Model Linear Tidak Berpangkat Penuh

Kuliah | Pengantar Model Linier

IPB University
Bogor Indonesia

Cakupan Materi

- 5.1. Pengertian model linear tidak berpangkat penuh
- 5.2. Reparameterisasi
- 5.3 Matriks Kebalikan Bersyarat (*Conditional Inverse*)
- 5.4 Fungsi yang dapat diduga (*Estimability*)

Pengertian Model Linear Tidak Berpangkat Penuh

- Model linear secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{Y}_{nx1} = \mathbf{X}_{nx(k+1)}\boldsymbol{\beta}_{(k+1)x1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{nx1}$$

- Model linear secara garis besarnya dibedakan menjadi dua yaitu:
  - Model berpangkat penuh, dan
  - Model berpangkat tidak penuh

Pengertian Model Linear Tidak Berpangkat Penuh

Klasifikasi model tersebut dibedakan berdasarkan pangkat dari matriks X

- Bila matriks X berpangkat k+1, maka matriks X disebut matriks berpangkat penuh. Akibatnya matriks (X'X) juga berpangkat k+1 dan (X'X) memiliki kebalikan sehingga seluruh parameter β dapat diduga secara unik. Kondisi inilah yang disebut model linear berpangkat penuh
- Bila matriks X berpangkat <k+1, maka matriks X disebut matriks tidak berpangkat penuh. Dengan demikian matriks (X'X) juga berpangkat < k+1 dan (X'X) tidak memiliki kebalikan sehingga penduga parameter β tidak unik. Kondisi inilah yang disebut **model linear tidak berpangkat penuh**.

Pengertian Model Linear Tidak Berpangkat Penuh

Beberapa perbedaan antara model berpangkat penuh dan tidak berpangkat penuh, yaitu:

- Dalam model berpangkat penuh diasumsikan bahwa parameter dalam model bersifat unik. Sedangkan dalam model berpangkat tidak penuh terdapat tidak terhingga gugus bilangan riil yang memenuhi system persamaan (*non identifiable*).
- Dalam model berpangkat penuh X'X adalah matriks non singular. Sistem persamaan normal: $(X'X)\,\mathbf{b} = X'\mathbf{y}$ memiliki hanya satu solusi yaitu: $\mathbf{b}=(X'X)^{-1}X'\mathbf{y}$

  Sedangkan dalam model tidak berpangkat penuh terdapat tidak terhingga solusi yang memenuhi sistem persamaan normal tersebut.
- Dalam model berpangkat penuh semua fungsi linear dari β_0, β_1, β_2, …,β_k dapat diduga tak berbias. Sedangkan dalam model tak berpangkat penuh tidak semua fungsi linear dari parameter dapat diduga tak berbias. Sehingga dalam model tidak berpangkat penuh perlu ditelusuri fungsi linear yang dapat diduga (*estimable function*)

Pengertian Model Linear Tidak Berpangkat Penuh

Misalkan: $\mathbf{y}_{nx1} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ -\ - \\ \vdots \\ -\ - \\ y_{k1} \\ y_{k2} \\ \vdots \\ y_{kn_k} \end{bmatrix}$; $\mathbf{X}_{nx(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ - & - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{\beta}_{(k+1)x1} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_k \end{bmatrix}$ dan $\varepsilon_{nx1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n_1} \\ -\ - \\ \vdots \\ -\ - \\ \varepsilon_{k1} \\ \varepsilon_{k2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{kn_k} \end{bmatrix}$

maka formula matriks dari model tak penuh dapat dinyatakan dengan menggunakan sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$\mathbf{Y = X\,\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}}$$

Pengertian Model Linear Tidak Berpangkat Penuh

dimana :

- **y** = vektor peubah respons berukuran *n* x 1 dengan n = $\sum_{i=1}^{k} n_i$
- **X** = design matriks berukuran $(n = \sum_{i=1}^{k} n_i)$ x (*k* + 1) dengan

X'X= $\begin{bmatrix} n & n_1 & n_2 & \ldots. & n_k \\ n_1 & n_1 & 0 & \ldots. & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_k & 0 & 0 & \ldots. & n_k \end{bmatrix}$ merupakan matriks singular (determinan **X'X**=0) dengan rank tak penuh sebesar k

- **β = [**$\mu \;\; \tau_1 \;\; \tau_2 \ldots. \tau_k]'$ adalah vektor dari parameter yang tidak diketahui berukuran (*k* + 1) x 1

