Responsi PML

Pengujian Hipotesis untuk Model Penuh

Pengujian kecukupan model

Model linear:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_{ik} x_{ik} + \varepsilon_i$$

dimana i = 1, 2, …,n.

Secara umum model dalam notasi matriks

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{MN}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$$

Penduga parameter $\boldsymbol{\beta}$ untuk model penuh

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Uji kecukupan model

Hipotesis yang diuji:

$\mathrm{H_0}: \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ vs $\mathrm{H_1}: \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$

Statistik uji:

$$\frac{\mathrm{JK_{reg}}/\mathrm{p}\sigma^2}{\mathrm{JK_{galat}}/(\mathrm{n}-\mathrm{p})\sigma^2} = \frac{\mathrm{JK_{reg}}/\mathrm{p}}{\mathrm{JK_{galat}}/(\mathrm{n}-\mathrm{p})} = \frac{\mathrm{KT_{reg}}}{\mathrm{KT_{galat}}} \approx \mathrm{F}_{(\mathrm{db_{reg}};\ \mathrm{db_{galat}};\alpha)}$$

Tabel Anova

SK	db	JK	KT	$\mathbf{F_{hitung}}$
Regresi	p	$\mathbf{y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$	$\mathrm{JK_{reg}}/\mathrm{p}$	$\mathrm{KT_{reg}}/\mathrm{KT_{galat}}$
Galat	n-p	$\mathbf{y}'(\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{y}$	$\mathrm{JK_{galat}}/(\mathrm{n}-\mathrm{p})$	
Total	n	$\mathbf{y}'\mathbf{y}$		

Kriteria Keputusan:

Tolak H_0 jika $\mathrm{F_{hitung}} > \mathrm{F_{tabel}} = \mathrm{F}_{(\mathrm{db_{reg}};\ \mathrm{db_{galat}};\alpha)}$

1. **Teorema 4.1.1**

   Asumsi: bila $\underline{\varepsilon} \approx N(\underline{0}, \sigma^2 I)$ maka $\underline{y} \sim N(X\beta, \sigma^2 I)$ sehingga $\frac{JK_{Reg}}{\sigma^2} \approx \chi^2_{r,\lambda}$ dengan derajat bebas r = k + 1 yang merupakan rank dari matrik $X(X'X)^{-1}X'$ dan parameter ketaksentralan $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}\underline{\beta}'(X'X)\underline{\beta}$ $\langle hint: sym,\ idemp\rangle$.

2. **Teorema 4.1.2**

   Asumsi: bila $\underline{\varepsilon} \approx N(\underline{0}, \sigma^2 I)$ maka $\underline{y} \sim N(X\beta, \sigma^2 I)$ sehingga $\frac{JK_{Res}}{\sigma^2} \approx \chi^2_{r,\lambda}$ dengan derajat bebas r = n - (k + 1) yang merupakan rank dari matrik $I - X(X'X)^{-1}X'$ dan parameter ketaksentralan $\lambda = 0$ $\langle hint: sym,\ idemp\rangle$.

3. **Teorema 4.1.3**

   JKReg dan JKRes saling bebas $\langle hint{:}AVB{=}0\rangle$.

4. **Teorema 4.1.4**

   Jika X matrik berukuran n x p merupakan matriks berpangkat penuh dengan rank r = k+1 maka (X'X) positive definit $\langle hint{:}definisi\ p.d\rangle$.

