



IPB University
— Bogor Indonesia —

Departemen Statistika

Pengujian Hipotesis dalam Model Tidak Berpangkat Penuh: *One Way Classification*

Responsi 10 STA1333 Pengantar Model Linear

Review Materi:

1. Pengujian hipotesis linier umum

Suatu hipotesis yang dapat diuji disebut **TESTABLE**.

Suatu H_0 dapat diuji bila ada satu set fungsi yang dapat diduga $\underline{c}'_1\beta, \underline{c}'_2\beta, \dots, \underline{c}'_m\beta$ sehingga H_0 benar jika dan hanya jika $\underline{c}'_1\beta = \underline{c}'_2\beta = \dots = \underline{c}'_m\beta = \underline{0}$

$\underline{c}'_1, \underline{c}'_2, \dots, \underline{c}'_m$ saling bebas linier atau $C\beta = \underline{0}$

1) $C\beta$ estimable

$C\beta$ estimable apabila dapat ditunjukkan bahwa $C(X'X)^c(X'X) = CH = C$

2. Reparameterisasi pada model klasifikasi satu arah

Untuk model 1 faktor, jika $\mu_i = \mu + \tau_i$ maka

$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$ dengan $i = 1, \dots, k$ $j = 1, \dots, n_i, \sum_{i=1}^k n_i = n$

Model dalam bentuk matriks:

$$y = Z\alpha + \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \dots \\ y_{1n_1} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \dots \\ y_{2n_2} \\ \dots \\ y_{kn_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \dots \\ \tau_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \dots \\ \varepsilon_{1n_1} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \dots \\ \varepsilon_{2n_2} \\ \dots \\ \varepsilon_{kn_1} \end{bmatrix}$$

Dengan: Z = matriks rancangan

Lihat



Statistik Uji pada Model Tak Penuh

$$H_0: C\beta = \underline{0}$$

$$\text{Maka } F_{\text{hitung}} = \frac{(Cb)'(C(X'X)^c C')^{-1}(Cb)/m}{s^2}$$

Dengan $r(C) = m \leq r$

$$\text{Dan } s^2 = \frac{SS_{\text{Res}}}{n-r} = \frac{y'[I - X(X'X)^c X']y}{n-r}$$

n = jumlah amatan dan $r = \text{rank}(X'X)$

Tolak H_0 jika $F_{\text{hitung}} > F_{m,(n-r)}$

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	F Hitung
Regresi	k	$\sum_i (y_{i.}^2/n_i)$		
Model Penuh				
Model Reduksi	1	$y_{..}^2/n$		
Hipotesis	k-1	$(\sum_i (y_{i.}^2/n_i)) - y_{..}^2/n$	$\frac{JK_{\text{Reg}}(\text{hipotesis})}{k-1}$	$\frac{KT_{\text{Reg}}(\text{hipotesis})}{KTG}$
Galat/Residual	n-k	$(\sum_i \sum_j y_{ij})^2 / \sum_i n_i - \sum_i (y_{i.}^2/n_i)$	$\frac{JK_{\text{Res}}}{n-k}$	
Total	n	$(\sum_i \sum_j y_{ij})^2$		

Review Materi:



3. Pengujian hipotesis kontras perlakuan

Jika KONTRAS $\sum_{i=1}^k a_i \tau_i = 0$, $\sum_{i=1}^k a_i = 0$, dapat diduga, maka

$H_0: \sum_{i=1}^k a_i \tau_i = 0$, $\sum_{i=1}^k a_i = 0$ dapat diuji

Bentuk lain dari H_0 adalah adalah:

$H_0: \underline{a}'\underline{\alpha} = 0$, $\underline{a}' = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ dan $\underline{\alpha}' = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$

$$\underline{\hat{\alpha}} = N(\underline{\alpha}, (Z'Z)^{-1}\sigma^2)$$

$$\underline{a}'\underline{\hat{\alpha}} \approx N(\underline{a}'\underline{\alpha}, \underline{a}'(Z'Z)^{-1}\underline{a}'\sigma^2)$$

$$\frac{\underline{a}'\underline{\hat{\alpha}}}{s\sqrt{\underline{a}'(Z'Z)^{-1}\underline{a}'}} \approx t_{(n-k)} \text{ atau } \frac{\sum_{i=1}^k a_i y_i}{s\sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2/n_i}} \approx t_{(n-k)}$$

Dua kontras $\sum_{i=1}^k a_i \mu_i$ dan $\sum_{i=1}^k b_i \mu_i$ disebut Ortogonal jika dan hanya jika $\sum_{i=1}^k a_i b_i / n_i = 0$

Ortogonal kontras yang dapat dibentuk adalah sebanyak derajat bebas hipotesis, dan total Jumlah Kuadratnya akan sama dengan Jumlah Kuadrat Hipotesis.

Jika derajat bebas hipotesisnya $(k-1)$ maka

$$\sum_{i=1}^{k-1} JK_{\omega i} = JK_{\text{Reg (hipotesis)}}$$



LATIHAN SOAL

- a. Ujilah hipotesis berikut: $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ dengan pengujian hipotesis linear umum pada model berpangkat tak penuh.



Hipotesis:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$$

In matrix form, we are testing

$$H_0: C\beta = 0$$

where

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

The F statistic used to test H_0 is

$$F_{2,27} = \frac{(Cb)'[C(X'X)^{-1}C']^{-1}(Cb)/2}{SS_{\text{Res}}/27}$$

Statistik Uji Fhitung:

1. Menghitung Cb

Mencari b dengan menghitung $(X'X)^c X'y$

Misal MKU dari matrik $(X'X)$ adalah

$$Cb = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 36.25 \\ 44 \\ 28.18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.75 \\ 15.82 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \quad X'y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34.6 \\ 35.1 \\ : \\ 31.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1084.3 \\ 362.5 \\ 440 \\ 281.8 \end{bmatrix}$$

$$y' = [34.6 \quad 35.1 \quad 35.3 \quad \dots \quad 37.7 \quad 38.8 \quad 39.0 \quad \dots \quad 53.6 \quad 26.7 \quad 26.7 \quad \dots \quad 31.2]$$

$$b = (X'X)^c X'y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1084.3 \\ 362.5 \\ 440 \\ 281.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 36.25 \\ 44 \\ 28.18 \end{bmatrix}$$

2. Menghitung $(Cb)'(C(X'X)^c C')^{-1}Cb$

$$C(X'X)^c C' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C(X'X)^c C' = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$(C(X'X)^c C')^{-1} = \frac{1}{\det} \text{adj} \left(\begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{0.03} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.667 & 3.333 \\ 3.333 & 6.667 \end{bmatrix}$$

$$(Cb)'(C(X'X)^c C')^{-1}Cb = \begin{bmatrix} -7.75 & 15.82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.67 & 3.33 \\ 3.33 & 6.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.75 \\ 15.82 \end{bmatrix}$$

$$(Cb)'(C(X'X)^c C')^{-1}Cb = \begin{bmatrix} 1.07 & 79.63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.75 \\ 15.82 \end{bmatrix} = 1251.5327$$

3. Menghitung $y'[I - (X(X'X)^c X')]'y$

$$X(X'X)^c X'$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{30 \times 4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 30}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \backslash & \vdots & \backslash & \vdots \\ 0 & \dots & 0.1 & \dots & 0 \\ \vdots & \backslash & \vdots & \backslash & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0.1 \end{bmatrix}_{30 \times 30}$$

3. Menghitung $y'[I - (X(X'X)^c X')]'y$

$$I - (X(X'X)^c X') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \backslash & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{30 \times 30} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \backslash & \vdots & \vdots & \backslash & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0.1 & 0.1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0.1 & 0.1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \backslash & \vdots & \vdots & \backslash & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}_{30 \times 30}$$

$$I - (X(X'X)^c X') = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.9 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \backslash & \vdots & \vdots & \backslash & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0.9 & -0.1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -0.1 & 0.9 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \backslash & \vdots & \vdots & \backslash & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0.9 & -0.1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -0.1 & 0.9 \end{bmatrix}_{30 \times 30}$$

