi berikut testable?**

$$\mathrm{H}_0\colon \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$$

**Solusi 6.1. (1) :**
Hipotesis dapat ditulis sebagai berikut:
$\mathrm{H}_0\colon \tau_1 = \tau_2$ dan $\mathrm{H}_0\colon \tau_2 = \tau_3$
$\mathrm{H}_0\colon \tau_1 - \tau_2 = 0$ dan $\mathrm{H}_0\colon \tau_2 - \tau_3 = 0$
Hipotesis dalam bentuk $\underline{\beta} = \underline{0}$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*sumber: Kumpulan Soal dan Pembahasan MAtrikulasi BPS 2019

[Kembali ke Bahan Ajar](#)
⌂

# Pengujian Hipotesis Linier Umum

Hipotesis $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ testable apabila terpenuhi dua kondisi berikut:

**1) C$\underline{\boldsymbol{\beta}}$ estimable**

$\mathrm{C}\underline{\beta}$ estimable apabila dapat ditunjukkan bahwa $\mathrm{C}\,(\mathrm{X'X})^{\mathrm{c}}(\mathrm{X'X}) = \mathrm{CH} = \mathrm{C}$

Berdasarkan penghitungan poin e.i diperoleh $\mathrm{H} = (\mathrm{X'X})^{\mathrm{c}}(\mathrm{X'X}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{CH} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{C}$$

$\therefore \mathrm{C}\underline{\beta}$ estimable

Kembali ke Bahan Ajar

# Pengujian Hipotesis Linier Umum

**2) Vektor-vektor baris pada matriks C saling bebas.**

$\underline{c}_1'$ dan $\underline{c}_2'$ saling bebas linier apabila persamaan $a_1\underline{c}_1' + a_2\ \underline{c}_2'$ terpenuhi dengan $a_1 = a_2 = 0$

$$a_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\a_1\\-a_1+a_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$a_1 = 0$ dan $-a_1+a_2 = 0 \rightarrow a_1 = a_2 = 0$

$\therefore$ $\underline{c}_1'$ dan $\underline{c}_2'$ saling bebas linier

Oleh karena 1) dan 2) terpenuhi maka dapat disimpulkan bahwa $H_0:\ \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ **TESTABLE**

Kembali ke Bahan Ajar

# Pengujian Hipotesis Linier Umum

Statistik Uji pada Model Tak Penuh

$$H_0: C\underline{\beta} = \underline{0}$$

Maka $F_{hitung} = \dfrac{(\mathbf{C\underline{b}})'(\mathbf{C}(\mathbf{X'X})^{\mathbf{c}}\mathbf{C'})^{-\mathbf{1}}(\mathbf{Cb})/m}{s^2}$

Dengan r(C) = m ≤ r

Dan $s^2 = \dfrac{SS_{Res}}{n-r} = \dfrac{\mathbf{y'}\left[\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{\mathbf{c}}\ \mathbf{X'}\right]\mathbf{y}}{n-r}$

n = jumlah amatan dan $r = \mathrm{rank}(X'X)$

Tolak $H_0$ jika $F_{hitung} > F_{m,(n-r)}$

Lihat Teladan 6.1.(2)

# Pengujian Hipotesis Linier Umum

**Teladan 6.1. (2)***

Suatu percobaan dilakukan dengan menggunakan model rancangan klasifikasi satu arah dengan 3 perlakuan dan 2 ulangan

$$\mathrm{H}_0\colon\ \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$$

**y' =** (3  2  4  7  6  5)

- dengan n = 6, m = 2, r = 3
- Uji dengan taraf 5%

Kembali ke Bahan Ajar

# Pengujian Hipotesis Linier Umum

Solusi 6.1. (2)

Hipotesis :

- Ho : $\tau_1 = \tau_2$
- Ho : $\tau_2 = \tau_3$

$$\mathrm{F_{hitung}} = \frac{(\mathbf{C\underline{b}})'(\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\mathbf{c}}\mathbf{C}')^{-\mathbf{1}}(\mathbf{Cb})/\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Kembali ke Bahan Ajar