- $\varepsilon =$ vektor dari error acak berukuran *n* x 1 dengan n = $\sum_{i=1}^{k} n_i$

Pengertian Model Linear Tidak Berpangkat Penuh

Sebagai contoh pada rancangan percobaan yaitu Rancangan Acak Lengkap (RAL) dengan model persamaan liniernya sebagai berikut:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

Keterangan:

i = *1,2,.....,k* (k menunjukkan banyaknya perlakuan dalam percobaan)

j = *1,2,....,* n_i (n_i merupakan banyaknya ulangan pada perlakuan ke-i)

y_{ij} = respons perlakuan ke-i dan ulangan ke-j

μ = rataan umum

τ_i = *pengaruh perlakuan ke-i*

ε_{ij} = *pengaruh acak pada perlakuan ke-i dan ulangan ke-j*

Solusi : Metode Reparameterisasi

- Metode reparameterisasi merupakan salah satu metode pendekatan yang sering digunakan dalam model berpangkat tak penuh.
- Reparameterisasi adalah mendefinisikan kembali parameter model dengan mengkombinasikan beberapa parameter menjadi parameter baru sehingga matriks rancangan yang baru berpangkat penuh.
- Metode reparameterisasi efektif digunakan untuk model klasifikasi satu arah.

Solusi : Metode Reparameterisasi

Misalkan untuk model RAL, apabila dilakukan reparameterisasi $\mu_i = \mu + \tau_i$ maka $y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$

$\mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{k};\ \mathrm{j} = 1,2,\ldots \mathrm{n}_i, \sum_i n_i = n$

- $$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_k \end{bmatrix}, \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n_1} y_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} \\ \sum_{j=1}^{n_3} y_{3j} \\ . \\ \sum_{j=1}^{n_k} y_{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1.} \\ y_{2.} \\ y_{3.} \\ . \\ y_{5.} \end{bmatrix}, (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_3} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n_k} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\ \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n_1} y_{ij} / n_1 \\ \sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} / n_2 \\ \sum_{j=1}^{n_3} y_{3j} / n_3 \\ . \\ \sum_{j=1}^{n_k} y_{kj} / n_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{1.} \\ \bar{y}_{2.} \\ \bar{y}_{3.} \\ . \\ \bar{y}_{5.} \end{bmatrix}, \boldsymbol{y}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \left[\sum_{i=1}^{k} y_{i.}{}^2 / n_i \right]$$

Solusi: Metode Reparameterisasi

$$S^2 = {\left[\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}\right]}\Big/_{(n-k)}$$

$$= {\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\boldsymbol{y}_{ij}^2 - {\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{y}_{i.}^2}\Big/_{n_i}\right]}\Big/_{\sum_{n_i}^{k}(n_i-1)}$$

$$= {\left[\sum_{i=1}^{k}(n_i-1){S_i}^2\right]}\Big/_{\sum_{n_i}^{k}(n_i-1)},$$

$${S_i}^2 = \sum_{j=1}^{n_i}{(y_{ij-\bar{y}_{i.}})^2}\Big/_{(n_i-1)}$$

Matriks Kebalikan Bersyarat (*Conditional Inverse*)

Konsisten

Perhatikanlah sistem persamaan dengan n persamaan dan p parameter yang tidak diketahui, berikut:

A**x** = **g**

dengan matriks A berukuran nxp, vektor x berukuran px1, dan vektor g berukuran nx1.

Sifat dari sistem persamaan di atas adalah salah satu dari 3 sifat berikut:

1. Sistem tidak konsisten (inconsistent)
2. Sistem konsisten dan memiliki satu solusi
3. Sistem konsisten dan memiliki banyak solusi

Teorema 5.3.1

Sistem persamaan A**x**=**g** konsisten jika dan hanya jika rank dari $(\mathrm{A}|\mathbf{g})$ sama dengan rank dari A $(r(\mathrm{A}|\mathbf{g}) = r(\mathrm{A}))$

[Subsitusikan A**x= g,** jadikan r(A)≤ r(A|**g**)≤ r(A); sebaliknya **g** merupakan kombinasi linear dari vector kolom A], Contoh **b =** $\boldsymbol{b} = (X'X)^c X'\boldsymbol{y}$ adalah solusi dari $(X'X)^c \boldsymbol{b} = X'\boldsymbol{y}$ tetapi tidak unik

