Tugas PML Pertemuan 8

Angga Fathan Rofiqy

21 October, 2023

Rpubs : https://rpubs.com/ZenR_Prog/PML-TM-8

DEPARTEMEN STATISTIKA DAN SAINS DATA

FAKULTAS ILMU PENGETAHUAN ALAM

IPB UNIVERSITY

2023

1.1. Daftar Isi

2. Diketahui

Suatu Model Linier

$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon ij$ dimana i = 1, 2 dan j = 1,2.

Misalkan $\mathbf{X}'\mathbf{y} = (5 \quad 3 \quad 2)'$

3. a. Rancangan X

Tentukan matriks rancangan X

Dalam bentuk matriks nya :

$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dimana :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} \\ \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} \\ \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} ;\ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;\ \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} ;\ \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{11} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{12} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{21} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{22} \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks rancangan $\mathbf{X}$ nya adalah $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. b. Singular

Tunjukkan bahwa determinan dari $\mathbf{X}'\mathbf{X} = 0$ sehingga $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ singular.

Secara Perhitungan :

$$\begin{aligned}
|\mathbf{X}'\mathbf{X}| &= \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{bmatrix} 1+1+1+1 & 1+1+0+0 & 0+0+1+1 \\ 1+1+0+0 & 1+1+0+0 & 0+0+0+0 \\ 0+0+1+1 & 0+0+0+0 & 0+0+1+1 \end{bmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right| \\
&= \big((4\times2\times2) + (2\times0\times2) + (2\times2\times0)\big) - \big((2\times2\times2) + (2\times2\times2) + (4\times0\times0)\big) \\
&= (16+0+0) - (8+8) \\
&= 16 - 16 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Sehingga Terbukti bahwa $|\mathbf{X}'\mathbf{X}| = 0$

Secara Sifat :

$$|\mathbf{X}'\mathbf{X}| = \left|\begin{bmatrix} n & n_1 & n_2 \\ n_1 & n_1 & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 \end{bmatrix}\right|$$

Dimana $n = n_1 + n_2$, sehingga kolom 1 = kolom 2 + kolom 3

$$\begin{bmatrix} n & n_1 & n_2 \\ n_1 = n_1 + & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 \end{bmatrix}$$

Karena itu matriks $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ merupakan matriks terpaut linier. Jika sebuah matriks terpaut linier, maka nilai determinannya sama dengan nol.

Sehingga sudah dapat dipastikan bahwa $|\mathbf{X}'\mathbf{X}| = 0$ dan merupakan matriks singular.

5. c. Rank = 2

Tunjukkan bahwa $r(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = 2$

Untuk cek rank dari sebuah matriks dapat menggunakan determinan. Berikut step nya :

- Jika determinannya tidak sama dengan nol. Maka matriks tersebut memiliki rank penuh.
- Namun jika nilai determinannya sama dengan nol, maka bisa memilih matriks minor ukuran $(n-1) \times (n-1)$ mana saja lalu mencari nilai dari determinan nya. Selanjutnya sama seperti step sebelumnya. Jika determinannya tidak sama dengan nol. Maka matriks tersebut memiliki rank $(n-1)$.
- Namun jika nilai determinannya sama dengan nol, maka ulangi lagi prosesnya namun dengan ukuran $(n-2) \times (n-2)$. Begitu seterusnya.

Pada butir sebelumnya sudah dibuktikan bahwa $|\mathbf{X}'\mathbf{X}| = 0$. Sehingga kita perlu mencari nilai determinannya dari matriks minor ukuran $(n-1) \times (n-1)$ mana saja.

Misal matriks minornya $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Nilai dari $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (4 \times 2) - (2 \times 2) = 4 \neq 0$. Karena $\neq 0$ maka rank dari matriks nya adalah $(n-1) = 2$.

Sehingga terbukti bahwa $r(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = 2$.

6. d. Konsisten

Tunjukkan bahwa sistem persamaan normal dari model tersebut konsisten.

Sistem Persamaan Linier disebut konsisten jika $r(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = r(\mathbf{A})$. Dimana SPL : $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$

Dalam Model Linier bentuknya menjadi : $(\mathbf{X}'\mathbf{X})\mathbf{b} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$. Sehingga persamaan disebut konsisten jika $r(\mathbf{X}'\mathbf{X}|\mathbf{X}'\mathbf{y}) = r(\mathbf{X}'\mathbf{X})$.

