Handout 1
PENGANTAR ANALISIS PEUBAH GANDA
(REVIEW KONSEP ALJABAR MATRIKS)

Untuk memahami data yang besar dan peubah-peubahnya tidak saling bebas, peringkasan tetap harus dilakukan. Untuk data *univariate* (satu peubah yang menjadi fokus pembahasan), peringkasan umumnya dilakukan menggunakan rata-rata, ragam, kemenjuluran, dan kurtosis, baik untuk populasi maupun contoh. Data peubah ganda juga memiliki hal yang serupa. Pada tulisan ini, notasi matriks akan banyak digunakan untuk menyederhanakan penulisan. Beberapa istilah matriks akan dibahas kemudian.

Misalnya **x** adalah vektor acak berukuran *p x 1* yang berpadanan dengan sebuah populasi peubah ganda, atau

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

maka setiap x_i adalah peubah acak, dan kita mengasumsikan $x_1, \ldots, x_p$ mungkin saling tidak bebas. Notasi E(·) menunjukkan nilai harapan (diinterpretasikan sebagai rata-rata dalam jangka panjang), dan misalkan $\mu_i = E(x_i)$ dan $\sigma_{ii} = var(x_i)$ adalah ragam populasi. Selanjutnya peragam populasi antara x_i dan x_j adalah $_{ij}$ = cov(x_i, x_j). Didefinisikan vektor rataan populasi (**μ**) sebagai vektor dari nilai harapan setiap peubah, yaitu:

$$\mathrm{E}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathrm{E}(x_1) \\ \mathrm{E}(x_2) \\ \vdots \\ \mathrm{E}(x_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}$$

Sebagai tambahan, konsep ragam populasi dirangkum dalam sebuah matriks yang memuat ragam dan peragam populasi yang diletakkan bersesuasian dalam matriks ragam-peragam. Jika matriks tersebut dilambangkan , maka

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} var(\mathrm{x}_1) & cov(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) & \cdots & cov(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_p) \\ cov(\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_1) & var(\mathrm{x}_2) & \cdots & cov(\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\mathrm{x}_p, \mathrm{x}_1) & cov(\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_p) & \ldots & var(\mathrm{x}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \ldots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

Dengan mengartikan cov(x_i, x_i) = var(x_i) = σ_{ii}, bentuk cov(x_i, x_j) dapat disebut sebagai unsur ke-*(i, j)* dari matirks . Nilai-nilai ragam peubah ke-*i* ditempatkan pada diagonal utama ke-*i*, dan nilai peragam akan ditempatkan bersesuaian pada unsur non-diagonal. Karena cov(x_i, x_j) = cov(x_j, x_i) atau $_{ij}$ = $_{ji}$, maka merupakan matriks yang simetrik.

Nilai tr(∑) = $\sum_{i=1}^{p} \sigma_{ii}$ disebut sebagai ragam total dan det(∑) = |∑ | disebut sebagai ragam terampat (generalized variance). Dua buah nilai tersebut seringkali digunakan sebagai ukuran keragaman total dari vektor acak **x**. Namun demikian, kadang-kadang penggunaannya dapat menyesatkan, sebgai misal, tr(∑) sama sekali tidak memperhitungkan nilainilai selain diagonal utama yang menunjukkan peragam antar peubah. Atau dapat juga, dua buah matriks yang sangat berbeda mungkin memiliki determinan yang sama.

karena ada keterkaitan antara x_i, …, x_p maka masih relevan jika kita melihat tingkat keterkaitannya, palingtidak keterkaitan linearnya melalui besarnya korelasi. Koefisien korelasi Pearson untuk populasi antara x_i dan x_j diperoleh melalui

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(x_i, x_j)}{\sqrt{\text{var}(x_i)\,\text{var}(x_j)}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}$$

Selanjutnya kita definisikan matriks korelasi populasi sebagai

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & & \rho_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & & 1 \end{bmatrix}$$

Seperti halnya Σ, ρ juga meupakan matriks simetrik. Lebih jauh, ρ dapat dituliskan dalam sebagai

$$\rho = [diag(\boldsymbol{\Sigma})]^{-\frac{1}{2}}\, \boldsymbol{\Sigma}\, [diag(\boldsymbol{\Sigma})]^{-\frac{1}{2}}$$

dengan $\text{diag}(\boldsymbol{\Sigma})$adalah matriks diagonal yang didapatkan dengan mempertahankan unsur diagonal $\boldsymbol{\Sigma}$ dan mengganti unsur nondiagonalnya dengan 0, dan akar kuadrat dari matriks A dinotasikan $A^{1/2}$ adalah matriks yang memenuhi A = $A^{1/2} A^{1/2}$, dan $A^{-1/2}$ adalah invers (kebalikan) dari matriks $A^{1/2}$. Pada buku ini diasumsikan matriks ragam-peragam dan matrik korelasi bersifat definit positif.

Bagaimana kita mengukur kemenjuluran (*skewness*) dan kurtosis untuk populasi peubah ganda? Mardia (1970) mendefinisikan ukuran ini sebagai:

- Multivariate skewness

$$\boldsymbol{\beta}_{1,p} = \mathbf{E}[(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})]^3$$

  dengan **x** dan **y** saling bebas dan dari sebaran yang sama.

- Kurtosis multivariate

$$\boldsymbol{\beta}_{2,p} = \mathbf{E}[(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})]^2$$

Untuk kasus univariate, yaitu p = 1, $\beta_{1,p}$ menjadi kuadrat dari koefisien kemenjuluran, dan $\beta_{2,p}$ adalah koefisien kurtosis.