Teorema 5.3.2

Misal X**β + ε** menjadi model linier. Maka sistem persamaan normal (X'X)**b = **X'**y** adalah konsisten

Matriks Kebalikan Bersyarat (*Conditional Inverse)*

Definisi 5.3.1

Diberikan Matrik ***A*** ukuran n x p. Matrik $\boldsymbol{A^C}$ p x n menunjukkan bahwa

$\boldsymbol{A\,A^C\,A = A}$

Matrik $\boldsymbol{A^C}$ p x n adalah sebuah *conditional inverse* untuk Matrik ***A***

Teorema 5.3.3.

Misalkan diketahui sebuah matriks A berukuran $n \times p$ dan terdapat sebuah matriks A^c yang memenuhi $AA^cA = A$, maka matriks A dikatakan memiliki sebuah “conditional inverse” atau matriks kebalikan bersyarat.

Bukti:

Misal matriks A berukuran $n \times p$ dan rank r. Dengan melakukan operasi baris elementer dan operasi kolom, matriks A dapat diubah menjadi bentuknya menjadi

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dimana I_r adalah sebuha matriks identitas $[1 \quad 1]$ berukuran $r \times r$. Hal ini berarti akan ada matriks-matriks nonsingular P dan Q yang memenuhi

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Dengan melakukan perkalian akan menunjukkan hasil bahwa matriks

$$B^c = \begin{bmatrix} I_r & U \\ V & W \end{bmatrix}$$

dimana U, V, dan W adalah “conditional inverse” untuk matriks B. Karena $B = PAQ$, $A = P^{-1}BQ^{-1}$. Dengan menganggap bahwa matriks $A^c = QB^cP$, maka dengan substitusi akan diperoleh

$$\begin{aligned} AA^cA &= P^{-1}BQ^{-1}QB^cP^{-1}BQ^{-1} \\ &= P^{-1}BB^cBQ^{-1} \\ &= P^{-1}BQ^{-1} \\ &= A \end{aligned}$$

Dengan demikian, dengan menggunakan definisi, A^c adalah sebuah “conditional inverse” bagi matriks A.

Matriks Kebalikan Bersyarat (*Conditional Inverse)*

Algoritma untuk mencari Matriks Kebalikan Umum

A adalah matriks n x p dengan rank sebesar r. Untuk mecari Sebuah Matriks Kebalikan Umum A^c,

1. Tentukan sembarang minor *M* ukuran r x r yang non singular
2. Cari M^{-1} dan $(M^{-1})'$
3. Ganti *M* di dalam matriks *A* dengan $(M^{-1})'$
4. Ganti semua unsur lainnya dalam matriks *A* dengan nilai 0 (nol)
5. Putar matriks pada tahap 4, matriks inilah yang disebut sebagai matriks kebalikan umum dari matriks A

Matriks Kebalikan Bersyarat (*Conditional Inverse)*

Sifat-sifat matriks Kebalikan Bersyarat “Conditional Inverse” :

Jika A adalah matriks berukuran n x p dengan rank r dimana $n \geq p \geq r$, maka:

- $A^c A$ dan AA^c adalah idempotent
- $r(AA^c) = r(A^cA) = r$
- Jika A^c adalah invers bersyarat dari A, maka $(A^c)'$ adalah inverse bersyarat dari A’. Maka dari itu $(A^c)' = (A')^c$
- $A = A(A'A)^c(A'A)$ dan $A' = (A'A)(A'A)^cA'$
- $A(A'A)^cA'$ adalah unik, simetrik, dan idempoten. Dikatakan unik berarti invarian pada pilihan dari invers bersyarat. Selanjutnya, $r[A(A'A)^cA'] = r$
- $I - A(A'A)^cA'$ adalah unik, simetrik, dan idempoten dan $r[I - A(A'A)^cA'] = n-r$
- Jika $n = r = p$, maka $A^c = A^{-1}$. Makanya, pada kasus pangkat penuh, invers bersyarat adalah sama dengan invers biasa (*traditional inverse*)
- $I - A^c A$ adalah idempoten

Matriks Kebalikan Bersyarat (*Conditional Inverse)*

Teorema 5.3.4

Misalkan **Ax = g** konsisten. Maka **x = A^{c}g** adalah solusi bagi sistem persamaan, dimana **A^c** adalah inverse bersyarat untuk A.