# Pengujian Hipotesis Linier Umum

1. Menghitung **C** **b**

Mencari b dengan menghitung $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\mathbf{c}}\mathbf{X}'\mathbf{y}$

Misal MKU dari matrik $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ adalah

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$ dan **y' = (3 2 4 7 6 5)**

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 5 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\mathbf{c}}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \underline{\mathbf{b}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27 \\ 5 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 11/2 \\ 11/2 \end{bmatrix}$$

Dengan Sehingga **C** $\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 11/2 \\ 11/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

**(C b)' =** (-3 0)

Kembali ke Bahan Ajar

# Pengujian Hipotesis Linier Umum

2. Menghitung $\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\mathbf{c}}\mathbf{C}'$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\mathbf{c}}\mathbf{C}')^{-1} = 1/\det \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3/4} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{C}\ \underline{\mathbf{b}})'\ (\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\mathbf{c}}\mathbf{C}')^{-1}\ \mathbf{C}\ \underline{\mathbf{b}} = (-3 \quad 0) \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = (-4 \quad -6) \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 12$$

Kembali ke Bahan Ajar

# Pengujian Hipotesis Linier Umum

3. Menghitung **y' [I - X** $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\mathbf{c}}$ **X'] y**

**X** $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\mathbf{c}}$ **X'**

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Kembali ke Bahan Ajar

# Pengujian Hipotesis Linier Umum

**I - X** $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\mathbf{c}}$ **X'**

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Kembali ke Bahan Ajar

# Pengujian Hipotesis Linier Umum

**y’ [I - X $(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{c}$ X’] y**

$$(3 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 6 \quad 5)\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

**=** 11/2 = 5.5

Kembali ke Bahan Ajar

# Pengujian Hipotesis Linier Umum

$$s^2 = \frac{\mathbf{y}'\left[\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\mathbf{c}}\ \mathbf{X}'\right]\mathbf{y}}{n-r} = 5{,}5 / 6 - 3 = 1{,}8333$$

Sehingga dapat dihitung :

$$F_{hit} = \frac{(\mathbf{C}\,\mathbf{b})'(\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\mathbf{c}}\mathbf{C}')^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{b})/m}{s^2} = \frac{12/2}{1{,}8333} = 3{,}2733$$

Dengan F taraf 5%, m = 2, n = 6, r = 3 diperoleh F tabel : 9,55

Maka Ho diterima artinya tidak cukup bukti untuk menolak Ho

Kembali ke Bahan Ajar

# Reparameterisasi pada Model Klasifikasi Satu Arah

Model linier pada model 1 faktor:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,..,k \quad j = 1,..,n_i, \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

Model linier aditif:

$$y_{11} = \mu + \tau_1 + \varepsilon_{11}$$
$$y_{12} = \mu + \tau_1 + \varepsilon_{12}$$
$$\dots..$$
$$y_{1n_i} = \mu + \tau_1 + \varepsilon_{1n_i}$$
$$y_{21} = \mu + \tau_2 + \varepsilon_{21}$$
$$y_{22} = \mu + \tau_2 + \varepsilon_{22}$$
$$\dots.$$
$$y_{2n_i} = \mu + \tau_2 + \varepsilon_{2n_i}$$
$$\dots.$$
$$y_{kn_i} = \mu + \tau_k + \varepsilon_{kn_i}$$

Lihat Teladan 6.2.(1)

# Reparameterisasi pada Model Klasifikasi Satu Arah

Model dalam bentuk matriks:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \dots \\ y_{1n_i} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \dots \\ y_{2n_i} \\ \dots \\ y_{kn_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \dots \\ \tau_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \dots \\ \varepsilon_{1n_i} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \dots \\ \varepsilon_{2n_i} \\ \dots \\ \varepsilon_{kn_i} \end{bmatrix}$$

Dengan: **y**= vektor pengamatan, $\mathbf{X}$ = matriks rancangan, **β**= vektor parameter, dan **ε** = vektor galat

Lihat Teladan 6.2.(1)

