BAB 7. Analisis Peragam
(Analysis Of Covarians(ANCOVA))

Pengantar

- Salah satu metode cara untuk memperkecil galat percobaan.
- Dengan cara menambahkan informasi tambahan (covariate) ke dalam model yang berkaitan atau yang turut mempengaruhi hasil percobaan atau respon.
- Misalnya seorang peneliti ingin menguji pengaruh 3 macam obat terhadap respon psikologis. Untuk masing-masing perlakuan dipilih 5 subyek. Peneliti menambahkan variable berat subyek ke dalam percobaan tersebut.
- Model ini menggabungkan antara ANOVA dengan model regresi.

Model Linier

- Model dari model kovarians dengan 1 factor dan 1 covariate.

  $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij}$, i=1,2,...t, j=1,2,...n
- τ_i merupakan efek dari perlakuan dan x_{ij} adalah covariate pada perlakuan ke i subyek ke j .
- Model dalam bentuk matriks **y=Xβ+ε**

$$\underline{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ . \\ y_{1n} \\ y_{21} \\ . \\ y_{2n} \\ . \\ y_{t1} \\ . \\ y_{tn} \end{bmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & x_{11} \\ 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & x_{12} \\ . & . & . & \cdot & \cdot & \cdot & . & . & . \\ 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & x_{1n} \\ 1 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & x_{21} \\ . & . & . & \cdot & \cdot & \cdot & . & . & . \\ 1 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & x_{2n} \\ . & . & . & \vdots & \vdots & \vdots & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & & & & 0 & 1 & x_{t1} \\ . & . & . & \cdot & \cdot & \cdot & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & x_{tn} \end{bmatrix} \text{dan } \underline{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ . \\ \tau_t \\ \beta \end{bmatrix}$$

Model Linier dalam Matriks

$$
\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}
nt & n & n & \cdots & n & \sum\sum x_{ij} \\
n & n & 0 & \cdots & 0 & \sum x_{1j} \\
n & 0 & n & \cdots & 0 & \sum x_{2j} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
n & 0 & 0 & \cdots & n & \sum x_{tj} \\
\sum\sum x_{ij} & \sum x_{1j} & \sum x_{2j} & \sum x_{3j} \;\cdots & \sum x_{tj} & \sum\sum {x^2}_{ij}
\end{bmatrix}
\quad
\boldsymbol{X}'\underline{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix}
\sum\sum y_{ij} \\
\sum y_{1j} \\
\sum y_{2j} \\
\vdots \\
\sum y_{tj} \\
\sum\sum x_{ij}y_{ij}
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}
y_{..} \\
y_{1.} \\
y_{2.} \\
\vdots \\
y_{t.} \\
\sum\sum x_{ij}y_{ij}
\end{bmatrix}
$$

Inferensia Pengaruh Perlakuan(1)

- Untuk menguji apakah perlakuan berpengaruh terhadap respon atau hasil percobaan:

  $$H_0\colon \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_t \; vs \; H_1\colon tidak\ semua\ \tau_i sama$$

- Untuk bisa melakukan estimasi dan melakukan pengujian hipotesis dilakukan reparameterisasi sehingga model analisis covarians dapat ditulis:

  $y_{ij} = \mu + \tau^*{}_i + \beta(x_{ij} - \overline{x_{i.}}) + \varepsilon_{ij}$, i=1,2,...t, j=1,2,...n

- Dimana $\overline{x_{i.}} = \sum_{j=1}^{n} {}^{x_{ij}}/_{n}$ dan $\tau^*{}_i = \tau_i + \beta\overline{x_{i.}}$

Inferensia Pengaruh Perlakuan(2)

- Dengan reparameterisasi matriks X′X dan X′y menjadi:

$$\boldsymbol{X'X} = \begin{bmatrix} nt & n & n & n & . & . & . & n & 0 \\ n & n & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ n & 0 & n & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 0 & 0 & 0 & . & . & . & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & E_{xx} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{X'\underline{y}} = \begin{bmatrix} y_{..} \\ y_{1.} \\ y_{2.} \\ \vdots \\ y_{t.} \\ E_{xy} \end{bmatrix}$$

- Hint: $\sum_j (x_{ij} - \overline{x_{i.}}) = \sum_j x_{ij} - \sum_j \overline{x_{i.}} = x_{i.} - n\overline{x_{i.}} = x_{i.} - x_{i.} = 0$
- Dimana $E_{xx} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x_{i.}})^2$ dan $E_{xy} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x_{i.}}) y_{ij}$, ordo matriks $X'X_{(t+2)x(t+2)}$ dengan rank (t+1)
- Sistem persamaan normal: $(\mathbf{X'X})\underline{\boldsymbol{b}} = \mathbf{X'}\underline{\boldsymbol{y}}$ untuk menyelesaikan persamaan tersebut didefinisikan restriksi $\sum_{i=1}^{t} \tau^*{}_i = 0$ sehingga diperoleh solusi:

$$\hat{\mu} = \overline{y_{..}}$$

$$\widehat{\tau^*}_i = \overline{y_{i.}} - \overline{y_{..}}$$

$$\hat{\beta} = {E_{xy}}\big/{E_{xx}}$$

Pengujian Hipotesis Pengaruh Perlakuan pada Model Ancova(1)