Pembuktian:

Misalkan **Ax = g** konsisten dan misalkan A^c merupakan matriks bersyarat bagi A. Dengan definisi: **AA^{c}Ax = Ax**

Dengan asumsi, **Ax = g**, maka substitusi menjadi, **AA^{c}g = g**

Misalkan **x_0 = A^{c}g,** Lalu **Ax_0 = g**, tunjukkan bahwa **x_0** merupakan solusi untuk sistem persamaan tersebut.

Dengan menerapkan teorema model linier, sehingga diperoleh,

b = (X'X)^{c}X'y

ini merupakan solusi bagi persamaan normal **(X'X)b = X'y.** Untuk beberapa matriks invers bersyarat akan menghasilkan solusi. Namun, pada Model Rank Tidak Penuh, ada banyak solusi yang diperoleh tergantung pada pilihan **(X'X)^c**; yakni matriks invers bersyarat yang berbeda akan menghasilkan solusi yang berbeda.

Teorema 5.3.5

Misal $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}$ konsisten dan A^c merupakan matriks kebalikan umum dari A. Sehingga

$$x_0 = A^c\,\boldsymbol{g} + (I - A^c A)\boldsymbol{z}$$

adalah solusi untuk sistem persamaan tersebut dimana **z** adalah sebuah vektor berukuran *p x1* yang dapat berubah-ubah

Teorema 5.3.6

Jika $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}$ konsisten dan A^c adalah matriks kebalikan umum bagi *A.* Kemudian x_o adalah beberapa solusi untuk sistem linier. Maka $x_o = A^c g + (I - A^c A)z$ dengan $z = (I - A^c A)x_o$

Fungsi yang dapat diduga(*Estimability)*

Definisi 5.4.1
Misalkan $\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dimana X adalah matriks berukuran $n\ x\ p$ dengan rank $r \leq p, E[\varepsilon] = 0$, dan var $\varepsilon = \sigma^2 I$. Fungsi dari $t'\beta$ dikatakan *estimable* jika ada sebuah vektor c sehingga $E[c'y] = t'\beta$.

Teorema 5.4.1
Misalkan **y** = X**β** + ε dengan matriks X berukuran n x p dan rank r ≤ p, E [ε] =0, dan var ε = $\sigma^2 I$. Suatu kondisi yang dibutuhkan dan cukup untuk menyatakan bahwa **t' β** dapat diduga adalah ketika ada solusi dari persamaan (X'X)**z** = **t**.

Teorema 5.4.2
Misalkan $y = X\beta + \varepsilon$ di mana X adalah matriks berukuran $n \times p$ dengan rank $r \leq p$, $E[\varepsilon] = 0$, dan $var\ \varepsilon = \sigma^2 I$. Fungsi $t'\beta$ dapat diduga (*estimable*) jika dan hanya jika $t'(X'X)^c(X'X) = t'$ di mana $(X'X)^c$ adalah sembarang matriks kebalikan umum dari $(X'X)$.

Fungsi yang dapat diduga(*Estimability)*

Lemma 5.4.1
Misalkan $\boldsymbol{y} = X\,\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dimana X berukuran $n \times p$ dengan rank $r \le p$, $E(\varepsilon) = 0$, dan var $\varepsilon = \sigma^2 I$. Penduga tak bias linier terbaik untuk beberapa fungsi yang estimable (dapat di duga/diestimasi) $\mathbf{t}'\,\boldsymbol{\beta}$ adalah $z'\,X'\,\boldsymbol{y}$ dimana z adalah sebuah solusi dari sistem $(X'\,X)\,z = t$.

Teorema 5.4.3
(Teorema Gauss-Markoff)
Misalkan $y = X\boldsymbol{\beta} + \varepsilon$ dimana X adalah matriks $n \times p$ dengan rank $r \le p, E[\varepsilon] = \mathbf{0}$ dan $Var[\varepsilon] = \sigma^2 I$. Juga $\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\beta}$ *estimable*. Maka solusi terhadap sistem $(X'X)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{t}$ menghasilkan estimasi yang sama bagi $\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\beta}$. Selanjutnya, estimasi linear dan tak bias terbaik adalah $\boldsymbol{t}'\boldsymbol{b}$ dimana $\boldsymbol{b}$ adalah solusi terhadap persamaan normal.

