Sebaran Normal Ganda

Pertemuan 2 – STA1342

Dhea Dewanti & Nur Khamidah

Sebaran Normal Univariat

Fungsi kepekatan peluang dari sebaran Normal univariat (p=1) adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \qquad \text{for} \quad -\infty < x < \infty$$

Dengan parameter:

$$\mu = E(X) = \text{mean}$$
$$\sigma^2 = \text{var}(X) = \text{variance}$$

dalam bentuk lain dapat dinyatakan:

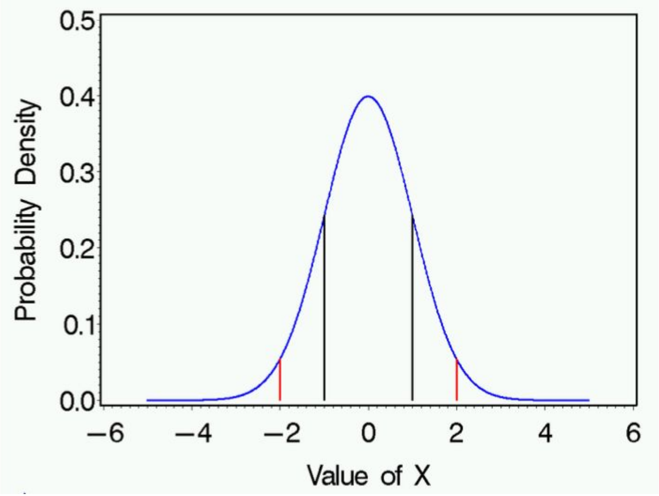
$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = (x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)$$

Sifat Sebaran Normal Univariat

Plot dari fungsi sebelumnya akan menghasilkan kurva berbentuk lonceng dengan ciri sebagai berikut:

1. Simetrik terhadap nilai tengah (μ)
2. Nilai tengah, median, dan modus berada pada titik yang sama
3. Peluang amatan berada antara $\mu \pm \sigma$ adalah 68%
4. Peluang amatan berada antara $\mu \pm 1.96\sigma$ adalah 95%.

Sebaran Normal univariat beserta parameternya dinotasikan dengan $N(\mu, \sigma^2)$



Sebaran Normal Ganda

Fungsi kepekatan sebaran Normal ganda (multivariate normal) merupakan generalisasi dari fungsi kepekatan Normal univariat dengan p ≥ 2 dimensi.

$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = (x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu) \xrightarrow[\text{Bentuk eksponen multivariat}]{p \geq 2} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) = \Delta^2$$

Jarak Mahalanobis

di mana:

- **x’** = [x1, …, xp] yang merupakan vektor peubah
- **μ’** = [μ1, …, μp] yang merupakan nilai tengah dari vektor acak **x**
- **Σ** merupakan matriks kovarian berukuran pxp

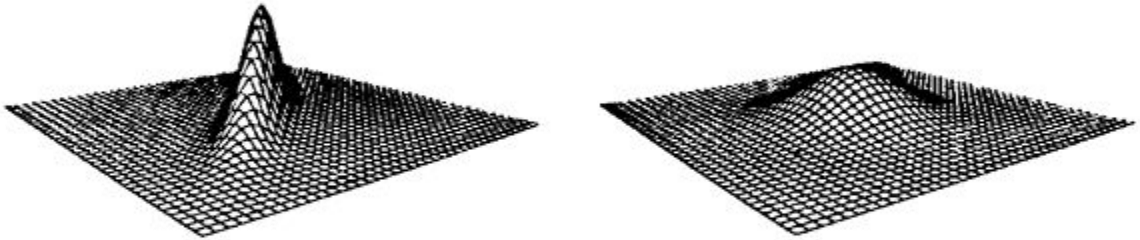
Sehingga diperoleh FKP sebaran Normal ganda sebagai berikut:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

