Uji Vektor Nilai Tengah Satu Populasi

Pertemuan 3 – STA1342

Dhea Dewanti & Nur Khamidah

Uji Nilai Tengah

- Jika ingin mengambil keputusan valid mengenai **rataan** dari suatu populasi berdasarkan contoh yang diperoleh maka dilakukan uji nilai tengah
- Dari satu populasi diambil sejumlah contoh, di mana contoh tersebut terdiri dari beberapa peubah yang saling berkorelasi sebanyak ***p*** → maka harus dilakukan analisis secara bersama-sama
- Analisis beberapa peubah yang dilakukan secara bersama-sama akan memberikan hasil uji yang lebih valid

Uji Nilai Tengah

- Uji ini didasarkan pada hipotesis berikut:

$$H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu_0}$$

$$H_1: \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu_0}$$

- Di mana $\boldsymbol{\mu}_{px1}$ merupakan vektor nilai tengah populasi dan $\boldsymbol{\mu}_{0,\,px1}$ merupakan beberapa nilai tertentu di bawah hipotesis nol.
- ***p*** merupakan banyak peubah yang diuji nilai tengahnya. Jika ***p = 1***, maka pengujian dilakukan dengan statistik *t*.
- Jika ***p > 1***, maka pengujian dilakukan dengan statistik T^2 Hotelling.

Kasus Univariat

- Jika kita punya contoh acak dari *n* amatan dari suatu populasi, di mana:
  - Amatan saling bebas
  - Amatan berasal dari populasi yang sama, $E(X_i) = \mu$ untuk semua *i*
  - Jika ukuran contoh kecil, diasumsikan $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

  Maka :

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

- Jika ingin dilakukan pengujian terhadap nilai tengah, digunakan statistik uji berikut:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Pada Kasus *p* Dimensi, p > 1

- Jika dicari kuadrat dari statistik uji *t*:

$$t^2 = \frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{\frac{s^2}{n}} = n(\bar{x}-\mu_0)(s^2)^{-1}(\bar{x}-\mu_0)$$

- Diperoleh bahwa *t2* adalah jarak kuadrat statistik antara rataan contoh dan nilai hipotesis $\boldsymbol{\mu}_0$
- Ingat bahwa $t^2_{df} = F_{1,df}$
- Maka,

$$t^2 = n(\bar{x}-\mu_0)(s^2)^{-1}(\bar{x}-\mu_0) \sim F_{1,df}$$

- Di mana ***df = n - p***

Kasus Multivariat

$$H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu_0}$$

$$H_1: \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu_0}$$

- Untuk kasus multivariat, ganti skalar dengan vektor dan matriks sebagai berikut:

$$T^2 = n(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu_0})'\boldsymbol{S}^{-1}(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu_0}) \sim \frac{(n-1)p}{n-p} F_{p,(n-p)} = c^2$$

- Di mana:

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{p\times 1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i \qquad \boldsymbol{\mu_0}_{p\times 1} = \begin{pmatrix} \mu_{1\,0} \\ \mu_{2\,0} \\ \vdots \\ \mu_{p\,0} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_{p\times p} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}})'$$

- Tolak H_0 jika:

$$T^2 > c^2 = \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{(p,n-p)}(\alpha)$$

Selang Kepercayaan Multivariat

- Untuk kasus univariat, selang kepercayaan untuk parameter θ adalah daerah yang memuat nilai sebenarnya dari parameter tersebut dengan peluang $1 - \alpha$.
- Untuk kasus multivariat berdimensi *p*, daerah kepercayaan untuk parameter $\boldsymbol{\theta}$ adalah daerah yang memuat nilai sebenarnya dari parameter tersebut dengan peluang sebesar $1 - \alpha$.
- Beberapa selang kepercayaan yang dapat digunakan pada kasus multivariat antara lain selang kepercayaan simultan, Bonferroni, dan *ellips*.

Selang Kepercayaan Simultan

- Digunakan untuk mencari selang kepercayaan pada setiap parameter peubah ke-*i*.
- Batas-batas selang kepercayaan **(1 - α)100% bagi μ** diperoleh dengan rumus:

$$\bar{x}_i \pm c\sqrt{\frac{Sii}{n}} \qquad \text{atau} \qquad \boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} \pm c\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}'S\boldsymbol{a}}{n}} \qquad \text{dengan} \qquad c^2 = \frac{(n-1)p}{n-p}F_{(p,n-p)}(\alpha)$$

- Peluang nilai parameter akan berada di dalam selang adalah:

$$P\left(\bar{x}_i - \sqrt{\frac{(n-1)p}{n-p}F_{(p,n-p)}(\alpha)}\sqrt{\frac{Sii}{n}} \le \mu_i \le \bar{x}_i + \sqrt{\frac{(n-1)p}{n-p}F_{(p,n-p)}(\alpha)}\sqrt{\frac{Sii}{n}}\right) = 1-\alpha$$