Pengujian hipotesis tentang parameter model

Membuat partisi

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ . \\ \beta_{r-1} \\ --- \\ \beta_r \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\gamma_1} \\ --- \\ \underline{\gamma_2} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} \underset{nxr}{X_1} & \underset{nx(k+1-r)}{X_2} \end{bmatrix}$$

Misalnya

$\mathrm{H_0}: \beta_1 = 0$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \cdots \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \cdots \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Model reduksi: $\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}^*$ Model reduksi: $\mathbf{y} = \mathbf{X}_2\boldsymbol{\gamma}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}^*$

Untuk menguji apakah kovariat pada partisi pertama berpengaruh terhadap y, ketika H_0 benar maka model tereduksinya adalah sebagai berikut.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_2\gamma_2 + \boldsymbol{\varepsilon}^*$$

Hipotesis yang diuji:

$$\mathrm{H}_0: \boldsymbol{\gamma}_1 = 0$$

Statistik uji:

$$\frac{R(\gamma_1|\gamma_2)/r\sigma^2}{JK_{galat}/(n-p)\sigma^2} = \frac{R(\gamma_1|\gamma_2)/r}{JK_{galat}/(n-p)} = \frac{KT_{(\gamma_1|\gamma_2)}}{KT_{galat}} \approx F_{(db_{(\gamma_1|\gamma_2)};\ db_{galat};\alpha)}$$

Tabel Anova

SK	db	JK	KT	F_{hitung}
Regresi				
Model penuh	p	$R(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$		
Model tereduksi	p-r	$R(\gamma_2) = \mathbf{y}'\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2{}'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2{}'\mathbf{y}$		
γ_1 setelah γ_2	r	$R(\gamma_1 \vert \gamma_2) = R(\boldsymbol{\beta}) - R(\gamma_2)$	$R(\gamma_1 \vert \gamma_2)/r$	$KT_{(\gamma_1 \vert \gamma_2)}/KT_{galat}$
Galat	n-p	$\mathbf{y}'\mathbf{y} - R(\boldsymbol{\beta})$	$JK_{galat}/(n-p)$	
Total	n	$\mathbf{y}'\mathbf{y}$		

Kriteria Keputusan:

Tolak H_0 jika $F_{hitung} > F_{tabel} = F_{(db_{(\gamma_1|\gamma_2)};\ db_{galat};\alpha)}$

1. **Lemma 4.2.1**

   Rank dari $\mathrm{X}_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'$ adalah $\mathrm{p}-\mathrm{r}$

2. **Lemma 4.2.2**

   $A=\mathrm{X}(\mathrm{X}'X)^{-1}X'-\mathrm{X}_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'$ adalah matriks idempoten

3. **Lemma 4.2.3**

   Rank dari $A=\mathrm{X}(\mathrm{X}'X)^{-1}X'-\mathrm{X}_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'$ adalah r.

4. **Lemma 4.2.4**

   Rank dari matriks $[I-\mathrm{X}(\mathrm{X}'X)^{-1}X']$adalah n-p $\langle hint: X'(I-\mathrm{X}(\mathrm{X}'X)^{-1}X')=0, partisi\rangle$.

5. **Teorema 4.2.1 (Cohran-Fisher)**

   Bila $\underline{z}_{nx1}\approx N\left(\underline{\mu},I\right)$ dan $\underline{z}'\underline{z}=\sum_{i=1}^{m}\underline{y}'A_i\underline{y}$ maka semua $\underline{y}'A_i\underline{y}$ bebas dan menyebar menurut $\chi^2_{r_i\lambda_i}$ dengan $r_i=r(A_i)$ dan $\lambda_i=\frac{1}{2}\underline{\mu}'A_i\underline{\mu}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{m}r_i=n$. $\langle hint: A_iA_j=0\rangle$

CONTOH SOAL

Diketahui data hasil suatu penelitian sebagai berikut.

x	y
2	1,9
3	2,7
4	4,2
5	4,8
6	4,8
7	5,1

a. Susunlah tabel anova dari data tersebut dan uji hipotesis $\mathrm{H}_0 : \beta = 0$ vs $\mathrm{H}_1 : \beta \neq 0$!

b. Misalkan ingin diuji hipotesis $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = 0$, tentukan model penuh dan model tereduksinya!

c. Ujilah hipotesis berdasarkan poin b!

Jawaban:

a. Susunlah tabel anova dari data tersebut dan uji hipotesis $H_0: \beta = 0$ vs $H_1: \beta \neq 0$!