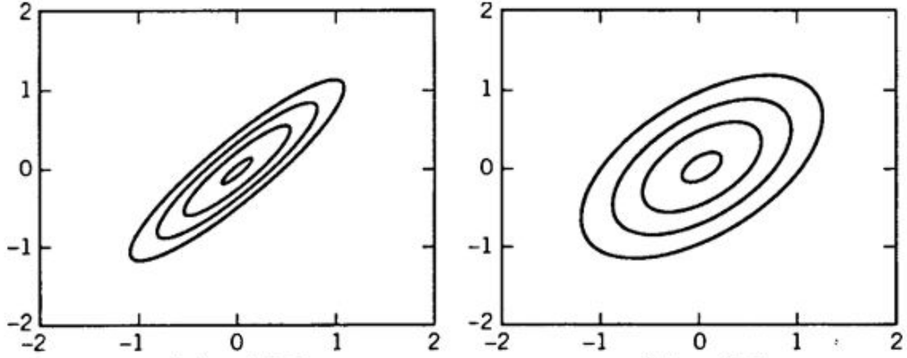
where $-\infty < x_i < \infty$ for $i = 1, \ldots, p$.

Sebaran Normal multivariat beserta parameternya dinotasikan dengan $\mathbf{N_p}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

Sebaran Normal Ganda – Bivariat



(a) small $|\Sigma|$ (b) large $|\Sigma|$



(a) small $|\Sigma|$ (b) large $|\Sigma|$

Sifat-sifat Peubah Ganda Normal

Sebaran Kombinasi Linier dari Peubah Ganda Normal

Kombinasi linier dari semua komponen peubah X juga menyebar Normal.

- Jika **a** adalah vektor konstanta, maka fungsi linier
  $\mathbf{a'x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p$ adalah **univariat normal**
  Sehingga, ketika $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, maka $\mathbf{a'x} \sim N(\mathbf{a'}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{a'}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a})$

- Jika **A** adalah konstanta **q x p** matriks pangkat q, di mana $q \leq p$, q kombinasi linier di **Ax** memiliki sebaran **multivariat normal.**
  Sehingga, ketika $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, maka $\mathbf{Ax} \sim N_q(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A'})$

Sifat-sifat Peubah Ganda Normal

Kenormalan Baku

Vektor $\mathbf{z}$ diperoleh dengan:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{T})^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$$

di mana $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{T'T}$ dan $\mathbf{T}$ diperoleh menggunakan pemfaktoran dengan prosedur Cholesky, dengan $\mathbf{z} = (\boldsymbol{\Sigma}^{1/2})^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ dan $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$ adalah matriks akar kuadrat simetris yang didefinisikan dari $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$

Jika $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, maka $\mathbf{z} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$

Sifat-sifat Peubah Ganda Normal

Distribusi Chi Kuadrat

Jika **z** merupakan vektor standar yang telah didefinisikan sebelumnya, maka $\mathbf{z}'\mathbf{z} \sim \chi^2_{(p)}$.

$\mathbf{z}'\mathbf{z}$ juga dapat diperoleh dari: $\mathbf{z}'\mathbf{z} = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$.

Maka dari itu, jika $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ maka $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2_{(p)}$

Sifat-sifat Peubah Ganda Normal

Normalitas Distribusi Marginal

Jika **x** ~ $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, maka setiap partisi dari **x** mengikuti sebaran normal multivariat, dengan ketentuan:

$$X = \begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \end{bmatrix}_{p\,X\,1}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_{(1)} \\ \mu_{(2)} \end{bmatrix} \; and \; \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{where } X_{(1)} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_q \end{bmatrix}, \quad X_{(2)} = \begin{bmatrix} X_{(q+1)} \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}, \quad \mu_{(1)} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \end{bmatrix}, \quad \mu_{(2)} = \begin{bmatrix} \mu_{(q+1)} \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{ij} = E\left[\left(X_{(i)} - \mu_{(i)}\right)\left(X_{(j)} - \mu_{(j)}\right)'\right], i,j = 1,2$$

Jika $\mathbf{X}_{(1)}$ dan $\mathbf{X}_{(2)}$ saling bebas: $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$

Jika **x** ~ $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, maka $\mathbf{x}_1 \sim N_q(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$ **(tidak berlaku sebaliknya)**

Sifat-sifat Peubah Ganda Normal

Sebaran Bersyarat

Jika **x** dan **y** saling bebas, maka kovarian **x** dan **y** adalah 0.