Nilai rank $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ sudah di dapat dari butir sebelumnya yakni $r(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = 2$. Sekarang tinggal mencari rank dari matriks gabungan $(\mathbf{X}'\mathbf{X}|\mathbf{X}'\mathbf{y})$.

$$
\begin{aligned}
r(\mathbf{X'X}|\mathbf{X'y}) &= r\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{E1}(-1)}{\overset{\mathrm{E32}(1)}{\rightarrow}} r\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 2+2-4 & 0+2-4 & 2+0-2 & 2+3-5 \end{pmatrix} \\
&= r\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Karena ada baris (baris 3) yang bisa dibuat 0 semua atau terpaut linier, dan setelah itu tidak ada baris lain yang bisa dibuat 0 lagi (baris 2 atau 1). Maka rank dari matriks diatas adalah 2.

Maka $r(\mathbf{X'X}|\mathbf{X'y}) = 2$ sama dengan $r(\mathbf{X'X}) = 2$.

Sehingga terbukti bawah sistem persamaan normal dari model ini adalah **konsisten**.

7. e. Kebalikan Umum 1

Tentukan matriks kebalikan umum untuk $\mathbf{X'X}$ dengan menggukanan minor $\mathbf{M_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Nyatakan matriks kebalikan umum yang diperoleh sebagai $(\mathbf{X'X})_1^c$

$$
\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 2 & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{M_1}^{-1} &= \frac{1}{|\mathbf{M_1}|}\begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \rightarrow (\mathbf{M_1}^{-1})' = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
(\mathbf{X'X})_1^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1/2} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1/2} \end{bmatrix} \rightarrow (\mathbf{X'X})_1^c = ((\mathbf{X'X})_1^*)' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}
$$

8. f. Solusi 1

Gunakan teorema 5.34 (buku Myers) untuk menentukan solusi persamaan normalnya.

Teorema 5.3.4

Misalkan **Ax = g** konsisten. Maka **x = A^{c}g** adalah solusi bagi sistem persamaan, dimana **A^c** adalah inverse bersyarat untuk A.

Pembuktian:

Misalkan **Ax = g** konsisten dan misalkan A^c merupakan matriks bersyarat bagi A. Dengan definisi: **AA^{c}Ax = Ax**

Dengan asumsi, **Ax = g**, maka substitusi menjadi, **AA^{c}g = g**

Misalkan **$\mathbf{x_0}$ = A^{c}g,** Lalu **A$\mathbf{x_0}$ = g**, tunjukkan bahwa **$\mathbf{x_0}$** merupakan solusi untuk sistem persamaan tersebut.

Dengan menerapkan teorema model linier, sehingga diperoleh,

b = (X'X)^{c}X'y

ini merupakan solusi bagi persamaan normal **(X'X)b = X'y.** Untuk beberapa matriks invers bersyarat akan menghasilkan solusi. Namun, pada Model Rank Tidak Penuh, ada banyak solusi yang diperoleh tergantung pada pilihan **(X'X)^c**; yakni matriks invers bersyarat yang berbeda akan menghasilkan solusi yang berbeda.

Pada **butir d** sudah dibuktikan bahwa $(\mathbf{X'X})\mathbf{b} = \mathbf{X'y}$ adalah konsisten. Maka $\mathbf{b} = (\mathbf{X'X})_1^c\mathbf{X'y}$ adalah solusi bagi sistem persamaan, dimana $(\mathbf{X'X})_1^c$ adalah inverse bersyarat untuk $\mathbf{X'X}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{b_1} &= (\mathbf{X'X})_1^c\mathbf{X'y} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0+0+0 \\ 0+\dfrac{3}{2}+0 \\ 0+0+1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Sehingga solusi dari sistem persamaan adalah $\mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

9. g. Kebalikan Umum 2

Tentukan matriks kebaliakn uumum untuk $\mathrm{X'X}$ berdasarkan minor $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Nyatakan matriks kebalikan umum yang diperoleh sebagai $(\mathbf{X'X})_2^c$

$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & 2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M_2} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{M_2}^{-1} &= \frac{1}{|\mathbf{M_2}|}\begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (\mathbf{M_2}^{-1})' = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$(\mathbf{X'X})_2^* = \begin{bmatrix} \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/2} & 2 \\ \mathbf{-1/2} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (\mathbf{X'X})_2^c = ((\mathbf{X'X})_2^*)' = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. h. Solusi 2

Tentukan solusi persamaan normal berdasarkan matriks kebalikan umum dari butir g.

