STK333
Pengantar Model Linear

Sebaran dan Kebebasan Bentuk Kuadratik

- Sebaran Bentuk Kuadrat
  - Khi-Kuadrat (*Chi-Square*)
  - Multivariat Normal
- Kebebasan Bentuk Kuadrat

Sebaran Khi Kuadrat

Definisi:

$\underline{y}_{kx1} \approx N(\underline{\mu}, I) \Rightarrow \underline{y}'\underline{y} \approx \chi^2_{k,\lambda}, \lambda = \frac{1}{2}\underline{\mu}'\underline{\mu}$ disebut **non - central** khi – kuadrat.

Bila $\underline{\mu} = \underline{0}$, maka $\underline{y}'\underline{y} \approx \chi^2_k$ disebut **central** khi – kuadrat.

Teorema:

$\chi^2_{k_1,\lambda_1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \chi^2_{k_n,\lambda_n}$ adalah n independen non - central khi – quadrat, maka

$$\sum_i \chi^2_{k_i,\lambda_i} \approx \chi^2_{k\lambda}, k = \sum_i k_i, \lambda = \sum_i \lambda_i$$

$\underline{y}_{nx1} \approx N(\underline{\mu}, I), A' = A$, maka $\underline{y}' A \underline{y} \approx \chi^2_{k\lambda}, \lambda = \frac{1}{2}\underline{\mu}' A \underline{\mu} \Leftrightarrow A = A^2 . r(A) = k.$

Sebaran Khi Kuadrat

Corollary:

1. $\underline{y}_{nx1} \approx N(\underline{0}, I)$, $A' = A$, maka $\underline{y}' A \underline{y} \approx \chi^2_k \Leftrightarrow A = A^2, r(A) = k$.
2. $\underline{y}_{nx1} \approx N(\underline{\mu}, \sigma^2 I)$, $A' = A$, maka $\underline{y}' A \underline{y} \approx \chi^2_{k\lambda}, \lambda = \dfrac{1}{2\sigma^2}\underline{\mu}' A \underline{\mu} \Leftrightarrow A = A^2, r(A) = k$

Sebaran Khi Kuadrat

Contoh:

Diketahui y_1, y_2, dan y_3, adalah peubah acak normal dan bebas dengan ragam 1 dan rataan 4, 2, dan -2 masing-masing.

$$var\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mu = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}'\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} y_i^2$ mengikuti sebaran khi-kuadrat non-central dengan derajat bebas k=3 dan parameter non-central λ berikut:

$$\lambda = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 12$$

Peubah acak tersebut adalah $\chi^2_{3,12}$

Sebaran Khi Kuadrat

Contoh:

Diketahui z_1, z_2, dan z_3, adalah peubah acak normal baku dan bebas dengan ragam 1 dan rataan 0, 0, dan 0 masing-masing.

$$var\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{z}'\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{k} z_i^2$ mengikuti sebaran khi-kuadrat central dengan derajat bebas k=3 dan parametr non-central λ berikut:

$$\lambda = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Peubah acak tersebut adalah χ_3^2

Sebaran Khi Kuadrat

Latihan:

Diketahui y_1, y_2, dan y_3, adalah peubah acak normal dan bebas dengan ragam ketiganya 1 dan rataan 0, 1, dan 5 masing-masing. Tunjukkan bahwa **y'y** mengikuti suatu sebaran khi-kuadrat non-central dan tentukan nilai derajat bebas k dan parametr non-central λ.

$$var\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Sebaran Multivariat Normal

Definisi:

$\underline{Y}_{nx1} \approx N(\underline{\mu}, I), C_{nxn}, |C| \neq 0 \Rightarrow \underline{z} = C'\underline{Y}$ disebut multivariat normal (MN).

$$E[\mathbf{z}] = C'\boldsymbol{\mu} \qquad V[\mathbf{z}] = C'C$$

Teorema:

$\underline{y}_{nx1} \approx MN(\underline{\mu}, V), A' = A$, maka $\underline{y}' A \underline{y} \approx \chi^2_{k\lambda}, \lambda = \frac{1}{2}\underline{\mu}' A \underline{\mu} \Leftrightarrow AV = (AV)^2, r(AV) = k.$

