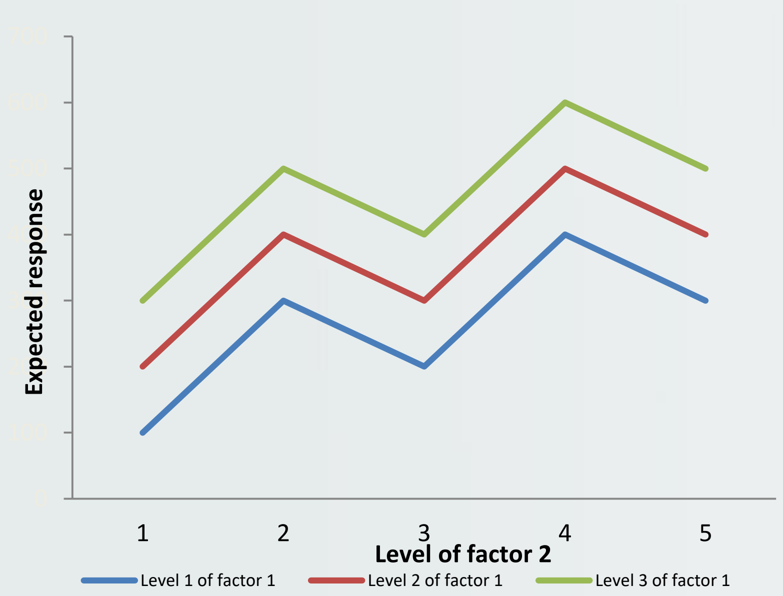
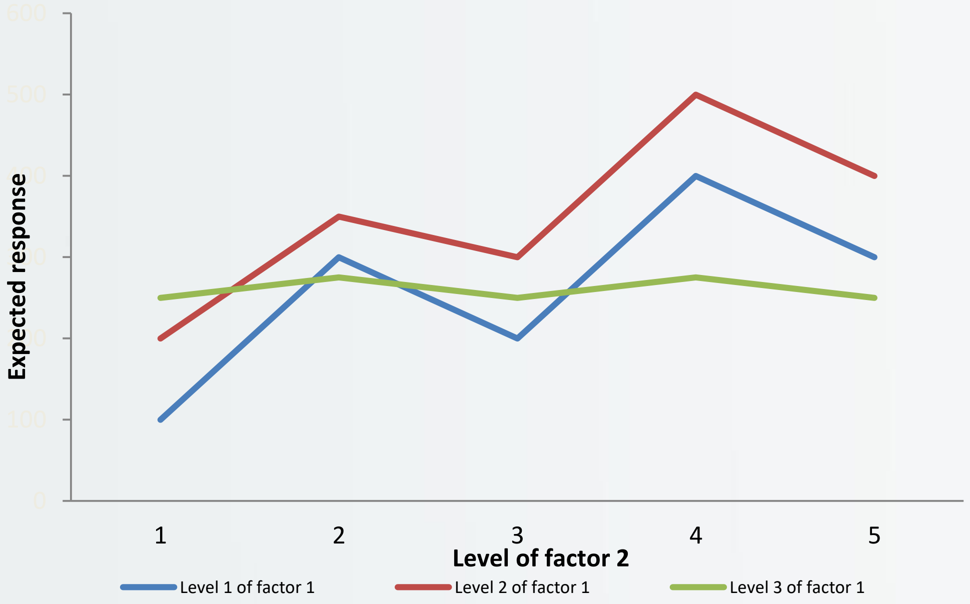
# 6.4 RANCANGAN DUA FAKTOR TANPA INTERAKSI: PENGARUH TETAP

# Rancangan Dua Faktor : Pengaruh Tetap




Gambar 1.1 Tanpa Interaksi




Gambar 1.2 Terda[at Interaksi

# Model Linier Rancangan Dua Faktor Tanpa Interaksi Secara Umum

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

$$i = 1,2,\dots,a; \quad j = 1,2,\dots,b;$$

Keterangan :

