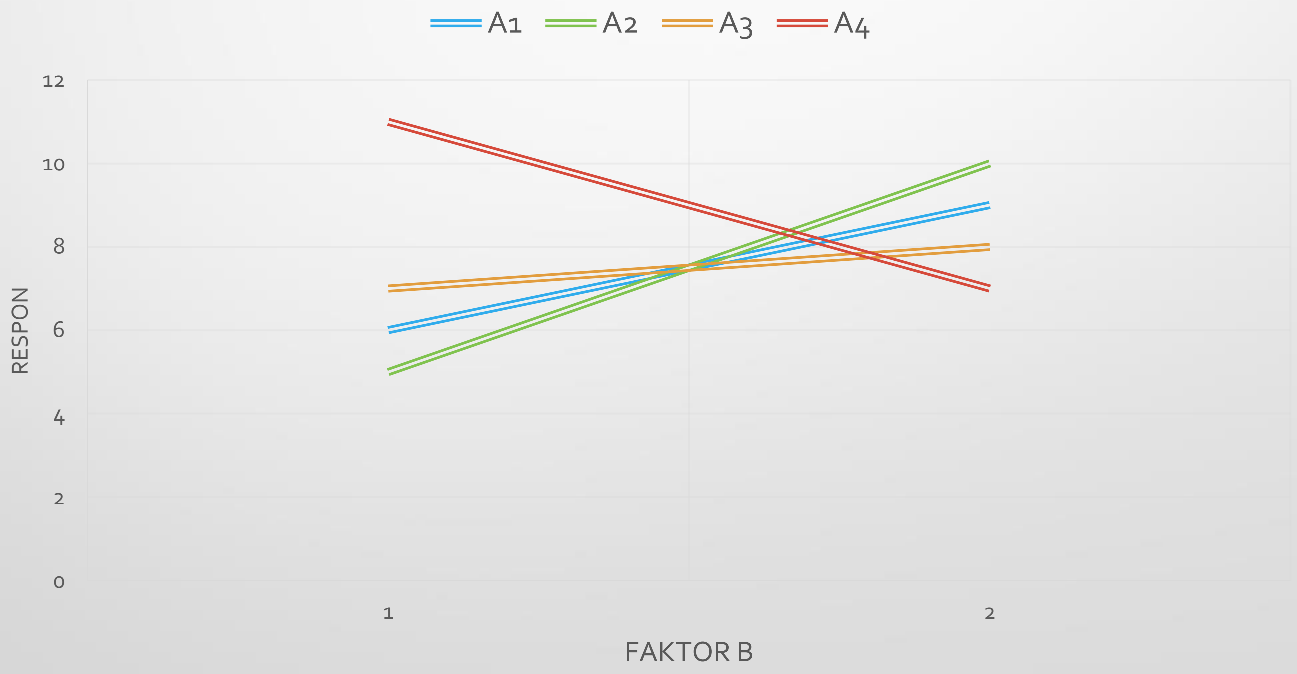
6.6 Model 2 Faktor dengan Interaksi : Efek Tetap

Pengantar

- Interaksi antara 2 perlakuan terjadi apabila respon antara 2 taraf factor A pada satu taraf factor B berbeda dengan respon antara 2 taraf yang sama dari factor A pada taraf yang lain dari factor B.
- Ilustrasi:



Model Linier

- Model untuk desain 2 factor dengan interaksi:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

  i= 1,2,...,a; j=1,2,...,b; k=1,2,...,n

- τ_i merupakan efek dari factor pertama, β_j merupakan efek dari factor kedua, dan $(\tau\beta)_{ij}$ interaksi antara factor pertama dan kedua.
- Dengan hipotesis yang diuji:
  - Ho : Tidak ada interaksi antara factor I dan factor II
  - H'o : Tidak ada perbedaan pengaruh dari level factor ke I
  - H''o : Tidak ada perbedaan pengaruh dari level factor ke II

Model Linier dalam Matriks (1)

- Penjabaran dari model $y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$, i= 1,2,…,a; j=1,2,…,b; k=1,2,…,n

  $y_{111} = \mu + \tau_1 + \beta_1 + (\tau\beta)_{11} + \varepsilon_{111}$

  .