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1{,}9 \\ 2{,}7 \\ 4{,}2 \\ 4{,}8 \\ 4{,}8 \\ 5{,}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

Tabel Anova

SK	db	JK	KT	$\mathbf{F_{hitung}}$
Regresi	p	$\mathbf{y'X(X'X)^{-1}X'y}$	JK_{reg}/p	KT_{reg}/KT_{galat}
Galat	n-p	$\mathbf{y'(I - X(X'X)^{-1}X')y}$	$JK_{galat}/(n-p)$	
Total	n	$\mathbf{y'y}$		

- Menghitung derajat bebas (db)
  $db_{reg} = p = 2$
  $db_{total} = n = 6$
  $db_{galat} = n - p = 6 - 2 = 4$

- Menghitung jumlah kuadrat (JK)

$$\mathbf{X}'\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}9 \\ 2{,}7 \\ 4{,}2 \\ 4{,}8 \\ 4{,}8 \\ 5{,}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23{,}5 \\ 117{,}2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 27 \\ 27 & 139 \end{bmatrix}$$

- Menghitung jumlah kuadrat (JK)

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{105}\begin{bmatrix} 139 & -27 \\ -27 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 139/105 & -9/35 \\ -9/35 & 2/35 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 139/105 & -9/35 \\ -9/35 & 2/35 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 23{,}5 \\ 117{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9724 \\ 0{,}6543 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{JK}_{\mathrm{reg}} = \mathbf{y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = [23{,}5 \quad 117{,}2]\begin{bmatrix} 0{,}9724 \\ 0{,}6543 \end{bmatrix} = 99{,}5354$$

- Menghitung jumlah kuadrat (JK)

$$JK_{total} = \mathbf{y}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1{,}9 & 2{,}7 & 4{,}2 & 4{,}8 & 4{,}8 & 5{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}9 \\ 2{,}7 \\ 4{,}2 \\ 4{,}8 \\ 4{,}8 \\ 5{,}1 \end{bmatrix} = 100{,}63$$

$$JK_{galat} = JK_{total} - JK_{reg} = 100{,}63 - 99{,}5354 = 1{,}0946$$

- Menghitung kuadrat tengah (KT)

$$KT_{reg} = {JK_{reg}}/{db_{reg}} = {99{,}5354}/{2} = 49{,}7677$$

$$KT_{galat} = {JK_{galat}}/{db_{galat}} = {1{,}0946}/{4} = 0{,}2736$$

- Menghitung F_{hitung}

$$F_{hitung} = {KT_{reg}}/{KT_{galat}} = 49,7677/0,2736 = 181,8995$$

Tabel Anova

SK	db	JK	KT	F_{hitung}
Regresi	2	99,5354	49,7677	181,8995
Galat	4	1,0946	0,2736	
Total	6	100,63		

- Uji hipotesis $\mathrm{H_0}: \beta = 0$ vs $\mathrm{H_1}: \beta \neq 0$

  Dari hasil sebelumnya, $\mathrm{F_{hitung}} = 181{,}8995 > \mathrm{F_{2;4;0,05}} = 6{,}944$ maka Tolak $\mathrm{H_0}$ atau cukup bukti untuk menerima $\mathrm{H_1}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa ada pengaruh yang signifikan antara parameter terhadap model pada taraf nyata 5%.

b. Misalkan ingin diuji hipotesis $\mathrm{H}_0\colon \beta_1 = 0$, tentukan model penuh dan model tereduksinya!