# Reparameterisasi pada Model Klasifikasi Satu Arah

$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} n & n_1 & n_2 & \dots & n_k \\ n_1 & n_1 & 0 & \dots & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_k & 0 & 0 & \dots & n_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'y} = \begin{bmatrix} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{n_i} \mathbf{y_{ij}} \\ \sum_{\mathbf{i=1}}^{n_1} \mathbf{y_{1j}} \\ \sum_{\mathbf{i=1}}^{n_2} \mathbf{y_{2j}} \\ \dots \\ \sum_{\mathbf{i=1}}^{n_k} \mathbf{y_{kj}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{..} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{1.}} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{2.}} \\ \dots \\ \mathbf{y}_{\mathbf{k.}} \end{bmatrix}$$

Lihat Teladan 6.2.(1)

# Reparameterisasi
# pada Model Klasifikasi Satu Arah

**Untuk model 1 faktor, jika $\boldsymbol{\mu_i = \mu + \tau_i}$ maka**

$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad \text{dengan} \quad i = 1, \ldots, k \quad j = 1, \ldots, n_i, \sum_{i=1}^{k} n_i = n$

**Model dalam bentuk matriks:**

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \ldots \\ y_{1n_i} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \ldots \\ y_{2n_i} \\ \ldots \\ y_{kn_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \ldots \\ \tau_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \ldots \\ \varepsilon_{1n_i} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \ldots \\ \varepsilon_{2n_i} \\ \ldots \\ \varepsilon_{kn_i} \end{bmatrix}$$

Lihat Teladan 6.2.(1)

Dengan: $\mathbf{Z}$ = matriks rancangan

# Reparameterisasi pada Model Klasifikasi Satu Arah

$r(Z_{nxk})$ = k kembali ke model penuh

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k \cong H_0: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k$$

$$\mathbf{Z'Z} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z'y} = \begin{bmatrix} \sum_{\mathbf{i=1}}^{n_1} \mathbf{y_{1j}} \\ \sum_{\mathbf{i=1}}^{n_2} \mathbf{y_{2j}} \\ \dots \\ \sum_{\mathbf{i=1}}^{n_k} \mathbf{y_{kj}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y_{1.}} \\ \mathbf{y_{2.}} \\ \dots \\ \mathbf{y_{k.}} \end{bmatrix}$$

Model tereduksi jika $H_0$ benar, maka $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k = \mu$ sehingga $y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij} \quad dengan \quad i = 1, \dots, k \quad j = 1, \dots, n_i$, atau $\underline{y} = \underline{z_2}\,\alpha_2 + \underline{\varepsilon}$ dimana $\underline{z_2}' = (1,1,\dots,1)$ dan $\alpha_2 = \mu$

Lihat Teladan 6.2.(1)

# Reparameterisasi pada Model Klasifikasi Satu Arah

$$JK_{Reg\ (tereduksi)} = \underline{y}'[\,\underline{z_2}\,(\underline{z_2}\,'\,\underline{z_2}\,)^{-1}\underline{z_2}'\,]\underline{y}$$

$$= \left(\sum_i \sum_j y_{ij}\right)^2 \Big/ \sum_i n_i = y_{..}^2/n$$

$$JK_{Reg\ (hipotesis)} = JK_{Reg\ (penuh)} - JK_{Reg\ (tereduksi)}$$

- $JK_{Reg\ (hipotesis)} = \underline{y}'\,Z\,(Z'Z)^{-1}Z'\underline{y} - \underline{y}'[\,\underline{z_2}\,(\underline{z_2}\,'\,\underline{z_2}\,)^{-1}\underline{z_2}'\,]\underline{y}$
- $JK_{Reg\ (hipotesis)} = \left(\sum_i \left(y_{i.}^2/n_i\right)\right) - y_{..}^2/n$

Lihat Pembuktian 6.2.(1)

# Reparameterisasi
# pada Model Klasifikasi Satu Arah

$$\frac{\underline{y}'\,\underline{y}}{\sigma^2} = \frac{\underline{y}'[\,\underline{z_2}\,(\underline{z_2}'\,\underline{z_2})^{-1}\underline{z_2}']\underline{y}}{\sigma^2} + \frac{\underline{y}'\,Z\,(Z'Z)^{-1}Z'\underline{y} - \underline{y}'[\,\underline{z_2}\,(\underline{z_2}'\,\underline{z_2})^{-1}\underline{z_2}']\underline{y}}{\sigma^2} + \frac{\underline{y}'\,(I - Z\,(Z'Z)^{-1}Z')\underline{y}}{\sigma^2}$$

