

## Invers Matriks dan Keortogonalan

### 7. Tentukan invers dari matriks

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

### 8. Jika $X$ dan $Y$ merupakan matriks non singular, buktikan bahwa $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$ .

### 9. Apakah matriks $X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ merupakan matriks ortogonal? Jika tidak, berapakah nilai $c$ yang membuat matriks $cX$ ortogonal?

### 10. Buktikan bahwa jika $X$ ortogonal, maka $X^{-1}$ dan $X'$ juga ortogonal.

### 11. Diketahui vektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### a. Apakah $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ ortogonal?

#### b. Berapakah panjang $\mathbf{x}$ dan panjang $\mathbf{y}$ ?

### 12. Diketahui

$$\mathbf{x}'_1 = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1]$$

$$\mathbf{x}'_2 = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]$$

$$\mathbf{x}'_3 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

Apakah  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  merupakan himpunan ortonormal? Jika tidak, tentukan konstanta  $c$  sehingga  $\{c\mathbf{x}_1, c\mathbf{x}_2, c\mathbf{x}_3\}$  merupakan himpunan ortonormal.

### 13. Buktikan teorema berikut :

Misalkan  $X$  merupakan matriks berukuran  $k \times k$ .  $X$  ortogonal jika dan hanya jika kolom-kolom matriks  $X$  merupakan himpunan ortonormal.

## Akar Ciri dan Rank Matriks

### 14. Apakah ada jaminan bahwa matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ memiliki akar ciri real? Jika iya, tentukan akar ciri dan vektor ciri yang bersesuaian.

### 15. Tunjukkan bahwa

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

merupakan matriks ortogonal.

Kemudian, diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ , tentukan  $C'AC$ . Tentukan akar ciri  $C'AC$  dan tunjukkan bahwa akar ciri yang diperoleh sama dengan akar ciri matriks  $A$ .

### 16. Apakah vektor-vektor berikut ini bebas linier?

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

17. Berapakah Rank Matriks X berikut ini? Apakah X full rank?

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

18. Jika X adalah matriks ortogonal berukuran  $k \times k$ . Tunjukkan bahwa X full rank.

19. Misalkan X adalah matriks berukuran  $k \times k$  yang memiliki rank lebih kecil dari  $k$ . Apakah X Nonsingular? Jelaskan.

20. Diketahui matriks X berikut ini.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Apakah X full rank? Apakah X Nonsingular?

### **Matriks idempoten dan Teras Matriks**

21. Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahwa A idempoten.

22. Jika I merupakan matriks identitas berukuran  $n \times n$  dan X merupakan matriks full rank berukuran  $n \times k$ . Tunjukkan bahwa  $I - X(X'X)^{-1}X'$  idempoten.

23. Buktikan bahwa  $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$

## BAB II

### BENTUK KUADRAT DAN DISTRIBUSINYA

#### Bentuk Kuadrat

24. Tunjukkan bahwa  $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij}y_iy_j$ .
25. Apakah matriks-matriks berikut ini definit positif, semi definit positif, atau bukan keduanya?
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
  - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
  - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
  - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

#### Turunan dari Bentuk Kuadrat

26. Misalkan diketahui

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

- Uraikanlah  $z = \mathbf{a}'\mathbf{y}$ .
  - Tentukan  $\partial z / \partial y_1, \partial z / \partial y_2, \partial z / \partial y_3$
  - Tunjukkan bahwa  $\frac{\partial z}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{a}$ .
27. Diketahui  $\mathbf{y}$  adalah vektor berukuran  $5 \times 1$  dan  $z = \mathbf{y}'\mathbf{y}$ .
- Uraikanlah  $z$  dan tentukanlah  $\partial z / \partial y_i$  untuk  $i = 1, 2, 3, 4, 5$
  - Tunjukkan bahwa  $\frac{\partial z}{\partial \mathbf{y}} = 2\mathbf{y}$
28. Diketahui matriks  $\mathbf{A}$  sebagai berikut

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Tentukan  $z = \mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$  dan  $\partial z / \partial \mathbf{y}$ .

\*\*\*\*\*Selamat Mengerjakan\*\*\*\*\*