3. Menghitung $y'[I - (X(X'X)^c X')]$

$$y'[I - (X(X'X)^c X')]$$

$$= [34.6 \quad 35.1 \quad \dots \quad 31.2] \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.9 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \backslash & \vdots & \vdots & \backslash & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0.9 & -0.1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -0.1 & 0.9 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \backslash & \vdots & \vdots & \backslash & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0.9 & -0.1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -0.1 & 0.9 \end{bmatrix}_{30 \times 30} \begin{bmatrix} 34.6 \\ 35.1 \\ \vdots \\ 31.2 \end{bmatrix}$$

$$y'[I - (X(X'X)^c X')]y = [-1.65 \quad -1.15 \quad \dots \quad 3.02] \begin{bmatrix} 34.6 \\ 35.1 \\ \vdots \\ 31.2 \end{bmatrix} = 278.661$$

$$s^2 = \frac{y'[I - X(X'X)^C X']y}{n - r} = \frac{278.661}{30 - 3} = \frac{278.661}{27} = 10.3208$$

$$F_{hit} = \frac{(Cb)'(C(X'X)^C C')^{-1}Cb/m}{s^2} = \frac{1251.5327/2}{10.3208} = \frac{625.7663}{10.3208} = 60.6317$$

Titik Kritis: $F_{(2;27)0.05} = 3.3541$

Kriteria Penolakan H0: H0 ditolak jika $F_{hit} > F_{tabel}$

Keputusan: $F_{hit} = 60.6317 > 3.3541$ maka tolak H0

Kesimpulan: cukup bukti untuk menyatakan bahwa terdapat minimal satu perbedaan rata-rata respon dari ketiga metode perlakuan menghilangkan karbon organik dari air limbah pasir tar yang berbeda pada taraf nyata 5%

Kerjakan soal soal berikut selama 1 jam lalu jawaban discan dan satukan dalam file pdf dengan format penamaan : NIM_Nama_Latihan10.pdf



dikumpulkan ke link : <https://ipb.link/latihan-pml58p1>

Tiga metode perlakuan yang berbeda untuk menghilangkan karbon organik dari air limbah pasir tar harus dibandingkan. Metode tersebut adalah airflotasi (AF), pemisahan busa (FS), dan koagulasi besi-klorida (FCC). Data ini, berdasarkan penelitian yang dilaporkan dalam "Statistical Planning and Analysis for Treatments of Tar Sand Wastewater", oleh W.R. Pirie, diperoleh:

AF (I)	FS (II)	FCC (III)
34.6	38.8	26.7
35.1	39.0	26.7
35.3	40.1	27.0
35.8	40.9	27.1
36.1	41.0	27.5
36.5	43.2	28.1
36.8	44.9	28.1
37.2	46.9	28.7
37.4	51.6	30.7
37.7	53.6	31.2

Asumsikan model klasifikasi satu arah dengan $n_1 = n_2 = n_3 = 10$ dan $N = 30$.

- Ujilah hipotesis berikut: $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ dengan pengujian hipotesis linear umum pada model berpangkat tak penuh.
- Ujilah hipotesis berikut: $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ dengan menggunakan reparameterisasi pada model klasifikasi satu arah



b. Ujilah hipotesis berikut: $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ dengan menggunakan reparameterisasi pada model klasifikasi satu arah

Model dalam bentuk matriks:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{bmatrix} 34.6 \\ 35.1 \\ \vdots \\ 31.2 \end{bmatrix}_{30 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{30 \times 3} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \vdots \\ \varepsilon_{310} \end{bmatrix}_{30 \times 1}$$

Dengan:

