IPB University
Bogor Indonesia
Departemen Statistika

Rancangan Dua Faktor Tanpa Interaksi: Pengaruh Tetap

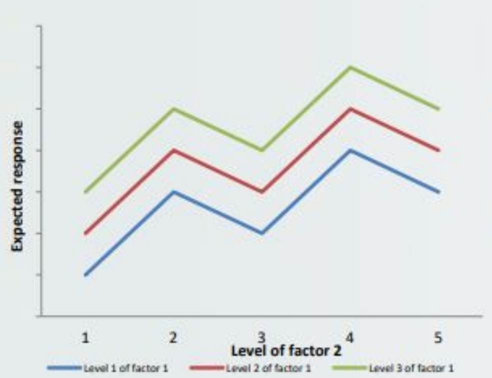
Responsi 11 STA1333 Pengantar Model Linear

Review Materi:

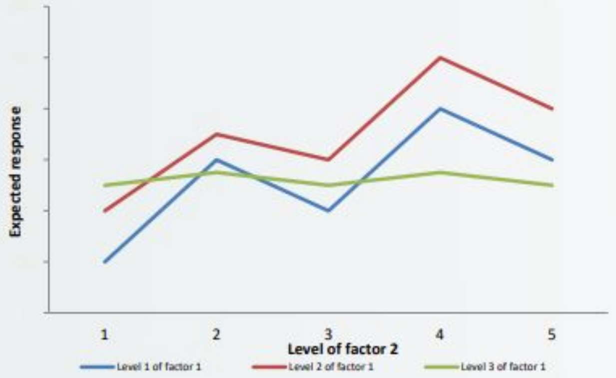
1. Rancangan Dua Faktor Tanpa Interaksi: Pengaruh Tetap

IPB University
Bogor Indonesia

Rancangan Dua Faktor : Pengaruh Tetap



Gambar 1.1 Tanpa Interaksi



Gambar 1.2 Terda[at Interaksi

Model Linier Rancangan Dua Faktor Tanpa Interaksi Secara Umum

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

$$i = 1,2, \dots, a; \quad j = 1,2, \dots, b;$$

Keterangan :

y_{ij} : Nilai respon Faktor A taraf ke-i dan Faktor B taraf ke-j

μ : Rataan Umum

τ_i : Pengaruh Faktor A taraf ke-i

β_j : Pengaruh Faktor B taraf ke-j

ANOVA Model Dua Faktor Tanpa Interaksi :

Sumber	db	JK
Model Regresi Penuh	(a+b-1)	$\sum_i y_{i.}^2/b + \sum_j y_{.j}^2/a - y_{..}^2/ab$
Nilai Tengah	1	$y_{..}^2/ab$
Model Hipotesis I	(a-1)	$\sum_i y_{i.}^2/b - y_{..}^2/ab$
Model Hipotesis II	(b-1)	$\sum_j y_{.j}^2/a - y_{..}^2/ab$
Residual/Galat	(a-1)(b-1)	$JK_{Total} - JK_{Reg(Penuh)}$
Total (tidak terkoreksi)	ab	$\sum_i \sum_j y_{ij}^2$

ANOVA berdasarkan total terkoreksi :

Sumber	db	JK
Model Regresi Penuh	(a+b-1)	$\sum_i y_{i.}^2/b + \sum_j y_{.j}^2/a - y_{..}^2/ab$
Model Hipotesis I	(a-1)	$\sum_i y_{i.}^2/b - y_{..}^2/ab$
Model Hipotesis II	(b-1)	$\sum_j y_{.j}^2/a - y_{..}^2/ab$
Residual/Galat	(a-1)(b-1)	$JK_{Total} - JK_{Reg(Penuh)}$
Total (terkoreksi)	ab-1	$\sum_i \sum_j y_{ij}^2 - y_{..}^2/ab$

Review Materi:

2. Rancangan Acak Kelompok Lengkap (RAKL)

Model Linier RAKL

- Model dari design ini:

  $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$, i=1,2,…a, j=1,2,…b
- τ_i merupakan efek dari perlakuan, β_j merupakan efek dari block.
- Model yang digunakan sama dengan model dalam kasus model 2 factor tanpa interaksi yang telah dibahas sebelum nya.
- Terdapat perbedaan yang penting dari model 2 factor tanp a interaksi yaitu pengacakan hanya dilakukan sekali. Peng acakan hanya dilakukan pada perlakuan dalam satu block, dan **tidak dilakukan pengacakan block**.

