IPB University — Bogor Indonesia | Departemen Statistika

Model Linear Tidak Berpangkat Penuh

Responsi 9 STA1333 Pengantar Model Linear

Review Materi:

1. Fungsi parameter yang dapat diduga (Estimable)

Teorema 5.5.1.

Misalkan $y = X\beta + \varepsilon$ dimana *X* merupakan matriks berukuran *n x p* dengan rank $r \leq p$, $E[\varepsilon] = 0$, dan Var $\varepsilon = \sigma^2 I$. setiap komponen dari $X\beta$ estimable.

Teorema 5.5.2.

Misalkan $t_1'\beta, t_2'\beta, \ldots, t_k'\beta$ merupakan kumpulan fungsi yang estimable.

- Jika $z = a_1 t_1'\beta + a_2 t_2'\beta + \cdots + a_k t_k'\beta$ merupakan kombinasi linier dari fungsi ini. Maka z juga estimable.

2. Pendugaan Ragam Galat

$$
\begin{aligned}
SS_{Res} &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\mathbf{y}'X(X'X)^c X'\mathbf{y} + \mathbf{y}'X(X'X)^c X' \\
&= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'X(X'X)^c X'\mathbf{y} \\
&= \mathbf{y}'[I - X(X'X)^c X']\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

Dalam pendugaan model tidak penuh, s^2 yaitu:

$$s^2 = \frac{SS_{Res}}{n - r}$$

Review Materi:

3. Selang kepercayaan fungsi parameter

Teorema 5.7.1.

Misalkan $\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dimana X adalah matriks berukuran n x p dengan pangkat $r \leq p$, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor ukuran p x 1 dari parameter, dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor acak berukuran n x 1 yang menyebar normaldengan rata-rata $\mathbf{0}$ dan ragam σ^{2I}.

Kemudian

$$\frac{(n-r)s^2}{\sigma^2} = \frac{SS_{Res}}{\sigma^2}$$

Mengikuti sebaran *chi-squared* dengan derajat bebas n-r.

Selang Keprcayaan dari $\mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$ (n-r df): $\mathbf{t}'\mathbf{b} \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\boldsymbol{t}'(X'X)^c\boldsymbol{t}}$

LATIHAN SOAL

Diketahui RAL Faktor Tunggal yang terdiri dari 2 perlakuan (i=1,2) dan 3 ulangan (j=1,2,3). Asumsi antar pengamatan saling bebas. $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ untuk semua i,j

1. Tentukan matriks rancangan **X**
2. Tentukan matriks kebalikan umumnya dengan menggunakan minor: $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
3. Apakah menurut anda $\boldsymbol{\beta}$ estimable? Tunjukkan jawaban Anda.
4. Periksalah apakah $\tau_1 - \tau_2$ estimable?
5. Periksalah apakah $\tau_1 + \tau_2$ estimable?
6. Temukanlah fungsi linier dari parameter yang estimable lainnya, nyatakan dalam $\mathbf{t}'\boldsymbol{\beta}$.
7. Dugalah beta dan ragam galatnya dengan menggunakan vektor y:
   y = [8.3 8.2 7.9 8.9 8.3 8.0]'
8. Buatlah selang kepercayaan 95% bagi [1 1 0]'$\boldsymbol{\beta}$

Diketahui RAL Faktor Tunggal yang terdiri dari 2 perlakuan (i=1,2) dan 3 ulangan (j=1,2,3). Asumsi antar pengamatan saling bebas. $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ untuk semua i,j

1. Tentukan matriks rancangan **X**

$Model\ Linear$:

$$y_{11} = \mu + \tau_1 + \varepsilon_{11}$$
$$y_{12} = \mu + \tau_1 + \varepsilon_{12}$$
$$y_{13} = \mu + \tau_1 + \varepsilon_{13}$$
$$y_{21} = \mu + \tau_2 + \varepsilon_{21}$$
$$y_{22} = \mu + \tau_2 + \varepsilon_{22}$$
$$y_{23} = \mu + \tau_2 + \varepsilon_{23}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan matriks kebalikan umumnya dengan menggunakan minor:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{M}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \rightarrow \left(\mathbf{M}_1^{-1}\right)' = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^{*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \rightarrow (\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^{c} = \left((\mathbf{X}'\mathbf{X})_1^{*}\right)' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

3. Apakah menurut anda beta estimable? Tunjukkan jawaban anda

Beta estimable jika elemen di dalamnya juga bersifat estimable. Maka tunjukkan bahwa μ, τ_1, τ_2 estimable.

$$\mu \Rightarrow t'\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$t'(X'X)^c(X'X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$t'(X'X)^c(X'X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$t'(X'X)^c(X'X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$t'(X'X)^c(X'X) \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ μ tidak estimable.

