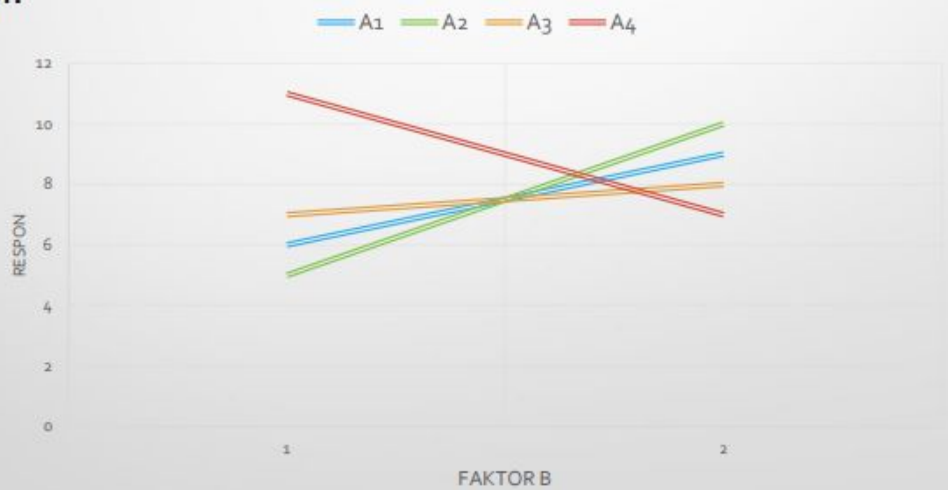
Model Dua Faktor dengan Interaksi: Efek Tetap

Responsi 12 STA1333 Pengantar Model Linear yang lain dari factor B.

- Ilustrasi:



1. M

- Model untuk desain 2 factor dengan interaksi:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

i= 1,2,…,a; j=1,2,…,b; k=1,2,…,n

- τ_i merupakan efek dari factor pertama, β_j merupakan efek dari factor kedua, dan $(\tau\beta)_{ij}$ interaksi antara factor pertama dan kedua.
- Dengan hipotesis yang diuji:
  - Ho : Tidak ada interaksi antara factor I dan factor II
  - H'o : Tidak ada perbedaan pengaruh dari level factor ke I
  - H"o : Tidak ada perbedaan pengaruh dari level factor ke II

Model Linier dalam Matriks (1)

- Penjabaran dari model $y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$, i= 1,2,…,a; j=1,2,…,b; k=1,2,…,n

$$y_{111} = \mu + \tau_1 + \beta_1 + (\tau\beta)_{11} + \varepsilon_{111}$$

.

$$y_{11n} = \mu + \tau_1 + \beta_1 + (\tau\beta)_{11} + \varepsilon_{11n}$$

.

.

$$y_{1b1} = \mu + \tau_1 + \beta_b + (\tau\beta)_{1b} + \varepsilon_{1b1}$$

.

$$y_{1bn} = \mu + \tau_1 + \beta_b + (\tau\beta)_{1b} + \varepsilon_{1bn}$$

.

.

$$y_{ab1} = \mu + \tau_a + \beta_b + (\tau\beta)_{ab} + \varepsilon_{ab1}$$

.

$$y_{abn} = \mu + \tau_a + \beta_b + (\tau\beta)_{ab} + \varepsilon_{abn}$$

$$\underline{y}_{abnx1} = \begin{bmatrix} y_{111} \\ \vdots \\ y_{11a} \\ \vdots \\ y_{1b1} \\ \vdots \\ y_{1bn} \\ \vdots \\ y_{ab1} \\ \vdots \\ y_{abn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{X}_{abx(1+a+b)} = \begin{array}{c} [\mu \;\; \tau_1 \;\; \cdot \;\; \tau_a \;\; \beta_1 \;\; \cdot \;\; \beta_b \;\; (\tau\beta)_{11} \;\; \cdot \;\; (\tau\beta)_{a1} \;\; (\tau\beta)_{ab}] \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & 0 & 1 & \cdot & 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdot & 0 & 1 & \cdot & 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{abnx1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \vdots \\ \varepsilon_{11a} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1b1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1bn} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ab1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{abn} \end{bmatrix} \quad \underline{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_a \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_b \\ (\tau\beta)_{11} \\ \vdots \\ (\tau\beta)_{1b} \\ \vdots \\ (\tau\beta)_{a1} \\ \vdots \\ (\tau\beta)_{ab} \end{bmatrix}$$

