Analisis Ragam Peubah Ganda (MANOVA)

Dhea Dewanti & Nur Khamidah

Pengantar Multivariate ANOVA (MANOVA)

- Merupakan generalisasi dari ANOVA pada respon multivariat (p > 1)
- Pada kasus multivariat, misal terdapat sekumpulan contoh acak yang diambil dari *g* populasi:

Populasi 1 : $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$

Populasi 2 : $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$

...

Populasi g : $X_{g1}, X_{g2}, \ldots, X_{gn_g}$

- Sekumpulan acak tersebut memerlukan asumsi dasar berikut:

$$\boldsymbol{X}_l(l = 1, 2, .., g) \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_l, \boldsymbol{\Sigma})$$

Di mana:

- $\mathbf{X}_l$ merupakan sampel acak berukuran n_l dari suatu populasi l dengan rata-rata $\boldsymbol{\mu}_l$
- Matriks kovarians antara *g* populasi sama
- Setiap populasi menyebar normal multivariat

Uji Asumsi Homogenitas Matriks

H_0: $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \cdots = \boldsymbol{\Sigma}_\mathrm{g} = \boldsymbol{\Sigma}_0$

H_1: Setidaknya satu pasang $\boldsymbol{\Sigma}_i$ yang berbeda

$\boldsymbol{S} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{g}(n_l - 1)\boldsymbol{S}_l$ dengan $N = \sum_{l=1}^{g} n_l - g$

Statistik uji:

H_0 ditolak ketika $MC^{-1} > \chi^2_{\left(\frac{1}{2}(g-1)p(p+1)\right)(\alpha)}$

$$M = \sum_{l=1}^{g}(n_l - 1)\ln|\boldsymbol{S}| - \sum_{l=1}^{g}(n_l - 1)\ln|\boldsymbol{S}_l|$$

$$C^{-1} = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{g(p+1)(g-1)}\left(\sum_{l=1}^{g}\frac{1}{n_l - 1} - \frac{1}{\sum_{l=1}^{g}(n_l - 1)}\right)$$

Uji Asumsi Normalitas Multivariat

H_0: Data berdistribusi normal multivariat

H_1: Data tidak berdistribusi normal multivariat.

Jika $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \dots, \boldsymbol{X}_g$ berdistribusi normal multivariat maka:

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{S}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_p^2$$

Berdasarkan sifat ini, pemeriksaan distribusi normal multivariat dapat dengan membuat qq plot.

Statistik Uji Keputusan dalam MANOVA

Pillai's Trace

Statistik uji ini paling cocok digunakan jika **asumsi homogenitas matriks varians-kovarians tidak dipenuhi**, **ukuran-ukuran sampel kecil**, dan jika **hasil-hasil dari pengujian bertentangan satu sama lain** yaitu jika ada beberapa vektor rata-rata yang berbeda sedang yang lain tidak. Semakin tinggi nilai statistik Pillai's Trace, pengaruh terhadap model semakin besar.

$$P = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} \right) = tr\ \lambda_i (1 + \lambda_i)^{-1} = tr\ \frac{|B|}{|B + W|}$$

dimana $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ adalah akar-akar karakteristik dari $(W)^{-1}(B)$.

(W) = matriks varians-kovarians galat pada MANOVA

(B) = matriks varians-kovarians perlakuan pada MANOVA

Statistik Uji Keputusan dalam MANOVA

Wilks' Lambda

Statistik uji digunakan jika **terdapat lebih dari dua kelompok variabel independen** dan **asumsi homogenitas matriks varians-kovarians dipenuhi.** Semakin rendah nilai statistik Wilk's Lambda, pengaruh terhadap model semakin besar. Nilai Wilk's Lambda berkisar antara 0-1.

$$U = \prod_{i=1}^{p} (1 + \lambda_i)^{-1} = \frac{|W|}{|B + W|}$$

Statistik Uji Keputusan dalam MANOVA

Hotelling’s Trace

Statistik uji ini cocok digunakan jika **hanya terdapat dua kelompok** variabel independen.