$y_{ij}$ : Nilai respon Faktor A taraf ke-$i$ dan Faktor B taraf ke-$j$

$\mu$ : Rataan Umum

$\tau_i$ : Pengaruh Faktor A taraf ke-$i$

$\beta_j$ : Pengaruh Faktor B taraf ke-$j$

$\varepsilon_{ij}$ : Pengaruh acak pada Faktor A taraf ke- $i$ dan Faktor B taraf ke-$j$

Jika diperluas, maka model tersebut dapat dituliskan menjadi :

$$
\begin{aligned}
y_{11} &= \mu + \tau_1 + \beta_1 + \varepsilon_{11} \\
y_{12} &= \mu + \tau_1 + \beta_2 + \varepsilon_{12} \\
&\vdots \\
y_{1b} &= \mu + \tau_1 + \beta_b + \varepsilon_{1b} \\
y_{21} &= \mu + \tau_2 + \beta_1 + \varepsilon_{21} \\
y_{22} &= \mu + \tau_2 + \beta_2 + \varepsilon_{22} \\
&\vdots \\
y_{2b} &= \mu + \tau_2 + \beta_b + \varepsilon_{2b} \\
&\vdots \\
y_{a1} &= \mu + \tau_a + \beta_1 + \varepsilon_{a1} \\
y_{a2} &= \mu + \tau_a + \beta_2 + \varepsilon_{a2} \\
&\vdots \\
y_{ab} &= \mu + \tau_a + \beta_b + \varepsilon_{ab}
\end{aligned}
$$

# Model jika dibentuk dalam model matriks:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{y}_{abx1} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1b} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2b} \\ \vdots \\ y_{a1} \\ y_{a2} \\ \vdots \\ y_{ab} \end{bmatrix}; \boldsymbol{X}_{abx(1+a+b)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\beta}_{(a+b+1)x1} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_a \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_b \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}_{abx1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1b} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2b} \\ \vdots \\ \varepsilon_{a1} \\ \varepsilon_{a2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ab} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ diasumsikan memiliki sebaran normal dengan nilai tengah **0** dan ragam $\boldsymbol{\sigma^2 I}$

# Testable Hypotheses

$$H_0 : C\boldsymbol{\beta} = 0$$

Dimana rank dari $C$ adalah $r(C) = m \leq a + b - 1$

Hipotesis yang dibangun dari Model 2 Faktor tanpa Interaksi :

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a$$

Tidak ada perbedaan pengaruh taraf pada Faktor A

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b$$

Tidak ada perbedaan pengaruh taraf pada Faktor B

# $\boldsymbol{X'X}$ dan **X'y** menjadi :

$$\boldsymbol{X'X} = \begin{bmatrix} ab & b & b & \ldots & b & a & a & \ldots & a \\ b & b & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ b & 0 & b & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \ldots & b & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a & 1 & 1 & \ldots & 1 & a & 0 & \ldots & 0 \\ a & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & a & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & a \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X'y} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij} \\ \sum_{j=1}^{b} y_{1j} \\ \sum_{j=1}^{b} y_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{b} y_{aj} \\ \sum_{i=1}^{a} y_{i1} \\ \sum_{i=1}^{a} y_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{a} y_{ib} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{..} \\ y_{1.} \\ y_{2.} \\ \vdots \\ y_{a.} \\ y_{.1} \\ y_{.2} \\ \vdots \\ y_{.b} \end{bmatrix}$$

$$r\left(\boldsymbol{X'X}_{(1+a+b)x(1+a+b)}\right) = (1 + a + b) - 2 = a + b - 1$$