Pada **butir d** sudah dibuktikan bahwa $(\mathbf{X'X})\mathbf{b} = \mathbf{X'y}$ adalah konsisten. Maka $\mathbf{b} = (\mathbf{X'X})_2^c\mathbf{X'y}$ adalah solusi bagi sistem persamaan, dimana $(\mathbf{X'X})_2^c$ adalah inverse bersyarat untuk $\mathbf{X'X}$.

$$\mathbf{b_2} \quad = (\mathbf{X'X})_2^c\mathbf{X'y} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} - \frac{3}{2} + 0 \\ -\frac{5}{2} + 3 + 0 \\ 0 + 0 + 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga solusi dari sistem persamaan adalah $\mathbf{b_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

11. i. Sama

Tunjukkan bahwa $\mathbf{X}(\mathbf{X'X})_1^c\mathbf{X'} = \mathbf{X}(\mathbf{X'X})_2^c\mathbf{X'}$

$$\mathbf{X}(\mathbf{X'X})_1^c\mathbf{X'} \quad = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Bandingkan dengan

$$\mathbf{X}(\mathbf{X'X})_2^c\mathbf{X'} \quad = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Sehingga Terbukti bahwa $\mathbf{X}(\mathbf{X'X})_1^c\mathbf{X'} = \mathbf{X}(\mathbf{X'X})_2^c\mathbf{X'}$

12. j. β estimablity

Apakah menurut anda β estimable? Tunjukkan jawabahn Anda.

> **Teorema 5.4.2**
> Misalkan $y = X\beta + \varepsilon$ di mana X adalah matriks berukuran $n \times p$ dengan rank $r \leq p$, $E[\varepsilon] = 0$, dan $var\ \varepsilon = \sigma^2 I$. Fungsi $t'\beta$ dapat diduga (*estimable*) jika dan hanya jika $t'(X'X)^c(X'X) = t'$ di mana $(X'X)^c$ adalah sembarang matriks kebalikan umum dari $(X'X)$.

Matriks $\boldsymbol{\beta}$ estimable atau dapat diduga maksudnya setiap elemen dari matirks nya dapat di duga.
Jadi butir ini menanyakan :

- Jika $\beta_0 = \mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$, apakah β_0 estimable?
- Jika $\beta_1 = \mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$, apakah β_1 estimable?
- Jika $\beta_2 = \mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$, apakah β_2 estimable?

  Dengan :

  - $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$
  - $\beta_0 = \mu \rightarrow \beta_0 = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$, Maka $\mathbf{t}' = [1 \quad 0 \quad 0]$
  - $\beta_1 = \tau_1 \rightarrow \beta_0 = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$, Maka $\mathbf{t}' = [0 \quad 1 \quad 0]$
  - $\beta_2 = \tau_2 \rightarrow \beta_2 = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$, Maka $\mathbf{t}' = [0 \quad 0 \quad 1]$

Teorema 5.4.2 mengatakan bahwa fungsi $\mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$ estimable jika dan hanya jika $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \mathbf{t}'$.

Karena $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ adalah matriks persegi, maka bisa dihitung $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ terlebih dahulu. Ini akan memudahkan perhitungan.