Semakin tinggi nilai statistik Hotelling’s Trace, pengaruh terhadap model semakin besar.

$$T = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = tr\, \lambda_i = tr\, (W)^{-1}(B)$$

Statistik Uji Keputusan dalam MANOVA

Roy’s Largest Root.

Statistik uji ini hanya digunakan **jika asumsi homogenitas varians-kovarians dipenuhi.** Semakin tinggi nilai statistik Roy’s Largest Root, pengaruh terhadap model semakin besar. Nilai **Roy’s Largest Root > Hotelling’s Trace > Pillai’s Trace**. Dalam hal pelanggaran asumsi normalitas multivariat, statistik ini kurang robust (kekar) dibandingkan dengan statistik uji yang lainnya.

$$R = \lambda_{maks} = maks\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\right)$$

$$= \text{akar karakteristik maksimum dari } (W)^{-1}(B)$$

One Way MANOVA - RAL

- Ciri-ciri: Keragaman berasal dari satu arah (perlakuan) dari data yang diamati.
- Mode linier:

$$\boldsymbol{X}_{lj} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_{lj}, \;\; l = 1, 2, \dots, g \quad dan \quad j = 1, 2, \dots, n_l$$

$\boldsymbol{X}_{lj}$: Pengamatan pada perlakuan ke-*l*, ulangan ke-*j*

$\boldsymbol{\mu}$: Vektor nilai tengah umum

$\boldsymbol{\tau}_l$: Pengaruh perlakuan ke-*l*

$\boldsymbol{\varepsilon}_{lj}$: Peubah acak $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$

- Hipotesis:

$$H_0: \boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2 = \cdots = \boldsymbol{\tau}_g = \boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{0}$$

$$H_1: \text{Minimal ada satu } \boldsymbol{\tau}_l \neq \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\tau}_l = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{l1} \\ \boldsymbol{\mu}_{l2} \\ \dots \\ \boldsymbol{\mu}_{lp} \end{bmatrix}, l = 1, 2, \dots, g$$

One Way MANOVA - RAL

Sumber Variansi	Matriks jumlah dari kuadrat dan hasil kali	Derajat bebas
Perlakuan	$B = \sum_{l=1}^{g} n_l(\bar{x}_{l.} - \bar{x})(\bar{x}_{l.} - \bar{x})^t$	$g - 1$
Galat (sisa)	$W = \sum_{l=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_l}(x_{lj} - \bar{x}_{l.})(x_{lj} - \bar{x}_{l.})^t$	$\sum_{l=1}^{g} n_l - g$
total	$\sum_{l=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_l}(x_{lj} - \bar{x})(x_{lj} - \bar{x})^t$	$\sum_{l=1}^{g} n_l - 1$

Statistik Uji diperoleh dengan statistik Wilks' Lambda:

$$\Lambda^* = \frac{|W|}{|W + B|}$$

Tolak H0 jika $\Lambda^* < \Lambda(p, df1, df2)(\alpha)$
Di mana df1 = df hipotesis, df2 = df galat

One Way MANOVA - RAL

Statistik Uji sebelumnya akan dibandingkan dengan titik kritis berikut:

Variabel	Grup	Distribusi sampling untuk data normal multivariat
$p = 1$	$g \geq 2$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - g}{g - 1}\right)\left(\frac{1 - \Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{g-1, n_l - g}$
$p = 2$	$g \geq 2$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - g - 1}{g - 1}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) \sim F_{2(g-1), 2(\sum n_l - g - 1)}$
$p \geq 1$	$g = 2$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - p - 1}{p}\right)\left(\frac{1 - \Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{p, \sum n_l - p - 1}$
$p \geq 1$	$g = 3$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - p - 2}{p}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) \sim F_{2p, 2(\sum n_l - p - 2)}$

One Way MANOVA - RAK

- Model linier:

$$\boldsymbol{X}_{lj} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_{lj}, \quad l = 1, 2, \dots, g \quad dan \quad j = 1, 2, \dots, n_l$$

$\boldsymbol{X}_{lj}$: Pengamatan pada perlakuan ke-*l*, ulangan ke-*j*

$\boldsymbol{\mu}$: Vektor nilai tengah umum

$\boldsymbol{\tau}_l$: Pengaruh perlakuan ke-*l*

$\boldsymbol{\beta}_j$: Pengaruh kelompok ke-*j*

$\boldsymbol{\varepsilon}_{lj}$: Peubah acak $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$