# Persamaan normal : $(\boldsymbol{X'X})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{X'y}$

$$\begin{bmatrix} ab\hat{\mu} + b\sum_i \hat{\tau}_i + a\sum_j \hat{\beta}_j \\ b\hat{\mu} + b\hat{\tau}_i + \sum_j \hat{\beta}_j \\ b\hat{\mu} + b\hat{\tau}_2 + \sum_j \hat{\beta}_j \\ \vdots \\ b\hat{\mu} + b\widehat{\tau_a} + \sum_j \hat{\beta}_j \\ a\hat{\mu} + \sum_i \hat{\tau}_i + a\widehat{\beta_1} \\ a\hat{\mu} + \sum_i \hat{\tau}_i + a\widehat{\beta_2} \\ \vdots \\ a\hat{\mu} + \sum_i \hat{\tau}_i + a\hat{\beta}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{..} \\ y_{1.} \\ y_{2.} \\ \vdots \\ y_{a.} \\ y_{.1} \\ y_{.2} \\ \vdots \\ y_{.b} \end{bmatrix}$$

$$y_{..} = ab\hat{\mu}$$

$$y_{1.} = b\hat{\mu} + b\widehat{\tau_i}$$

$$y_{2.} = b\hat{\mu} + b\widehat{\tau_2}$$

$$y_{a.} = b\hat{\mu} + b\widehat{\tau_a}$$

$$y_{.1} = a\hat{\mu} + a\widehat{\beta_1}$$

$$y_{.2} = a\hat{\mu} + a\widehat{\beta_2}$$

$$y_{.b} = a\hat{\mu} + a\widehat{\beta_b}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \widehat{\tau_1} \\ \widehat{\tau_2} \\ \vdots \\ \widehat{\tau_a} \\ \widehat{\beta_1} \\ \widehat{\beta_2} \\ \vdots \\ \widehat{\beta_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{..} \\ \overline{y_{1.}} - \bar{y}_{..} \\ \overline{y_{2.}} - \bar{y}_{..} \\ \vdots \\ \overline{y_{a.}} - \bar{y}_{..} \\ \overline{y_{.1}} - \bar{y}_{..} \\ \overline{y_{.2}} - \bar{y}_{..} \\ \vdots \\ \overline{y_{.b}} - \bar{y}_{..} \end{bmatrix}$$

$$\left\langle hint: \sum_i \tau_i = 0, \sum_j \beta_j = 0, \right\rangle$$

Persamaan normal tersebut digunakan untuk mencari $JK_{Reg(Full)}$ :

$$JK_{Reg(Full)} = \boldsymbol{b'X'y}$$

$$= y_{..}^2/ab + \sum_i y_{i.}(\overline{y_{i.}} - \overline{y}_{..}) + \sum_j y_{.j}(\overline{y_{.j}} - \overline{y}_{..})$$

$$= \sum_i y_{i.}^2/b + \sum_j y_{.j}^2/a - y_{..}^2/ab$$

Untuk mencari model tereduksi, diasumsikan $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = \tau,$ sehingga modelnya akan menjadi :

$$y_{ij} = \mu^* + \beta_j + \varepsilon_{ij} \; (i = 1,2,..a\,; j = 1,2,..,b)$$

dimana $\mu^* = \mu + \tau$ merupakan model satu faktor, sehingga :

$$JK_{Reg(Tereduksi)} = \sum_j y_{.j}^2/a$$

$$JK_{Reg(Hipotesis)} = JK_{Reg(Full)} - JK_{Reg(Tereduksi)}$$

$$= \sum_i y_{i.}^2/b + \sum_j y_{.j}^2/a - y_{..}^2/ab - \sum_j y_{.j}^2/a$$

$$= \sum_i y_{i.}^2/b - y_{..}^2/ab$$

derajat bebas : db total → $ab$

db regresi → $a + b - 1$

db residual → $ab - (a + b - 1) = (a - 1)(b - 1)$

Model tereduksi untuk $H_0$: $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a$

db regresi(tereduksi) → $b$

db hipotesis → $(a + b - 1) - b = (a - 1)$

Model tereduksi untuk $H_0$: $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b$