Review Materi:

IPB University
Bogor Indonesia

2. Solusi persamaan normal dengan Metode Matriks Kebalikan Umum

- Dalam kasus Model Tak Penuh persamaan normal:

$$(X'X)\underline{b} = X'\underline{y}$$

- Solusi dari Sistem persamaan normal:

$$\underline{b} = (X'X)^{C}X'\underline{y}$$

Dimana **(X'X)^C** merupakan matriks kebalikan umum dari **X'X** dan bersifat tidak unik

3. Solusi persamaan normal dengan Metode Reparameterisasi

- Supaya parameter dapat diduga didefinisikan:

$$\mu^* = \mu + \bar{\tau} + \bar{\beta} + \overline{\tau\beta}$$

$$\tau^*_i = \tau_i - \bar{\tau} + \overline{(\tau\beta)}_{i.} - \overline{(\tau\beta)}$$

$$\beta^*_j = \beta_j - \bar{\beta} + \overline{(\tau\beta)}_{.j} - \overline{(\tau\beta)}$$

$$(\tau\beta)^*_{ij} = (\tau\beta)_{ij} - \overline{(\tau\beta)}_{i.} - \overline{(\tau\beta)}_{.j} + \overline{(\tau\beta)}$$

- Sehingga diperoleh parameter baru yang dapat diduga dengan persamaan aditif:

$$y_{ijk} = \mu^* + \tau^*_i + \beta^*_j + (\tau\beta)^*_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2 \quad k = 1,2,3,4$$

Ketika model diatas dijabarkan akan membentuk persamaan dasar model desain 2 factor dengan interaksi.

- Untuk mendapatkan solusi dari system persamaan normal $(\mathbf{X}'\mathbf{X})\underline{\boldsymbol{b}} = \mathbf{X}'\underline{\boldsymbol{y}}$ didefinisikan restriksi $\sum_{i=1}^{a}\tau^*_i = 0, \sum_{j=1}^{b}\beta^*_j = 0, \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)^*_{ij} = 0$

$\sum_{i=1}^{a}(\tau\beta)^*_{i.} = 0, \sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)^*_{.j} = 0$

Dari penjelasan sebelumnya $\underline{b}$ merupakan penduga BLUE dari $\underline{\beta}$

Diperoleh solusi untuk system persamaan normal:

$$\underline{b}^* = \begin{bmatrix} \widehat{\mu^*} \\ \widehat{\tau^*_1} \\ \vdots \\ \widehat{\tau^*_a} \\ \widehat{\beta^*_1} \\ \vdots \\ \widehat{\beta^*_2} \\ \widehat{(\tau\beta)^*_{11}} \\ \vdots \\ \widehat{(\tau\beta)^*_{ab}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{y_{...}} \\ \overline{y_{1..}} - \overline{y_{...}} \\ \vdots \\ \overline{y_{a..}} - \overline{y_{...}} \\ \overline{y_{.1.}} - \overline{y_{...}} \\ \vdots \\ \overline{y_{.b.}} - \overline{y_{...}} \\ \overline{y_{11.}} - \overline{y_{1..}} - \overline{y_{.1.}} + \overline{y_{...}} \\ \vdots \\ \overline{y_{ab.}} - \overline{y_{a..}} - \overline{y_{.b.}} + \overline{y_{...}} \end{bmatrix}$$

Review Materi:

2. Pengujian Hipotesis Interaksi dengan Metode Matriks Kebalikan Umum

- Pengujian interaksi:
  - Ho: **C**$\underline{\beta}$=o, dimana **C** merupakan matriks berordo (a-1)(b-1)x (a+b+ab+1) yang merupakan penjabaran dari definisi $\left((\tau\beta)_{ij}-(\tau\beta)_{ij'}\right)-\left((\tau\beta)_{i'j}-(\tau\beta)_{i'j'}\right)=$ 0 untuk seluruh kondisi i,i',j,j'
  - Pengujian dilakukan sesuai dengan Langkah Pengujian Pada Kondisi Umum (Myers 6.1)
  - Statistik Uji:

$$F_{m,n-r}=\frac{(\boldsymbol{C}\underline{\boldsymbol{b}})'\{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{c}\boldsymbol{C}'\}^{-1}(\boldsymbol{C}\underline{\boldsymbol{b}})/m}{s^2}$$