Besaran-besaran $\mu, \Sigma, \sigma, \rho$, $\beta_{1,p}$, dan $\beta_{2,p}$ merupakan nilai-nilai ringkasan dasar bagi populasi peubah ganda. Lalu, apa padanan dari besaran-besaran ini untuk contoh? Jika kita memiliki contoh acak berukuran n yang terdiri atas p buah peubah $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, maka didefinisikan matriks X yang berukuran *nxp*

$$\mathbf{x}_{nxp} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

padanan besaran di atas adalah:

vektor rataan contoh : $\bar{\mathbf{x}} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i = n^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{1}$

matriks ragam-peragam contoh : $\mathbf{S} = (n-1)^{-1}\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x_i}-\bar{\mathbf{x}})(\boldsymbol{x_i}-\bar{\mathbf{x}})'$

$$= (n-1)^{-1}\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x_i}-\bar{\mathbf{x}})(\boldsymbol{x_i}-\bar{\mathbf{x}})'$$
$$= (n-1)^{-1}\{\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}}\mathbf{x_i}\mathbf{x_i}' - n\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}'\}$$
$$= (n-1)^{-1}\{\mathbf{X}'(\mathbf{I}-n^{-1}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n')\mathbf{X}\}$$
$$= (n-1)^{-1}\{\mathbf{X}'\boldsymbol{X} - n^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'\mathbf{X}\}$$
$$= (n-1)^{-1}\{\mathbf{X}'\boldsymbol{X} - n\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}'\}$$

Seringkali juga disebutkan dalam beberapa literatur bahwa pembagi pada *persamaan* di atas adalah n bukan $(n-1)$. Jika demikian halnya maka notasi yang digunakan adalah S_n. Kita juga masih memiliki beberapa besaran, yaitu:

matriks korelasi contoh : $\hat{\rho} = [diag(\boldsymbol{S})]^{-\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{S}\,[diag(\boldsymbol{S})]^{-\frac{1}{2}}$

$$= [diag(\boldsymbol{S_n})]^{-\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{S_n}\,[diag(\boldsymbol{S_n})]^{-\frac{1}{2}}$$

KONSEP ALJABAR MATRIKS

Definisi :

Matrik **A** berukuran mxn ialah suatu susunan angka dalam persegi empat ukuran mxn, sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad A = (a_{ij})$$

Untuk menyatakan elemen matrik **A** yang ke (i,j), yaitu a_{ij}, digunakan notasi $(A)_{ij}$. Ini berarti $a_{ij} = (A)_{ij}$. Bila m = n, matriks dinamai matrik bujur sangkar berukuran m. Matrik berukuran mx1 disebut vektor kolom dan berukuran 1xn disebut vektor baris.

Contoh: $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, suatu vektor kolom, a_i menyatakan komponen $\boldsymbol{a}$ ke i.

$\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]$, suatu vektor baris, b_i menyatakan komponen $\boldsymbol{b}$ ke i.

$(A)_{i.}$ menyatakan vektor baris ke i matrik A.

$(A)_{.j}$ menyatakan vektor kolom ke j matrik A.

BERBAGAI JENIS MATRIK DAN VEKTOR :

1. Matrik Diagonal

Elemen diagonal matrik A ialah $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$, khusus untuk matrik bujur sangkar; dan vektor $\boldsymbol{a}$ dengan m komponen adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Bila semua elemen selain $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$ bernilai 0, A disebut matrik diagonal. A = diag ($a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$) menyatakan matrik diagonal dengan elemen diagonal $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$. Bila a_{ii} = 1 untuk i = 1, 2, ... , m, maka **A** disebut matrik identitas berukuran m, dinotasikan $\mathbf{I}_m$ atau **I**.

$$D_A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}) \text{ dan } D_a = \text{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

$$D_A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \qquad D_a = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \end{bmatrix}$$

Bila A = diag ($a_1, a_2, \ldots, a_m$) dan b skalar, maka A^b = diag $\begin{bmatrix} a_1^b & a_2^b & \cdots & a_m^b \end{bmatrix}$.

2. Matrik Segitiga

Matriks segitiga ialah matrik dengan elemen di atas atau di bawah diagonal bernilai 0. Matrik segitiga terdiri dari dua macam, segitiga atas dan segitiga bawah. Segitiga atas bila yang bernilai 0 adalah elemen di bawah diagonal, dan segitiga bawah bila yang bernilai 0 di atas diagonal. Contoh matrik segitiga atas (misal dinamai **P**) dan segitiga bawah (misal dinamai **Q**) adalah sebagai berikut :

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Bila $A = \mathbf{I}_m$, maka terdapat vektor $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots \boldsymbol{e}_m$, masing-masing menyatakan suatu vektor dengan komponen ke 1, 2, ... m bernilai 1 dan komponen yang lain bernilai 0, dinyatakan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{e}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Transpose

Transpose matrik ***A*** dinotasikan A^T atau A' didapatkan dengan cara menukar elemen baris ke *i* matrik ***A*** menjadi elemen kolom ke *i*. Bila matrik ***A*** berukuran mxn, maka A' berukuran nxm dan elemen A' yang ke (*i,j*) adalah a_{ji} ; dapat pula dinyatakan $(A')_{ij} = (A)_{ji}$. Berikut ini adalah contoh matrik transpose :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Diketahui matrik ***A*** berukuran *mxp* dan matrik ***B*** berukuran *pxn* , maka elemen ke (*i,j*) matrik (***AB***)′ dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
((AB)')_{ij} &= (AB)_{ji} \\
&= (A)_{j.}\,(B)_{.i} \\
&= \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{p} b_{ki} a_{jk} \\
&= b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{pi}a_{jp} \\
&= \begin{pmatrix} b_{1i} & b_{2i} & \cdots & b_{pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jp} \end{pmatrix} \\
&= (\text{elemen baris ke } i \text{ matriks } B')(\text{elemen kolom ke } j \text{ matrik } A') \\
&= (B')_{i.}\,(A')_{.j} \\
&= (B'A')_{ij}
\end{aligned}$$

Jadi, $(AB)' = B'A'$

4. Trace Matriks

Trace terdefinisikan hanya pada matriks bujursangkar. Bila matrik ***A*** berukuran mxm maka trace ***A***, dinotasikan tr(***A***), adalah jumlah elemen diagonal matrik ***A*** atau penjumalahan semua akar cirinya, dan dinotasikan dengan :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

Matrik *A* berukuran mxn dan *B* berukuran nxm, maka matrik *AB* berukuran mxm. Berlaku :

trace (*AB*) = trace (*BA*)

Penjabaran : $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} (A)_{i.}(B)_{.i} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}a_{ij}$

$$= \sum_{j=1}^{n} (B)_{j.}(A)_{.j} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = tr(BA)$$

Jadi, **tr(*AB*) = tr(*BA*)**

5. Determinan Matriks

Determinan dari matriks A berukuran nxn adalah perkalian dari semua akar ciri A, λ_1, ..., λ_n, dan dinotasikan |A|, sehingga

$$|A| = \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_n$$

Jadi |A| = 0 jika dan hanya jika paling tidak ada satu akar ciri yang 0, yaitu terjadi jika dan hanya jika A singular.