  $y_{11n} = \mu + \tau_1 + \beta_1 + (\tau\beta)_{11} + \varepsilon_{11n}$

  .

  .

  $y_{1b1} = \mu + \tau_1 + \beta_b + (\tau\beta)_{1b} + \varepsilon_{1b1}$

  .

  $y_{1bn} = \mu + \tau_1 + \beta_b + (\tau\beta)_{1b} + \varepsilon_{1bn}$

  .

  .

  $y_{ab1} = \mu + \tau_a + \beta_b + (\tau\beta)_{ab} + \varepsilon_{ab1}$

  .

  $y_{abn} = \mu + \tau_a + \beta_b + (\tau\beta)_{ab} + \varepsilon_{abn}$

Model Linier dalam Matriks (2)

$$\underline{y}_{abnx1} = \begin{bmatrix} y_{111} \\ \vdots \\ y_{11a} \\ \vdots \\ y_{1b1} \\ \vdots \\ y_{1bn} \\ \vdots \\ y_{ab1} \\ \vdots \\ y_{abn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{X}_{abx(1+a+b)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} [\mu & \tau_1 & . & \tau_a & \beta_1 & . & \beta_b & (\tau\beta)_{11} & . & (\tau\beta)_{a1} & (\tau\beta)_{ab}] \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & 0 & 1 & . & 0 & 1 & . & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & . & 0 & 1 & . & 0 & 1 & . & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & . & 0 & 0 & . & 1 & 0 & . & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & . & 0 & 0 & . & 1 & 0 & . & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & . & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 1 & 0 & . & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{abnx1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \vdots \\ \varepsilon_{11a} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1b1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1bn} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ab1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{abn} \end{bmatrix} \qquad \underline{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_a \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_b \\ (\tau\beta)_{11} \\ \vdots \\ (\tau\beta)_{1b} \\ \vdots \\ (\tau\beta)_{a1} \\ \vdots \\ (\tau\beta)_{ab} \end{bmatrix}$$

Model Linier Dalam Matriks (3)

$$
\boldsymbol{X'X} = \left[\begin{array}{c|ccc|ccc|cccccccc}
abn & bn & . & bn & an & . & an & n & . & n & . & . & n & . & n \\
\hline
bn & bn & . & 0 & n & . & n & n & . & n & . & . & 0 & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
bn & 0 & . & bn & n & . & n & 0 & . & 0 & . & . & n & . & n \\
\hline
an & n & . & n & an & . & 0 & n & . & 0 & . & . & n & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
an & n & . & n & 0 & . & an & 0 & . & n & . & . & 0 & . & n \\
\hline
n & n & . & 0 & n & . & 0 & n & . & 0 & . & . & 0 & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
n & n & . & 0 & 0 & . & n & 0 & . & n & . & . & 0 & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
n & 0 & . & n & n & . & 0 & 0 & . & 0 & . & . & n & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
n & 0 & . & n & 0 & . & n & 0 & . & 0 & . & . & 0 & . & n
\end{array}\right]
$$

R(**X’X**)=(1+a+b+ab)-1-a-b=ab

Model Linier dalam Matriks (4)

$$\mathbf{X}'\underline{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} y_{111} + y_{112} + \cdots + y_{abn} \\ y_{111} + y_{112} + \cdots + y_{11n} \\ . \\ y_{a11} + y_{a12} + \cdots + y_{a1n} \\ y_{111} + \cdots + y_{11n} + y_{a11} + \cdots + y_{a14} \\ . \\ y_{1b1} + \cdots + y_{1bn} + y_{ab1} + \cdots + y_{abn} \\ y_{111} + \cdots + y_{11n} \\ . \\ . \\ y_{ab1} + \cdots + y_{abn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \\ \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{1jk} \\ . \\ \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ajk} \\ \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{i1k} \\ . \\ \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ibk} \\ \sum_{k=1}^{n} y_{11k} \\ . \\ . \\ \sum_{k=1}^{n} y_{abk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{...} \\ y_{1..} \\ . \\ y_{a..} \\ y_{.1.} \\ . \\ y_{.b.} \\ y_{11.} \\ . \\ . \\ y_{ab.} \end{bmatrix}$$