Fungsi yang dapat diduga(*Estimability)*

Bukti

Asumsikan $\boldsymbol{z_0}$ dan $\boldsymbol{z_1}$ adalah solusi terhadap sistem $(X'X)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{t}$ sehingga $(X'X)\boldsymbol{z_0} = \boldsymbol{t}$, $(X'X)\boldsymbol{z_1} = \boldsymbol{t}$, dan $\boldsymbol{z}'_{\boldsymbol{0}}(X'X) = \boldsymbol{z}'_{\boldsymbol{1}}(X'X) = \boldsymbol{t}'$. Misalkan $\boldsymbol{b}$ merupakan solusi terhadap persamaan normal dan memperhatikan bahwa $(X'X)\boldsymbol{b} = X'\boldsymbol{y}$. Mempertimbangkan estimasi $\boldsymbol{z}'_0 X'\boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{z}'_1 X'\boldsymbol{y}$.

Memperhatikan bahwa

$$\boldsymbol{z}'_{\boldsymbol{0}} X'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}'_{\boldsymbol{0}}(X'X)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t}'\boldsymbol{b}$$

dan

$$\boldsymbol{z}'_{\boldsymbol{1}} X'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}'_{\boldsymbol{1}}(X'X)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t}'\boldsymbol{b}$$

Dari sini dapat disimpulkan bahwa

$\boldsymbol{z}'_{\boldsymbol{0}} X'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}'_{\boldsymbol{1}} X'\boldsymbol{y}$

Estimasi linear dan tak bias terbaik untuk $\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\beta}$ adalah unik.

Selanjutnya, estimasi unik bagi $\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\beta}$ adalah $\boldsymbol{t}'\boldsymbol{b}$ dimana $\boldsymbol{b}$ b adalah solusi terhadap persamaan normal.

Hal penting untuk diingat selanjutnya :

Perhatian dalam model tak penuh berpusat pada fungsi yang estimable terhadap bentuk $\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\beta}$.

Fungsi yang estimable dapat diestimasi secara unik.

Estimasi unik untuk fungsi seperti itu adalah $\boldsymbol{t}'\boldsymbol{b}$ dimana b adalah soulsi bagi persamaan normal.

$\boldsymbol{t}'\boldsymbol{b}$ adalah estimator liniear dan tak bias terbaik bagi $\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\beta}$.

Latihan

Suatu model linier

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,2 \qquad j = 1,2$$

Misalkan

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Tentukan matriks rancangan **X**
2. Tunjukkan bahwa determinan dari **X'X** = 0, sehingga (**X'X**) singular.
3. Tunjukkan bahwa r(**X'X**) = 2
4. Tentukan matriks kebalikan umum untuk X'X dengan menggunakan minor

   $$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Nyatakan matriks kebalikan umum yang diperoleh sebagai $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$

5. Gunakan teorema 5.34 (buku Myers) untuk menentukan solusi persamaan normalnya.
6. Tentukan matriks kebalikan umum untuk X'X berdasarkan minor

   $$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   Nyatakan matriks kebalikan umum yang diperoleh sebagai $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$

7. Tunjukkan bahwa $\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c\mathbf{X}' = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c\mathbf{X}'$
8. Apakah menurut anda $\boldsymbol{\beta}$ estimable? Tunjukkan jawaban anda.
9. Periksalah apakah $\tau_1 - \tau_2$ estimable?
10. Periksalah apakah $\tau_1 + \tau_2$ estimable?
11. Temukanlah fungsi linier dari parameter yang estimable lainnya, nyatakan dalam $\mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$.
12. Tunjukkanlah bahwa penduga $\mathbf{t}'\mathbf{b}$ unik apapun pilihan matriks kebalikan umumnya.