Hipotesis pengaruh perlakuan:

H_0: $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2 = \cdots = \boldsymbol{\tau}_g = \boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{0}$

H_1: Minimal ada satu $\boldsymbol{\tau}_l \neq \mathbf{0}$

Hipotesis pengaruh kelompok:

H_0: $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2 = \cdots = \boldsymbol{\beta}_b = \boldsymbol{\beta}_0 = \mathbf{0}$

H_1: Minimal ada satu $\boldsymbol{\beta}_j \neq \mathbf{0}$

One Way MANOVA - RAK

Sumber Variansi	Matriks jumlah dari kuadrat dan hasil kali
Perlakuan	$B = \sum_{l=1}^{g} n_l(\bar{x}_{l.} - \bar{x})(\bar{x}_{l.} - \bar{x})^t$
Kelompok	$K = \sum_{l=1}^{g} n_g(\bar{x}_{.j} - \bar{x})(\bar{x}_{.j} - \bar{x})^t$
Galat (sisa)	$W = \sum_{l=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_l}(x_{lj} - \bar{x}_{l.})(x_{lj} - \bar{x}_{l.})^t$
total	$\sum_{l=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_l}(x_{lj} - \bar{x})(x_{lj} - \bar{x})^t$

Statistik Uji diperoleh dengan statistik Wilks' Lambda:

$$\Lambda^*(\text{perlakuan}) = \frac{|\mathrm{W}|}{|\mathrm{W} + \mathrm{B}|}$$

$$\Lambda^*(\text{kelompok}) = \frac{|\mathrm{W}|}{|\mathrm{W} + \mathrm{K}|}$$

One Way MANOVA - RAK

Statistik Uji sebelumnya akan dibandingkan dengan titik kritis berikut:

Variabel	Grup	Distribusi sampling untuk data normal multivariat
$p = 1$	$g \geq 2$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - g}{g - 1}\right)\left(\frac{1-\Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{g-1, n_l - g}$
$p = 2$	$g \geq 2$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - g - 1}{g - 1}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) \sim F_{2(g-1), 2(\sum n_l - g - 1)}$
$p \geq 1$	$g = 2$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - p - 1}{p}\right)\left(\frac{1-\Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{p, \sum n_l - p - 1}$
$p \geq 1$	$g = 3$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - p - 2}{p}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) \sim F_{2p, 2(\sum n_l - p - 2)}$

Two Ways MANOVA

- Ciri-ciri: Keragaman berasal dari dua arah (perlakuan) dan dapat terjadi interaksi antar faktor..
- Mode linier:

$$\boldsymbol{X}_{lj} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\gamma}_{lk} + \boldsymbol{\varepsilon}_{lkj}, \quad l = 1, 2, \dots, g; \quad k = 1, 2, \dots, b \quad dan \quad j = 1, 2, \dots, n_l$$

$\boldsymbol{X}_{lj}$: Pengamatan pada perlakuan ke-*l*, ulangan ke-*j*

$\boldsymbol{\mu}$: Vektor nilai tengah umum

$\boldsymbol{\tau}_l$: Pengaruh perlakuan ke-*l*

$\boldsymbol{\beta}_j$: Pengaruh kelompok ke-*j*

$\boldsymbol{\gamma}_{lk}$: Komponen interaksi

$\boldsymbol{\varepsilon}_{lkj}$: Peubah acak $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$

Uji Hipotesis Interaksi

$$H_0: \boldsymbol{\gamma}_{11} = \boldsymbol{\gamma}_{12} = \cdots = \boldsymbol{\gamma}_{gb} = \mathbf{0}$$

$$H_1: \text{At least one } \boldsymbol{\gamma}_{\ell k} \neq \mathbf{0}$$

Untuk ukuran contoh kecil gunakan:

$$\Lambda^* = \frac{|\text{SSP}_{\text{res}}|}{|\text{SSP}_{\text{int}} + \text{SSP}_{\text{res}}|}$$

