



IPB University
— Bogor Indonesia —

Departemen Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
IPB University

Model Linear Tidak Berpangkat Penuh

Responsi 8 STA1333 Pengantar Model Linear

17 Oktober 2023

Model Tak penuh

Model

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Model penuh jika **X** berpangkat penuh

Model tak penuh jika **X** tidak berpangkat penuh



Perbedaan model penuh dan tidak penuh

Model penuh :

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\mathbf{y}$$

model tak penuh:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{X}\mathbf{y}$$

Model penuh :

β unik

model tak penuh:

β tak hingga banyaknya



Model Tak penuh

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dimana :

- \mathbf{y} = vektor peubah respons berukuran $n \times 1$ dengan
- \mathbf{X} = design matriks berukuran $(n) \times (k + 1)$ dengan
- $\boldsymbol{\beta} = [\mu \ \tau_1 \ \tau_2 \ \dots \ \tau_k]'$ adalah vektor dari parameter yang tidak diketahui berukuran $(k + 1) \times 1$
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor dari error acak berukuran $n \times 1$



Model Tak penuh

Bila matriks X berpangkat $< k+1$, maka matriks X disebut matriks tidak berpangkat penuh. Dengan demikian matriks $(X'X)$ juga berpangkat $< k+1$ dan $(X'X)$ tidak memiliki kebalikan sehingga penduga parameter β tidak unik. Kondisi inilah yang disebut **model linear tidak berpangkat penuh**.



Model Tak penuh

Contoh model Rancangan Acak Lengkap (RAL)

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \longrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{y}_{nx1} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ y_{k1} \\ y_{k2} \\ \vdots \\ y_{kn_k} \end{bmatrix}; \mathbf{X}_{nx(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\beta}_{(k+1)x1} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_k \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{\varepsilon}_{nx1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n_1} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \varepsilon_{k1} \\ \varepsilon_{k2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{kn_k} \end{bmatrix}$$



Matriks Kebalikan umum

Definisi

Diberikan Matrik A ukuran $n \times p$. Matrik A^C berukuran $p \times n$ menunjukkan bahwa

$$A A^C A = A$$

Matrik A^C berukuran $p \times n$ adalah sebuah *conditional inverse* untuk Matrik A



Matriks Kebalikan Umum

Algoritma untuk mencari Matriks Kebalikan Umum

A adalah matriks $n \times p$ dengan rank sebesar r . Untuk mencari Sebuah Matriks Kebalikan Umum A^c ,

1. Tentukan sembarang minor M ukuran $r \times r$ yang non singular
2. Cari M^{-1} dan $(M^{-1})'$
3. Ganti M di dalam matriks A dengan $(M^{-1})'$
4. Ganti semua unsur lainnya dalam matriks A dengan nilai 0 (nol)
5. Putar matriks pada tahap 4, matriks inilah yang disebut sebagai matriks kebalikan umum dari matriks A



Matriks Kebalikan umum

Sifat-sifat matriks Kebalikan Bersyarat “Conditional Inverse” :

Jika A adalah matriks berukuran $n \times p$ dengan rank r dimana $n \geq p \geq r$, maka:

- $A^c A$ dan AA^c adalah idempotent
- $r(AA^c) = r(A^c A)$
- Jika A^c adalah invers bersyarat dari A , maka $(A^c)'$ adalah inverse bersyarat dari A' .
Maka dari itu $(A^c)' = (A')^c$
- $A = A(A'A)^c(A'A)$ dan $A' = (A'A)(A'A)^c A'$
- $A(A'A)^c A'$ adalah unik, simetrik, dan idempoten.
- $I - A(A'A)^c A'$ adalah unik, simetrik, dan idempoten
- A nonsingular maka $A^c = A^{-1}$.
- $I - A^c A$ adalah idempoten



Fungsi yang dapat diduga (Estimability)

Definisi

Misalkan $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dimana \mathbf{X} adalah matriks berukuran $n \times p$ dengan rank $r \leq p$, $E[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$, dan $\text{var } \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma^2 \mathbf{I}$. Fungsi dari $\mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$ dikatakan *estimable* jika ada sebuah vektor \mathbf{c} sehingga $E[\mathbf{c}'\mathbf{y}] = \mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$.



