ANALISIS PEUBAH GANDA

SEBARAN NORMAL GANDA

Dr. Ir. I Made Sumertajaya, M.Si

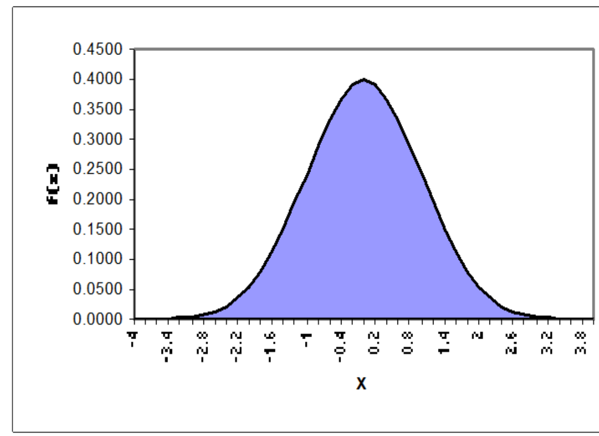
SEBARAN NORMAL GANDA

- Fungsi kepekatan normal ganda (*multivariate normal*) adalah generalisasi dari fungsi kepekatan *univariate* normal dengan p $\geq$ 2 dimensi.
- Fungsi kepekatan dari peubah acak x yang menyebar normal dengan nilai tengah μ dan ragam σ^2 adalah :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma^2}} e^{-[(x-\mu)/\sigma]^2/2}$$

- **dimana $-\infty < x < \infty$**

- Plot dari fungsi di atas akan menghasilkan kurva berbentuk genta yang memiliki ciri-ciri sebagai berikut:
  - Simetrik terhadap nilai tengah (μ)
  - Mean, median, modus berada pada titik yang sama
  - $P(\mu - \theta < x < \mu + \sigma) = 0.683$
  - $P(\mu - 2\theta < x < \mu + 2\sigma) = 0.954$



Fungsi Kepekatan Peluang Normal Ganda

- Fungsi kepekatan bersama dari p peubah acak yang menyebar normal dan saling bebas adalah :

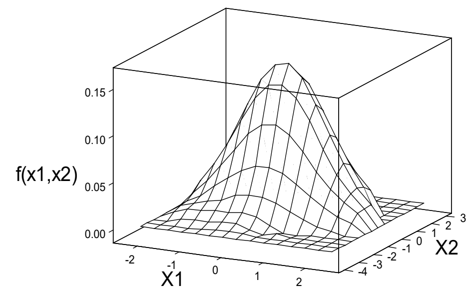
$$f(x_1,\ldots,x_p)=\frac{1}{(2\pi)^{p/2}\sigma_1\ldots\sigma_p}Exp\left[-1/2\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)\right]^2$$

- Bentuk [(xi - μ)/σ]^2 dari eksponen fungsi sebaran normal mengukur jarak kuadrat dari x_i ke μ_i dalam unit simpangan baku.
- Bentuk ini dapat digeneralisasikan untuk vektor <u>**x**</u> dari pengamatan beberapa peubah sebagai :

  $(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu})$

- Secara umum fungsi kepekatan peluang normal bersama untuk p peubah dapat ditulis sebagai berikut :

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} Exp\left[-1/2(\underline{x}-\underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})\right]$$



- dimana $-\infty < x_i < \infty$, i = 1,2,...p.
- Fungsi kepekatan normal berdimensi p ini dapat ditulis sebagai $N_p(\mu,\Sigma)$ yang analog dengan kasus *univariate*.

Countur
Sebaran Normal Ganda

- Eksponen $(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)$ dari kepekatan normal ganda memperlihatkan persamaan ellipsoid dalam ruang peubah berdimensi p jika bentuk ini ditulis dalam sebuah persamaan terhadap sebuah nilai konstanta positif c.

  $$(\mathbf{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) = c^2$$

- Dengan pusat ellips adalah μ dan absis $\pm c \sqrt{\lambda_i}\, \mathbf{e}_i$ dimana,

  $$\Sigma\, \mathbf{e}_i = \lambda_i\, \mathbf{e}_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots p.$$

- Misalkan untuk normal bivariat dengan parameter berikut:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