Untuk ukuran contoh besar dengan Bartlett's Multiplier untuk meningkatkan aproksimasi:

$$-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(g-1)(b-1)}{2}\right] \ln \Lambda^* > \chi^2_{(g-1)(b-1)p}(\alpha)$$

Uji Hipotesis Faktor 1

$H_0: \boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2 = \cdots = \boldsymbol{\tau}_g = \boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{0}$

H_1: Minimal ada satu $\boldsymbol{\tau}_l \neq \mathbf{0}$

Untuk ukuran contoh kecil gunakan:

$$\Lambda^* = \frac{|\mathrm{SSP}_{\mathrm{res}}|}{|\mathrm{SSP}_{\mathrm{fac\,1}} + \mathrm{SSP}_{\mathrm{res}}|}$$

Untuk ukuran contoh besar dengan Bartlett's Multiplier untuk meningkatkan aproksimasi:

$$-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(g-1)}{2}\right] \ln \Lambda^* > \chi^2_{(g-1)p}(\alpha)$$

Uji Hipotesis Faktor 2

$H_0: \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2 = \cdots = \boldsymbol{\beta}_b = \boldsymbol{\beta}_0 = \mathbf{0}$

H_1: Minimal ada satu $\boldsymbol{\beta}_j \neq \mathbf{0}$

Untuk ukuran contoh kecil gunakan:

$$\Lambda^* = \frac{|\mathrm{SSP}_{\mathrm{res}}|}{|\mathrm{SSP}_{\mathrm{fac}\,2} + \mathrm{SSP}_{\mathrm{res}}|}$$

Untuk ukuran contoh besar dengan Bartlett’s Multiplier untuk meningkatkan aproksimasi:

$$-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(b-1)}{2}\right] \ln \Lambda^* > \chi^2_{(b-1)p}(\alpha)$$

Contoh Soal 1

Suatu percobaan dilakukan untuk mengetahui perbedaan **tiga varietas jagung**. Data respon yang diambil antara lain **Y1 = Produksi per hektar**, dan **Y2 = bobot/1000 butir**. Rancangan lingkungan yang digunakan adalah rancangan acak lengkap. Datanya diperoleh sebagai berikut :

Perlakuan	Ulangan	Y1	Y2
Varietas 1	1	6	7
	2	5	9
Varietas 2	1	4	6
	2	6	6
	3	4	7
Varietas 3	1	5	4
	2	6	4

Contoh Soal 1

a. Tuliskan model liniernya beserta keterangan yang jelas.
b. Hitunglah vektor rataan untuk setiap perlakuan
c. Hitunglah matriks jumlah kuadrat dan hasil kali silang dari perlakuan (B), galat (W), dan Total (T)
d. Lakukan pengujian pada taraf nyata 5% untuk mengetahui apakah ketiga varietas memiliki respon yang berbeda. Gunakan Uji Wilks Lambda!
e. Apa kesimpulan anda?

Contoh Soal 1 - Jawaban

a. Model linear:

$$\underline{y}_{lj} = \underline{\mu} + \underline{\tau}_l + \underline{\varepsilon}_{lj} \qquad ; l = 1,2,3 \; ; j = 1,2$$

keterangan:

$\underline{y}_{lj}$ = respon varietas ke *l* ulangan ke *j*

$\underline{\mu}$ = vektor rataan umum

$\underline{\tau}_l$ = pengaruh varietas ke *l*

$\underline{\varepsilon}_{lj}$ = pengaruh acak varietas ke *l* ulangan ke *j*

Contoh Soal 1 - Jawaban

b. Vektor Rataan

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 8 \end{pmatrix} ; \; \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 4{,}67 \\ 6{,}33 \end{pmatrix} ; \; \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 5{,}14 \\ 6{,}14 \end{pmatrix}$$