\mathbf{y} = vektor pengamatan, \mathbf{Z} = matriks peubah kontrol, $\boldsymbol{\alpha}$ = vektor parameter, dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor galat

Mencari sistem persamaan normal dari model reparameterisasi;

Dari matrik reparameterisasi diperoleh $r(\mathbf{Z}_{9 \times 3}) = 3$ yang merupakan model penuh maka yang akan dilakukan adalah menguji

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \cong \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$$

Hipotesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \cong \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$$



IPB University
— Bogor Indonesia —

Statistik Uji:

$$Z'Z = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad Z'y = \begin{bmatrix} 362.5 \\ 440 \\ 281.8 \end{bmatrix}, \quad (Z'Z)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$a = (Z'Z)^{-1}Z'y = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 362.5 \\ 440 \\ 281.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.25 \\ 44 \\ 28.18 \end{bmatrix}$$

$$y'Z(Z'Z)^{-1}Z'y = y' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{30 \times 3} \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 30} y$$

$$y'Z(Z'Z)^{-1}Z'y = [34.6 \quad 35.1 \quad \dots \quad 31.2] \begin{bmatrix} 0.1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \backslash & \vdots & \backslash & \vdots \\ 0 & \dots & 0.1 & \dots & 0 \\ \vdots & \backslash & \vdots & \backslash & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0.1 \end{bmatrix}_{30 \times 30} \begin{bmatrix} 34.6 \\ 35.1 \\ \vdots \\ 31.2 \end{bmatrix}$$

$$JK_{Regresi(penuh)} = y'Z(Z'Z)^{-1}Z'y = [36.25 \quad 36.25 \quad \dots \quad 28.18] \begin{bmatrix} 34.6 \\ 35.1 \\ \vdots \\ 31.2 \end{bmatrix}$$

$$JK_{Regresi(penuh)} = 40441.75$$

Sehingga model tereduksi dalam bentuk matriks $y = Z_2\alpha_2 + \epsilon$;

dengan

$$\alpha_2 = \mu; Z_2' = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1]_{1 \times 30}$$

Statistik Uji:



$$JK_{Regresi(tereduksi)} = \frac{(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{10} y_{ij})^2}{\sum n_i} = \frac{1084.3^2}{30} = 39190.2163$$

$$JK_{Regresi(hipotesis)} = JK_{Regresi(penuh)} - JK_{Regresi(tereduksi)}$$

$$JK_{Regresi(hipotesis)} = 40441.75 - 39190.2163 = 1251.5327$$

$$JK_{Total} = y'y = [34.6 \quad 35.1 \quad \dots \quad 31.2] \begin{bmatrix} 34.6 \\ 35.1 \\ \vdots \\ 31.2 \end{bmatrix} = 40720.41$$

$$JK_{Residual} = JK_{Total} - JK_{Regresi(penuh)} = 40720.41 - 40441.75 = 278.661$$

Statistik Uji:

Sumber Keragaman	db	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	F hitung
Regresi				
Model Penuh	3	40441.7490		
Model Tereduksi	1	39190.2163		
Hipotesis	2	1251.5327	625.7663	60.6317
Galat	27	278.6610	10.3208	
Total	30	40720.4100		

Titik Kritis: $F_{(2;27)0.05} = 3.3541$

Kriteria Penolakan H_0 : H_0 ditolak jika $F_{hit} > F_{tabel}$

Keputusan: $F_{hit} = 60.6317 > 3.3541$ maka tolak H_0

Kesimpulan: cukup bukti untuk menyatakan bahwa terdapat minimal satu perbedaan rata-rata respon dari ketiga metode perlakuan menghilangkan karbon organik dari air limbah pasir tar yang berbeda pada taraf nyata 5%

Terima Kasih



IPB University
— Bogor Indonesia —

Departemen Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jl Meranti Wing 22 Level 4
Kampus IPB Darmaga - Bogor 16680
0251-8624535 | <http://stat.ipb.ac.id>