Pengujian Interaksi

- Model 2 factor: $y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$, i=1,2,…,a; j=1,2,…,b; k=1,2,…,n
- Jika $\mu_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij}$. Tidak ada interaksi jika dan hanya jika $\left(\mu_{ij} - \mu_{ij'}\right) - \left(\mu_{i'j} - \mu_{i'j'}\right) = 0$ untuk semua i,i',j,j'
- Dengan mesubstitusikan persamaan di atas, terdapat interaksi jika dan hanya jika

$$\left((\tau\beta)_{ij} - (\tau\beta)_{ij'}\right) - \left((\tau\beta)_{i'j} - (\tau\beta)_{i'j'}\right) = 0$$

Solusi Persamaan Normal dan Pengujian Interaksi

Ada 2 metode untuk memperoleh solusi system persamaan normal dan dilanjutkan pengujian hipotesis:

- Metode Matriks Kebalikan Umum
- Metode Reparameterisasi

1. Metode Matriks Kebalikan Umum

- Dalam kasus Model Tak Penuh persamaan normal:

$$(\boldsymbol{X'X})\underline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{X'}\underline{\boldsymbol{y}}$$

- **S**olusi dari Sistem persamaan normal:

$$\underline{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{X'X})^{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{X'}\underline{\boldsymbol{y}}$$

  Dimana **(X'X)^C^** merupakan matriks kebalikan umum dari **X'X** dan bersifat tidak unik

- Pengujian interaksi:
  - Ho: **C**$\underline{\boldsymbol{\beta}}$=0, dimana **C** merupakan matriks berordo (a-1)(b-1)x (a+b+ab+1) yang merupakan penjabaran dari definisi $\left((\tau\beta)_{ij}-(\tau\beta)_{ij'}\right)-\left((\tau\beta)_{i'j}-(\tau\beta)_{i'j'}\right)=0$ untuk seluruh kondisi i,i',j,j'
  - Pengujian dilakukan sesuai dengan Langkah Pengujian Pada Kondisi Umum (Myers 6.1)
  - Statistik Uji:

$$F_{m,n-r} = \frac{(\boldsymbol{C}\underline{\boldsymbol{b}})'\{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X'X})^{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{C'}\}^{-1}(\boldsymbol{C}\underline{\boldsymbol{b}})/m}{s^2}$$

  - Dimana m merupakan rank dari matriks **C** yang berordo mxp.
  - Tolak Ho jika F hit > F tabel

Contoh Kasus dengan Metode MKU

- Misal model 2 factor dengan jumlah taraf factor pertama berjumlah 2(a=2), jumlah taraf factor kedua berjumlah 2(b=2), dan ulangan untuk masing-masing kombinasi factor masing2 sebanyak 2(n=2).
- Ho: $\left((\tau\beta)_{11}-(\tau\beta)_{12}\right)-\left((\tau\beta)_{21}-(\tau\beta)_{22}\right)=0$
- Dalam bentuk matriks Ho: C$\underline{\beta}$=0
- Dimana $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{\beta}}$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ (\tau\beta)_{11} \\ (\tau\beta)_{12} \\ (\tau\beta)_{21} \\ (\tau\beta)_{22}\end{bmatrix}$$

2. Reparameterisasi(1)

- Model untuk desain 2 factor dengan interaksi:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

i= 1,2,...,a; j=1,2,...,b; k=1,2,...,n

- Definisi:

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{a} \tau_i}{a} \qquad \bar{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^{b} \beta_j}{b} \qquad \bar{\mu}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \mu_{ij}}{ab} \qquad \overline{\tau\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (\tau\beta)_{ij}}{ab}$$

$$\overline{\tau\beta_{i.}} = \frac{\sum_{j=1}^{b} (\tau\beta)_{ij}}{b} \qquad \overline{\tau\beta_{.j}} = \frac{\sum_{i=1}^{a} (\tau\beta)_{ij}}{a}$$

- Supaya parameter dapat diduga didefinisikan:

$$\mu^* = \mu + \bar{\tau} + \bar{\beta} + \overline{\tau\beta}$$

$$\tau^*{}_i = \tau_i - \bar{\tau} + \overline{(\tau\beta)}_{i.} - \overline{(\tau\beta)}$$

$$\beta^*{}_j = \beta_j - \bar{\beta} + \overline{(\tau\beta)}_{.j} - \overline{(\tau\beta)}$$

$$(\tau\beta)^*{}_{ij} = (\tau\beta)_{ij} - \overline{(\tau\beta)}_{i.} - \overline{(\tau\beta)}_{.j} + \overline{(\tau\beta)}$$

- Sehingga diperoleh parameter baru yang dapat diduga dengan persamaan aditif:

$$y_{ijk} = \mu^* + \tau^*{}_i + \beta^*{}_j + (\tau\beta)^*{}_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2 \quad k = 1,2,3,4$$

Ketika model diatas dijabarkan akan membentuk persamaan dasar model desain 2 factor dengan interaksi.

Reparameterisasi (2)

- Dari definisi sebelumnya, tidak ada interaksi ketika $\left((\tau\beta)_{ij}-(\tau\beta)_{ij'}\right)-\left((\tau\beta)_{i'j}-(\tau\beta)_{i'j'}\right)=0$ untuk semua i, i',j, dan j' sehingga

$$0=\sum_{i'=1}^{a}\sum_{j'=1}^{b}\left((\tau\beta)_{ij}-(\tau\beta)_{ij'}\right)-\left((\tau\beta)_{i'j}-(\tau\beta)_{i'j'}\right)$$

  Dari persamaan tersebut dapat disimpulkan bahwa tidak ada interaksi jika $(\tau\beta)^*{}_{ij}=0$ untuk semua i dan j.

- Untuk mendapatkan solusi dari system persamaan normal $(\mathbf{X}'\mathbf{X})\underline{\boldsymbol{b}}=\mathbf{X}'\underline{\boldsymbol{y}}$ didefinisikan restriksi $\sum_{i=1}^{a}\tau^*{}_i=0$, $\sum_{j=1}^{b}\beta^*{}_j=0$, $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)^*{}_{ij}=0$

  $\sum_{i=1}^{a}(\tau\beta)^*{}_{i.}=0$, $\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)^*{}_{.j}=0$

- Dengan mensubstitusikan matriks model linier desian 2 factor dengan interaksi dan restriksi yang telah didefinisikan maka akan diperoleh solusi dari system persamaan normal.

Reparameterisasi (3)

- Sistem persamaan normal $(\mathbf{X}'\mathbf{X})\underline{\boldsymbol{b}} = \mathbf{X}'\underline{\boldsymbol{y}}$