- $r\left[\,\underline{z_2}\,(\underline{z_2}'\,\underline{z_2})^{-1}\underline{z_2}'\right] = 1$
- $r[I - Z\,(Z'Z)^{-1}Z'] = n - k$
- $r\left[Z\,(Z'Z)^{-1}Z' - \underline{z_2}\,(\underline{z_2}'\,\underline{z_2})^{-1}\,\underline{z_2}'\right] = k - 1$

Cohran-Fisher

Karena $\big(1 + (n - k) + (k - 1)\big) = n$ maka semua bentuk kuadratik diatas menyebar $\chi^2_{a,b}$, dimana a dan b masing-masing d.b dan non centralnya

# Reparameterisasi pada Model Klasifikasi Satu Arah

$$\frac{\underline{\underline{y}'\, Z\,(Z'Z)^{-1}Z'\underline{y} - \underline{y}'[\,\underline{z_2}\,(\underline{z_2}\,'\,\underline{z_2}\,)^{-1}\underline{z_2}'\,]y}}{\sigma^2} \approx \chi^2_{(k-1),\lambda}$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}\left(Z\underline{\alpha}\,\right)'\left(Z(Z'Z)^{-1}Z' - \underline{z_2}\left(\underline{z_2}\,'\underline{z_2}\right)^{-1}\underline{z_2}'\right)\left(Z\underline{\alpha}\right)$$

Jika $H_0$ benar, $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k = \mu$, dapat ditunjukkan bahwa $\lambda = 0$, maka:

$$\frac{\left[\left(\sum_i\left(y_{i.}^2/n_i\right)\right) - y_{..}^2/n/(k-1)\right]}{JK_{Res}/(n-k)} \overset{H_0}{\approx} F_{(k-1),(n-k)}$$

Lihat Teladan 6.2.(1)

# Reparameterisasi pada Model Klasifikasi Satu Arah

| Sumber Keragaman | Derajat Bebas | Jumlah Kuadrat | Kuadrat Tengah | F Hitung |
|---|---|---|---|---|
| Regresi<br>Model Penuh | k | $\sum_i (y_{i.}^2/n_i)$ | | |
| Model Reduksi | 1 | $y_{..}^2/n$ | | |
| Hipotesis | k-1 | $\left(\sum_i (y_{i.}^2/n_i)\right) - y_{..}^2/n$ | $\frac{JK_{Reg\ (hipote}}{k-1}$ | $\frac{KT_{Reg\ (hipotesis)}}{KTG}$ |
| Galat/Residual | n-k | $\left(\sum_i \sum_j y_{ij}\right)^2 / \sum_i n_i - \sum_i (y_{i.}^2/n_i)$ | $\frac{JK_{Res}}{n-k}$ | |
| Total | n | $\left(\sum_i \sum_j y_{ij}\right)^2$ | | |

# Pengujian Hipotesis Kontras Perlakuan

Jika KONTRAS $\sum_{i=1}^{k} a_i\tau_i = 0\,, \sum_{i=1}^{k} a_i = 0$, dapat diduga, maka

$H_0 : \sum_{i=1}^{k} a_i\tau_i = 0\,, \sum_{i=1}^{k} a_i = 0$ dapat diuji

Bentuk lain dari $H_0$ adalah adalah:

$H_0$: $\underline{a}'\underline{\alpha} = 0, \underline{a}' = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ dan $\underline{\alpha}' = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$

$$\underline{\widehat{\alpha}} = N(\underline{\alpha}\,, (Z'Z)^{-1}\sigma^2)$$

$$\underline{a}'\underline{\widehat{\alpha}} \approx N(\underline{a}'\underline{\alpha}\,, \underline{a}'(Z'Z)^{-1}\underline{a}'\sigma^2)$$

$$\frac{\underline{a}'\underline{\widehat{\alpha}}}{s\sqrt{\underline{a}'(Z'Z)^{-1}\underline{a}'}} \approx t_{(n-k)} \text{ atau } \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i y_{i.}}{s\sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2/n_i}} \approx t_{(n-k)}$$