Jika A dan B adalah dua matriks persegi berukuran n, maka |AB| = |A|x|B| = |B|x|A| = |BA|. Dengan demikian jelas bahwa jika A non singular maka $|A^{-1}|=|A|^{-1}$, karena |I| = 1. Dapat pula ditunjukkan bahwa jika A matriks ortogonal maka |AA'| = |I| = 1 = |A||A'| = |A||A| = $|A|^2$, sehingga |A|=1 atau |A|= -1.

6. Invers Matriks

Matrik A berukuran mxm disebut matrik nonsingular bila **|A|** tidak nol. Matrik mempunyai invers *tung-gal*, dinotasikan A^{-1}, dan memenuhi sifat berikut,

$$A A^{-1} = A^{-1}A = I$$

JARAK EUCLID ANTAR DUA VEKTOR

Dengan menggambarkan vektor **a** dan **b** berukuran *n x 1* sebagai titik pada ruang berdimensi-*n*, kita dapat mendefinisikan jarak antara **a** dan **b** sebagai norma dari vektor (**a – b**). dengan demikian, jarak *d*(**a, b**) didefinisikan sebagai :

$$\boldsymbol{d(a,b)} = \sqrt{\boldsymbol{(a-b)'(a-b)}}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^{\mathbf{2}}}$$

dengan a_i dan b_i berurutan adalah unsur ke-i dari vektor **a** dan **b**.

Jarak Euclid adalah jarak antar titik seperti yang kita lihat menggunakan mata. Namun demikian, kadangkala beberapa jarak dapat didefinisikan dengan memberikan bobot melalui sebuah matriks definit positif (akan dibahas berikutnya). Jarak yang dibangun dengan memberikan bobot menggunakan matriks pembobot **A** didefinisikan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{d_A(a,b)} = \sqrt{\boldsymbol{(a-b)'A(a-b)}}$$

Jelas bahwa d_I(**a**, **b**) = d(**a**, **b**). Salah satu jarak terboboti yang umum digunakan dalam analisis peubah ganda adalah jarak Mahalanobis.

Secara umum, fungsi dari jarak misalnya d(**a**, **b**) dapat didefinisikan dengan banyak cara. Namun fungsi jarak itu haruslah memenuhi persyaratan berikut:

a. d(**a**, **b**) = 0, jika dan hanya jika **a** = **b**
b. d(**a**, **b**) = d (**b**, **a**)
c. d(**a**, **b**) ≥ 0
d. d(**a**, **c**) ≤ d(**a**, **b**) + d(**b**, **c**)

Dapat diperiksa bahwa d(**a**, **b**) dan d_A(**a**, **b**) memenuhi syarat di atas. Perlu menjadi catatan bahwa dalam statistika seringkali jarak kuadrat juga disebutkan sebagai jarak. Ini seringkali terjadi pada kasus analisis gerombol. Dalam konteks ini, seringkali juga kita menggunakan jarak sebagai ukuran ketakmiripan (*dissimilarity*) antar objek atau individu. Walaupun, sebenarnya banyak juga indeks ketakmiripan lain yang digunakan, dan indeks ketakmiripan ini tidak selalu memenuhi syarat sebagai jarak.

VEKTOR DAN MATRIKS ORTOGONAL

Dua buah vektor berukuran *n x 1*, **a** dan **b** dikatakan ortogonal satu sama lain jika **a'b** = 0. Lebih jauh, jika **a** dan **b** adalah vektor yang dinormalkan (yaitu **a'a** = 1 = **b'b**) maka keduanya disebut ortonormal. Sebagai contoh,

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{dan } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah dua matriks yang saling ortogonal. Jika untuk yang dinormalkan, yaitu **a**/$\sqrt{3}$ dan **b**/$\sqrt{2}$ maka keduanya bersifat saling ortonormal.

Sebuah matriks **A** berukuran n x n dikatakan sebagai matriks ortogonal jika

$$A'A = AA' = I_n$$

Hal ini secara cukup setara dengan mengatakan bahwa semua baris (atau kolom) matriks **A** bersifat ortonormal satu dengan yang lain. Karena pada matriks ortogonal berlaku **A'A** = **AA'** = **I**n, maka **A'** juga berfungsi sebagai kebalikan matriks **A**. Dengan demikian, **A** juga bersifat nonsingular, dan jelas bahwa **A'** juga bersifat ortogonal.

Misalkan *m* < *n* dan **A** berukuran *n x m*, sedemikian rupa sehingga semua kolom matriks **A** bersifat ortonormal. Dalam hal ini

$$A'A = Im$$

tetapi tidak berlaku untuk **AA'**. Jika ini yang terjadi, maka **A** disebut sebagai matriks sub-ortogonal.

AKAR CIRI DAN VEKTOR CIRI

Misalkan **A** adalah matriks berukuran n x n. Pasangan-pasangan (λ_1, $\mathbf{x}_1$), ..., (λ_n, $\mathbf{x}_n$) dikatakan sebagai pasangan akar ciri dan vektor ciri jika semua (λ_i, $\mathbf{x}_i$) memenuhi persamaan :

$$Ax = \lambda x$$

Jika $\mathbf{x}_i$ memenuhi hal di atas, maka kelipatan dari $\mathbf{x}_i$ juga memenuhi. Jadi itulah sebabnya sering kita bekerja dengan vektor ciri $\mathbf{x}_i$ yang normanya 1. Pada kasus tertentu, nilai akar ciri dan unsur vektor ciri dapat berupa bilangan kompleks. Jika ada akar ciri yang bernilai nol, maka ini juga berarti bahwa matriks **A** bersifat singular.