- $JK_{Reg(hipotesis)} = JK_{Reg(full)} - JK_{Reg(reduced)}$
- $JK_{Reg(full)} = \underline{b}'X'\underline{y} = \sum_{i=1}^{t} {y_{i.}}^2/_n + {E_{xy}}^2/_{E_{xx}}$ dengan derajat bebas t+1.
- Jumlah kuadrat regresi tereduksi merupakan jumlah kuadrat ketika kondisi hipotesis nol benar. Model ketika $H_0\colon\ \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_t$ benar adalah:

$$y_{ij} = \mu^* + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

- $JK_{Reg(reduced)} = {y_{..}}^2/_{tn} + {S_{xy}}^2/_{S_{xx}}$, dengan derajat bebas berjumlah 2
- Dimana $S_{xx} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_{..})^2$ dan $E_{xy} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{..})$

Pengujian Hipotesis Pengaruh Perlakuan pada Model Ancova(2)

- $JK_{Reg(hipotesis)} = JK_{Reg(full)} - JK_{Reg(reduced)}$

$$JK_{Reg(hipotesis)} = \left[\sum_{i=1}^{t} {y_{i.}}^2/_n - {y_{..}}^2/_{tn}\right] + \left[{E_{xy}}^2/_{E_{xx}} - {S_{xy}}^2/_{S_{xx}}\right]$$

$$JK_{Reg(hipotesis)} = B_{yy} + {E_{xy}}^2/_{E_{xx}} - {S_{xy}}^2/_{S_{xx}}$$

- Derajat bebas dari jumlah kuadrat regresi hipotesis adalah (t+1)-2= (t-1)

- $JK_{Residual} = \underline{y}'\underline{y} - \underline{b}'X'\underline{y} = \sum_i \sum_j {y_{ij}}^2 - \left[\sum_{i=1}^{t} \frac{{y_{i.}}^2}{n} + \frac{{E_{xy}}^2}{E_{xx}}\right]$

$$= \left[\sum_i \sum_j {y_{ij}}^2 - \sum_{i=1}^{t} \frac{{y_{i.}}^2}{n}\right] - \frac{{E_{xy}}^2}{E_{xx}} = E_{yy} - {E_{xy}}^2/_{E_{xx}}$$

- Derajat bebas jumlah kuadrat residual sebesar nt-t-1
- Statistik Uji untuk menguji hipotesis pengaruh perlakuan

$$F = \frac{JK_{reg(hipotesis)}/t-1}{JK_{Res}/(nt-t-1)}$$

Inferensia Koefisien Covariate

- Estimasi titik untuk slope adalah $\hat{\beta} = {}^{E_{xy}}/_{E_{xx}}$
- Untuk pengujian hipotesis pengaruh dari covariate:
  - $H_0 : \beta = 0$ vs $H_0 : \beta \neq 0$
  - $JK_{Reg(hipotesis)} = \frac{{E_{xy}}^2}{E_{xx}}$
  - Derajat bebas jumlah kuadrat regresi hipotesis adalah sebesar 1
  - Sama dengan pengujian pengaruh perlakuan,

$$JK_{Residual} = E_{yy} - {}^{{E_{xy}}^2}/_{E_{xx}}$$

  - Statistik Uji:

$$F = \frac{JK_{Reg(hipotesis)}}{JK_{Residual}/(nt - t - 1)}$$

Mengestimasi Rata-rata Perlakuan

- Pada analisis 1 arah/ 1 factor kesamaan dalam pengaruh perlakuan ekuivalen dengan persamaan pada rata-rata perlakuan.
- Solusi dari analisis covarians:

$$\hat{\mu} = \overline{y}_{..}$$

$$\widehat{\tau^*}_i = \overline{y_{i.}} - \overline{y}_{..}$$

- Dalam analisis 1 factor didefinisikan $\mu_i = \mu + \tau_i$ dan dalam analisis covarians $\tau^*{}_i = \tau_i + \beta\overline{x_{i.}}$ atau $\tau_i = \tau^*{}_i - \beta\overline{x_{i.}}$
- Sehingga:

$$\widehat{\mu_i} = \hat{\mu} + \widehat{\tau_i} = \hat{\mu} + \widehat{\tau^*}_i - \hat{\beta}\overline{x_{i.}} = \overline{y_{i.}} - \hat{\beta}\overline{x_{i.}}$$

- Untuk mengestimasi rataan perlakuan ketika nilai xo tertentu dapat diestimasi dengan persamaan regresi:

$$\widehat{\mu_{y/x}} = \widehat{\mu_i} + \hat{\beta}x_0 = \overline{y_{i.}} - \hat{\beta}\overline{x_{i.}} + \hat{\beta}x_0$$

- Untuk membandingkan perlakuan diperlukan pembandingan untuk beberapa nilai x sehingga pada persamaan di atas didefinisikan $x_0 = \overline{x..}$. Sehingga rata-rata perlakuan yang disesuaikan dengan covariate adalah:

$$\mu_{i\widehat{(adjusted)}} = \overline{y_{i.}} - \hat{\beta}(\overline{x_{i.}} - \overline{x}_{..}$$

- Link Jawaban Quis 2: https://forms.gle/J3beWv8VNKNThxxo8

Terima Kasih