$$
\begin{bmatrix}
abn & bn & \cdot & bn & an & \cdot & an & n & \cdot & n & \cdot & \cdot & n & \cdot & n \\
bn & bn & \cdot & 0 & n & \cdot & n & n & \cdot & n & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
bn & 0 & \cdot & bn & n & \cdot & n & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & n & \cdot & n \\
an & n & \cdot & n & an & \cdot & 0 & n & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & n & \cdot & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
an & n & \cdot & n & 0 & \cdot & an & 0 & \cdot & n & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & n \\
n & n & \cdot & 0 & n & \cdot & 0 & n & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n & n & \cdot & 0 & 0 & \cdot & n & 0 & \cdot & n & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n & 0 & \cdot & n & n & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & n & \cdot & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n & 0 & \cdot & n & 0 & \cdot & n & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & n
\end{bmatrix}
x
\begin{bmatrix}
\widehat{\mu *} \\ \widehat{\tau *_1} \\ \vdots \\ \widehat{\tau *_a} \\ \widehat{\beta *_1} \\ \vdots \\ \widehat{\beta *_2} \\ \widehat{(\tau\beta) *_{11}} \\ \vdots \\ \widehat{(\tau\beta) *_{ab}}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
y_{...} \\ y_{1..} \\ \vdots \\ y_{a..} \\ y_{.1.} \\ \vdots \\ y_{.b.} \\ y_{11.} \\ \vdots \\ y_{ab.}
\end{bmatrix}
$$

Reparameterisasi (4)

- Hasil substitusi:

$$y_{...} = abn\widehat{\mu^*} + bn\sum_i \widehat{\tau^*}_i + an\sum_j \widehat{\beta^*}_j + n\sum_i\sum_j \widehat{(\tau\beta)^*}_{ij}$$

$$y_{i..} = bn\widehat{\mu^*} + bn\widehat{\tau^*}_i + n\sum_j \widehat{\beta^*}_j + n\sum_i\sum_j \widehat{(\tau\beta)^*}_{ij}$$

$$y_{.j.} = an\widehat{\mu^*} + n\sum_i \widehat{\tau^*}_i + an\widehat{\beta^*}_j + n\sum_i\sum_j \widehat{(\tau\beta)^*}_{ij}$$

$$y_{ij.} = n\widehat{\mu^*} + n\widehat{\tau^*}_i + n\widehat{\beta^*}_j + n\widehat{(\tau\beta)^*}_{ij}$$

- Dengan memasukkan restriksi sehingga diperoleh:

$$y_{...} = abn\widehat{\mu^*}$$

$$y_{i..} = bn\widehat{\mu^*} + bn\widehat{\tau^*}_i$$

$$y_{.j.} = an\widehat{\mu^*} + an\widehat{\beta^*}_j$$

$$y_{ij.} = n\widehat{\mu^*} + n\widehat{\tau^*}_i + n\widehat{\beta^*}_j + n\widehat{(\tau\beta)^*}_{ij}$$

- Diperoleh:

$$\overline{y_{...}} = \widehat{\mu^*}$$

$$\overline{y_{i..}} = \widehat{\mu^*} + \widehat{\tau^*}_i$$

$$\overline{y_{.j.}} = \widehat{\mu^*} + \widehat{\beta^*}_j$$

$$\overline{y_{ij.}} = \widehat{\mu^*} + \widehat{\tau^*}_i + \widehat{\beta^*}_j + \widehat{(\tau\beta)^*}_{ij}$$

Reparameterisasi (5)

- Dari penjelasan sebelumnya **b** merupakan penduga BLUE dari **β**
- Diperoleh solusi untuk system persamaan normal:

$$\underline{\boldsymbol{b}}^* = \begin{bmatrix} \widehat{\mu *} \\ \widehat{\tau *_1} \\ . \\ \widehat{\tau *_a} \\ \widehat{\beta *_1} \\ . \\ \widehat{\beta *_2} \\ \widehat{(\tau\beta) *_{11}} \\ . \\ . \\ \widehat{(\tau\beta) *_{ab}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{y_{...}} \\ \overline{y_{1.}} - \overline{y_{...}} \\ . \\ \overline{y_{a.}} - \overline{y_{...}} \\ \overline{y_{.1}} - \overline{y_{...}} \\ . \\ \overline{y_{.b}} - \overline{y_{...}} \\ \overline{y_{11.}} - \overline{y_{1..}} - \overline{y_{.1.}} + \overline{y_{...}} \\ . \\ . \\ \overline{y_{ab.}} - \overline{y_{a..}} - \overline{y_{.b.}} + \overline{y_{...}} \end{bmatrix}$$