Model penuh:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dengan

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1{,}9 \\ 2{,}7 \\ 4{,}2 \\ 4{,}8 \\ 4{,}8 \\ 5{,}1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

Hipotesis yang diuji → $H_0: \beta_1 = 0$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 2 \\ 1 & \vdots & 3 \\ 1 & \vdots & 4 \\ 1 & \vdots & 5 \\ 1 & \vdots & 6 \\ 1 & \vdots & 7 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \cdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \cdots \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{X}_1$ $\mathbf{X}_2$

Sehingga model tereduksi

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\gamma_1 + \boldsymbol{\varepsilon}^* \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1,9 \\ 2,7 \\ 4,2 \\ 4,8 \\ 4,8 \\ 5,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [\beta_0] + \begin{bmatrix} \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2^* \\ \varepsilon_3^* \\ \varepsilon_4^* \\ \varepsilon_5^* \\ \varepsilon_6^* \end{bmatrix}$$

c. Ujilah hipotesis berdasarkan poin b!

Tabel Anova untuk $\mathrm{H_0}: \gamma_2 = 0$

SK	db	JK	KT	$\mathbf{F_{hitung}}$
Regresi				
Model penuh	p	$\mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$		
Model tereduksi	p-r	$\mathrm{R}(\gamma_1) = \mathbf{y}'\mathbf{X_1}(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}\mathbf{X_1}'\mathbf{y}$		
γ_2 setelah γ_1	r	$\mathrm{R}(\gamma_2 \vert \gamma_1) = \mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}) - \mathrm{R}(\gamma_1)$	$\mathrm{R}(\gamma_2 \vert \gamma_1)/\mathrm{r}$	$\mathrm{KT}_{(\gamma_2 \vert \gamma_1)}/\mathrm{KT_{galat}}$
Galat	n-p	$\mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathrm{R}(\boldsymbol{\beta})$	$\mathrm{JK_{galat}}/(\mathrm{n-p})$	
Total	n	$\mathbf{y}'\mathbf{y}$		

- Menghitung derajat bebas (db)

$$\mathrm{db}_{(\gamma_1)} = \mathrm{p} - \mathrm{r} = 2 - 1 = 1$$
$$\mathrm{db}_{(\gamma_2|\gamma_1)} = \mathrm{r} = 1$$

- Menghitung jumlah kuadrat

$$\mathrm{R}(\gamma_1) = \mathbf{y}'\mathbf{X_1}(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}\mathbf{X_1}'\mathbf{y} = \frac{\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{y_i}\right)^2}{\mathrm{n}} = \frac{(23{,}5)^2}{6} = 92{,}0417$$

$$\mathrm{R}(\gamma_2|\gamma_1) = \mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}) - \mathrm{R}(\gamma_1) = 99{,}5354 - 92{,}0417 = 7{,}4937$$

- Menghitung $\mathrm{F_{hitung}}$

$$\mathrm{KT}_{(\gamma_2|\gamma_1)} = {}^{\mathrm{R}(\gamma_2|\gamma_1)}/_{\mathrm{r}} = {}^{7{,}4937}/_{1} = 7{,}4937$$
$$\mathrm{F_{hitung}} = {}^{\mathrm{KT}_{(\gamma_2|\gamma_1)}}/_{\mathrm{KT_{galat}}} = {}^{7{,}4937}/_{0{,}2736} = 27{,}3892$$

Tabel Anova untuk $H_0: \gamma_2 = 0$

SK	db	JK	KT	F_{hitung}
Regresi				
Model penuh	2	99,5354		
Model tereduksi	1	92,0417		
γ_2 setelah γ_1	1	7,4937	7,4937	27,3892
Galat	4	1,0946	0,2736	
Total	6	100,63		

Dari hasil diatas, $F_{hitung} = 27{,}3892 > F_{1;4;0,05} = 7{,}709$ maka Tolak H_0 atau cukup bukti untuk menerima H_1, sehingga dapat disimpulkan bahwa peubah penjelas berpengaruh signifikan setelah ada intersep dalam model pada taraf nyata 5%.

Terima Kasih

IPB University
Bogor Indonesia

Departemen Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jl Meranti Wing 22 Level 4
Kampus IPB Darmaga - Bogor 16680
0251-8624535 | http://stat.ipb.ac.id