- Mempunyai dua nilai eigen dari **Σ**

$$\lambda_1 = 3 + \sqrt{2} \qquad \lambda_2 = 3 - \sqrt{2}$$

- Dua vektor eigen (yang sudah dinormalkan yang bersesuaian dengan masing-masing nilai eigen:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- Misalkan: $c^2 = \chi_2^2(0.05) = 5.9$

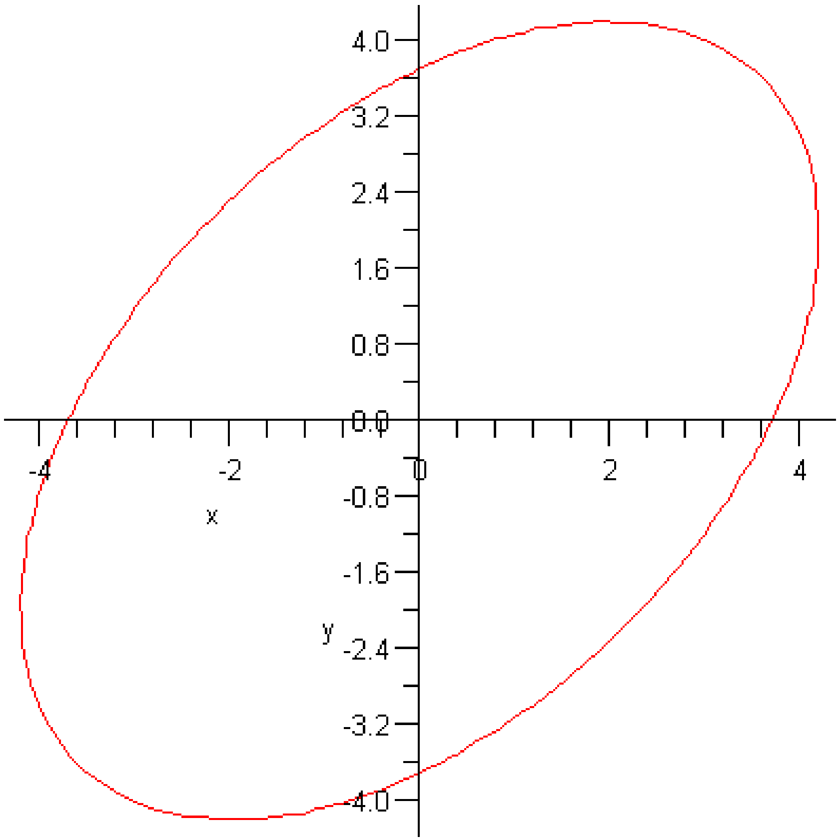
- Sumbu mayor dengan arah: $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

- Dengan panjang: $\pm c\sqrt{\lambda_1} = 2.42 \times \sqrt{3+\sqrt{2}} = 5.1$

- Sumbu minor dengan arah: $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

- Dengan panjang: $\pm c\sqrt{\lambda_1} = 2.42 \times \sqrt{3-\sqrt{2}} = 3.05$

Kontur bagi fungsi sebaran normal bivariat



Sifat-sifat Sebaran Normal Ganda

- Kombinasi linier dari semua komponen peubah x juga menyebar normal. Jika $\mathbf{X}_p \sim N_p\,(\underline{\mu}\,,\Sigma)$, maka kombinasi linear :

  $\underline{\mathbf{a}}'\underline{\mathbf{X}} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_p X_p$ menyebar

  $N\,(\underline{\mathbf{a}}'\,\underline{\mu}\;,\underline{\mathbf{a}}'\,\Sigma\,\underline{\mathbf{a}})$
- Jika $\underline{X}_p \sim N_p\;(\underline{\mu}\,,\Sigma)$ maka semua anak gugus dari X juga menyebar normal
- Jika $\underline{X}_1$ dan $\underline{X}_2$ saling bebas, dan menyebar $N_{q1}\,(\underline{\mu}_1, \Sigma_{11})$ dan $N_{q2}\,(\underline{\mu}_2, \Sigma_{22})$ maka sebaran bersyarat $[\underline{X}_1/\underline{X}_2]$ adalah normal ganda :

$$N_{q1+q2}\left(\left[\frac{\mu_1}{\mu_2}\right],\left[\begin{matrix}\Sigma_{11} & 0\\ \hline 0 & \Sigma_{22}\end{matrix}\right]\right)$$