Sebaran Multivariat Normal

Corllary:

1. $\underline{y}_{nx1} \approx MN(\underline{0}, V), A' = A$, maka $y' A y \approx \chi^2_k \Leftrightarrow AV = (AV)^2, r(AV) = k.$
2. $\underline{y}_{nx1} \approx MN(\underline{\mu}, V)$, maka $\underline{y}' V^{-1} \underline{y} \approx \chi^2_{n\lambda}, \lambda = \frac{1}{2} \underline{\mu}' V^{-1} \underline{\mu}$

Lemma:

(A_1, A_2, ... A_m adalah sekumpulan matriks ukuran k×k ∃ $P_{k \times k}$

$$P'P = I \text{ dan } P'AP = D \Longleftrightarrow A_iA_j = A_jA_i \;\; \forall \, (i,j)$$

Sebaran Multivariat Normal

Latihan:

Diketahui peubah acak multivariat normal **y** dengan rataan **μ** dan matriks ragam-peragam **I**. Ada suatu matriks A, tentukan bentuk kuadrat, **y**'A**y,** dalam notasi penjumlahan dan apa sebaran **y**'A**y**.

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kebebasan Bentuk Kuadrat

Teorema:

$$\underline{y}_{nx1} \approx MN(\underline{\mu}, V), A'_{nxn} = A_{nxn}, B'_{nxn} = B_{nxn}, r(A) = r_1, r(B) = r_2$$

$$\text{maka } AVB = 0 \Leftrightarrow \underline{y}'A\underline{y} \text{ dan } \underline{y}'B\underline{y} \text{ adalah saling bebas.}$$

Corllary:

$$\underline{y}_{nx1} \approx MN(\underline{\mu}, \sigma^2 I), A'_{nxn} = A_{nxn}, B'_{nxn} = B_{nxn}, r(A) = r_1, r(B) = r_2$$

$$\text{maka } AB = 0 \Leftrightarrow \underline{y}'A\underline{y} \text{ dan } \underline{y}'B\underline{y} \text{ adalah saling bebas.}$$

Teorema:

$$\underline{y}_{nx1} \approx MN(\underline{\mu}, V), A'_{nxn} = A_{nxn}, B_{nxn}$$

$$\text{maka } BVA = 0 \Leftrightarrow \underline{y}'A\underline{y} \text{ dan } B\underline{y} \text{ adalah saling bebas.}$$

Kebebasan Bentuk Kuadrat

Teorema:

$\underline{y} \approx MN(\underline{\mu}, V)$, $\{\underline{y}' A_1 \underline{y}, \underline{y}' A_2 \underline{y}, \ldots\ldots\ldots, \underline{y}' A_m \underline{y}\}$ sekumpulan bentuk kuadrat

dengan $A_i' = A_i \ \forall i,\ r(A_i) = r_i$

maka $\underline{y}' A_i \underline{y} \approx \chi^2_{r_i, \lambda_i}, \lambda_i = \frac{1}{2} \underline{\mu}' A_1 \underline{\mu}$,

$\underline{y}' A_i \underline{y}$ dan $\underline{y}' A_j \underline{y}$ saling bebas ∀ i ≠ j

$$r\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i r(A_i).$$

bila dua dari tiga berikut **benar**

$1.\ A_i^2 = A_i$ $\quad 2.\ \left(\sum_i A_i\right)^2 = \sum_i A_i$ $\quad 3.\ A_i A_j = 0, i \neq j$

Kebebasan Bentuk Kuadrat

Latihan:

Diketahui peubah acak multivariat normal **y** dengan rataan **μ** dan matriks ragam-peragam **V**. Ada dua matriks A dan B,

$$\mathbf{y}_{2\text{x}1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mu}_{2\text{x}1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

a. Tentukan bentuk kuadrat, **y**’A**y** dan **y**’B**y** dalam notasi penjumlahan
b. Apa sebaran **y**’A**y** dan **y**’B**y** ?
c. Apakah **y**’A**y** dan **y**’B**y** bebas (*independent*) ?
d. Apa sebaran dari **y**’A**y + y**’B**y ?**