Contoh Soal 1 - Jawaban

c. Matriks Jumlah Kuadrat

$$\mathbf{B} = \sum_{l=1}^{3} n_l\,(\bar{x}_{l.} - \bar{x})(\bar{x}_{l.} - \bar{x})^t$$

$$= 2\begin{pmatrix} 5{,}5 - 5{,}14 \\ 8 - 6{,}14 \end{pmatrix}(5{,}5 - 5{,}14 \quad 8 - 6{,}14) + 3\begin{pmatrix} 4{,}67 - 5{,}14 \\ 6{,}33 - 6{,}14 \end{pmatrix}(4{,}67 - 5{,}14 \quad 6{,}33 - 6{,}14) +$$

$$2\begin{pmatrix} 5{,}5 - 5{,}14 \\ 4 - 6{,}14 \end{pmatrix}(5{,}5 - 5{,}14 \quad 4 - 6{,}14)$$

$$= 2\begin{pmatrix} 0{,}36 \\ 1{,}86 \end{pmatrix}(0{,}36 \quad 1{,}86) + 3\begin{pmatrix} -0{,}47 \\ 0{,}19 \end{pmatrix}(-0{,}47 \quad 0{,}19) + 2\begin{pmatrix} 0{,}36 \\ -2{,}14 \end{pmatrix}(0{,}36 \quad -2{,}14)$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}1811 & -0{,}4695 \\ -0{,}4695 & 16{,}1867 \end{pmatrix}$$

Contoh Soal 1 - Jawaban

$$\mathbf{W} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}(x_{lj} - \bar{x}_{l.})(x_{lj} - \bar{x}_{l.})^t$$

$$= \begin{pmatrix} 6-5{,}5 \\ 7-8 \end{pmatrix}(6-5{,}5 \quad 7-8) + \begin{pmatrix} 5-5{,}5 \\ 9-8 \end{pmatrix}(5-5{,}5 \quad 9-8) + \begin{pmatrix} 4-4{,}67 \\ 6-6{,}33 \end{pmatrix}(4-4{,}67 \quad 6-6{,}33) +$$

$$\begin{pmatrix} 6-4{,}67 \\ 6-6{,}33 \end{pmatrix}(6-4{,}67 \quad 6-6{,}33) + \begin{pmatrix} 4-4{,}67 \\ 7-6{,}33 \end{pmatrix}(4-4{,}67 \quad 7-6{,}33) + \begin{pmatrix} 5-5{,}5 \\ 4-4 \end{pmatrix}(4-4) +$$

$$\begin{pmatrix} 6-5{,}5 \\ 4-4 \end{pmatrix}(6-5{,}5 \quad 4-4)$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}25 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}25 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}4489 & 0{,}2211 \\ 0{,}2211 & 0{,}1089 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}7689 & -0{,}4389 \\ -0{,}4389 & 0{,}1089 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}4489 & -0{,}4489 \\ -0{,}4489 & 0{,}4489 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3{,}6667 & -1{,}6667 \\ -1{,}6667 & 2{,}6667 \end{pmatrix}$$

Contoh Soal 1 - Jawaban

$$\mathbf{T} = \sum_{l=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_l}(x_{lj} - \bar{x})(x_{lj} - \bar{x})^t$$

$$= \mathbf{W} + \mathbf{B}$$

$$= \begin{pmatrix} 3{,}6667 & -1{,}6667 \\ -1{,}6667 & 2{,}6667 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}1811 & -0{,}4695 \\ -0{,}4695 & 16{,}1867 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}8478 & -2{,}1362 \\ -2{,}1362 & 18{,}8534 \end{pmatrix}$$

Contoh Soal 1 - Jawaban

d. Hipotesis

$H_0 : \underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_2 = \underline{\tau}_3 = \underline{0}$

H_1 : minimal ada satu $\underline{\boldsymbol{\tau}}_l$ yang tidak sama dengan $\underline{\mathbf{0}}$

Statistik Uji :

$$\Lambda^* = \frac{|\mathbf{W}|}{|\mathbf{B}+\mathbf{W}|}$$

$$\Lambda^* = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3,6667 & -1,6667 \\ -1,6667 & 2,6667 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 4,8478 & -2,1362 \\ -2,1362 & 18,8534 \end{pmatrix}\right|}$$

$$\Lambda^* = 0,081$$

Contoh Soal 1 - Jawaban

Kriteria pengujian :

