Kuliah | Pengantar Model Linier

Model Linear Tidak Berpangkat Penuh

IPB University
Bogor Indonesia

Cakupan Materi

- 5.5 Fungsi parameter yang dapat diduga (*Estimable*)
- 5.6 Pendugaan Ragam Galat
- 5.7 Selang kepercayaan fungsi parameter

Rangkuman Materi Sebelumnya

- Misalkan $\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dimana X adalah matriks berukuran $n \; x \; p$ dengan rank $r \leq p, E[\varepsilon] = 0$, dan var $\varepsilon = \sigma^2 I$.
  - Persamaan normal **(X'X)b = X'y.**
  - Penduga bagi $\boldsymbol{\beta}$ adalah **b = (X'X)^{c}X'y**
- Fungsi dari $t'\beta$ dikatakan dapat diduga (*estimable*) jika
  - ada sebuah vektor c sehingga $E[c'y] = t'\beta$. (definisi)
  - ada solusi dari persamaan (X'X)**z** = **t**. (theorem 5.4.1)
  - $t'(X'X)^c(X'X) = t'$ di mana $(X'X)^c$ adalah sembarang matriks kebalikan umum dari $(X'X)$. (theorem 5.4.2)
  - Penduga **t' β** adalah z' X' ***y*** dimana z adalah sebuah solusi dari sistem (X' X) z = t. (lemma 5.41)
  - Selanjutnya, estimasi linear dan tak bias terbaik bagi $\boldsymbol{t'\beta}$ adalah $\boldsymbol{t'b}$, dimana $\boldsymbol{b}$ adalah solusi terhadap persamaan normal.

Fungsi Linier parameter yang dapat diduga (lanjutan)

Teorema 5.5.1.

Misalkan $y = X\beta + \varepsilon$ dimana *X* merupakan matriks berukuran *n x p* dengan rank $r \leq p$, $E[\varepsilon] = 0$, dan Var $\varepsilon = \sigma^2 I$. setiap komponen dari $X\beta$ estimable.

Teorema 5.5.2.

Misalkan $t_1'\beta, t_2'\beta, \ldots, t_k'\beta$ merupakan kumpulan fungsi yang estimable.

- Jika $z = a_1 t_1'\beta + a_2 t_2'\beta + \cdots + a_k t_k'\beta$ merupakan kombinasi linier dari fungsi ini. Maka z juga estimable.
- Penduga linier tak bias terbaik untuk *z* adalah:

  $z = a_1 t_1' b + a_2 t_2' b + \cdots + a_k t_k' b$

  dimana *b* merupakan solusi banyak dari sistem persamaan normal.

Penduga Ragam Galat

Teorema 5.6.1.

Jumlah kuadrat galat (SS_{Res}) dapat ditulis sebagai:

$$SS_{Res} = \boldsymbol{y}'[I - X(X'X)^c X']\boldsymbol{y}$$

dimana $(X'X)^c$ adalah matriks kebalikan umum untuk $X'X$

- **Pembuktian**

Pembuktian Teorema 5.6.1.

$$SS_{Res} = (\mathbf{y} - X\mathbf{b})'(\mathbf{y} - \mathrm{X}\mathbf{b})$$

dengan menguraikan sisi sebelah kanan, diperoleh:

$$\begin{aligned} SS_{Res} &= (\mathbf{y}' - \mathbf{b}'X')'(\mathbf{y} - X\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{b}'X'\mathbf{y} - \mathbf{y}'X\mathbf{b} + \mathbf{b}'X'X\mathbf{b} \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\mathbf{y}'X\mathbf{b} + \mathbf{b}'X'X\mathbf{b} \end{aligned}$$

$\mathbf{b} = (X'X)^{\boldsymbol{c}}X'\mathbf{y}$ dan $\mathbf{b}' = \mathbf{y}'X(X'X)^{\boldsymbol{c}}$ dimana $(X'X)^c$ adalah matriks kebalikan umum untuk $X'X$.

$$SS_{Res} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\mathbf{y}'X(X'X)^{\boldsymbol{c}}X'\mathbf{y} + \mathbf{y}'X(X'X)^{\boldsymbol{c}}X'X(X'X)^{\boldsymbol{c}}X'\mathbf{y}$$