Jika **x** dan **y** saling bebas, maka $\boldsymbol{\Sigma}_{xy} = \boldsymbol{\Sigma}_{yx} = \mathbf{0}$, dan sebaran bersyarat dari **y** jika diberikan **x**, di mana $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\Sigma}_{xx})$ dan $\mathbf{y} \sim N_q(\boldsymbol{\mu}_y, \boldsymbol{\Sigma}_{yy})$, maka sebaran bersyarat (**y**|**x**) adalah

$$(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) \sim N_{p+q}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ - \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \mathbf{0} \\ - & - \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{bmatrix}\right)$$

Jika **tidak** saling bebas, maka $\boldsymbol{\Sigma}_{xy} = \boldsymbol{\Sigma}_{yx} \neq \mathbf{0}$, nilai tengah dan ragam sebaran bersyarat diperoleh dengan:

$$E(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mu}_y + \boldsymbol{\Sigma}_{yx}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_x)$$

$$cov(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Sigma}_{yy} - \boldsymbol{\Sigma}_{yx}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{xy}$$

Contoh Soal – 1

Untuk

$$\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$$

Tentukan sebaran dari **AX** dengan: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{pmatrix}$$

Jawaban – 1

Dari sifat sebaran normal multivariat:

X ~ N_p(**μ**, **Σ**), maka **Ax** ~ $\mathbf{N_q}$(**Aμ**, **AΣA'**)

Maka kombinasi linier dari **X**,

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} a_{11}X_1 + \cdots + a_{1p}X_p \\ a_{21}X_1 + \cdots + a_{2p}X_p \\ \vdots \\ a_{q1}X_1 + \cdots + a_{qp}X_p \end{bmatrix} \sim N_q\left(\mathbf{A\mu}, \mathbf{A\Sigma A}^T\right)$$

Nilai tengah:

$$\mathbf{A\mu} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \end{pmatrix}$$

Ragam:

$$\mathbf{A\Sigma A}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22} & \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{22} - \sigma_{13} \\ \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{22} - \sigma_{13} & \sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Maka:

$$\mathbf{AX} \sim N_2(\mathbf{A\mu}, \mathbf{A\Sigma\, A}^T)$$

Contoh Soal – 2

Jika, $\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Sigma = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Tentukan sebaran marginal bagi X_1

   Sifat yang sama berlaku seperti pada sebaran normal bivariat, masing-masing variabel mempunyai sebaran normal univariat.

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X_1 \sim N_1(0,7)$$

Jawaban – 2

2. Tentukan sebaran marginal bagi $\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

Ingat: Sifat sebaran dari peubah yang dipartisi.

Jika $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, maka $\mathbf{X}^{(1)} \sim N_q(\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$

$$\mathbf{X} = \left(\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \hline X_3 \end{array}\right) \qquad \boldsymbol{\mu} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right) \qquad \Sigma = \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \boldsymbol{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_{11} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Diperoleh $\mathbf{X}^{(1)} \sim N_2(\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$

Contoh Soal – 3

Diberikan

$$\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Apakah X_1 dan X_2 saling bebas?
2. Apakah (X_1, X_2) dan X_3 saling bebas?

Jawaban – 3

Perhatikan: matriks ragam dan partisinya.

Berdasarkan matriks ragam,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\sigma_{12} = \sigma_{12} = 1 \neq 0$, maka X_1 dan X_2 **tidak** saling bebas.

$$\mathbf{X} = \left(\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \hline X_3 \end{array}\right) \qquad \Sigma = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_{12} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right)$$

Kovarians dari (X_1, X_2) dan X_3 adalah **vektor nol.**

$$\Sigma_{12} = \Sigma_{21}^{T} = \mathbf{0}$$

Maka dapat dikatakan keduanya **saling bebas.**

Contoh Soal – 4

Diberikan

$$\boldsymbol{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Seperti apa sebaran bersyarat $(X_1, X_2 | X_3 = 1)$?