- Jika X ~ Np (μ, Σ) dengan $|\Sigma| > 0$ maka:
  - $(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) \sim \chi_{(p)}^2$ dimana χ_p^2 menyatakan sebaran khi kuadrat dengan derajat bebas p.
  - Selang kepercayaan $(1-\alpha)100\% \rightarrow$

    $(\underline{x}-\underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu}) \leq \chi_{(\alpha,\ p)}^2$

Contoh terapan sifat-sifat sebaran normal multivariat

Contoh 1:

- Untuk

$$\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$$

- Tentukan sebaran dari $\mathbf{AX}$ dengan: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{pmatrix}$$

- Dari sifat sebaran normal multivariat:
- Jika ***X*** menyebar $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.
- Maka kombinasi linier dari ***X***:

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} a_{11}X_1 + \cdots + a_{1p}X_p \\ a_{21}X_1 + \cdots + a_{2p}X_p \\ \vdots \\ a_{11}X_1 + \cdots + a_{qp}X_p \end{bmatrix} \sim N_q\left(\mathbf{A\mu}, \mathbf{A\Sigma A}^T\right)$$

- Nilai tengah kombinasi linier:

$$\mathbf{A\mu} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \end{pmatrix}$$

- Ragam peragam kombinasi linier:

$$\mathbf{A}\sum\mathbf{A}^{t}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sigma_{11}-2\sigma_{12}+\sigma_{22} & \sigma_{12}+\sigma_{23}-\sigma_{22}-\sigma_{13}\\ \sigma_{12}+\sigma_{23}-\sigma_{22}-\sigma_{13} & \sigma_{22}-2\sigma_{23}+\sigma_{33}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AX}\sim N_{3}\left(\mathbf{A\mu},\mathbf{A\Sigma A}^{T}\right)$$

Contoh 2:

- Jika: $\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ $\quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Seperti apa sebaran marjinal bagi X_1?

- Sifat yang sama berlaku seperti pada sebaran normal bivariat, masing-masing variabel mempunyai sebaran normal univariat.

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X_1 \sim N_1(0,7)$$

- Seperti apa sebaran marjinal dari

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

- Ingat sifat sebaran dari variabel hasil partisi.

$$\mathbf{X}^{(1)} \sim N(\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \Sigma_{11}) \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_{11} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Contoh 3:

- Diberikan $\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Apakah X_1 dan X_2 saling bebas?

- Dapat dilihat dari σ_{12} $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Karena $\sigma_{12}=1\neq 0$, maka X_1 dan X_2 tidak saling bebas?

- Apakah (X_1 , X_2) dan X_3 saling bebas?
- Dapat dikerjakan dengan melakukan partisi.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \hdashline X_3 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_{12} & \Sigma_{12} \\ \hdashline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right)$$

- Kovarians dari (X_1 , X_2) dan X_3 adalah vektor nol $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}^{T} = \mathbf{0}$
- Sehingga (X_1 , X_2) dan X_3 adalah saling bebas.

Contoh 4:

- Jika: $\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ $\quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$

- Seperti apa sebaran bagi $X_1, X_2 | X_3=1$?

- Dari sifat sebaran normal multivariat, berdasarkan partisi:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ -- \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \\ -- \\ \mathbf{X}^{(2)} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ -- \\ \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$N_2(\boldsymbol{\eta}, \Sigma_{11\bullet 2})$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu}^{(1)} + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})$$

$$\Sigma_{11\bullet 2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}^{(2)} = 1$$

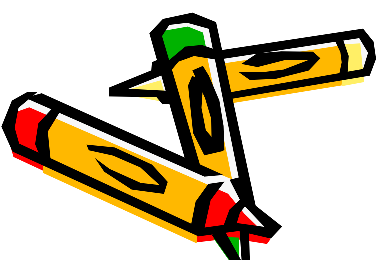
$$\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}^{(2)} = -2 \qquad \Sigma_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_{12} = \Sigma_{21}' = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_{22} = 1$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu}^{(1)} + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} (1) (\mathbf{x}^{(2)} - (-2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix} + \mathbf{x}^{(2)} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 4.4 \end{pmatrix} + \mathbf{x}^{(2)} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

pada $\mathbf{X}^{(2)} = 1$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 4.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 4.6 \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}^{(2)} = 1$$

$$\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}^{(2)} = -2 \qquad \Sigma_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_{12} = \Sigma_{21}' = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_{22} = 1$$

$$\Sigma_{11\bullet 2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}(1)\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.16 & 0.08 \\ 0.08 & 0.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.84 & 0.42 \\ 0.42 & 0.96 \end{pmatrix}$$