- Di mana *i = 1, …, p*

Selang Kepercayaan *Ellips*

- Selang ini memuat nilai $\boldsymbol{\mu}_0$ yang tidak akan ditolak oleh T^2 Hotelling pada taraf nyata α. Selang ini dinyatakan dengan:

$$n(\bar{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}) \le c^2 = \frac{(n-1)p}{n-p}F_{p,(n-p)}(\alpha)$$

$$P\left(n(\bar{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}) \le \frac{(n-1)p}{n-p}F_{p,(n-p)}(\alpha)\right) = 1-\alpha$$

Gambar Daerah Kepercayaan *Ellips*

- Selang ini dibentuk dengan:
  - Panjang ½ sumbu mayor = $\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{n}} c$
  - Panjang ½ sumbu minor = $\frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{n}} c$
  - Daerah kepercayaan dinyatakan dengan

$$\bar{\mathbf{x}} \pm \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{n}} c e_i$$

Di mana e_i adalah vektor eigen dari eigen matriks S

Dan nilai c diperoleh dari $c^2 = \frac{(n-1)p}{n-p} F_{p,(n-p)}(\alpha)$

Selang Kepercayaan Bonferroni

- Jika ingin membentuk sebanyak ***m*** selang kepercayaan dengan masing-masing selang memuat **(1 - α)100%** amatan, maka peluang dari amatan berada pada selang secara simultan atau keseluruhan akan berkurang menjadi sebesar **(1 - mα)100%.**
- Maka sebaliknya, jika ingin memperoleh selang simultan dengan peluang **(1 - α)100%,** maka pada setiap selang individu dipilih taraf sebesar **α/m** dan menghasilkan peluang masing-masing selang sebesar **(1 - α/m)100%.**
- Metode dalam membentuk selang kepercayaan simultan ini disebut **Metode Bonferroni,** di mana akan menghasilkan selang yang lebih lebar dibandingkan selang individualnya.
- Selang ini lemah ketika nilai ***m*** nya besar, karena dianggap terlalu konservatif.

Selang Kepercayaan Bonferroni

- Selang ini dinyatakan dengan:

$$(Nilai\ parameter\ berada\ pada\ selang\ C_i) = 1 - \alpha_i$$

$$P(Semua\ nilai\ parameter\ berada\ pada\ selang\ C) = 1 - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_p)$$

- Adapun batas wilayah dan peluang selang Bonferroni pada setiap selang dinyatakan dengan:

$$\bar{x}_i \pm t_{(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}}$$

$$P\left(\bar{x}_i - t_{(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}} \le \mu_i \le \bar{x}_i + t_{(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Contoh Kasus

Berikut ini data dari sampel siswa di sebuah sekolah yang dilihat dari skor nilai matematika (X1) dan fisika (X2). Kedua peubah diasumsikan menyebar normal bivariate:

Siswa	matematika	fisika
1	72.8	69.9
2	46	68.9
3	59.2	58.4
4	66.7	78.2
5	84.2	63.9
6	50.4	54.6
7	49.6	66.5
8	77.9	71.6
9	63.9	77.2
10	55.1	56.8

Contoh Kasus

Pertanyaan :

1. Hitung vektor rataan dan matriks kovarian-nya?
2. Ujilah pada taraf nyata 10% apakah vektor rataan populasi $\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 60 \end{bmatrix}$
3. Tentukan *ellips* kepercayaan 90% bagi μ dan buatlah gambarnya
4. Apakah seorang siswa yg memiliki skor matematika 65 dan skor fisika 70 masuk ke dalam *ellips* kepercayaan tersebut?
5. Buatlah selang kepercayaan simultan dan selang bonferroni 90%

Latihan Soal

1. Ada 20 wanita dianalisis tentang kadar gula, kadar garam dan kadar potassium dalam darah mereka. Hasil menunjukkan

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 4.64 \\ 45.40 \\ 9.96 \end{pmatrix} \text{dan } S = \begin{pmatrix} 2.88 & 10.01 & -1.81 \\ 10.01 & 199.79 & -5.64 \\ -1.81 & -5.64 & 3.63 \end{pmatrix}$$

Ujilah $H_0 : \boldsymbol{\mu}' = (4 \quad 50 \quad 10)$ lawan $H_1 : \boldsymbol{\mu}' \neq (4 \quad 50 \quad 10)$

Dengan $\alpha = 10\ \%$ dimana $F_{3,\,17}\ (\alpha = 10\ \%) = 2.44$

2. Diketahui data matriks dari sampel acak berukuran n=3 dari populasi normal bivariate

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Ujilah $H_0 : \boldsymbol{\mu}' = (9 \quad 5)$

Tugas Kelompok

1. 1 Kelompok terdiri dari 2 orang
2. Kerjakan secara manual dan menggunakan R
3. Tugas dikumpulkan maksimal Selasa, 5 September 2023 pukul 23.59 WIB.
4. Link pengumpulan tugas: https://ipb.link/tugas2-sta1342-2023
5. Format nama tugas: Tugas2_NamaAnggota1_NamaAnggota2