Jawaban – 4

$$\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}^{(2)} = -2$$

Berdasarkan partisi:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_{12} = \boldsymbol{\Sigma}_{21} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_{22} = 1$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ -- \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}^{(1)} \\ -- \\ \boldsymbol{X}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ -- \\ \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}^{(1)} \sim N_2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2})$$

- Mencari nilai tengah

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu}^{(1)} + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}(1)(1 - (-2))$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 4.6 \end{pmatrix}$$

Jawaban – 4

- Mencari ragam

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} (1)(0.4 \;\; 0.2)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.16 & 0.08 \\ 0.08 & 0.04 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} = \begin{pmatrix} 0.84 & 0.42 \\ 0.42 & 0.96 \end{pmatrix}$$

- Diperoleh sebaran bersyarat

$$(X_1, X_2 | X_3) \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 2.2 \\ 4.6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.84 & 0.42 \\ 0.42 & 0.96 \end{pmatrix}\right)$$

Contoh Soal – 5

Diberikan

$$\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Seperti apa sebaran bagi $(2X_1+X_2 ,\ X_1+2X_2+3X_3)$) ?

Jawaban – 5

Bentuk matriks koefisiennya terlebih dulu.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BX} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2X_1 + X_2 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\mathbf{B\mu}, \mathbf{B\Sigma B}^T\right)$$

- Mencari nilai tengah

$$\mathbf{B\mu} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Mencari ragam

$$\mathbf{B\Sigma B}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9.5 \\ 9.5 & 20.8 \end{pmatrix}$$

Diperoleh

$$\mathbf{BX} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 9.5 \\ 9.5 & 20.8 \end{pmatrix}\right)$$

Eksplorasi Sebaran Normal Ganda

1. Untuk mengevaluasi apakah data yang dimiliki menyebar normal ganda dapat ditelusuri secara eksplorasi

2. Seperti halnya untuk kasus *univariate* penelusuran sebaran normal ganda dapat juga memanfaatkan plot quantil-quantil -> **quantil khi-kuadrat**

Tahapan dari pembuatan q-q plot

1. Mulai
2. Tentukan nilai vektor rata-rata: $\bar{\boldsymbol{X}}$
3. Tentukan nilai matriks varians-kovarians: $\boldsymbol{S}$
4. Tentukan nilai jarak *mahalanobis* atau kuadrat *general* setiap titik pengamatan dengan vektor rata-ratanya $d_i^2 = (\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})'\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})\,, i = 1, 2, \dots, n.$
5. Urutkan nilai d_i^2 dari kecil ke besar: $d_{(1)}^2 \le d_{(2)}^2 \le d_{(3)}^2 \le \cdots \le d_{(n)}^2$.
6. Tentukan nilai $p_i = \frac{i-1/2}{n}, i = 1, 2, \dots, n.$

Tahapan dari pembuatan q-q plot

7. Tentukan nilai q_i sedemikian hingga $\int_{-\infty}^{q_i} f(\chi^2)d\,\chi^2 = p_i$ atau $q_{i,p}(p_i) = \chi_p^2\left(\left(n - i + {}^1\!/_2\right)/n\right)$.

8. Buat *scatter-plot* $d_{(i)}^2$ dengan q_i

9. Jika *scatter-plot* ini cenderung membentuk garis lurus dan lebih dari 50% nilai $d_i^2 \leq \chi_p^2(0{,}50)$, artinya data berdistribusi normal multivariat.

10. Selesai

Latihan Soal

Berikut data diambil dari Garperz (1992) dalam simatupang (2002).
X1 = Kontribusi industri manufaktur dalam produk dosmestik regional bruto(%)
X2 = Banyaknya tenaga kerja dalam sektor industri manufaktur (%)

X1	8.8	8.5	7.7	4.9	9.6	10	11.5	11.6	11.2	10.7	10	6.8
X2	2589	1186	291	1276	6633	12125	36717	43319	10530	3931	1536	61400

Apakah data ini menyebar bivariate normal? Jelaskan!

Tugas

1. Bangkitkan X1~Unif(1,3) sebanyak 10 amatan (dengan R)
2. Bangkitkan X2~Exp(5) sebanyak 10 amatan (dengan R)
3. Gunakan set.seed(xxxxx) di mana xxxxx adalah 5 digit terakhir NRP Anda
4. Lakukan pengecekan apakah X1 dan X2 menyebar bivariate normal? Jelaskan! Lakukan pengujian baik secara visual maupun formal.
5. Tugas dikumpulkan maksimal Selasa, 29 Agustus 2023 pukul 23.59 WIB.
6. Link pengumpulan tugas: https://ipb.link/tugas1-sta1342-2023
7. Format nama tugas: Nama_NRP