Jika A non-singular maka A^{-1} ada, dan akar ciri dari A^{-1} adalah $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ dengan vektor ciri yang berpadanan sama dengan vektor ciri matriks A.

Jika A adalah matriks segitiga atas atau segitiga bawah maka akar ciri dari matriks A tidak lain adalah sama dengan unsur-unsur diagonal matriks tersebut.

Nilai akar ciri mungkin berulang. Jika akar ciri berulang r kali, maka dikatakan bahwa akar ciri tersebut berulang r. Jika A bersifat simetrik, maka vektor ciri yang berpadanan dengan akar ciri yang berbeda bersifat ortonormal (setelah dinormalkan). Lebih jauh, vektor ciri yang berpadanan dengan akar ciri yang berulang r tidak harus ortonormal, tapi kita dapat mendapatkan r vektor ciri berbeda yang bersifat ortonormal. Menggabungkan hal tersebut, kita selalu dapat mendapatkan n buah vektor ciri yang ortonormal dari sebuah matriks simetrik.

Jadi, jika sudah diperoleh vektor ciri yang ortonormal, misalkan $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, kita memiliki n buah persamaan

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1$$

$$\vdots$$

$$Ax_n = \lambda_n x_n$$

Menuliskan persamaan tersebut secara berdampingan menghasilkan persamaan matriks

$$(\mathbf{Ax_1} \mid \mathbf{Ax_2} \mid \dots \mid \mathbf{Ax_n}) = (\lambda\mathbf{x_1} \mid \lambda\mathbf{x_2} \mid \dots \mid \lambda\mathbf{x_n})$$

atau

$$\mathbf{A}(\mathbf{x_1} \mid \mathbf{x_2} \mid \dots \mid \mathbf{x_n}) = (\mathbf{x_1} \mid \mathbf{x_2} \mid \dots \mid \mathbf{x_n}) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Misalkan $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dan $P = (\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \dots \mid \mathbf{x}_n)$. Jelas bahwa Λ adalah matriks diagonal dan P adalah matriks ortogonal,karena semua $\mathbf{x}_i$ bersifat ortonormal. Dengan demikian diperoleh

$$AP = P\Lambda$$

atau

$$A = P\Lambda P'$$

AKAR CIRI DAN VEKTOR CIRI UMUM

Misalkan **A** dan **B** adalah dua matriks simetrik berukuran n x n, dan **B** bersifat definit positif. Maka (δ_1, $\mathbf{x}_1$), ..., (δ_n, $\mathbf{x}_n$) adalah pasangan akar ciri dan vektor ciri matriks **A** dengan memperhitungkan matriks **B** jika memenuhi persamaan ciri umum

$$\mathbf{A}x_i = \delta \mathbf{B} x_i$$

untuk semua i = 1, ..., n. Dengan mendefinisikan **Q** = ($\mathbf{x}_1$ | $\mathbf{x}_2$ | ... | $\mathbf{x}_n$), kesemua n persamaan di atas dapat dituliskan dalam persamaan matriks menjadi

$$\mathbf{AQ} = \mathbf{BQ\Delta}$$

dimana $\mathbf{\Delta}$ = diag(δ_1, ..., δ_n).

BENTUK KUADRATIK

Misalkan **A** = (a_{ij}) adalah matriks berukuran *n x n* dan **x** adalah vektor peubah berukuran *n x 1*. Maka

$$\mathbf{x'Ax} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$$

$$= a_{11}x_1^2 + \cdots . + a_{nn}x_n^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \cdots + (a_{n-1,n} + a_{n,n-1})x_{n-1}x_n$$

Bentuk itu adalah polinomial derajat dua dari $x_1, \ldots, x_n$, sehingga disebut sebagai bentuk kuadratik dari **x.**

MATRIKS DEFINIT DAN SEMIDEFINIT POSITIF

Sebuah matriks simetrik berukuran *n x n*, **A** dikatakan bersifat definit positif jika untuk sembarang vektor **x** ≠ **0**, bentuk kuadratik **x'Ax** > 0. Hampir mirip dengan itu, dikatakan semidefinit positif jika **x'Ax** ≥ 0. Jika **A** adalah definit positif maka persamaan **x'Ax** = *c*, dengan *c* adalah konstanta, akan berupa elipsoida. Jika **A** adalah matriks diagonal yang semua unsur diagonalnya bernilai positif, maka **A** adalah matriks definit positif, tapi jika ada paling tidak sebuah unsur bernilai 0 (yang lain positif) menjadi matriks semi definit positif. Matriks diagonal yang unsurnya adalah ragam peubah, akan bersifat demikian karena ragam tidak pernah bernilai negatif.

Sudah diketahui bahwa untuk matriks yang definit positif, akar-akar cirinya semua bernilai positif. Demikian pula sebaliknya. Karena itulah maka determinan dari matriks definit positif juga bernilai positif, karena berupa hasil perkaliannya. Jadi determinannya tidak sama dengan nol, sehingga **A** bersifat non-singular.

Untuk matriks **B** berukuran *m x n*, maka **BB'** dan **B'B** bersifat semidefinit positif. Jika *m* < *n* dan r(**B**) = m maka **BB'** definit positif, tapi **B'B** masih semidefinit positif.

LATIHAN

1. Berikut ini adalah data tanaman yang dilihat dari peubah ukuran daun (y_1), jumlah bunga (y_2), dan tinggi tanaman (y_3).