Latihan

Diketahui: Suatu percobaan menggunakan **rancangan acak lengkap** satu faktor dengan **dua perlakuan** dan **2 ulangan.**

1. Tentukan Matriks Rancangan X?
   Model linier:
   $$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1{,}2 \quad j = 1{,}2$$
   Model linier aditif:
   $$\begin{aligned} y_{11} &= \mu + \tau_1 + \varepsilon_{11} \\ y_{12} &= \mu + \tau_1 + \varepsilon_{12} \\ y_{21} &= \mu + \tau_2 + \varepsilon_{21} \\ y_{22} &= \mu + \tau_2 + \varepsilon_{22} \end{aligned}$$

   Model dalam bentuk matriks:
   $$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
   $$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \end{bmatrix}$$

   Jadi Matriks Rancangan **X**= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Tunjukkan bahwa determinan dari **X'X** = 0, sehingga (**X'X**) singular
   $$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   Det **X'X** menggunakan metode sorus:
   $$\left|\begin{matrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

   |X'X| = (4x2x2)+(2x0x2)+(2x2x0)-(2x2x2)-(4x0x0)-(2x2x2)
   |X'X| = 16+0+0-8-0-8
   |X'X| = 0 (Terbukti)

   Matriks **X'X** dapat dikatakan sebagai matriks singular karena determinan matriks **X'X** adalah nol (0).

Latihan

Mencari rank matriks $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ menggunakan Operasi Baris Dasar (OBD) dilakukan dengan cara mentransformasikan matriks $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ menjadi matriks $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^*$ sedemikian sehingga baris-baris $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^*$ tidak dapat lagi dibuat menjadi **0** (vektor nol).

$$\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow{b3-b2} \begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow{2b2-b1} \begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow{b3+b2} \begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Terdapat dua baris pada hasil transformasi matriks $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ yang bukan **0** sehingga pangkat/rank dari matriks $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ adalah $r(\ \mathbf{X}'\mathbf{X}\ ) = 2$.

4. Tentukan matriks kebalikan umum untuk **X'X** dengan menggunakan minor $\mathbf{M}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$
   Nyatakan matriks kebalikan umum yang diperoleh sebagai $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$

Tahapannya:

a. Tentukan **(M)⁻¹** dan **((M)⁻¹)'**

$(\mathbf{M})^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{M}}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$,dimana det. **M** = a*d – b*c

$(\mathbf{M})^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ = 2*2 – 0 = 4

$(\mathbf{M})^{-1} = \begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}$

$((\mathbf{M})^{-1})' = \begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}$

b. Selanjutnya ganti Minor pada matriks **(X'X)*** dengan **((M)⁻¹)'** sedangkan unsur lain dari **(X'X)*** di ganti dengan angka 0 (nol), selanjutnya matriks tersebut di transpose maka hasilnya merupakan matriks kebalikan umumnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c = \left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\right)' = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

Latihan

5. Gunakan teorema 5.34 (buku Myers) untuk menentukan solusi persamaan normalnya.

   Solusi Persamaan Normalnya: **X'Xb=X'y**, dimana **b= (X'X)^{c}X'y**

   Diketahui: $\mathbf{X'y}=\begin{bmatrix}6\\4\\2\end{bmatrix}$ dan $(\mathbf{X'X})_1^c=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1/2 & 0\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$

   Maka solusi persamaan normalnya:

   $$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1/2 & 0\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\4\\2\end{bmatrix}$$
   $$= \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$$

6. Tentukan matriks kebalikan umum untuk **X'X** dengan menggunakan minor $\mathbf{M}=\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}$
   Nyatakan matriks kebalikan umum yang diperoleh sebagai $(\mathbf{X'X})_2^c$

   Tahapannya:

   a. Tentukan **(M)$^{-1}$** dan **((M)$^{-1}$)'**

   $(\mathbf{M})^{-1}=\frac{1}{\det \mathbf{M}}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}$,dimana det. **M** = a*d – b*c

   $(\mathbf{M})^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -2\\-2 & 4\end{bmatrix}$ = 4*2 –(-2)*(-2) = 4

   $(\mathbf{M})^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\-1/2 & 1\end{bmatrix}$

   $((\mathbf{M})^{-1})'=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\-1/2 & 1\end{bmatrix}$

   b. Selanjutnya ganti Minor pada matriks **(X'X)*** dengan **((M)$^{-1}$)'** sedangkan unsur lain dari **(X'X)*** di ganti dengan angka 0 (nol), selanjutnya matriks tersebut di transpose maka hasilnya merupakan matriks kebalikan umumnya $(\mathbf{X'X})_2^c$

   $$(\mathbf{X'X})_2^c=\left(\begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\-1/2 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)'=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\-1/2 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Latihan

5. Gunakan teorema 5.34 (buku Myers) untuk menentukan solusi persamaan normalnya.

   Solusi Persamaan Normalnya: **X'Xb=X'y**, dimana **b= (X'X)^{c}X'y**

   Diketahui: **X'y**=$\begin{bmatrix}6\\4\\2\end{bmatrix}$ dan $(\mathbf{X'X})_1^c = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1/2 & 0\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$