- Pengujian Perlakuan: H_0: $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a$

  Pengujian untuk hipotesis ini sama dengan pengujian pada model 2 factor tanpa interaksi.
- Pengujian Blok: H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b$

  Pengujian hipotesis ini tidak bisa dilakukan menggunakan uji F.
- Untuk mengetahui kegunaan dari block dengan menghitung Relatif Efisi ensi RAKL dibandingan dengan model 1 factor (dalam percobaan Ranca ngan Acak Lengkap(RAL))
- Relatif Efisiensi RAKL dibandingkan model 1 factor (RAL):

$$RE = \frac{SS_{Blocks} + b(a-1)s^2}{(ab-1)s^2}$$

- Dimana s^2 merupakan jumlah kuadrat galat/ jumlah kuadrat residual dan

$$SS_{Blocks} \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{.j}^2}{a} - \frac{y_{..}^2}{ab}$$

- SS blocks dalam model 2 factor tanpa interaksi disebut dengan $SS_{Reg(HipotesisII)}$
- Untuk nilai RE jika lebih dari 1 mengindikasikan dengan adanya block efektif.
- Selain itu untuk mengetahui efektifitas blocking Uji F pseudo yang sama dengan uji Hipotesis factor kedua dalam model 2 factor tanpa interaksi.

$$F_{pseudo} = \frac{SS_{Blocks}/(b-1)}{SS_{res}/(a-1)(b-1)}$$

- Arnold, Lentner, dan Hinkleman menunjukkan hubungan antara F_{pseudo} dengan RE yaitu:

$$RE = c + (1-c)F_{pseudo}$$

- dimana c=b(a-1)/(ab-1). Terlihat bahwa c≤1 sehingga
  - Jika F_{pseudo}<1, RE<1
  - Jika F_{pseudo}=1, RE=1
  - Jika F_{pseudo}>1, RE>1
  - F_{pseudo} tidak bisa digunakan sebagai Uji Formal F untuk menguji perbedaan antar block namun hanya digunakan untuk mengetahui efekti vitas dari blocking atau pengelompokan.

LATIHAN SOAL

1. Diketahui model dua faktor tanpa interaksi $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}; i = 1,2; j = 1,2$

   a. Susun model dalam bentuk matriks
   b. Tentukan matriks X, X'X, dan X'y
   c. Berapa rank(X)?
   d. Tentukan penduga kuadrat terkecil bagi parameter model pada poin a dengan persyaratan $\sum_{i=1}^{2} \hat{\tau}_i = 0$ dan $\sum_{i=1}^{2} \hat{\beta}_i = 0$.
   e. Apakah $H_0: \tau_1 = \tau_2$ dapat diuji?
   f. Ujilah hipotesis $H_0: \tau_1 = \tau_2$ dan $H_0: \beta_1 = \beta_2$ pada taraf nyata 5% Dengan menggunakan total terkoreksi

1. Diketahui model dua faktor tanpa interaksi $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}; i = 1,2; j = 1,2$

IPB University — Bogor Indonesia —

a. Susun model dalam bentuk matriks

Model Linear:

$$y_{11} = \mu + \tau_1 + \beta_1 + \varepsilon_{11}$$
$$y_{12} = \mu + \tau_1 + \beta_2 + \varepsilon_{12}$$
$$y_{21} = \mu + \tau_2 + \beta_1 + \varepsilon_{21}$$
$$y_{22} = \mu + \tau_2 + \beta_2 + \varepsilon_{22}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \end{bmatrix}$$

b. Tentukan matriks X, X'X, dan X'y dengan y' = [7 6 2 5]

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad X'X = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad X'y = \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

c. Berapa rank(X)?

$$r(X) = r(X'X) = a + b - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$$

d. Tentukan penduga kuadrat terkecil bagi parameter model pada poin a dengan persyaratan $\sum_{i=1}^{2} \hat{\tau}_i = 0$ dan $\sum_{i=1}^{2} \hat{\beta}_i = 0$.