Tanaman	y_1	y_2	y_3
1	6,1	2	12
2	8,2	1	8
3	5,3	0	9
4	6,4	2	10

Tentukanlah :

a. Vektor rataan

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}5 \\ 1{,}25 \\ 9{,}75 \end{bmatrix}$$

b. Matriks varian kovarian ($\widehat{\mathbf{\Sigma}}$)

$$\widehat{\mathbf{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(y_1) & \mathrm{cov}(y_1, y_2) & \mathrm{cov}(y_1, y_3) \\ \mathrm{cov}(y_2, y_1) & \mathrm{var}(y_2) & \mathrm{cov}(y_2, y_3) \\ \mathrm{cov}(y_3, y_1) & \mathrm{cov}(y_3, y_2) & \mathrm{var}(y_3) \end{bmatrix}$$

Elemen matriks $\widehat{\mathbf{\Sigma}}$ diperoleh dengan menggunakan rumus:

$$\mathrm{cov}(y_1, y_2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_{1i} - \bar{y}_1)(y_{2i} - \bar{y}_2)}{n-1}$$

Sehingga diperoleh matriks varian kovariannya $\widehat{\mathbf{\Sigma}}$:

$$\widehat{\mathbf{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}233 & -1 \\ 0{,}233 & 0{,}9167 & 1{,}083 \\ -1 & 1{,}083 & 2{,}9167 \end{bmatrix}$$

c. Dari matriks kovarian tersebut, tentukan matriks korelasi ($\widehat{\boldsymbol{\rho}}$)

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_{11} & \hat{\rho}_{12} & \hat{\rho}_{13} \\ \hat{\rho}_{21} & \hat{\rho}_{22} & \hat{\rho}_{23} \\ \hat{\rho}_{31} & \hat{\rho}_{32} & \hat{\rho}_{33} \end{bmatrix}$$

Elemen matriks $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$ diperoleh dengan menggunakan rumus:

$$\rho_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_{1i} - \bar{y}_1)(y_{2i} - \bar{y}_2)}{(n-1)S_{y_1}S_{y_2}}$$

Sehingga diperoleh matriks korelasi $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$:

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} 1 & 0,199 & -0,478 \\ 0,199 & 1 & 0,663 \\ -0,478 & 0,663 & 1 \end{bmatrix}$$

d. Berdasarkan b) dan c), tunjukkan bahwa $\widehat{\boldsymbol{\rho}} = [\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\Sigma})]^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Sigma}[\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\Sigma})]^{-\frac{1}{2}}$, Dimana, $\mathbf{diag}\,(\boldsymbol{\Sigma})$ adalah matriks diagonal yang berasal dari matriks $\boldsymbol{\Sigma}$, $[\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\Sigma})]^{\frac{1}{2}}$ adalah akar kuadrat dari matriks $\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\Sigma})$, $[\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\Sigma})]^{-\frac{1}{2}}$ adalah invers dari matriks $[\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\Sigma})]^{\frac{1}{2}}$

Dari poin b diperoleh $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,233 & -1 \\ 0,233 & 0,9167 & 1,083 \\ -1 & 1,083 & 2,9167 \end{bmatrix}$, sehingga dapat dibuat matriks diagonal $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$:

$$diag(\Sigma) = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9167 & 0 \\ 0 & 0 & 2,9167 \end{bmatrix}$$

$$[diag(\Sigma)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,666667 & 0 & 0 \\ 0 & 1,090869 & 0 \\ 0 & 0 & 0,342853 \end{bmatrix}$$

$$[diag(\Sigma)]^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0,816497 & 0 & 0 \\ 0 & 1,044447 & 0 \\ 0 & 0 & 0,585537 \end{bmatrix}$$

$$[diag(\Sigma)]^{-\frac{1}{2}}\,\Sigma = \begin{bmatrix} 1,224745 & 0,190244 & -0,8165 \\ 0,243356 & 0,957445 & 1,131136 \\ -0,58554 & 0,634136 & 1,707835 \end{bmatrix}$$

$$[diag(\Sigma)]^{-\frac{1}{2}}\,\Sigma\,[diag(\Sigma)]^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0,199 & -0,478 \\ 0,199 & 1 & 0,663 \\ -0,478 & 0,663 & 1 \end{bmatrix}$$

∴ Berdasarkan hasil point c dan d, dapat disimpulkan bahwa:

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}} = [\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\Sigma})]^{-\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{\Sigma}\,[\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\Sigma})]^{-\frac{1}{2}}$$

2. Tentukan matrik jarak euclid dan jarak mahalanobis untuk melihat kedekatan antar objek pada data nomor 1. Pada kondisi apakah masing-masing ukuran jarak tersebut lebih tepat digunakan.

   Telah diperoleh vektor-vektor observasi dan matriks ragam peragam dari data contoh,

$$\mathbf{y_1} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}1 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix};\ \mathbf{y_2} = \begin{bmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y_3} = \begin{bmatrix} y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix};\ \mathbf{y_4} = \begin{bmatrix} y_{41} \\ y_{42} \\ y_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}4 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(y_1) & \mathrm{cov}(y_1, y_2) & \mathrm{cov}(y_1, y_3) \\ \mathrm{cov}(y_2, y_1) & \mathrm{var}(y_2) & \mathrm{cov}(y_2, y_3) \\ \mathrm{cov}(y_3, y_1) & \mathrm{cov}(y_3, y_2) & \mathrm{var}(y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}233 & -1 \\ 0{,}233 & 0{,}9167 & 1{,}083 \\ -1 & 1{,}083 & 2{,}9167 \end{bmatrix}$$

✓ Jarak Euclid

- Jarak euclid antara tanaman 1(x1) dan tanaman 2 (x2)

$$d\ (\mathbf{x1}, \mathbf{x2}) = \sqrt{(\mathbf{x1} - \mathbf{x2})'(\mathbf{x1} - \mathbf{x2})}$$

$$= \sqrt{(6{,}1 - 8{,}2 \quad 2 - 1 \quad 12 - 8)\begin{pmatrix} 6{,}1 - 8{,}2 \\ 2 - 1 \\ 12 - 8 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{(6{,}1 - 8{,}2)^2 + (2 - 1)^2 + (12 - 8)^2}$$

$$d\ (\mathbf{x1}, \mathbf{x2}) = 4{,}63$$

- Jarak euclid antara tanaman 1(x1) dan tanaman 3(x3)

$$d\ (\mathbf{x1}, \boldsymbol{x}\mathbf{3}) = \sqrt{(\mathbf{x1} - \mathbf{x3})'(\mathbf{x1} - \mathbf{x3})}$$