db regresi(tereduksi) → $a$

db hipotesis → $(a + b - 1) - a = (b - 1)$

Sehingga, $H_0$: $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a$ dapat diuji dengan :

$$F_{(a-1),(a-1)(b-1)} = \frac{\left[\sum_i y_{i.}^2/b - y_{..}^2/ab\right]/(a-1)}{JK_{res}/(a-1)(b-1)}$$

dan, $H_0$: $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b$ dapat diuji dengan :

$$F_{(b-1),(a-1)(b-1)} = \frac{\left[\sum_j y_{.j}^2/a - y_{..}^2/ab\right]/(b-1)}{JK_{res}/(a-1)(b-1)}$$

# ANOVA Model Dua Faktor Tanpa Interaksi :

| Sumber | db | JK |
|---|---|---|
| Model Regresi Penuh | (a+b-1) | $\sum_i y_{i.}^2/b + \sum_j y_{.j}^2/a - y_{..}^2/ab$ |
| Nilai Tengah | 1 | $y_{..}^2/ab$ |
| Model Hipotesis I | (a-1) | $\sum_i y_{i.}^2/b - y_{..}^2/ab$ |
| Model Hipotesis II | (b-1) | $\sum_j y_{.j}^2/a - y_{..}^2/ab$ |
| Residual/Galat | (a-1)(b-1) | $JK_{Total} - JK_{Reg(Penuh)}$ |
| Total (tidak terkoreksi) | ab | $\sum_i \sum_j y_{ij}^2$ |

# ANOVA berdasarkan total terkoreksi :

| Sumber | db | JK |
|---|---|---|
| Model Regresi Penuh | (a+b-1) | $\sum_i y_{i.}^2/b + \sum_j y_{.j}^2/a - y_{..}^2/ab$ |
| Model Hipotesis I | (a-1) | $\sum_i y_{i.}^2/b - y_{..}^2/ab$ |
| Model Hipotesis II | (b-1) | $\sum_j y_{.j}^2/a - y_{..}^2/ab$ |
| Residual/Galat | (a-1)(b-1) | $JK_{Total} - JK_{Reg(Penuh)}$ |
| Total (terkoreksi) | ab-1 | $\sum_i \sum_j y_{ij}^2 - y_{..}^2/ab$ |

# 6.5 Rancangan Acak Kelompok Lengkap(RAKL)-Randomized Complete Block Design

# Pengantar

- Dalam sebuah percobaan adakalanya ada factor lingkungan yang mempengaruhi respon atau hasil percobaan selain perlakuan yang dilakukan.
- Ketika ada 1 sumber keragaman selain perlakuan yang dilakukan maka desain percobaan yang tepat adalah Rancangan Acak Kelompok Lengkap atau Randomized Complete Block Design.
- Rancangan Acak Kelompok Lengkap membagi unit percobaan ke dalam block-block. Dimana dalam 1 block mempunyai karakteristik factor lingkungan yang sama. Seluruh perlakuan diacak dalam seluruh unit percobaan dalam 1 block.

# Model Linier RAKL

- Model dari design ini:

$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$, i=1,2,…a, j=1,2,…b

- $\tau_i$ merupakan efek dari perlakuan, $\beta_j$ merupakan efek dari block.
- Model yang digunakan sama dengan model dalam kasus model 2 factor tanpa interaksi yang telah dibahas sebelum nya.
- Terdapat perbedaan yang penting dari model 2 factor tanp a interaksi yaitu pengacakan hanya dilakukan sekali. Peng acakan hanya dilakukan pada perlakuan dalam satu block, dan **tidak dilakukan pengacakan block**.