Lihat Teladan 6.2.(1)

# Pengujian Hipotesis Kontras Perlakuan

Dua kontras $\sum_{i=1}^{k} a_i \mu_i$ dan $\sum_{i=1}^{k} b_i \mu_i$ disebut Ortogonal jika dan hanya jika $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i / n_i = 0$

Ortogonal kontras yang dapat dibentuk adalah sebanyak derajat bebas hipotesis, dan total Jumlah Kuadratnya akan sama dengan Jumlah Kuadrat Hipotesis.

Jika derajat bebas hipotesisnya (k-1) maka

$\sum_{i=1}^{k-1} JK_{\omega i} = JK_{Reg\ (hipotesis)}$

Lihat Teladan 6.2.(1)

# Ilustrasi: Model Klasifikasi Satu Arah

Model linier perancangan percobaan RAL*:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad ,i = 1,2,3 \ \ ,j = 1,2,3$$

Keterangan:

$Y_{ij}$= Hasil pertambahan bobot sapi pada jenis pakan ke-i dan ulangan ke-j

$\mu$ = Rataan umum

$\tau_i$ = Pengaruh jenis pakan ke-i

$\varepsilon_{ij}$= Pengaruh acak dari jenis pakan ke-i dan ulangan ke -j

*sumber: Kumpulan Soal dan Pembahasan MAtrikulasi BPS 2019

Kembali ke Bahan Ajar

# Reparameterisasi pada Model Klasifikasi Satu Arah

Model linier aditif:

$$y_{11} = \mu + \tau_1 + \varepsilon_{11}$$
$$y_{12} = \mu + \tau_1 + \varepsilon_{12}$$
$$y_{13} = \mu + \tau_1 + \varepsilon_{13}$$
$$y_{21} = \mu + \tau_2 + \varepsilon_{21}$$
$$y_{22} = \mu + \tau_2 + \varepsilon_{22}$$
$$y_{23} = \mu + \tau_2 + \varepsilon_{23}$$
$$y_{31} = \mu + \tau_1 + \varepsilon_{31}$$
$$y_{32} = \mu + \tau_1 + \varepsilon_{32}$$
$$y_{33} = \mu + \tau_1 + \varepsilon_{33}$$

Kembali ke Bahan Ajar

# Reparameterisasi pada Model Klasifikasi Satu Arah

Model dalam bentuk matriks:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0{,}55 \\ 0{,}57 \\ 0{,}57 \\ 0{,}64 \\ 0{,}41 \\ 0{,}51 \\ 0{,}75 \\ 0{,}66 \\ 1{,}03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Dengan:

**y**= vektor pengamatan, $\boldsymbol{Z}$ = matriks peubah kontrol, $\boldsymbol{\alpha}$= vektor parameter, dan **ε** = vektor galat

Kembali ke Bahan Ajar

# Reparameterisasi
# pada Model Klasifikasi Satu Arah

Mencari sistem persamaan normal dari model reparameterisasi;

Dari matrik reparameterisasi diperoleh r($\mathbf{Z}_{9x3}$)= 3 yang merupakan model penuh maka yang akan dilakukan adalah menguji

$H_0$: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \cong \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$

$$\mathbf{Z'Z}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix},\ \mathbf{Z'y}=\begin{bmatrix}\mathbf{1,69}\\\mathbf{1,56}\\\mathbf{2,44}\end{bmatrix},\ \mathbf{(Z'Z)^{-1}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\0 & \frac{1}{3} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix},\ \mathbf{a=(Z'Z)^{-1}\,Z'y}=\begin{bmatrix}\mathbf{0,5633}\\\mathbf{0,5200}\\\mathbf{0,8133}\end{bmatrix}$$

Kembali ke Bahan Ajar

# Reparameterisasi pada Model Klasifikasi Satu Arah

**JKReg(Penuh)= $y'Z(Z'Z)^{-1} Z'y$**

$$[0{,}55\ 0{,}57\ 0{,}57\ 0{,}64\ 0{,}41\ 0{,}51\ 0{,}75\ 0{,}66\ 1{,}03]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}5633\\ 0{,}5200\\ 0{,}8133\end{bmatrix} = \mathbf{3{,}7477}$$