  - Dimana m merupakan rank dari matriks **C** yang berordo mxp.
  - Tolak Ho jika F hit > F tabel

- Misal model 2 factor dengan jumlah taraf factor pertama berjumlah 2(a=2), jumlah taraf factor kedua berjumlah 2(b=2), dan ulangan untuk masing-masing kombinasi factor masing2 sebanyak 2(n=2).
- Ho: $\left((\tau\beta)_{11}-(\tau\beta)_{12}\right)-\left((\tau\beta)_{21}-(\tau\beta)_{22}\right)=0$
- Dalam bentuk matriks Ho: C$\underline{\beta}$=o
- Dimana $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{\beta}}$

3. Pengujian Hipotesis Interaksi dengan Metode Reparameterisasi

- Ho: $(\tau\beta)^*_{ij}=0$
- Jumlah kuadrat regresi full dapat diperoleh dengan rumus:

$$JK_{reg(full)}=\underline{\boldsymbol{b}}^{*\prime}\boldsymbol{X}'\underline{\boldsymbol{y}}$$

Jika model 2 factor berdasarkan uji di atas menunjukkan tidak ada interaksi maka dilakukan uji untuk factor utama 1 dan factor utama 2 dengan hipotesis

- $H'_0: \tau^*_1=\cdots=\tau^*_a=0$
- $H''_0: \beta^*_1=\cdots=\beta^*_b=0$

Pengujiannya sama dengan pengujian model 2 factor tanpa interaksi dengan n≥1

Sumber	JK	db
Regresi Model penuh	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2/n$	ab
Model tereduksi	$\sum y_{i..}^2/bn+\sum_j y_{.j.}^2/an-y_{...}^2/abn$	(a+b-1)
Model Hipotesis	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2/n-\sum y_{i..}^2/bn-\sum_j y_{.j.}^2/an+y_{...}^2/abn$	(a-1)(b-1)
Residual/Galat	$\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}^2-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2/n$	ab(n-1)
Total	$\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}^2$	abn

IPB University
Bogor Indonesia

Sumber	JK	db
Regresi Model penuh	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2/n$	ab
Nilai Tengah	$y_{...}^2/abn$	1
Model Hipotesis(τ)	$\sum_i y_{i..}^2/bn - y_{...}^2/abn$	(a-1)
Model Hipotesis(β)	$\sum_j y_{.j.}^2/an - y_{...}^2/abn$	(b-1)
Model Hipotesis(τβ)	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2/n - \sum_i y_{i..}^2/bn - \sum_j y_{.j.}^2/an + y_{...}^2/abn$	(a-1)(b-1)
Residual/Galat	$\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2/n$	ab(n-1)
Total	$\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}^2$	abn

Tabel Anova Umum Model 2 Faktor Dengan Interaksi

LATIHAN SOAL

Kerjakan soal soal berikut selama 1 jam lalu jawaban discan dan satukan dalam file pdf dengan format penamaan : NIM_Nama_Latihan12.pdf

dikumpulkan ke link : https://ipb.link/latihan-pml58p1

Ozonation as a secondary treatment for effluent following absorption by ferrous chloride was studied for three reaction times and three PH levels. These data are obtained on effluent decline:

Reaction Time in Minutes (Factor II)	PH Level (Factor I): 7	9	10.5
20	23	16	14
	21	18	13
	22	15	16
40	20	14	12
	22	13	11
	19	12	10
60	21	13	11
	20	12	13
	19	12	12

Derive the complete ANOVA table for these data and interpret the findings.

Menggunakan taraf nyata 5%

Terima Kasih

IPB University
Bogor Indonesia

Departemen Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jl Meranti Wing 22 Level 4
Kampus IPB Darmaga - Bogor 16680
0251-8624535 | http://stat.ipb.ac.id