Tolak H_0 jika $\left[\frac{\sum n_l - p - 2}{p}\right]\left[\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right] \geq F_{2p;2(\sum n_l - p - 2)}(\alpha)$

Telah diketahui bahwa $\alpha = 5\%$, total perlakuan *(l)* = 3 dan total peubah *(p)* = 2. Sehingga diperoleh :

$$\left[\frac{7-2-2}{2}\right]\left[\frac{1-\sqrt{0{,}081}}{\sqrt{0{,}081}}\right] = 3{,}7704$$

dan

$$F_{2(2);2(7-2-2)}(0{,}05) = 4{,}5337$$

Contoh Soal 1 - Jawaban

e. Kesimpulan

Karena $\left[\frac{\sum n_l - p - 2}{p}\right]\left[\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right] = 3{,}7704 < F_{2p;2(\sum n_l - p - 2)}(\alpha) = 4{,}5337$,

maka dapat disimpulkan bahwa pada taraf signifikansi 5%, tidak cukup bukti untuk menolak H0 atau dengan kata lain dapat dikatakan bahwa varietas tidak memberikan pengaruh yang nyata pada pengukuran secara bersama peubah produksi per hektar dan bobot/1000.

Contoh Soal 2

Suatu percobaan dengan menggunakan **2 jenis pupuk**. Pupuk-pupuk tersebut kemudian disebar pada petak-petak lahan yang ditanami padi. **Karena lahan tidak homogen maka lahan di blok menjadi 2 blok. Setiap blok ada 2 petak**. Randomisasi 2 perlakuan dilakukan untuk setiap blok. Pada saat panen diukur **bobot biji dan bobot serasak** per petak. Matriks jumlah kuadrat adalah sebagai berikut :

P (Matriks Perlakuan):

$$\begin{bmatrix} 12 & -67 \\ -67 & 32 \end{bmatrix}$$

B (Matriks Blok):

$$\begin{bmatrix} 86 & 56 \\ 56 & 75 \end{bmatrix}$$

G (Matriks Galat):

$$\begin{bmatrix} 13 & 28 \\ 28 & 71 \end{bmatrix}$$

Apakah perlakuan 2 pupuk tersebut mempunyai pengaruh yang sama terhadap respon ? (gunakan alpha 5 %).

Contoh Soal 2 - Jawaban

Rancangan pada soal merupakan rancangan acak kelompok dengan keterangan sebagai berikut :

- Faktor : Jenis Pupuk
- Level : 2
- Blok (Kelompok) : 2
- Setiap Blok ada 2 petak lahan
- Jadi banyak unit percobaan : 2 x 2 = 4
- Hipotesis yang digunakan untuk melihat perbedaan perlakuan terhadap respon adalah :

Hipotesis : $H_0 : \underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_2 = \underline{0}$ $\quad H_1 : \exists\, i, \underline{\tau}_i \neq \underline{0}, i = 1, 2$

Contoh Soal 2 - Jawaban

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat
Perlakuan	1	$\begin{bmatrix} 12 & -67 \\ -67 & 32 \end{bmatrix}$
Blok	1	$\begin{bmatrix} 86 & 56 \\ 56 & 75 \end{bmatrix}$
Galat	1	$\begin{bmatrix} 13 & 28 \\ 28 & 71 \end{bmatrix}$
Total	3	$\begin{bmatrix} 111 & 17 \\ 17 & 178 \end{bmatrix}$

Contoh Soal 2 - Jawaban

Statistik uji

$$\Lambda = \frac{|G|}{|G+P|} = \frac{139}{1054} = 0{,}131879$$

Karena p = 2 dan g = 2, maka:

$$F = \left(\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\right)\frac{\left(\sum n_i - g - 1\right)}{(g-1)} = \left(\frac{1-\sqrt{0{,}131879}}{\sqrt{0{,}131879}}\right)\frac{(4-2-1)}{2-1} = 1.753676$$

Wilayah kritis:

$$F_{0,05;db1;db2} \quad \rightarrow \quad db_1 = 2(g-1) = 2$$

$$db_2 = 2\left(\sum n - g - 1\right) = 2$$

$$F_{0,05;db1;db2} = 19$$

Contoh Soal 2 - Jawaban

Kesimpulan :

Karena F hitung < F tabel maka H0 gagal ditolak. Hal ini berarti bahwa tidak terdapat perbedaan pengaruh pupuk terhadap bobot biji dan bobot serasak per petak pada taraf nyata 5%. Atau dengan kata lain 2 jenis pupuk tersebut memberikan pengaruh yang sama terhadap respon.