12.1. Untuk $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. β_0 atau μ dengan $\mathbf{t}' = [1 \quad 0 \quad 0]$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0] \neq \mathbf{t}'$$

Karena $\neq \mathbf{t}'$, maka β_0 atau μ ***tidak estimable.***

2. β_1 atau τ_1 dengan $\mathbf{t}' = [0 \quad 1 \quad 0]$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [0 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 0] \neq \mathbf{t}'$$

Karena $\neq \mathbf{t}'$, maka β_1 atau τ_1 ***tidak estimable.***

3. β_2 atau τ_2 dengan $\mathbf{t}' = [0 \quad 0 \quad 1]$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 1] \neq \mathbf{t}'$$

Karena $\neq \mathbf{t}'$, maka β_2 atau τ_2 ***tidak estimable.***

Karena semua elemen dari Matriks $\boldsymbol{\beta}$ tidak estimable, otomatis Matriks $\boldsymbol{\beta}$ juga **tidak estimable**

12.2. Untuk $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. β_0 atau μ dengan $\mathbf{t}' = [1 \quad 0 \quad 0]$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 1] \neq \mathbf{t}'$$

Karena $\neq \mathbf{t}'$, maka β_0 atau μ ***tidak estimable.***

2. β_1 atau τ_1 dengan $\mathbf{t}' = [0 \quad 1 \quad 0]$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [0 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad -1] \neq \mathbf{t}'$$

Karena $\neq \mathbf{t}'$, maka β_1 atau τ_1 ***tidak estimable.***

3. β_2 atau τ_2 dengan $\mathbf{t}' = [0 \quad 0 \quad 1]$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0] \neq \mathbf{t}'$$

Karena $\neq \mathbf{t}'$, maka β_2 atau τ_2 ***tidak estimable.***

Karena semua elemen dari Matriks $\boldsymbol{\beta}$ tidak estimable, otomatis Matriks $\boldsymbol{\beta}$ juga **tidak estimable**

13. k. $\tau_1 - \tau_2$ estimablity

Periksalah apakah $\tau_1 - \tau_2$ estimable?

$\tau_1 - \tau_2 = \beta_1 - \beta_2$, dengan $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$. Fungsi $\tau_1 - \tau_2$ bisa didapat dari $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$, Maka $\mathbf{t}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Teorema 5.4.2 mengatakan bahwa fungsi $\mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$ estimable jika dan hanya jika $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \mathbf{t}'$.

13.1. Untuk $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}'$$

Karena $= \mathbf{t}'$, sehingga $\tau_1 - \tau_2$ ***estimable.***

13.2. Untuk $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$.

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}'$$

Karena $= \mathbf{t}'$, sehingga $\tau_1 - \tau_2$ ***estimable.***

14. I. $\tau_1 + \tau_2$estimablity

Periksalah apakah $\tau_1 + \tau_2$ estimable?

$\tau_1 + \tau_2 = \beta_1 + \beta_2$, dengan $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$. Fungsi $\tau_1 + \tau_2$ bisa didapat dari $[0 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$, Maka $\mathbf{t}' = [0 \quad 1 \quad 1]$

Teorema 5.4.2 mengatakan bahwa fungsi $\mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$ estimable jika dan hanya jika $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \mathbf{t}'$.

14.1. Untuk $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [0 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [2 \quad 1 \quad 1] \neq \mathbf{t}'$$

Karena $\neq \mathbf{t}'$, sehingga $\tau_1 + \tau_2$ ***tidak estimable.***

14.2. Untuk $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$.

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [0 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad -1] \neq \mathbf{t}'$$

Karena $\neq \mathbf{t}'$, sehingga $\tau_1 + \tau_2$ ***tidak stimable.***

15. m. Estimablity

Temukanlah fungsi linier dari parameter yang estimable lainnya, nyatakan dalam $\mathrm{t}'\boldsymbol{\beta}$.

Untuk mencari parameter yang estimable lainnya bisa mencoba satu persatu kombinasi dari nilai $\mathbf{t}'$ nya. Jika $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \mathbf{t}'$. Maka parameter tersebut estimable. Rentang nilai dari $\mathbf{t}'$ nya pun **tidak terbatas.** Tak hanya $-1,0,1$ saja, melainkan bisa juga lebih dari itu misalnya $-2,-1,0,1,2$ dan seterusnya. Semakin banyak nilai $\mathbf{t}'$ maka semakin banyak juga kombinasi $\mathbf{t}'$ nya. Oleh karena itu diperlukan bantuan program komputer untuk komputasinya. Disini saya menggunakan fungsi r, dengan 3 nilai $\mathbf{t}'$ yakni $-1,0,1$.

