IPB University — Bogor Indonesia | Departemen Statistika

Ketidakpastian pada Penduga Model Berpangkat Penuh

Responsi 5 STA1333 Pengantar Model Linear

Model Penuh

Model Linear

$$\boldsymbol{y} = \beta_0 + \beta_1 \boldsymbol{x}_1 + \beta_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{x}_m + \varepsilon$$

Dengan

$\boldsymbol{y}$ =variabel terikat

$\boldsymbol{x_i}$, untuk $i = 1,2, \ldots, m$, = variabel bebas

β_i, untuk $i = 0,1,2, \ldots, m$ = koefisien

ε= galat

Jika dilakukan observasi sebanyak n kali maka model linear menjadi

Model Linear

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \cdots + \beta_m x_{1m} + \varepsilon_1 \\
y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \cdots + \beta_m x_{2m} + \varepsilon_2 \\
y_3 &= \beta_0 + \beta_1 x_{31} + \beta_2 x_{32} + \cdots + \beta_m x_{3m} + \varepsilon_3 \\
&\vdots \\
y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \cdots + \beta_m x_{nm} + \varepsilon_n
\end{aligned}
$$

Atau

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_{im} x_{im} + \varepsilon_n$$

Untuk $i = 1,2, \ldots, n$

$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_{im} x_{im} + \varepsilon_n$, Untuk $i = 1,2,\ldots,n$

Dapat disederhanakan dalam bentuk

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Dengan

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix},$$

Penduga tak bias β yaitu **b**

Teorema

Jika $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dengan $\boldsymbol{X}$ matriks berpangkat penuh dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektor acak dengan rata-rata 0 dan ragan $\sigma^2 I$ maka penduga tak bias β yaitu $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y})$

dan $var(\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}\sigma^2$

Dengan $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Penduga ragam tak bias dari $\boldsymbol{\sigma^2}$ yaitu $\boldsymbol{s^2}$

Penduga ragam tak bias dari $\boldsymbol{\sigma^2 = s^2 = \frac{SS_{res}}{n-p} = \frac{(y-Xb)^F(y-Xb)}{n-p}}$

Dengan

$\boldsymbol{SS_{res}}$ = jumlah kuadrat galat = JKG

n = banyaknya observasi

p= banyaknya β

n-p = derajat bebas

Selang Kepercayaan bagi β

Diketahui

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0m} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m0} & x_{n1} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}$$

Selang Kepercayaan bagi **β** yaitu

$$\boldsymbol{b_i \pm t_{\left(db, \frac{a}{2}\right)} (s)\sqrt{c_{ii}}}$$

Dengan $i = 1,2, \ldots, m$

Selang Kepercayaan untuk Dugaan Rata-Rata Peubah Respon

Diketahui

$$\widehat{E(y)} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}_*^T \boldsymbol{b}$$

Selang Kepercayaan bagi dugaan rata-rata peubah respons yaitu

$$\boldsymbol{x}_*^T \boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{t}_{\frac{\alpha}{2}} \boldsymbol{s} \sqrt{\boldsymbol{x}_*^T (\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{x}_*}$$

LATIHAN

Nomor 1

Tunjukan $var(b) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$

$$var(b)$$
$$= var\left((X'X)^{-1}X'y\right)$$
$$= ((X'X)^{-1}X')var(y)((X'X)^{-1}X')'$$
$$= (X'X)^{-1}X'(\sigma^2 I)X(X'X)^{-1}$$
$$= \sigma^2 (X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}$$
$$= \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

Hint:

$var(aX) = a\ var(X)\ a'$

$var(y) = var(X\beta - \varepsilon)$
$= var(X\beta) + var(\epsilon) - cov(X\beta, \varepsilon)$
$= \sigma^2 I$

Misal diperoleh data pendapatan rumah tangga perhari (x,$) dan konsumsi energy (y,btu/thn)