Fungsi yang dapat diduga (Estimability)

Teorema

Misalkan $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dengan matriks \mathbf{X} berukuran $n \times p$ yang tak berpangkat penuh, $E[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$, dan $\text{var } \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma^2 \mathbf{I}$. Suatu kondisi yang dibutuhkan dan cukup untuk menyatakan bahwa $\mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$ dapat diduga adalah ketika ada solusi dari persamaan $(\mathbf{X}'\mathbf{X})\mathbf{z} = \mathbf{t}$.

Teorema

Misalkan $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ di mana \mathbf{X} adalah matriks berukuran $n \times p$ yang tak berpangkat penuh, $E[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$, dan $\text{var } \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma^2 \mathbf{I}$. Fungsi $\mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$ dapat diduga (*estimable*) jika dan hanya jika $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \mathbf{t}'$ di mana $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ adalah sembarang matriks kebalikan umum dari $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$.





LATIHAN PENGANTAR MODEL LINEAR -MODEL TAK PENUH-



NOMOR 1



RAL satu faktor dengan dua perlakuan dan 3 ulangan

Tuliskan model linier dari rancangan ini!

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} ; i = 1,2 ; j = 1,2,3$$

dimana y_{ij} = peubah respon perlakuan ke-i dan ulangan ke-j

μ = rataan umum

τ_i = pengaruh perlakuan ke-i

ε_{ij} = pengaruh acak/ galat perlakuan ke-i dan ulangan ke-j



NOMOR 1

Nyatakan model tersebut dalam bentuk matriks.
 $y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} ; i = 1,2 ; j = 1,2,3$

Nyatakan model tersebut dalam bentuk matriks.

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} ; i = 1,2 ; j = 1,2,3$$

$$y_{11} = \mu + \tau_1 + \varepsilon_{11}$$

$$y_{12} = \mu + \tau_1 + \varepsilon_{12}$$

$$y_{13} = \mu + \tau_1 + \varepsilon_{13}$$

$$y_{21} = \mu + \tau_2 + \varepsilon_{21}$$

$$y_{22} = \mu + \tau_2 + \varepsilon_{22}$$

$$y_{23} = \mu + \tau_2 + \varepsilon_{23}$$



$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \end{bmatrix} ; \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} ; \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$



NOMOR 2 ; NOMOR 3



Tentukan determinan dari $X'X$!

Apakah matriks $X'X$ singular atau non singular? Kenapa?

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |X'X| &= 6 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 6(9 - 0) - 3(9 - 0) + 3(0 - 9) \\ &= 54 - 27 - 27 = 0 \end{aligned}$$

→ Karena $\det(X'X)=0$, maka $X'X$ singular



NOMOR 4



Tentukan rank dari $X'X$!

Apakah model di atas merupakan model berpangkat penuh?

$$X'X = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Obd

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E3 \leftarrow 1(-1)} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E3 \leftarrow 2(1)} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena banyaknya baris yang tidak nol adalah 2 maka $R(X'X) = 2$

Sehingga model yang diberikan tak berpangkat penuh



NOMOR 5



Tuliskan persamaan normal! Jika $X'y = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

Persamaan normal $\rightarrow (X'X)\hat{\beta} = X'y$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$



NOMOR 6



Tunjukkan bahwa persamaan normal tersebut konsisten!

Persamaan normal tersebut konsisten jika $r(X'X|X'y) = r(X'X)$

$$(X'X|X'y) = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 12 \\ 3 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \end{array} \right]$$

Obd

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 12 \\ 3 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{E31(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 12 \\ 3 & 3 & 0 & 7 \\ -3 & -3 & 0 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{E32(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 12 \\ 3 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Karena jumlah baris yang tidak nol pada $(X'X|X'y) = 2$ maka $R(X'X|X'y) = 2$

Berdasarkan pada nomor 4 telah dibuktikan bahwa $R(X'X) = 2$

Terbukti bahwa persamaan normal tersebut konsisten



NOMOR 7



Apakah persamaan tersebut memiliki solusi?

Ya, persamaan normal yang konsisten pasti memiliki solusi

Jika iya, tentukan solusi persamaan normal tersebut dengan melakukan reparameterisasi yang sesuai, dan tunjukkan rank dari matriks rancangan ($X'X$) dari model reparameterisasinya!