Kembali ke Bahan Ajar

# Reparameterisasi pada Model Klasifikasi Satu Arah

Model Tereduksi

Untuk $H_0$: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ maka $y_{ij} = \mu + \varepsilon_{11}$ , i= 1,2,3 j = 1,2,3, $n_i$

Sehingga model tereduksi dalam bentuk matriks $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z_2}\boldsymbol{\alpha_2} + \boldsymbol{\varepsilon}$;

dengan

$$\boldsymbol{\alpha_2} = \mu \,; \boldsymbol{Z}_2' = [1\ 1\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ ]; \ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Kembali ke Bahan Ajar

# Reparameterisasi pada Model Klasifikasi Satu Arah

**JKReg (Tereduksi) = $y'z_2(z_2'z_2)^{-1}z_2'y$**

$= [y_{11}\ y_{12}\ y_{13}\ y_{21}\ y_{22}\ y_{23}\ y_{31}\ y_{32}\ y_{33}]$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\left[[1\ 1\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right]^{-1}[1\ 1\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]\begin{bmatrix}y_{11}\\y_{12}\\y_{13}\\y_{21}\\y_{22}\\y_{23}\\y_{31}\\y_{32}\\y_{33}\end{bmatrix} = \frac{\sum_i^3 \sum_j^9 y_{ij}}{\sum n_i} = 3{,}5973$$

Kembali ke Bahan Ajar

# Reparameterisasi pada Model Klasifikasi Satu Arah

Selanjutnya mencari JKReg $_{\text{(Hipotesis)}}$

JK Reg$_{\text{(Hipotesis)}}$ = $\mathbf{y'Z(Z'Z)^{-1} Z'y - y'z_2(z_2'z_2)^{-1}z_2'y}$

= JKReg$_{\text{(Penuh)}}$-JKReg$_{\text{(tereduksi)}}$

= 3,7477-3,5973

= 0,1504

**JKTotal = y'y**

$$= [\boldsymbol{y_{11}}\ \boldsymbol{y_{12}}\ \boldsymbol{y_{13}}\ \boldsymbol{y_{21}}\ \boldsymbol{y_{22}}\ \boldsymbol{y_{23}}\ \boldsymbol{y_{31}}\ \boldsymbol{y_{32}}\ \boldsymbol{y_{33}}]\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \end{bmatrix} = \sum_i^3 \sum_j^9 {y_{ij}}^2 = 3{,}8491$$

Kembali ke Bahan Ajar

# Reparameterisasi pada Model Klasifikasi Satu Arah

JKResidual= $y'y - y'Z(Z'Z)^{-1}Z'y$

=JKtotal-Jkreg$_{(penuh)}$

= 3,8491-3,7477

= 0,1014

Statistik Uji

$$F_{hit} = \left( \frac{\dfrac{y'Z(Z'Z)^{-1}Z'y - y'z_2(z_2'z_2)^{-1}z_2'y}{k-1}}{\dfrac{y'y - y'Z(Z'Z)^{-1}Z'y}{n-k}} \right)$$

| SK | Db | JK | KT | Fhitung |
|---|---|---|---|---|
| Regresi Model Penuh | 3 | 3,7477 | | |
| Model Tereduksi | 1 | 3,5973 | | |
| Model Hipotesis | 2 | 0,1504 | 0,0752 | 4,4497 |
| Residual | 6 | 0,1014 | 0,0169 | |
| Total | 9 | 3,8491 | | |

**Keputusan:**

**Oleh karena F Hit < F Tabel ($F_{0,05;2;6}$ = 5, 143)**, maka belum cukup bukti untuk menolak $H_o$ artinya tidak ada pengaruh penambahan ampas kecap pada jerami fermentasi terhadap pertambahan bobot badan sapi brahman cross (bx) pada taraf nyata (P>0,05).

Kembali ke Bahan Ajar

# Terima Kasih

IPB University
Bogor Indonesia