Kuis Sesi UAS

Angga Fathan Rofiqy

29 November, 2023

DEPARTEMEN STATISTIKA DAN SAINS DATA

FAKULTAS ILMU PENGETAHUAN ALAM

IPB UNIVERSITY

2023

1.1. Daftar Isi

2. Soal no 1

Misalkan $y_1, \dots, y_6$ merupakan hasil produksi yang dilakukan enam hari berturut-turut dengan menggunakan dua mesin. `Mesin A` digunakan pada hari ke 1, 3, dan 5 sedangkan `Mesin B` digunakan pada hari ke 2, 4 dan 6. Dengan asumsi $E(\varepsilon_i) = 0$ dan $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$. Data hasil produksi berturut-turut adalah 8.95,5.81,7.81,7.30,7.50, dan 7.60. Tentukan :

2.1. Point (a)

Susunlah **model linier**nya dalam bentuk **matriks** dan **persamaan normal** dari rancangan diatas, lengkapi dengan **keterangan** yang jelas.

Persamaan dalam bentuk Matriks

$$y = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{23} \\ y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8.95 \\ 7.81 \\ 7.5 \\ 5.81 \\ 7.30 \\ 7.60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

Dimana :

- y : vektor respons
- $\mathbf{X}$: matriks rancangan
- β : vektor parameter
- ε : vektor galat

Persamaan normal

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \text{ ; } i = 1{,}2 \text{ dan } j = 1{,}2{,}3$$

Dimana :

- y_{ij} : respons perlakuan (pada perlakuan ke-i dan ulangan ke-j)
- μ : rataan umum
- τ_i : pengaruh perlakuan (pada perlakuan ke-i)
- ε_{ij} : pengaruh acak (pada perlakuan ke-i dan ulangan ke-j)

2.2. Point (b)

Hitunglah **penduga kuadrat terkecil** bagi beda pengaruh `Mesin A` dan `Mesin B`.

Hasil dari R

```
## X'X :

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    6    3    3
## [2,]    3    3    0
## [3,]    3    0    3

##
## (X'X)^c :

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   0    0    0
## [2,]   0  1/3    0
## [3,]   0    0  1/3

##
## X'y :

##       [,1]
## [1,] 44.97
## [2,] 24.26
## [3,] 20.71

##
## Beta :

##          [,1]
## [1,] 0.000000
## [2,] 8.086667
## [3,] 6.903333
```

Dalam Latex

$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X'X})^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'y} = \begin{bmatrix} 44.97 \\ 24.26 \\ 20.71 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \beta &= (\mathbf{X'X})^c\mathbf{X'y} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 44.97 \\ 24.26 \\ 20.71 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 8.0866 \\ 6.9033 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.3. Point (c)

Tentukan penduga ragam $\tau_1 - \tau_2$

Hasil dari R

```
## SSres : 3.004133

##
##
## s^2 : 0.7510333
```

Dalam Latex

$$\begin{aligned} SS_{res} &= y'[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^c\mathbf{X'}]y \\ &= [8.95 \quad 7.81 \quad 7.5 \quad 5.81 \quad 7.30 \quad 7.60] \left[\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 8.95 \\ 7.81 \\ 7.5 \\ 5.81 \\ 7.30 \\ 7.60 \end{bmatrix} \\ &= 3.004133 \end{aligned}$$

Penduga ragam galat

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{SS_{res}}{n-r} \\
&= \frac{3.004133}{6-2} \\
&= 0.7510333
\end{aligned}
$$

2.4. Point (d)

Apakah $\tau_1 - \tau_2$ estimable?

Hasil dari R

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    1   -1
```

$$
\begin{aligned}
\tau_1 - \tau_2 = t'\beta &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \\
t'(\mathbf{X'X})^c(\mathbf{X'X}) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Karena $t' = t'(\mathbf{X'X})^c(\mathbf{X'X})$ maka $\tau_1 - \tau_2$ **estimable**.

2.5. Point (e)

Apakah $H_0 : \tau_1 - \tau_2$ testable?

Cek syarat testable :

1. $\mathbf{C}\beta$ estimable
   Dimana $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\beta = \mathbf{H} = (\mathbf{X'X})^c(\mathbf{X'X})$
   Karena matriks **C** sama dengan vektor t' pada **point (d)**, maka dapat dipastikan bahwa $\mathbf{C}\beta$ estimable.

2. Vektor-vektor baris pada matriks **C** saling bebas
   Karena matriks **C** merupakan vektor baris, maka dapat dinyatakan vektor-vektor baris pada matriks **C** saling bebas.

$$
\begin{aligned}
a_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \\ -a_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Atau dapat dinyatakan dengan $a_1 = -a_1 = 0$, yang artinya saling bebas.

Karena semua syarat testable terpenuni, maka $H_0 : \tau_1 - \tau_2$ testable.

2.6. Point (f)

Lakukan pengujian hipotesis pada point (e) dengan taraf nyata 0.05.

Hasil dari R