Dengan

Reparameterisasi $\rightarrow \mu_i = \mu + \tau_i$

Model Reparameterisasi $\rightarrow y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$



NOMOR 7



$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

$$y_{11} = \mu_1 + \varepsilon_{11}$$

$$y_{12} = \mu_1 + \varepsilon_{12}$$

$$y_{13} = \mu_1 + \varepsilon_{13}$$

$$y_{21} = \mu_2 + \varepsilon_{21}$$

$$y_{22} = \mu_2 + \varepsilon_{22}$$

$$y_{23} = \mu_2 + \varepsilon_{23}$$



$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_{(\text{new})} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$



NOMOR 7



$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_{\text{new}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Model berpangkat penuh jika
 $\text{rank}(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \text{banyaknya parameter}$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_{\text{new}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rank dari } (\mathbf{X}'\mathbf{X})_{\text{new}} = 2$$

\rightarrow Model reparameterisasi berpangkat penuh



NOMOR 8



Tentukan dua buah matriks kebalikan umum dari matriks $\mathbf{X}'\mathbf{X}$!

Jika dipilih $M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan $M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{M}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \rightarrow (\mathbf{M}_1^{-1})' = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \rightarrow (\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c = ((\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^*)' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$



NOMOR 8



$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{M}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \rightarrow (\mathbf{M}_2^{-1})' = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c = ((\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^*)' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$



NOMOR 9



Jika berdasarkan jawaban No 7 Anda mengatakan bahwa persamaan normal dari model ini memiliki solusi, berikanlah solusi berdasarkan matriks kebalikan umum yang Anda peroleh dari no 8.

$$\mathbf{b}_1 = (\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = (\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$



NOMOR 10



Jika $\beta_0 = t' \beta$, apakah β_0 dapat diduga (estimable)

$t' \beta$ dapat diduga jika dan hanya jika $t' (X'X)^c (X'X) = t'$

$$\beta_0 = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = t' \beta$$

$$t' (X'X)^c (X'X) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0] \neq t'$$

$$t' (X'X)^c (X'X) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0] \neq t'$$

β_0 tidak dapat diduga (estimable)



NOMOR 11



Jika $\beta_0 + \beta_2 = \mathbf{t}' \boldsymbol{\beta}$, apakah $\beta_0 + \beta_2$ dapat diduga (estimable)

$\mathbf{t}' \boldsymbol{\beta}$ dapat diduga jika dan hanya jika $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \mathbf{t}'$

$$\beta_0 + \beta_1 = [1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{t}' \boldsymbol{\beta}$$

$$\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 1] = \mathbf{t}'$$

$$\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 1] = \mathbf{t}'$$

$\beta_0 + \beta_1$ dapat diduga (estimable)



TUGAS

Dikumpulkan 17 Oktober 2023

Pukul 23.59 wib dan submit ke yang tersayang, eh maksudnya <https://ipb.link/tugas-pml-praktikum-8>

Suatu model linier

$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$ dimana $i = 1, 2$ dan $j = 1, 2$

Misalkan $\mathbf{X}'\mathbf{y} = (5 \ 3 \ 2)'$

- Tentukan matriks rancangan \mathbf{X}
- Tunjukkan bahwa determinan dari $\mathbf{X}'\mathbf{X} = 0$, sehingga $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ singular.
- Tunjukkan bahwa $r(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = 2$
- Tunjukkan bahwa sistem persamaan normal dari model tersebut konsisten.
- Tentukan matriks kebalikan umum untuk $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ dengan menggunakan minor $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Nyatakan matriks kebalikan umum yang diperoleh sebagai $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$
- Gunakan teorema 5.34 (buku Myers) untuk menentukan solusi persamaan normalnya.
- Tentukan matriks kebalikan umum untuk $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ berdasarkan minor $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Nyatakan matriks kebalikan umum yang diperoleh sebagai $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$
- Tentukan solusi persamaan normal berdasarkan matriks kebalikan umum dari point g.
- Tunjukkan bahwa $\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c\mathbf{X}' = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c\mathbf{X}'$
- Apakah menurut anda $\boldsymbol{\beta}$ estimable? Tunjukkan jawaban Anda.
- Periksalah apakah $\tau_1 - \tau_2$ estimable?
- Periksalah apakah $\tau_1 + \tau_2$ estimable?
- Temukanlah fungsi linier dari parameter yang estimable lainnya, nyatakan dalam $\mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$.
- Tunjukkanlah bahwa penduga $\mathbf{t}'\mathbf{b}$ unik apapun pilihan matriks kebalikan umumnya



TERIMA KASIH



IPB University
— Bogor Indonesia —

Departemen Statistika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Jl Meranti Wing 22 Level 4

Kampus IPB Darmaga - Bogor 16680

0251-8624535 | <http://stat.ipb.ac.id>