# Pengujian Dalam RAKL (1)

- Pengujian Perlakuan: $H_0$: $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a$

  Pengujian untuk hipotesis ini sama dengan pengujian pada model 2 factor tanpa interaksi.
- Pengujian Blok: $H_0$: $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b$

  Pengujian hipotesis ini tidak bisa dilakukan menggunakan uji F.
- Untuk mengetahui kegunaan dari block dengan menghitung Relatif Efisi ensi RAKL dibandingan dengan model 1 factor (dalam percobaan Ranca ngan Acak Lengkap(RAL))
- Relatif Efisiensi RAKL dibandingkan model 1 factor (RAL):

$$RE = \frac{SS_{Blocks} + b(a-1)s^2}{(ab-1)s^2}$$

- Dimana $s^2$ merupakan jumlah kuadrat galat/ jumlah kuadrat residual dan

$$SS_{Blocks} \sum_{j-1}^{b} \frac{{y_{.j}}^2}{a} - \frac{{y_{..}}^2}{ab}$$

- SS blocks dalam model 2 factor tanpa interaksi disebut dengan $SS_{Reg(HipotesisII)}$

# Pengujian Dalam RAKL (2)

- Untuk nilai RE jika lebih dari 1 mengindikasikan dengan adanya block efektif.
- Selain itu untuk mengetahui efektifitas blocking Uji F pseudo yang sama dengan uji Hipotesis factor kedua dalam model 2 factor tanpa interaksi.

$$F_{pseudo} = \frac{SS_{Blocks}/(b-1)}{SS_{res}/(a-1)(b-1)}$$

- Arnold, Lentner, dan Hinkleman menunjukkan hubungan antara $F_{pseudo}$ dengan RE yaitu:

$$RE = c + (1-c)F_{pseudo}$$

- dimana c=b(a-1)/(ab-1). Terlihat bahwa c≤1 sehingga
  - Jika $F_{pseudo}$<1, RE<1
  - Jika $F_{pseudo}$=1, RE=1
  - Jika $F_{pseudo}$>1, RE>1

– $F_{pseudo}$ tidak bisa digunakan sebagai Uji Formal F untuk menguji perbedaan antar block namun hanya digunakan untuk mengetahui efekti vitas dari blocking atau pengelompokan.

*Example 6.5.1*

| | | Paving Type | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Lokasi (Block) | 1 | 42,7 | 39,3 | 48,5 | 32,8 |
| | 2 | 50,0 | 38,0 | 49,7 | 40,2 |
| | 3 | 51,9 | 46,3 | 53,5 | 51,1 |

# Layout Percobaan RAK

| Block 1 | Block 2 | Block 3 |
|---|---|---|
| Type 1 | Type 2 | Type 3 |
| Type 4 | Type 3 | Type 1 |
| Type 2 | Type 1 | Type 2 |
| Type 3 | Type 4 | Type 4 |

# Contoh Soal :

Perhatikan model linier rancangan dua faktor tanpa interaksi.

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad ,i = 1,2,3 \,, j = 1,2.$$

a. Susun model tersebut dalam bentuk matriks
b. Tentukan matriks **X, X’X, X’y**
c. Tentukan Rank (**X**) atau Rank (**X’X**)
d. Tentukan penduga kuadarat terkecil bagi parameter model pada poin a dengan memberikan persyaratan

$$\sum_{\boldsymbol{i}} \hat{\tau}_{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{j}} \hat{\beta}_{\boldsymbol{j}} = \mathbf{0}$$

e. Apakah $H_0 = \boldsymbol{\tau_1} = \boldsymbol{\tau_2} = \boldsymbol{\tau_3}$ berikut ini testable? Jika iya buatlah rumusa n pengujiannya.