   Maka solusi persamaan normalnya:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1/2 & 0\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\4\\2\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$$

6. Tentukan matriks kebalikan umum untuk **X'X** dengan menggunakan minor $\mathbf{M}=\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}$
   Nyatakan matriks kebalikan umum yang diperoleh sebagai $(\mathbf{X'X})_2^c$

   Tahapannya:

   a. Tentukan **(M)$^{-1}$** dan **((M)$^{-1}$)'**

$$(\mathbf{M})^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{M}}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}$$,dimana det. **M** = a*d – b*c

$$(\mathbf{M})^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -2\\-2 & 4\end{bmatrix}$$ = 4*2 –(-2)*(-2) = 4

$$(\mathbf{M})^{-1} = \begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\-1/2 & 1\end{bmatrix}$$
$$((\mathbf{M})^{-1})' = \begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\-1/2 & 1\end{bmatrix}$$

   b. Selanjutnya ganti Minor pada matriks **(X'X)*** dengan **((M)$^{-1}$)'** sedangkan unsur lain dari **(X'X)*** di ganti dengan angka 0 (nol), selanjutnya matriks tersebut di transpose maka hasilnya merupakan matriks kebalikan umumnya $(\mathbf{X'X})_2^c$

$$(\mathbf{X'X})_2^c = \left(\begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\-1/2 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)' = \begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\-1/2 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Latihan

7. Tunjukkan bahwa:

$$\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c\mathbf{X}' = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c\mathbf{X}'$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&-1/2&0\\-1/2&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&1/2&0\\0&1/2&0\\0&0&1/2\\0&0&1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1/2&0\\0&1/2&0\\1/2&-1/2&0\\1/2&-1/2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1/2&1/2&0&0\\1/2&1/2&0&0\\0&0&1/2&1/2\\0&0&1/2&1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2&1/2&0&0\\1/2&1/2&0&0\\0&0&1/2&1/2\\0&0&1/2&1/2\end{bmatrix}$$

(Terbukti)

8. Apakah menurut anda $\boldsymbol{\beta}$ estimable? Tunjukkan jawaban anda.

Theorema: $\mathbf{t}'\,\boldsymbol{\beta}$ estimable(dapat diduga) jika $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X} = \mathbf{t}'$

Diketahui: $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2&2\\2&2&0\\2&0&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix}\mu\\\tau_1\\\tau_2\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\beta}$ estimable jika unsur-unsur dari $\boldsymbol{\beta}$ (yaitu μ, τ_1, τ_2) semuanya estimable.

Akan diperiksa apakah μ, τ_1, τ_2 estimable:

a. $\mu = \overbrace{[1 \quad 0 \quad 0]}^{t'}\,\boldsymbol{\beta}$

$\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X} = \mathbf{t}'$

$$[1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

Karena $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X} \neq \mathbf{t}'$ maka μ tidak estimable

Latihan

b. $\tau_1 = \overbrace{[0 \quad 1 \quad 0]}^{t'} \boldsymbol{\beta}$

$\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$

$$[0 \quad 1 \quad 0] \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 0]$$

Karena $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}\neq\mathbf{t}'$ maka τ_1 tidak estimable

c. $\tau_2 = \overbrace{[0 \quad 0 \quad 1]}^{t'} \boldsymbol{\beta}$

$\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$

$$[0 \quad 0 \quad 1] \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 1]$$

Karena $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}\neq\mathbf{t}'$ maka τ_2 tidak estimable

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\underline{\boldsymbol{\beta}}$ **tidak estimable** karena unsur-unsurnya (yaitu μ, τ_1, τ_2) semua tidak estimable

9. Periksalah apakah $\tau_1 - \tau_2$ estimable?

$\tau_1 - \tau_2$ akan estimable jika memenuhi $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$

$\tau_1 - \tau_2 = \overbrace{[0 \quad 1 \quad -1]}^{t'} \boldsymbol{\beta}$

$\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$

$$[0 \quad 1 \quad -1] \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad -1]$$

Karena $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$ maka $\tau_1 - \tau_2$ estimable

10. Periksalah apakah $\tau_1 + \tau_2$ estimable?

$\tau_1 + \tau_2$ akan estimable jika memenuhi $\underline{t}'(X'X)^cX'X=\underline{t}'$

$\tau_1 + \tau_2 = \overbrace{[1 \quad 1 \quad 0]}^{t'} \boldsymbol{\beta}$

$\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$

$$[0 \quad 1 \quad 1] \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [2 \quad 1 \quad 1]$$

Karena $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}\neq\underline{\mathbf{t}}'$ maka $\tau_1 + \tau_2$ tidak estimable

Latihan

11. Temukanlah fungsi linier dari parameter yang estimable lainnya, nyatakan dalam $\mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$.