Pengujian Hipotesis Pengaruh Interaksi dengan Metode Reparameterisasi (1)

- Ho: $(\tau\beta)^{*}{}_{ij} = 0$
- Jumlah kuadrat regresi full dapat diperoleh dengan rumus:

$$JK_{reg(full)} = \underline{\boldsymbol{b}}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{\prime}\underline{\boldsymbol{y}}$$

Hasil perkalian di atas menghasilkan

$$JK_{reg(full)} = \frac{y\,...^{2}}{abn} + \sum_{i=1}^{a} y_{i..}(\overline{y_{i..}} - \overline{y\,...}) + \sum_{j=1}^{b} y_{.j.}(\overline{y_{.j.}} - \overline{y\,...}) + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}(\overline{y_{ij.}} - \overline{y_{i..}} - \overline{y_{.j.}} + \overline{y\,...}$$

Setelah dijabarkan diperoleh:

$$JK_{reg(full)} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{ij.}{}^{2}}{n}$$

- Model tereduksi adalah model ketika tidak ada interaksi:

$$JK_{reg(reduced)} = \sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i..}{}^{2}}{bn} + \sum_{j=1}^{b}\frac{y_{.j.}{}^{2}}{an} - \frac{y\,...^{2}}{abn}$$

Pengujian Hipotesis Pengaruh Interaksi dengan Metode Reparameterisasi (2)

- Sehingga diperoleh jumlah kuadrat hipotesis:

$$JK_{reg(hipotesis)} = JK_{reg(full)} - JK_{reg(reduced)}$$

$$JK_{reg(hipotesis)} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{ij.}{}^2}{n} - \sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i..}{}^2}{bn} - \sum_{j=1}^{b}\frac{y_{.j.}{}^2}{an} + \frac{y_{...}{}^2}{abn}$$

- Dengan derajat bebas jumlah kuadrat regresi full ab, derajat bebas jumlah kuadrat regresi tereduksi a+b-1 sehingga derajat bebas jumlah kuadrat regresi hipotesis (a-1)(b-1)
- Dengan demikian statistic uji untuk pengujian pengaruh interaksi adalah:

$$F_{(a-1)(b-1),abn-ab} = \frac{JK_{reg(hipotesis)} \big/ (a-1)(b-1)}{s^2}$$

- $s^2 = JK_{residual} \big/ abn-ab$
- Jika model 2 factor berdasarkan uji di atas menunjukkan tidak ada interaksi maka dilakukan uji untuk factor utama 1 dan factor utama 2 dengan hipotesis
  - $H'_0 : \tau^*_1 = \cdots = \tau^*_a = 0$
  - $H''_0 : \beta^*_1 = \cdots = \beta^*_b = 0$

Pengujiannya sama dengan pengujian model 2 factor tanpa interaksi dengan n≥1

Sumber	JK	db
Regresi Model penuh	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2/n$	ab
Model tereduksi	$\sum_i y_{i..}^2/bn + \sum_j y_{.j.}^2/an - y_{...}^2/abn$	(a+b-1)
Model Hipotesis	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2/n - \sum_i y_{i..}^2/bn - \sum_j y_{.j.}^2/an + y_{...}^2/abn$	(a-1)(b-1)
Residual/Galat	$\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2/n$	ab(n-1)
Total	$\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}^2$	abn

Tabel Anova Pengujian Pengaruh Interaksi

Sumber	JK	db
Regresi Model penuh	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2/n$	ab
Nilai Tengah	$y_{...}^2/abn$	1
Model Hipotesis(τ)	$\sum_i y_{i..}^2/bn - y_{...}^2/abn$	(a-1)
Model Hipotesis(β)	$\sum_j y_{.j.}^2/an - y_{...}^2/abn$	(b-1)
Model Hipotesis(τβ)	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2/n - \sum_i y_{i..}^2/bn - \sum_j y_{.j.}^2/an + y_{...}^2/abn$	(a-1)(b-1)
Residual/Galat	$\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2/n$	ab(n-1)
Total	$\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}^2$	abn