# a. Susun model tersebut dalam bentuk matriks.

Untuk $i = 1, 2, 3$ dan $j = 1, 2$

$$
\begin{aligned}
y_{11} &= \mu + \tau_1 + \beta_1 + \varepsilon_{11} \\
y_{12} &= \mu + \tau_1 + \beta_2 + \varepsilon_{12} \\
y_{21} &= \mu + \tau_2 + \beta_1 + \varepsilon_{21} \\
y_{22} &= \mu + \tau_2 + \beta_2 + \varepsilon_{22} \\
y_{31} &= \mu + \tau_3 + \beta_1 + \varepsilon_{31} \\
y_{32} &= \mu + \tau_3 + \beta_2 + \varepsilon_{32}
\end{aligned}
$$

dalam bentuk matriks :

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$
\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{31} \\ y_{32} \end{bmatrix};
\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};
\quad
\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix};
\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \end{bmatrix}
$$

# b. Tentukan matriks **X, X'X, X'y.**

- $$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $$\boldsymbol{X'X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- $$\boldsymbol{X'y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{31} \\ y_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} + y_{31} + y_{32} \\ y_{11} + y_{12} \\ y_{21} + y_{22} \\ y_{31} + y_{32} \\ y_{11} + y_{21} + y_{31} \\ y_{12} + y_{22} + y_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{..} \\ y_{1.} \\ y_{2.} \\ y_{3.} \\ y_{.1} \\ y_{.2} \end{bmatrix}$$

c. Tentukan Rank (**X**) atau Rank (**X'X**)

Properties : $\mathrm{X_{nxk}, n \geq k, r(X) = k \Rightarrow r(X) = r(X') = r(X'X) = k}$

$$r(\boldsymbol{X}) = r(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = a + b - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$$

d. Tentukan penduga kuadrat terkecil bagi parameter model pada poin a dengan memberikan persyarat an :

$$\sum_i \hat{\tau}_i = \sum_j \hat{\beta}_j = 0$$

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{..} \\ y_{1.} \\ y_{2.} \\ y_{3.} \\ y_{.1} \\ y_{.2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 6\mu + 2\tau_1 + 2\tau_2 + 2\tau_3 + 3\beta_1 + 3\beta_2 &= y_{..} \\ 2\mu + 2\tau_1 + \beta_1 + \beta_2 &= y_{1.} \\ 2\mu + 2\tau_2 + \beta_1 + \beta_2 &= y_{2.} \\ 2\mu + 2\tau_3 + \beta_1 + \beta_2 &= y_{3.} \\ 3\mu + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + 3\beta_1 &= y_{.1} \\ 3\mu + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + 3\beta_2 &= y_{.2} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \\ \hat{\tau}_3 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{3.} - \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{.1} - \bar{y}_{..} \\ \bar{y}_{.2} - \bar{y}_{..} \end{bmatrix}$$

e. Apakah hipotesis-hipotesis berikut ini testable? Jika iya bu atlah rumusan pengujiannya.

$$H_0: \boldsymbol{\tau_1} = \boldsymbol{\tau_2} = \boldsymbol{\tau_3}$$

$$H_0: \begin{cases} \boldsymbol{\tau_1} - \boldsymbol{\tau_2} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau_2} - \boldsymbol{\tau_3} = \mathbf{0} \end{cases}$$

atau

$$H_0: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$H_0: \boldsymbol{t}'\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{t'\beta}$ dapat diduga jika $\boldsymbol{t'H = t'}$

$$\boldsymbol{t'H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{t'}$$

Oleh karena $\boldsymbol{t'H = t'}$ maka $\boldsymbol{t'\beta}$ estimable, sehingga hipotesis $\boldsymbol{H_0 = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3}$ **test able**

Rumus pengujiannyaa adalah:

$$F_{m,(n-r)} = \frac{\boldsymbol{(cb)'(c(X'X)^c c')(cb)/m}}{s^2}$$

Dengan

$\boldsymbol{c = t'}$

$s^2 = \frac{\boldsymbol{y'y - b'X'y}}{n-r}$

$n$ : jumlah amatan data

$m$ : rank matriks $\boldsymbol{c}$

$r$ : rank matriks $\boldsymbol{X'X}$

# Thank You

# Referensi


Myers, RH, and Milton, JS. 1991. A First Course in The Theory of Linear Statistical Models. PWS-Kent Pub Comp. Boston.