Untuk mencari kombinasinya menggunakan fungsi `expand.grid`. Tapi untuk mencari banyaknya kombinasi bisa juga menggunakan perhitungan manual. Dengan cara seperti ini.

Hitung berapa jumlah elemen dari matriks $\boldsymbol{\beta}$, sebanyak p. Gunakan formula berikut :

$$\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} \times 2^i$$

Dimana :

- p adalah banyaknya jumlah elemen dari matriks parameter $\boldsymbol{\beta}$
- i adalah iterasi dari $1,2,\dots p$
- $\binom{p}{i}$ adalah kombinasi p dari i. Untuk memilih banyaknya parameter.
- 2 adalah banyaknya kemungkinan operasi (+ dan -).

Sehingga untuk kasus ini $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}, p = 3$. Maka banyaknya kombinasi adalah

$$\left(\binom{3}{1} \times 2^1\right) + \left(\binom{3}{2} \times 2^2\right) + \left(\binom{3}{3} \times 2^3\right) = (3 \times 2) + (3 \times 4) + (1 \times 8) = 26$$

Berikut adalah perhitungan programnya.

Tabel 1: *Estimability Parameter*

t'	Hasil	Estimability
(-1, -1, -1)	(-1, -1, 0)	Tidak estimable
(0, -1, -1)	(0, -1, 1)	Tidak estimable
(1, -1, -1)	(1, -1, 2)	Tidak estimable
(-1, 0, -1)	(-1, 0, -1)	Estimable
(0, 0, -1)	(0, 0, 0)	Tidak estimable

t'	Hasil	Estimability
(1, 0, -1)	(1, 0, 1)	Tidak estimable
(-1, 1, -1)	(-1, 1, -2)	Tidak estimable
(0, 1, -1)	(0, 1, -1)	Estimable
(1, 1, -1)	(1, 1, 0)	Tidak estimable
(-1, -1, 0)	(-1, -1, 0)	Estimable
(0, -1, 0)	(0, -1, 1)	Tidak estimable
(1, -1, 0)	(1, -1, 2)	Tidak estimable
(-1, 0, 0)	(-1, 0, -1)	Tidak estimable
(1, 0, 0)	(1, 0, 1)	Tidak estimable
(-1, 1, 0)	(-1, 1, -2)	Tidak estimable
(0, 1, 0)	(0, 1, -1)	Tidak estimable
(1, 1, 0)	(1, 1, 0)	Estimable
(-1, -1, 1)	(-1, -1, 0)	Tidak estimable
(0, -1, 1)	(0, -1, 1)	Estimable
(1, -1, 1)	(1, -1, 2)	Tidak estimable
(-1, 0, 1)	(-1, 0, -1)	Tidak estimable
(0, 0, 1)	(0, 0, 0)	Tidak estimable
(1, 0, 1)	(1, 0, 1)	Estimable
(-1, 1, 1)	(-1, 1, -2)	Tidak estimable
(0, 1, 1)	(0, 1, -1)	Tidak estimable
(1, 1, 1)	(1, 1, 0)	Tidak estimable

Dari 26 kemungkinan, hanya 6 yang estimable. Sangat sedikit. Untuk $\mathbf{t}' = [0 \quad 1 \quad -1]$ sudah dibuktikan pada butir k bahwa parameternya estimable.

15.1. Pembuktian Function Sudah benar

Saya akan membuktikan bahwa semua yang disebutkan estimable pada function yang ada adalah benar. Namun saya hanya akan membuktikan satu contoh untuk yang “Tidak eskimable” dikarenakan sangat banyak.

15.1.1. $\mathbf{t}' = [-1 \quad 0 \quad -1]$

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$.

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [-1 \quad 0 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [-1 \quad 0 \quad -1] = \mathbf{t}'$$

Karena $= \mathbf{t}'$, sehingga $-\mu - \tau_2$ ***estimable.*** Sesuai dengan function.

15.1.2. $\mathbf{t}' = [-1 \quad -1 \quad 0]$

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$.

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [-1 \quad -1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [-1 \quad -1 \quad 0] = \mathbf{t}'$$

Karena $= \mathbf{t}'$, sehingga $-\mu - \tau_1$ ***estimable.*** Sesuai dengan function.

15.1.3. $\mathbf{t}' = [1 \quad 1 \quad 0]$

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$.