Sebaran bagi $X_1, X_2 | X_3=1$: $N_2\left(\begin{pmatrix} 2.2 \\ 4.6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.84 & 0.42 \\ 0.42 & 0.96 \end{pmatrix}\right)$

Contoh 5:

- Jika: $\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Seperti apa sebaran bagi ($2X_1+X_2$, $X_1+2X_2+3X_3$)?
- Dapat dibentuk matriks ***B*** yang mendefinisikan kombinasi linier dari peubah-peubah tsb.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BX} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2X_1 + X_2 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^T\right)$$

$$\mathbf{B\mu} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9.5 \\ 9.5 & 20.8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BX} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 9.5 \\ 9.5 & 20.8 \end{pmatrix} \right)$$

Fungsi Likelihood Normal Multivariat

- Fungsi kepekatan normal multivariat: $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \mid \boldsymbol{\Sigma} \mid^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

$$-\infty < x_i < \infty; \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

- Untuk sampel acak (multivariat) $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$

- Fungsi likelihood bagi normal multivariat:

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}|) = \prod_{i=1}^{n} f(\mathbf{x}_i | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}np} |\Sigma|^{\frac{1}{2}n}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_\mathrm{i} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_\mathrm{i} - \boldsymbol{\mu}) \right)$$

- Atau dapat digunakan fungsi ln likelihood:

$$l(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = \ln L(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{1}{2}np\ln(2\pi) - \frac{1}{2}n\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})$$

$$= tr\,\Sigma^{-1}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})'}_{A} + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})$$

$$l(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{1}{2}np\ln(2\pi) - \frac{1}{2}n\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}tr\,\Sigma^{-1}A - \frac{n}{2}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})$$

- Penduga bagi $\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$ dipilih sedemikian sehingga fungsi likelihood tsb maksimum.
  - Memilih penduga $\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$ yang paling mungkin bagi sampel acak.

- Diperoleh dari solusi ketika turunan parsial fungsi (ln) likelihood terhadap $\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$ sama dengan nol

$$l(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{1}{2}np\ln(2\pi) - \frac{1}{2}n\ln\left|\sum\right| - \frac{1}{2}tr\sum^{-1}A - \frac{n}{2}(\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu})'\sum^{-1}(\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu})$$

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\mu}}l(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = n\sum^{-1}(\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu}) = 0 \quad \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\mathbf{x}}$$

- Penduga $\boldsymbol{\Sigma}$ diperoleh dari turunan parsial fungsi (ln) likelihood terhadap $\boldsymbol{\Sigma}$: $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = ((n-1)/n)\mathbf{S}.$

Sebaran Penarikan Sampel Penduga Parameter

1. Vektor rata-rata sampel juga mempunyai sebaran normal *p* variat

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \vdots \\ \overline{X}_p \end{pmatrix} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\Sigma)$$

2. Sebaran bagi (*n*-1)***S*** adalah Wishart dengan derajat bebas (*n*-1)

$$(n-1)\mathbf{S} \sim W(\Sigma, n-1)$$

3. Sebaran Wishart adalah sebaran bagi

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j^T \sim W(\Sigma, m) \qquad \mathbf{Z}_j \sim N_p(0, \Sigma)$$

4. $\bar{\mathbf{X}}$ dan ***S*** saling bebas

5. Pada sebaran Wishart, berlaku:

$$(n-1)S \sim W(\Sigma, n-1) \rightarrow (n-1)CSC' \sim W(C\Sigma C', n-1)$$

$$\mathbf{A}_1 = (n_1 - 1)\mathbf{S}_1 \sim W(\sum, n-1) \qquad \mathbf{A}_2 = (n_2 - 1)\mathbf{S}_2 \sim W(\sum, n-1)$$

- Dengan $\boldsymbol{S}_1$ dan $\boldsymbol{S}_2$ adalah dua penduga Σ yang saling bebas, maka:

$$\mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} = (n_1 - 1)\mathbf{S}_1 + (n_2 - 1)\mathbf{S}_2 \sim W(\sum, n_1 + n_2 - 2)$$