NO	Pendapatan Rumah tangga	Konsumsi energi
1	20	18
2	30	30
3	40	48
4	55	50
5	60	65

Misal model yang akan dibangun adalah model sebagai berikut

$$y_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i)$$

Ditanya

a. Misalkan Z sebagai peubah acak hasil trasformasi Y, tuliskan model linier dari model tersebut. Serta tuliskan model linear dari masing-masing observasinya.
b. Carilah vektor **z** dan matrix rancangan **X**!
c. Carilah $\boldsymbol{X'X}, \boldsymbol{X'z},$ dan $(\boldsymbol{X'X})^{-\mathbf{1}}$
d. Carilah penduga tak bias bagi parameter $\beta_0\ dan\ \beta_1$
e. Carilah penduga tak bias bagi ragam galatnya (S^2)
f. Hitunglah selang kepercayaan bagi β0 dan β1 dengan α = 0,05
g. Hitunglah selang kepercayaan bagi dugaan rata-rata peubah respon dengan x = 57 $

a. Misalkan Z sebagai peubah acak hasil trasformasi Y, tuliskan model linier dari model tersebut. Serta tuliskan model linear dari masing-masing observasinya.

Z = ln(Y)

Model linear: $\boldsymbol{z_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i}$

Model linear dari masing-masing observasi:

$$\begin{aligned}
2.8904 &= \beta_0 + 20\beta_1 + \varepsilon_1 \\
3.4012 &= \beta_0 + 30\beta_1 + \varepsilon_2 \\
3.8712 &= \beta_0 + 40\beta_1 + \varepsilon_3 \\
3.9120 &= \beta_0 + 55\beta_1 + \varepsilon_1 \\
4.1744 &= \beta_0 + 60\beta_1 + \varepsilon_1
\end{aligned}$$

b. Carilah vektor **y** dan matriks **X**

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 2.8904 \\ 3.4012 \\ 3.8712 \\ 3.9120 \\ 4.1744 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 30 \\ 1 & 40 \\ 1 & 55 \\ 1 & 60 \end{bmatrix}$$

c. Hitunglah $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})$, $(\boldsymbol{X}'\mathbf{z})$, dan $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & 30 & 40 & 55 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 30 \\ 1 & 40 \\ 1 & 55 \\ 1 & 60 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 205 \\ 205 & 9525 \end{bmatrix}$$

c. Hitunglah $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})$, $(\boldsymbol{X}'\mathbf{z})$, dan $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$

$$\boldsymbol{X}'\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & 30 & 40 & 55 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.8904 \\ 3.4012 \\ 3.8712 \\ 3.9120 \\ 4.1744 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{z}_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.2492 \\ 780.316 \end{bmatrix}$$

c. Hitunglah $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})$, $(\boldsymbol{X}'\,\mathbf{z})$, dan $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 5 & 205 \\ 205 & 9525 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}} = \frac{1}{5600}\begin{bmatrix} 9525 & -205 \\ -205 & 5 \end{bmatrix}$$

d. Hitunglah penduga tak bias bagi β_0 dan β_1

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{X}'\,\mathbf{z}) = \frac{1}{5600}\begin{bmatrix} 9525 & -205 \\ -205 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18.2492 \\ 780.316 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{5600}\begin{bmatrix} 13858.85 \\ 160.494 \end{bmatrix}$$

Sehingga $\beta_0 = \frac{13858.85}{5600}$ dan $\beta_1 = \frac{160.494}{5600}$

e. Hitunglah penduga tak bias bagi ragam (σ^2)

$$s^2 = \frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{b})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{b})}{n - p}$$