Berdasarkan properti matriks kebalikan umum, $X(X'X)^{\boldsymbol{c}}X'X = X$

Pembuktian Teorema 5.6.1. (Lanjutan)

Sehingga,

$$\begin{aligned} SS_{Res} &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\mathbf{y}'X(X'X)^{\mathbf{c}}X'\mathbf{y} + \mathbf{y}'X(X'X)^{\mathbf{c}}X' \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'X(X'X)^{\mathbf{c}}X'\mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}'[I - X(X'X)^{\mathbf{c}}X']\mathbf{y} \end{aligned}$$

Dalam pendugaan model tidak penuh, s^2 yaitu:

$$s^2 = \frac{SS_{Res}}{n-r}$$

Penduga Ragam Galat (lanjutan)

Teorema 5.6.2.

$\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dengan matriks *X* berukuran *n x p* dan rank $r \leq p$, E($\boldsymbol{\varepsilon}$)=0, dan var $\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma^2 I$. Maka s^2 adalah penduga tak bias bagi σ^2.

Pembuktian

Pembuktian Teorema 5.6.2.

$$E[s^2] = E\left[\frac{SS_{Res}}{n-r}\right] = \frac{1}{n-r}E[SS_{Res}]$$
$$= \frac{1}{n-r}E[\mathbf{y}'[I - X(X'X)^{\boldsymbol{c}}X']\mathbf{y}]$$

Dari Teorema 2.2.1,

$$E[s^2] = \frac{1}{n-r}\{\mathrm{tr}[I - X(X'X)^{\boldsymbol{c}}X']\sigma^2 + (X\boldsymbol{\beta})'[I - X(X'X)^{\boldsymbol{c}}X']X\boldsymbol{\beta}\}$$

karena $I - X(X'X)^{\boldsymbol{c}}X'$ simetrik dan idempoten, maka

$$\mathrm{tr}[I - X(X'X)^{\boldsymbol{c}}X'] = \mathrm{r}[I - X(X'X)^{\boldsymbol{c}}X']$$

Berdasarkan properti matriks kebalikan umum nomor 6,

$$\mathrm{r}[I - X(X'X)^{\boldsymbol{c}}X'] = n - r$$

Pembuktian Teorema 5.6.2. (Lanjutan)

sehingga

$$E[s^2] = \frac{1}{n-r}[(\mathrm{n}-\mathrm{r})\sigma^2 + \boldsymbol{\beta}'X'X\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'X'X(X'X)^{\boldsymbol{c}}X'X\boldsymbol{\beta}]$$

$$E[s^2] = \frac{1}{n-r}[(\mathrm{n}-\mathrm{r})\sigma^2 + \boldsymbol{\beta}'X'X\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'X'X\boldsymbol{\beta}]$$

$$E[s^2] = \frac{1}{n-r}[(\mathrm{n}-\mathrm{r})\sigma^2] = \sigma^2$$

Teorema 5.7.1.

Misalkan ***y*** = *X***β** + **ε** dimana *X* adalah matriks berukuran *n* x *p* dengan pangkat *r* ≤ *p* , **β** adalah vektor ukuran *p* x 1 dari parameter, dan **ε** adalah vektor acak berukuran *n* x 1 yang menyebar normaldengan rata-rata **0** dan ragam $\sigma^{2}\boldsymbol{I}$.

Kemudian

$$\frac{(n-r)s^2}{\sigma^2} = \frac{SS_{Res}}{\sigma^2}$$

Mengikuti sebaran *chi-squared* dengan derajat bebas *n*-*r*.

Selang Keprcayaan dari **t'β** (*n*-*r* df): **t'b** ± $\mathbf{t}_{\alpha/2}\sqrt{\boldsymbol{t}'(X'X)^{c}\boldsymbol{t}}$

Pustaka

1. Myers, R.H. dan Milton, J.S. 1991. A First Course in the Theory of Linear Statistical Models. Boston: PWS-KENT Publishing Company.
2. Sumertajaya, I.M. 2019. Pengantar Model Linier. Bahan Ajar. Bogor: Program Magister Statistika Terapan IPB.

IPB University

— Bogor Indonesia —

Tugas Penyusunan
Bahan Ajar Pengantar Model Linier

Disusun oleh:

I Made Sumertajaya

Ardi Surya (BPS 2019)

Terima Kasih

IPB University
Bogor Indonesia