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [1 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 0] = \mathbf{t}'$$

Karena $= \mathbf{t}'$, sehingga $\mu - \tau_1$ ***estimable.*** Sesuai dengan function.

15.1.4. $\mathbf{t}' = [0 \quad -1 \quad 1]$

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$.

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [0 \quad -1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad -1 \quad 1] = \mathbf{t}'$$

Karena $= \mathbf{t}'$, sehingga $\tau_2 - \tau_1$ ***estimable.*** Sesuai dengan function.

15.1.5. $\mathbf{t}' = [1 \quad 0 \quad 1]$

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$.

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 1] = \mathbf{t}'$$

Karena $= \mathbf{t}'$, sehingga $\mu + \tau_2$ ***estimable.*** Sesuai dengan function.

15.1.6. $\mathbf{t}' = [-1 \quad 1 \quad 1]$

Ini adalah contoh yang tidak estimable.

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$.

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [-1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [-1 \quad 1 \quad -2] \neq \mathbf{t}'$$

Karena $\neq \mathbf{t}'$, sehingga $\tau_1 + \tau_2 - \mu$ ***tidak estimable.*** Sesuai dengan function.

16. n. Unik

Tunjukkanlah bahwa penduga $\mathbf{t}'\mathbf{b}$ unik apapun pilihan matriks kebalikan umummnya.

"$\mathbf{t}'\mathbf{b}$ unik apapun pilihan matriks kebalikan umumnya" jika dan hanya jika fungsinya **estimable.** Ini sebenarnya **sudah saya buktikan** pada setiap butir yang menanyakan estimability. Tapi ya saya buktikan ulang saja.

Seperti yang sudah dijelaskan, $\mathbf{t}'\mathbf{b}$ hanya akan unik jika dan hanya jika fungsinya **estimable.** Sehingga saya akan membutikan dengan contoh fungsi yang estimable untuk menunjukan keunikan dan fungsi yang tidak estimable untuk menunjukkan ketidak unikan.

16.1. Estimable

Misalnya $\mathbf{t}' = [1 \quad 0 \quad 1]$

16.1.1. Untuk $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 1] = \mathbf{t}'$$

Karena $= \mathbf{t}'$, sehingga $\mu + \tau_2$ ***estimable.***

16.1.2. Untuk $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 1] = \mathbf{t}'$$

Karena $= \mathbf{t}'$, sehingga $\mu + \tau_2$ ***estimable.***

16.1.3. Perbadingan $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$ dengan $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$

$\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [1 \quad 0 \quad 1]$ Sedangkan $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [1 \quad 0 \quad 1]$.

Maka $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ atau unik.

Sehingga terbukti bahwa *"*$\mathbf{t}'\mathbf{b}$ unik apapun pilihan matriks kebalikan umumnya" jika dan hanya jika fungsinya **estimable.**

16.2. Tidak estimable

Misalnya $\mathbf{t}' = [-1 \quad 1 \quad 1]$

16.2.1. Untuk $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [-1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [2 \quad 1 \quad 1] \neq \mathbf{t}'$$

Karena $\neq \mathbf{t}'$, sehingga $\tau_1 + \tau_2 - \mu$ ***tidak estimable.***

16.2.2. Untuk $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$

Misalnya $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^c$ (matriks kebalikan umum) yang saya pilih adalah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [-1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [-1 \quad 1 \quad -2] \neq \mathbf{t}'$$

Karena $\neq \mathbf{t}'$, sehingga $\tau_1 + \tau_2 - \mu$ ***tidak estimable.***

16.2.3. Perbadingan $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c$ dengan $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c$

$\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [2 \quad 1 \quad 1]$ Sedangkan $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = [-1 \quad 1 \quad -2]$.

Maka $\mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^c(\mathbf{X}'\mathbf{X}) \neq \mathbf{t}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})_2^c(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ atau tidak unik.

Sehingga terbukti bahwa *"*$\mathbf{t}'\mathbf{b}$ unik apapun pilihan matriks kebalikan umumnya" jika dan hanya jika fungsinya **estimable.** Untuk fungsi yang tidak estimable, maka **blm pasti unik**.

17. Referensi

- OfficeDown
- SPL