Jadi, beta tidak estimable karena ada elemen yang tidak estimable

4. Periksalah apakah $\tau_1 - \tau_2$ estimable?

$$\tau_1 - \tau_2 \Rightarrow t'\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$t'(X'X)^c(X'X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$t'(X'X)^c(X'X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$t'(X'X)^c(X'X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Jadi, $\tau_1 - \tau_2$ estimable

5. Periksalah apakah $\tau_1 + \tau_2$ estimable?

$$\tau_1 + \tau_2 \Rightarrow t'\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$t'(X'X)^c(X'X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$t'(X'X)^c(X'X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$t'(X'X)^c(X'X) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$t'(X'X)^c(X'X) \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, $\tau_1 + \tau_2$ tidak estimable

6. Temukan fungsi linier dari parameter yang estimable lainnnya, Nyatakan dalam $t'\beta$

$$t'\beta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$t'\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$t'\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$t'\beta = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

7. Dugalah beta dan ragam galatnya dengan menggunakan vektor y:

y = [8.3 8.2 7.9 8.9 8.3 8.0]'

$$b = (X'X)^c X'y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.3 \\ 8.2 \\ 7.9 \\ 8.9 \\ 8.3 \\ 8.0 \end{bmatrix}$$

$$b = (X'X)^c X'y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 49.6 \\ 24.4 \\ 25.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.1333 \\ 8.4 \end{bmatrix}$$

7. Dugalah beta dan ragam galatnya dengan menggunakan vektor y:

y = [8.3 8.2 7.9 8.9 8.3 8.0]'

$$SS_{Res} = y'[I - X(X'X)^c X']y$$

$$SS_{Res} = y'\left[I - \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{3} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\right]y$$

$$SS_{Res} = \begin{bmatrix}8.3 & 8.2 & 7.9 & 8.9 & 8.3 & 8.0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.33 & 0.33 & 0.33 & 0 & 0 & 0\\0.33 & 0.33 & 0.33 & 0 & 0 & 0\\0.33 & 0.33 & 0.33 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0.33 & 0.33 & 0.33\\0 & 0 & 0 & 0.33 & 0.33 & 0.33\\0 & 0 & 0 & 0.33 & 0.33 & 0.33\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8.3\\8.2\\7.9\\8.9\\8.3\\8.0\end{bmatrix}$$

$$SS_{Res} = 410.1333$$

7. Dugalah beta dan ragam galatnya dengan menggunakan vektor y:

y = [8.3 8.2 7.9 8.9 8.3 8.0]'

Dalam pendugaan model tidak penuh, s^2 yaitu:

$$s^2 = \frac{SS_{Res}}{n - r}$$

$$s^2 = \frac{SS_{Res}}{n - r} = \frac{410.1333}{6 - 2} = \frac{410.1333}{4} = 102.5333$$

8. Buatlah selang kepercayaan 95% bagi [1 1 0]’**β**

Selang Keprcayaan dari **t’β** (n-r df): **t‘b** ± $\mathbf{t}_{\alpha/2}\sqrt{\boldsymbol{t}'(X'X)^c\boldsymbol{t}}$

$$SK\ 95\%\ dari\ t'\beta: [1 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 \\ 8.1333 \\ 8.4 \end{bmatrix}(2.7764)\sqrt{[1 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$SK\ 95\%\ dari\ t'\beta: 8.1333 \pm 2.7764\sqrt{0.3333}$$

$$SK\ 95\%\ dari\ t'\beta: 8.1333 \pm 1.603$$

$$SK\ 95\%\ dari\ t'\beta: [6.5303\ ; 9.7363]$$

Terima Kasih

IPB University
Bogor Indonesia

Departemen Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jl Meranti Wing 22 Level 4
Kampus IPB Darmaga - Bogor 16680
0251-8624535 | http://stat.ipb.ac.id