$$= \sqrt{(6{,}1 - 5{,}3 \quad 2 - 0 \quad 12 - 9)\begin{pmatrix} 6{,}1 - 5{,}3 \\ 2 - 0 \\ 12 - 9 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{(6{,}1 - 5{,}3)^2 + (2 - 0)^2 + (12 - 9)^2}$$

$$d\ (\boldsymbol{x1}, \boldsymbol{x3}) = 3{,}69$$

- Jarak euclid antara tanaman 1(x1) dan tanaman 4(x4)

$$d\ (\mathbf{x1}, \mathbf{x4}) = \sqrt{(\boldsymbol{x1} - \mathbf{x4})'(\mathbf{x1} - \mathbf{x4})}$$

$$= \sqrt{(6{,}1 - 6{,}4 \quad 2 - 2 \quad 12 - 10)\begin{pmatrix} 6{,}1 - 6{,}4 \\ 2 - 2 \\ 12 - 10 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{(6{,}1 - 6{,}4)^2 + (2 - 2)^2 + (12 - 10)^2}$$

$$d\ (\boldsymbol{x1}, \boldsymbol{x4}) = 2{,}02$$

➢ Jarak euclid antara tanaman 2(x2) dan tanaman 3(x3)

$$d\ (\boldsymbol{x2}, \mathbf{x3}) = \sqrt{(\boldsymbol{x2} - \mathbf{x3})'(\mathbf{x2} - \mathbf{x3})}$$

$$= \sqrt{(8{,}2 - 5{,}3 \quad 1 - 0 \quad 8 - 9)\begin{pmatrix} 8{,}2 - 5{,}3 \\ 1 - 0 \\ 8 - 9 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{(8{,}2 - 5{,}3)^2 + (1 - 0)^2 + (8 - 9)^2}$$

$$d\ (\boldsymbol{x2}, \mathbf{x3}) = 3{,}23$$

➢ Jarak euclid antara $\mathbf{y_2}$ dan $\mathbf{y_4}$

$$d\ (\mathbf{y_2}, \mathbf{y_4}) = \sqrt{(\mathbf{y_2} - \mathbf{y_4})'(\mathbf{y_2} - \underline{\mathbf{y_4}})}$$

$$= \sqrt{(8{,}2 - 6{,}4 \quad 1 - 2 \quad 8 - 10)\begin{pmatrix} 8{,}2 - 6{,}4 \\ 1 - 2 \\ 8 - 10 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{(8{,}2 - 6{,}4)^2 + (1 - 2)^2 + (8 - 10)^2}$$

$$d\ (\mathbf{y_2}, \mathbf{y_4}) = 2{,}870$$

➢ Jarak euclid antara $\mathbf{y_3}$ dan $\mathbf{y_4}$

$$d\ (\mathbf{y_3}, \mathbf{y_4}) = \sqrt{(\mathbf{y_3} - \mathbf{y_4})'(\mathbf{y_3} - \underline{\mathbf{y_4}})}$$

$$= \sqrt{(5{,}3 - 6{,}4 \quad 0 - 2 \quad 9 - 10)\begin{pmatrix} 5{,}3 - 6{,}4 \\ 0 - 2 \\ 9 - 10 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{(5{,}3 - 6{,}4)^2 + (0 - 2)^2 + (9 - 10)^2}$$

$$d\ (\mathbf{y_3}, \mathbf{y_4}) = 2{,}492$$

Sehingga diperoleh matriks jarak euclid :

$$\boldsymbol{d}_{y_i, y_j} = \begin{bmatrix} 0 & 4{,}627 & 3{,}693 & 2{,}022 \\ 4{,}627 & 0 & 3{,}226 & 2{,}870 \\ 3{,}693 & 3{,}226 & 0 & 2{,}492 \\ 2{,}022 & 2{,}870 & 2{,}492 & 0 \end{bmatrix}$$

✓ Jarak Mahalanobis

Jarak Mahalanobis merupakan generalisasi dari jarak euclidean, menggunakan perkalian terhadap invers matriks varian kovarian.

Dengan invers matriks $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$;

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}24221 & -2{,}63668 & 1{,}74810 \\ -2{,}63668 & 5{,}04498 & -2{,}77785 \\ 1{,}74810 & -2{,}77785 & 1{,}97398 \end{bmatrix}$$

- Jarak Mahalanobis antara $\mathbf{y_1}$ dan $\mathbf{y_2}$

$$d\,(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}) = \sqrt{(\mathbf{y_1} - \mathbf{y_2})'\,\boldsymbol{S}^{-1}(\mathbf{y_1} - \mathbf{y_2})}$$

$$= \sqrt{[6{,}1-8{,}2 \quad 2-1 \quad 12-8]\begin{bmatrix} 2{,}241 & -2{,}635 & 1{,}747 \\ -2{,}635 & 5{,}042 & -2{,}776 \\ 1{,}747 & -2{,}776 & 1{,}973 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6{,}1-8{,}2 \\ 2-1 \\ 12-8 \end{bmatrix}}$$

$$d\,(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}) = 5{,}999882$$

- Jarak Mahalanobis antara $\mathbf{y_1}$ dan $\mathbf{y_3}$

$$d\,(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_3}) = \sqrt{(\mathbf{y_1} - \mathbf{y_3})'\,\boldsymbol{S}^{-1}(\mathbf{y_1} - \mathbf{y_3})}$$

$$= \sqrt{[6{,}1-5{,}3 \quad 2-0 \quad 12-9]\begin{bmatrix} 2{,}241 & -2{,}635 & 1{,}747 \\ -2{,}635 & 5{,}042 & -2{,}776 \\ 1{,}747 & -2{,}776 & 1{,}973 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6{,}1-5{,}3 \\ 2-0 \\ 12-9 \end{bmatrix}}$$