```
## Fhit : 2.796702
## Ftab : 7.708647
```

$$F_{hit} = \frac{(\mathbf{C}\beta)'(\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c\mathbf{C}')^{-1}\mathbf{C}\beta/m}{s^2}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} ; \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.0866 \\ 6.9033 \end{bmatrix}$$

$$F_{hit} = \frac{\dfrac{\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 8.0866 \\ 6.9033 \end{bmatrix}\right)'\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 8.0866 \\ 6.9033 \end{bmatrix}}{1}}{0.7510333}$$

$$F_{hit} = 2.796702$$

Sedangkan $F_{(1;4)0.05} = 7.708647$ yang lebih besar dari F_{hit}.

2.7. Point (g)

Kesimpulan

Karena $F_{hit} < F_{(1;4)0.05}$, maka tolak H_0. Artinya Tidak cukup bukti untuk menyatakan bahwa terdapat pengaruh minimal satu dari kedua mesin terhadap hasil produksi pada taraf nyata 5%.

3. Soal no 2

Suatu percobaan bertujuan untuk mengetahui pengaruh dosis fumigant terhadap daya kecambah benih kacang hijau. **Dosis** fumigant yang diberikan ada **dua**: $32gr/m^3$ dan $64gr/m^3$ dengan **3 ulangan**. Data yang diperoleh sebagai berikut:

Dosis (gr/m³)	Ulangan		
	1	2	3
32	90	88	92
64	90	80	78

3.1. Point (a)

Jika rancangan yang digunakan adalah RAL, tuliskan model liner dalam bentuk matriks besera keterangannya. Tunjukkan cara memperolehnya.

Model dalam bentuk matriks

$$y = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{23} \\ y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 90 \\ 88 \\ 92 \\ 90 \\ 80 \\ 78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

Dimana :

- y : vektor respons
- $\mathbf{X}$: matriks rancangan
- β : vektor parameter
- ε : vektor galat

Model linier

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \; ; \; i = 1{,}2 \text{ dan } j = 1{,}2{,}3$$

Dimana :

- y_{ij} : respons perlakuan (pada perlakuan ke-i dan ulangan ke-j)
- μ : rataan umum
- τ_i : pengaruh perlakuan (pada perlakuan ke-i)
- ε_{ij} : pengaruh acak (pada perlakuan ke-i dan ulangan ke-j)

Cara memperoleh

1. Vektor respons y diperoleh dari data respon pada tabel yakni dari dosis i ($32 gr/m^3$ dan $64 gr/m^3$) dan ulangan j (1, 2, dan 3). Contoh :
   y_{11} : Dosis $32 gr/m^3$, ulangan ke-1. y_{23} : Dosis $64 gr/m^3$ ulangan ke-3.

Dosis (gr/m^3)	Ulangan		
	1	2	3
32	90	88	92
64	90	80	78

2. Matriks **X** diperoleh mirip seperi mencari dummy variabel.

$$
\begin{array}{cccl}
\text{Intersep} & \text{Dosis 32} & \text{Dosis 64} & \text{Ulangan} \\
\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right. &
\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} &
\left.\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right] &
\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right\} \text{Dosis 32} \\ \left.\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right\} \text{Dosis 64} \end{array}
\end{array}
$$

3. Matriks β terdiri dari μ (rataan umum), τ_1 (pengaruh perlakuan 1) , dan τ_2 (pengaruh perlakuan 2)
4. Matriks ε atau pengaruh acak, jumlah dan index nya sesuai dengan matriks y.

3.2. Point (b)

Tunjukkan bahwa persamaan normal untuk model ini adalah persamaan yang konsisten.

Hasil dari R

```
## X'X :

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    6    3    3
## [2,]    3    3    0
## [3,]    3    0    3

##
## X'y :

##      [,1]
## [1,]  518
## [2,]  270
## [3,]  248

##
## (X'X)|(X'y) :

##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    6    3    3  518
## [2,]    3    3    0  270
## [3,]    3    0    3  248

##
##
## rank(X'X) : 2
```

```
##
##
## rank{(X'X)|(X'y)} : 2
```

Sistem Persamaan Linier disebut konsisten jika $r(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = r(\mathbf{A})$. Dimana SPL : $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$

Dalam Model Linier bentuknya menjadi : $(\mathbf{X}'\mathbf{X})\mathbf{b} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$. Sehingga persamaan disebut konsisten jika $r(\mathbf{X}'\mathbf{X}|\mathbf{X}'\mathbf{y}) = r(\mathbf{X}'\mathbf{X})$.

$$
\begin{aligned}
r(\mathbf{X}'\mathbf{X}) &= r\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{E32(1)}}{\overset{\text{E31(−1)}}{\rightarrow}} r\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2 \\
r(\mathbf{X}'\mathbf{X}|\mathbf{X}'\mathbf{y}) &= r\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 518 \\ 3 & 3 & 0 & 270 \\ 3 & 0 & 3 & 248 \end{pmatrix} \underset{\text{E32(1)}}{\overset{\text{E31(−1)}}{\rightarrow}} r\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 518 \\ 3 & 3 & 0 & 270 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2 \\
r(\mathbf{X}'\mathbf{X}) &= r(\mathbf{X}'\mathbf{X}|\mathbf{X}'\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

Sehingga Persamaan normal pada model ini terbukti konsisten.

3.3. Point (c)

Tunjukkan bahwa beda pengaruh dosis 32 dan 64 merupakan fungsi linier dari parameter yang dapat diduga (estimable).

Hasil dari R

```
## (X'X)^c:

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    0    0
## [2,]    0  1/3    0
## [3,]    0    0  1/3

##
## Tau_1 - Tau_2 :

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    1   -1
```

Dosis 32 = τ_1, dosis 64 = τ_2. Sehingga akan dicek apakah $\tau_1 - \tau_2$ estimable?

$$\begin{aligned}
\tau_1 - \tau_2 = t'\beta \quad &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \\
t'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) \quad &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Karena $t' = t'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ maka $\tau_1 - \tau_2$ **estimable.**