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2.8904 \\ 3.4012 \\ 3.8712 \\ 3.9120 \\ 4.1744 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 30 \\ 1 & 40 \\ 1 & 55 \\ 1 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{13858.85}{5600} \\ \frac{160.494}{5600} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1576 \\ 0.0666 \\ 0.2500 \\ -0.1391 \\ -0.0199 \end{bmatrix}$$

e. Hitunglah penduga tak bias bagi ragam (σ^2)

$$s^2 = \frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{b})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{b})}{n - p}$$

$$\frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{b})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{b})}{n - p} = \frac{[-0.1576 \quad 0.0666 \quad 0.25 \quad \text{-}0.1391 \quad \text{-}0.0199\,]\begin{bmatrix} -0.1576 \\ 0.0666 \\ 0.2500 \\ -0.1391 \\ -0.0199 \end{bmatrix}}{5-2}$$

$$= \frac{0.1115}{3}$$

$$= 0.0372$$

f. Hitunglah selang kepercayaan bagi β_0 dan β_1 dengan $\alpha = 0{,}05$

$$\boldsymbol{b_i \pm t_{\left(db,\frac{\alpha}{2}\right)}(s)\sqrt{c_{ii}}}$$

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}} = \frac{1}{5600}\begin{bmatrix} 9525 & -205 \\ -205 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{bmatrix}$$

f. Hitunglah selang kepercayaan bagi β_0 dan β_1 dengan $\alpha = 0{,}05$

Selang kepercayaan bagi β_0

$$\boldsymbol{b_0 \pm t_{(3;\,0,025)}\,(s)\sqrt{c_{00}}}$$

$$s^2 = 0.0372 \quad \rightarrow s = 0.1929$$

$$c_{00} = \frac{9525}{5600}$$

$$t_{(3;0,025)} = 3{,}1824$$

$$\boldsymbol{b_0 \pm t_{(3,\,0,025)}\,(s)\sqrt{c_{00}}}$$

$$\frac{13858.85}{5600} \pm 3.1824\,(0.1929)\sqrt{\frac{9525}{5600}}$$

$$2.4748 \pm 0.8006$$

(1.6742 ; 3.2754)

f. Hitunglah selang kepercayaan bagi β_0 dan β_1 dengan $\alpha = 0{,}05$

Selang kepercayaan bagi β_1

$$\boldsymbol{b_1 \pm t_{(3;\,0{,}025)}\,(s)\sqrt{c11}}$$

$$s^2 = 0.0372 \quad \rightarrow s = 0.1929$$

$$c_{11} = \frac{5}{5600}$$

$$t_{(3;0{,}025)} = 3{,}1824$$

$$\boldsymbol{b_1 \pm t_{(3,\,0{,}025)}\,(s)\sqrt{c11}}$$

$$\frac{160.494}{5600} \pm 3.1824\,(0.1929)\sqrt{\frac{5}{5600}}$$

$$0.0287 \pm 0.0183$$

(0.0103 ; 0.0470)

g. Hitunglah selang kepercayaan bagi dugaan rata-rata peubah respon dengan x = 57 $

Selang Kepercayaan bagi dugaan rata-rata peubah respons yaitu

$$x_*^T b = \begin{bmatrix} 1 & 57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{13858.85}{5600} \\ \frac{160.494}{5600} \end{bmatrix} = 4.1084$$

$$s^2 = 0.0372 \quad \rightarrow s = 0.1929$$

$$t_{(3;0,025)} = 3,1842$$

$$x_*^T (X^T X)^{-1} x_* = \begin{bmatrix} 1 & 57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.7009 & -0.0366 \\ -0.0366 & 0.0009 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 57 \end{bmatrix}$$

$$x_*^T (X^T X)^{-1} x_* = 0.4286$$

$$\boldsymbol{x_*^T b \pm t_{\frac{\alpha}{2}}\, s \sqrt{x_*^T (X^T X)^{-1} x_*}}$$

$$4.1084 \pm 3.1824\ (0.1929)\sqrt{0.4286}$$

$$4.1084 \pm 0.4019$$

(0.0267; 0.8305)

Terima Kasih

IPB University
Bogor Indonesia

Departemen Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jl Meranti Wing 22 Level 4
Kampus IPB Darmaga - Bogor 16680
0251-8624535 | http://stat.ipb.ac.id