$$d\,(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_3}) = 5{,}999809$$

- Jarak Mahalanobis antara $\mathbf{y_1}$ dan $\mathbf{y_4}$

$$d\,(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_4}) = \sqrt{(\mathbf{y_1} - \mathbf{y_4})'\,\boldsymbol{S}^{-1}(\mathbf{y_1} - \mathbf{y_4})}$$

$$= \sqrt{[6{,}1-6{,}4 \quad 2-2 \quad 12-10]\begin{bmatrix} 2{,}241 & -2{,}635 & 1{,}747 \\ -2{,}635 & 5{,}042 & -2{,}776 \\ 1{,}747 & -2{,}776 & 1{,}973 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6{,}1-6{,}4 \\ 2-2 \\ 12-10 \end{bmatrix}}$$

$$d\,(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_4}) = 5{,}99687$$

- Jarak Mahalanobis antara $\mathbf{y_2}$ dan $\mathbf{y_3}$

$$d\,(\mathbf{y_2}, \mathbf{y_3}) = \sqrt{(\mathbf{y_2} - \mathbf{y_3})'\,\boldsymbol{S}^{-1}(\mathbf{y_2} - \mathbf{y_3})}$$

$$= \sqrt{[8{,}2-5{,}3 \quad 1-0 \quad 8-9]\begin{bmatrix} 2{,}241 & -2{,}635 & 1{,}747 \\ -2{,}635 & 5{,}042 & -2{,}776 \\ 1{,}747 & -2{,}776 & 1{,}973 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8{,}2-5{,}3 \\ 1-0 \\ 8-9 \end{bmatrix}}$$

$$d\,(\mathbf{y_2}, \mathbf{y_3}) = 6{,}000024$$

- Jarak Mahalanobis antara $\mathbf{y_2}$ dan $\mathbf{?_4}$

$$d\,(\mathbf{y_2}, \mathbf{y_4}) = \sqrt{(\mathbf{y_2} - \mathbf{y_4})'\,\boldsymbol{S}^{-1}(\mathbf{y_2} - \mathbf{y_4})}$$

$$= \sqrt{[8{,}2-6{,}4 \quad 1-2 \quad 8-10]\begin{bmatrix} 2{,}241 & -2{,}635 & 1{,}747 \\ -2{,}635 & 5{,}042 & -2{,}776 \\ 1{,}747 & -2{,}776 & 1{,}973 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8{,}2-6{,}4 \\ 1-2 \\ 8-10 \end{bmatrix}}$$

$d\ (\mathbf{y_2}, \mathbf{y_4}) \quad = \quad 5{,}997818$

➢ Jarak Mahalanobis antara $\mathbf{y_3}$ dan $\mathbf{y_4}$

$$d\ (\mathbf{y_3}, \mathbf{y_4}) = \sqrt{(\mathbf{y_3} - \mathbf{y_4})'\, \boldsymbol{S}^{-1} (\mathbf{y_3} - \mathbf{y_4})}$$

$$= \sqrt{\begin{bmatrix} 5{,}3 - 6{,}4 & 0 - 2 & 9 - 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}241 & -2{,}635 & 1{,}747 \\ -2{,}635 & 5{,}042 & -2{,}776 \\ 1{,}747 & -2{,}776 & 1{,}973 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5{,}3 - 6{,}4 \\ 0 - 2 \\ 9 - 10 \end{bmatrix}}$$

$d\ (\mathbf{y_3}, \mathbf{y_4}) \quad = \quad 5{,}998461$

Sehingga diperoleh matriks jarak Mahalanobis :

$$\boldsymbol{d}\ (y_i, y_j) = \begin{bmatrix} 0 & 5{,}999882 & 5{,}999809 & 5{,}99687 \\ 5{,}999882 & 0 & 6{,}000024 & 5{,}997818 \\ 5{,}999809 & 6{,}000024 & 0 & 5{,}998461 \\ 5{,}99687 & 5{,}997818 & 5{,}998461 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Diketahui bentuk kuadrat : $6x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_2$.

   a. Tentukan matriks bentuk kuadrat di atas, sebut sebagai matriks A.

Misal, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

bentuk kuadrat dari matriks $\mathbf{A}$ adalah : $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = \mathbf{x}'\mathbf{Ax}$

Dimana, $\mathbf{x}'\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + cx_2 \end{bmatrix}$$

$$= ax_1^2 + bx_1x_2 + bx_1x_2 + cx_2^2$$

Dengan, $6x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_2$, maka: $a = 6\,, 2b = 6\,, c = 4$

sehingga didapat:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   b. Tentukan Tr(A)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

sehingga $Tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{2} a_{ii}$

$$= 6 + 4$$

$$= 10$$

c. Tentukan akar ciri dan vektor ciri dari matriks A

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} (6-\lambda) & 3 \\ 3 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(6-\lambda)(4-\lambda) - 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 15 = 0$$

$$\lambda_1 = 5 + \sqrt{10} = 8{,}16$$

$$\lambda_2 = 5 - \sqrt{10} = 1{,}84$$

Vektor ciri:

$$\boldsymbol{e}_1' = [0{,}811 \quad 0{,}585]$$

$$\boldsymbol{e}_2' = [-0{,}58 \quad 0{,}811]$$

>>> menggunakan SAS <<<

```
Proc IML;
A={6 3,3 4};
X=eigval(A);
Y=eigvec(A);
Print A X Y;
Run;
```

```
OUTPUT:

A            X              Y
6    3    8.1622777     0.8112422   -0.58471
3    4    1.8377223     0.5847103  0.8112422
```

d. Apa hubungan antara akar ciri dari matriks A dengan Tr(**A**)?

karena $\lambda_1 = 5 + \sqrt{10}$ dan $\lambda_2 = 5 - \sqrt{10}$

telah diketahui bahwa $Tr(\boldsymbol{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$

$$= (5 + \sqrt{10}) + (5 - \sqrt{10})$$

$$= 10$$

∴ dapat disimpulkan bahwa $Tr(\boldsymbol{A})$ merupakan penjumlahan semua akar ciri pada matriks $\mathbf{A}$ tersebut.

e. Apakah matriks A merupakan matriks definit positif?