Tabel Anova Umum Model 2 Faktor Dengan Interaksi

Contoh soal:

1. Dari suatu percobaan dua faktor dengan interaksi dengan model sebagai berikut:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1,2\ ;\ j = 1,2\ ;\quad k = 1,2$$

a. Jika model tersebut ditulis dalam bentuk $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, tentukanlah $\mathbf{X}'\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'\mathbf{y}$, dan Rank($\mathbf{X}$)

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{221} \\ y_{222} \end{bmatrix}; \ \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \tau_1\beta_1 \\ \tau_1\beta_2 \\ \tau_2\beta_1 \\ \tau_2\beta_2 \end{bmatrix}; \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}'\underline{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} y_{\dots} \\ y_{1..} \\ y_{2..} \\ y_{.1.} \\ y_{.2.} \\ y_{11.} \\ y_{12.} \\ y_{21.} \\ y_{22.} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$r(\boldsymbol{X}) = ab = 2x2 = 4$$

b. Tentukan matrik kebalikan umum dari $\mathbf{X'X}$

$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{r}(\mathbf{X}) = \mathrm{r}(\mathbf{X'X}) = a.b = 2.2 = 4$$

- Pilih matriks Minor (**M**) yang berukuran 4×4 dari matriks **X’X** :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X'X})^{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

d. Tunjukkan bahwa $(\tau\beta)^*_{11} = (\tau\beta)_{11} - \left(\overline{\tau\beta}\right)_{1.} - \left(\overline{\tau\beta}\right)_{.1} + \left(\overline{\tau\beta}\right)$ dapat diduga.

$$(\tau\beta)^*_{11} = (\tau\beta)_{11} - \frac{(\tau\beta)_{11}+(\tau\beta)_{12}}{2} - \frac{(\tau\beta)_{11}+(\tau\beta)_{21}}{2} + \frac{(\tau\beta)_{11}+(\tau\beta)_{12}+(\tau\beta)_{21}+(\tau\beta)_{22}}{4}$$

$$(\tau\beta)^*_{11} = \frac{1}{4}(\tau\beta)_{11} - \frac{1}{4}(\tau\beta)_{12} - \frac{1}{4}(\tau\beta)_{21} + \frac{1}{4}(\tau\beta)_{22}$$

$$(\boldsymbol{\tau\beta})^*_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{t}'\boldsymbol{\beta}$$

$\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\beta}$ dapat diduga jika $\boldsymbol{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \boldsymbol{t}'$

Dengan $\boldsymbol{t}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ dan

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka $\boldsymbol{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \boldsymbol{t}'$

Jadi fungsi $(\tau\beta)^*_{11} = (\tau\beta)_{11} - \left(\overline{\tau\beta}\right)_{1.} - \left(\overline{\tau\beta}\right)_{.1} + \left(\overline{\tau\beta}\right)$ dapat diduga (*estimable*)

Tugas:

1. Tunjukkan

$$F_{Hitung} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} {y_{ij.}^2}/{n} - \sum_{i=1}^{a} {y_{i..}^2}/{bn} - \sum_{j=1}^{b} {y_{.j.}^2}/{an} + {y_{...}^2}/{abn}\right) \Big/ (a-1)(b-1)}{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} {y_{ij.}^2}/{n}\right) \Big/ ab(n-1)}$$

dengan melakukan partisi/reduksi matriks $\mathbf{X}$ dan vektor $\boldsymbol{\beta}$ dari model linier $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dua faktor dengan interaksi untuk menguji $\boldsymbol{H_0}:\ (\boldsymbol{\tau\beta})_{\boldsymbol{ij}}^{*} = \mathbf{0}$.

Tugas Penyusunan
Bahan Ajar Pengantar Model Linier

Disusun oleh:

I Made Sumertajaya

Aldino Yanke (BPS 2019)

Terima Kasih