$$(\boldsymbol{X'X})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{X'y}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{..} \\ y_{1.} \\ y_{2.} \\ y_{.1} \\ y_{.2} \end{bmatrix}$$

$$4\mu + 2\tau_1 + 2\tau_2 + 2\beta_1 + 2\beta_2 = y_{..}$$
$$2\mu + 2\tau_1 + \beta_1 + \beta_2 = y_{1.}$$
$$2\mu + 2\tau_2 + \beta_1 + \beta_2 = y_{2.}$$
$$2\mu + \tau_1 + \tau_2 + 2\beta_1 = y_{.1}$$
$$2\mu + \tau_1 + \tau_2 + 2\beta_2 = y_{.2}$$

$$b = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \widehat{\tau_1} \\ \widehat{\tau_2} \\ \widehat{\beta_1} \\ \widehat{\beta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{.1} - \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{.2} - \bar{y}_{..} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1.5 \\ -1.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

e. Apakah $H_0: \tau_1 = \tau_2$ dapat diuji?

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 \; atau \; H_0: \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = 0 \; atau \; h_0: \boldsymbol{t'\beta} = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{t'\beta}$ dapat diduga jika $\boldsymbol{t'H} = \boldsymbol{t'} \; dengan \; \boldsymbol{H} = (\boldsymbol{X'X})^{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{X'X}$

$$t'H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$t'H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$t'H = t'$$

Karena $\boldsymbol{t'H} = \boldsymbol{t'}$ maka $\boldsymbol{t'\beta}$ estimable sehingga hipotesis $H_0: \tau_1 = \tau_2$ testable

f. Ujilah hipotesis $H_0: \tau_1 = \tau_2$ dan $H_0: \beta_1 = \beta_2$ pada taraf nyata 5%

IPB University

Dengan menggunakan total terkoreksi

ANOVA berdasarkan total terkoreksi :

Sumber	db	JK
Model Regresi Penuh	(a+b-1)	$\sum_i y_{i.}^2/b + \sum_j y_{.j}^2/a - y_{..}^2/ab$
Model Hipotesis I	(a-1)	$\sum_i y_{i.}^2/b - y_{..}^2/ab$
Model Hipotesis II	(b-1)	$\sum_j y_{.j}^2/a - y_{..}^2/ab$
Residual/Galat	(a-1)(b-1)	$JK_{Total} - JK_{Reg(Penuh)}$
Total (terkoreksi)	ab-1	$\sum_i \sum_j y_{ij}^2 - y_{..}^2/ab$

Hipotesis: $H_0: \tau_1 = \tau_2$ dan $H_0: \beta_1 = \beta_2$

Statistik Uji Fhitung:

Sumber	db	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	F hitung
Model Regresi Penuh	2	10		
Model Hipotesis I	1	9	9	2.25
Model Hipotesis II	1	1	1	0.25
Galat	1	4	4	
Total (terkoreksi)	3	14		

Hipotesis: $H_0: \tau_1 = \tau_2$

Statistik Uji F hitung :

Fhit = 2.25

Titik Kritis: $F_{(1,1)0.05} = 161$

Kriteria Penolakan H0: H0 ditolak jika Fhit > Ftabel

Keputusan: Fhit = 2.25 < 161 maka tak tolak H0

Kesimpulan: tidak cukup bukti untuk menyatakan bahwa terdapat minimal satu perbedaan rataan respon dari kedua perlakuan faktor 1 yang berbeda pada taraf nyata 5%

Hipotesis: $H_0: \beta_1 = \beta_2$

Statistik Uji F hitung :

Fhit = 0.25

Titik Kritis: $F_{(1,1)0.05} = 161$

Kriteria Penolakan H0: H0 ditolak jika Fhit > Ftabel

Keputusan: Fhit = 0.25 < 161 maka tak tolak H0

Kesimpulan: tidak cukup bukti untuk menyatakan bahwa terdapat minimal satu perbedaan rataan respon dari kedua perlakuan faktor 2 yang berbeda pada taraf nyata 5%

Terima Kasih

IPB University
Bogor Indonesia

Departemen Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jl Meranti Wing 22 Level 4
Kampus IPB Darmaga - Bogor 16680
0251-8624535 | http://stat.ipb.ac.id