Fungsi linier parameter yang estimable dapat diperoleh dari 2 cara:

a. Baris-baris dari matriks **X**

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

- $\mu+\tau_1=\overbrace{[1 \quad 1 \quad 0]}^{t'}\boldsymbol{\beta}$
- $\mu+\tau_2=\overbrace{[1 \quad 0 \quad 1]}^{t'}\boldsymbol{\beta}$

Akan di tunjukan bahwa $\mu+\tau_1$ dan $\mu+\tau_2$ estimable

- $\mu+\tau_1=\overbrace{[1 \quad 1 \quad 0]}^{t'}\boldsymbol{\beta}$

$\mu+\tau_1$ akan estimable jika memenuhi $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$

$\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$

$$[1 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=[1 \quad 1 \quad 0]$$

Karena $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$ maka $\mu+\tau_1$ estimable

- $\mu+\tau_2=\overbrace{[1 \quad 0 \quad 1]}^{t'}\boldsymbol{\beta}$

$\mu+\tau_2$ akan estimable jika memenuhi $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\underline{\mathbf{t}'}$

$\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$

$$[1 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=[1 \quad 0 \quad 1]$$

Karena $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$ maka $\mu+\tau_2$ estimable

b. Fungsi SPL dari fungsi yang sebelumnya estimable:

- $2(\tau_1-\tau_2)=\overbrace{[0 \quad 2 \quad -2]}^{t'}\boldsymbol{\beta}$

$2(\tau_1-\tau_2)$ akan estimable jika memenuhi $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$

$\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$

$$[0 \quad 2 \quad -2]\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=[0 \quad 2 \quad -2]$$

Karena $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$ maka $2(\tau_1-\tau_2)$ estimable

- $3(\mu+\tau_1)=\overbrace{[3 \quad 0 \quad 3]}^{t'}\boldsymbol{\beta}$

$3(\mu+\tau_1)$akan estimable jika memenuhi $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$

$\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{t}'$

Latihan

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Karena $\mathbf{t'(X'X)^{c}X'X=t'}$ maka $3(\mu+\tau_1)$ estimable

12. Tunjukkanlah bahwa penduga $\mathbf{t'b}$ unik apapun pilihan matriks kebalikan umumnya.

Misal kita gunakan hasil matriks kebalikan umum pada soal no. 4 dan no.6 yaitu:

$$(\mathbf{X'X})_1^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ dan} (\mathbf{X'X})_2^c = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh nilai $\mathbf{b}$ masing-masing:

$\mathbf{b_1} = (\mathbf{X'X})_1^c\mathbf{X'y}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{b_2} = (\mathbf{X'X})_2^c\mathbf{X'y}$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan dengan nilai $\mathbf{t'}$ yang estimable akan menghasilkan $\mathbf{t'b}$ unik apapun pilihan matriks kebalikan umumnya.

- $\mathbf{t'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{t'b_1} = \mathbf{t'b_2}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$[1] = [1]$$

- $\mathbf{t'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{t'b_1} = \mathbf{t'b_2}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$[2] = [2]$$

Sehingga terbukti penduga $\mathbf{t'b}$ unik apapun pilihan matriks kebalikan umumnya.

Pustaka

1. Myers, R.H. dan Milton, J.S. 1991. A First Course in the Theory of Linear Statistical Models. Boston: PWS-KENT Publishing Company.
2. Sumertajaya, I.M. 2019. Pengantar Model Linier. Bahan Ajar. Bogor: Program Magister Statistika Terapan IPB.

IPB University
Bogor Indonesia

Tugas Penyusunan
Bahan Ajar Pengantar Model Linier

Disusun oleh:

I Made Sumertajaya Abdullah Pannu (BPS 2019)

Terima Kasih

IPB University
Bogor Indonesia