Ketika Sampel Berukuran Besar

- Untuk sampel acak (multivariat) $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$
- Ketika sampel berukuran besar → (*n*-*p*) besar, maka:

$$\sqrt{n}\left(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}\right) \text{ Mendekati sebaran } N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$$

dan: $$n(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_p^2$$

Eksplorasi Sebaran Normal Ganda

- **Untuk mengevaluasi apakah data yang dimiliki menyebar normal ganda dapat ditelusuri secara ekplorasi**
- **Seperti halnya untuk kasus *univariate* penelusuran sebaran normal ganda dapat juga memanfaatkan plot quantil-quantil → quantil khi-kuadrat**

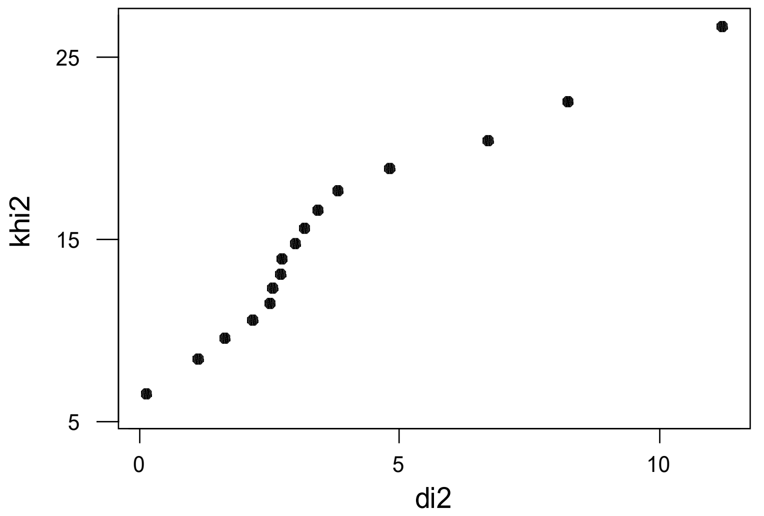
Beberapa tahapan yang harus dilakukan dalam menyusun Plot Kuantil χ^2 adalah sebagai berikut:

1. Hitung: $d_i^2 = (\underline{x}_i - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{x}_i - \underline{\mu})$
2. Beri peringkat k untuk nilai d_i^2
3. Carilah nilai khi-kuadrat dari nilai (k–1/2)/n dengan derajat bebas p, misal $\chi_p^2\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\right)$
4. Buat plot d_i^2 dengan $\chi_p^2\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\right)$
5. Jika plot tersebut membentuk garis lurus maka data tersebut menyebar normal ganda p.

Contoh kasus

Obs	x1	x2	x3	x4	d_i^2	k	p(k)	$\chi^2_{(4)}$
1	1.29	0.98	0.99	1.05	8.25	15	0.91	22.57
2	1.28	1.08	1.06	1.08	6.71	14	0.84	20.42
3	0.79	1.06	1.01	1.05	11.22	16	0.97	26.70
4	0.80	1.01	1.01	1.05	2.55	6	0.34	12.30
5	1.39	1.03	1.03	1.04	2.19	4	0.22	10.59
6	0.89	0.97	0.99	1.02	2.72	7	0.41	13.11
7	1.40	1.06	1.05	1.06	2.74	8	0.47	13.92
8	0.72	1.00	1.02	1.03	3.81	12	0.72	17.65
9	1.03	1.00	1.00	1.01	1.13	2	0.09	8.41
10	0.69	0.97	0.99	1.01	3.00	9	0.53	14.76
11	1.29	1.05	1.03	1.04	1.64	3	0.16	9.61
12	1.17	1.00	1.00	1.01	3.43	11	0.66	16.59
13	0.82	1.00	1.01	1.01	2.50	5	0.28	11.47
14	1.23	1.05	1.03	1.02	3.17	10	0.59	15.64
15	1.09	1.02	1.02	1.03	0.13	1	0.03	6.56
16	1.00	1.04	1.05	1.03	4.82	13	0.78	18.89

- Korelasi antara d_i^2 dengan kuantil khi-kuadrat adalah 0.941
- Bandingkan dengan tabel, jika lebih besar dari tabel berarti normal ganda



Penanganan Masalah

- Jika data tidak normal maka dapat didekati dengan transformasi, misal transformasi Box-Cox
- Lakukan eksplorasi pengamatan-pengamatan ekstrem, buat box-plot untuk data d_i^2 (aturan main sama seperti kasus univariate