$(\lambda_1)(\lambda_2) > 0$

$(5+\sqrt{10})(5-\sqrt{10}) > 0$

Sehingga matriks $\boldsymbol{A}$ merupakan matriks definit positif.

4. Diketahui matriks A, B, dan C berikut.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Tentukan akar ciri dan vektor ciri dari matriks **A**, **B**, dan **C**.

✓ Untuk matriks $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

akar ciri akan diperoleh dengan menyelesaikan $|\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$(2-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) = 0$

Maka, akar ciri untuk matriks A:

$2-\lambda = 0 \qquad 4-\lambda = 0 \qquad 3-\lambda = 0$

$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 4 \qquad \lambda_3 = 3$

Vektor ciri akan diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$

➢ $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$2x_1 = 2x_1$
$4x_2 = 2x_2$ → diperoleh $x_1 = t, t \in R$, $x_2 = 0$ dan $x_3 = 0$ sehingga
$3x_3 = 2x_3$

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t \text{ , t} \in R$$

vektor ciri untuk $\lambda_1 = 2$ adalah :

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}}$$

$$\boldsymbol{e} = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 4$

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$2x_1 = 4x_1$
$4x_2 = 4x_2$ → diperoleh $x_1 = 0$, $x_2 = t$, $t \in R$ dan $x_3 = 0$ sehingga
$3x_3 = 4x_3$

$$\text{x} = \begin{pmatrix}0\\t\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}t \text{ , t} \in R$$

vektor ciri untuk $\lambda_2 = 4$ adalah :

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}}$$

$$\boldsymbol{e} = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

- $\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$2x_1 = 3x_1$
$4x_2 = 3x_2$ → diperoleh $x_1 = 0$, $x_2 = 0\ dan\ x_3 = t, t \in R$ sehingga
$3x_3 = 3x_3$

$$\text{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}t \text{ , t} \in R$$

vektor ciri untuk $\lambda_3 = 3$ adalah :

$$e = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}}$$

$$e = \frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

✓ Untuk matriks $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Akar ciri akan diperoleh dengan menyelesaikan $|? - \lambda\mathbf{I}| = 0$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$(2-\lambda)(4-\lambda)(-\lambda) = 0$$

Maka, nilai ciri untuk matriks B:

$2 - \lambda = 0 \quad 4 - \lambda = 0 \qquad -\lambda = 0$

$\lambda_1 = 2 \qquad\qquad \lambda_2 = 4 \qquad\qquad \lambda_3 = 0$

Vektor ciri akan diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$

➢ $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$2x_1 = 2x_1$

$4x_2 = 2x_2$ → diperoleh $x_1 = t, t \in R$, $x_2 = 0\ dan\ x_3 = 0$ sehingga

$0 = 2x_3$

$$\text{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t \text{ , t} \in R$$

vector ciri untuk $\lambda_1 = 2$ adalah :

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}}$$

$$\boldsymbol{e} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 4$

  $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

  $2x_1 = 4x_1$
  $4x_2 = 4x_2$ → diperoleh $x_1 = 0$, $x_2 = t$, $t \in R$ dan $x_3 = 0$ sehingga
  $0 = 4x_3$

  $$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \text{ , t} \in R$$

  vector ciri untuk $\lambda_2 = 4$ adalah :

  $$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}}$$

  $$\boldsymbol{e} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_3 = 0$

  $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

  $2x_1 = 0$
  $4x_2 = 0$ → diperoleh $x_1 = 0$, $x_2 = 0\ dan\ x_3 = t, t \in R$ sehingga
  $0 \quad = 0$

  $$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \text{ , t} \in R$$

  vector ciri untuk $\lambda_3 = 3$ adalah :

  $$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}}$$

  $$\boldsymbol{e} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

✓ Untuk matriks $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nilai ciri akan diperoleh dengan menyelesaikan $|\boldsymbol{C}-\lambda\mathbf{I}|=0$

$$\left|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{pmatrix}\right|=0$$

$(2-\lambda)(4-\lambda)(-\lambda)=0$

Maka, nilai ciri untuk matriks A:

$1-\lambda=0 \quad 1-\lambda=0 \qquad 1-\lambda=0$

$\lambda_1=1 \qquad\qquad \lambda_2=1 \qquad\qquad \lambda_3=1$

Vektor ciri akan diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $\boldsymbol{Cx}=\lambda\boldsymbol{x}$

- $\lambda_1=1$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$x_1=x_1$
$x_2=x_2$ → diperoleh $x_1=t, x_2=t\ dan\ x_3=t, t\in R$ sehingga
$x_3=x_3$

x = $\begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}t$, t $\in R$

vector ciri untuk $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ adalah :

$$e=\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}}$$

$$e=\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

b. Apakah matriks A, B, dan C merupakan matriks definit positif?

✓ untuk matriks $\boldsymbol{A}$: $\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3=2.4.3\ >0$, maka matriks A definit positif

✓ untuk matriks $\boldsymbol{B}$: $\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3=2.4.0\ \geq 0$, maka matriks B semi definit positif

✓ untuk matriks $\boldsymbol{C}$: $\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3=1.1.1\ >0$, maka matriks C definit positif

5. Diketahui, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ adalah matriks simetris. Tunjukkan bahwa determinan A adalah sama dengan akar ciri pertama kali akar ciri kedua, atau $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2$

- Mencari akar ciri dari matriks **A**:

  $|\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}| = 0$

  $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$

  $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$

  $a_{11}a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{12}a_{21} = 0$

  $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$

  Bentuk ini analog dengan rumus abc untuk persamaan kuadrat $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$*, dimana*

  $\lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{a}$

  Sehingga didapat:

  $\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{1} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- Mencari determinan dari matriks **A**:

  $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\therefore$ terbukti bahwa $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2$.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1991. *Aljabar Linier Elementer (Terjemahan Edisi Kelima)*. Jakarta : Erlangga

Mattjik A A, Sumertajaya I M. 2011. Sidik Peubah Ganda dengan Menggunakan SAS. Bogor: IPB Press.

Sartono, Affendi, et. Al. 2003. Analisis Peubah Ganda. Bogor: IPB Press