Contoh Soal 3

Suatu percobaan dengan menggunakan **4 perlakuan pupuk**. Pupuk-pupuk tersebut kemudian disebar pada petak-petak lahan yang ditanami padi dan terdiri dari **3 blok**. **Setiap blok ada 4 petak**. Randomisasi 4 perlakuan dilakukan untuk setiap blok. Pada saat panen diukur **bobot biji dan bobot serasak per petak**. Matriks jumlah kuadrat adalah sebagai berikut :

P (Matriks Perlakuan):

$$\begin{bmatrix} 12496.8 & -6786.8 \\ -6786.8 & 32985.0 \end{bmatrix}$$

B (Matriks Blok):

$$\begin{bmatrix} 86045.8 & 56073.6 \\ 56073.6 & 75841.5 \end{bmatrix}$$

E (Matriks Galat):

$$\begin{bmatrix} 136792.6 & 58549.0 \\ 58549.0 & 71496.1 \end{bmatrix}$$

Contoh Soal 3

a. Tentukan derajat bebas perlakuan
b. Tentukan derajat bebas Blok
c. Tentukan derajat bebas Galat
d. Buatlah Hipotesis percobaan di atas
e. Apakah perlakuan 4 pupuk tersebut mempunyai pengaruh yang sama terhadap respon ? (gunakan alpha= 5 %).

Contoh Soal 3 - Jawaban

a. Derajat bebas perlakuan = g - 1 = 4 - 1 = 3
b. Derajat bebas Blok = nl -1 = 3 -1 = 2
c. Derajat bebas Galat = db total - (db perlakuan + db blok) = (4.3-1)-5 = 6
d. Buatlah Hipotesis percobaan di atas

Pengaruh Perlakuan :

$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0$

(tidak ada pengaruh jenis pupuk terhadap respon yang diamati)

$H_1: \exists l, \tau_l \neq 0, l=1,2,3,4$

(paling sedikit ada satu jenis pupuk yang mempengaruhi respon diamati)

Contoh Soal 3 - Jawaban

Pengaruh Kelompok :

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

(tidak ada pengaruh kelompok terhadap respon yang diamati)

$$H_1: \exists j, \beta_j \neq 0, j=1,2,3$$

(paling sedikit ada satu kelompok yang mempengaruhi respon diamati)

Contoh Soal 3 - Jawaban

e. Apakah perlakuan 4 pupuk tersebut mempunyai pengaruh yang sama terhadap respon ? (gunakan alpha= 5 %).

$$\text{P (Matriks Perlakuan)} = \begin{bmatrix} 12496.8 & -6786.8 \\ -6786.8 & 32985.0 \end{bmatrix}$$

$$\text{B (Matriks Blok)} = \begin{bmatrix} 86045.8 & 56073.6 \\ 56073.6 & 75841.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{E (Matriks Galat)} = \begin{bmatrix} 136792.6 & 58549.0 \\ 58549.0 & 71496.1 \end{bmatrix}$$

$$\text{P+E} = \begin{bmatrix} 12496.8 & -6786.8 \\ -6786.8 & 32985.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 136792.6 & 58549.0 \\ 58549.0 & 71496.1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 149289,4 & 51762,2 \\ 51762,2 & 104481,1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \frac{|E|}{|E+\mathbf{P}|} = \frac{6352152008}{12918595382} = 0.49 \qquad U_{2;3;6}^{0,05} = 0,116$$

Contoh Soal 3 - Jawaban

Kesimpulan :

Karena Λ > U tabel maka H0 gagal ditolak. Hal ini berarti bahwa tidak terdapat perbedaan pengaruh pupuk terhadap bobot biji dan bobot serasak per petak pada taraf nyata 5%. Atau dengan kata lain 4 jenis pupuk tersebut memberikan pengaruh yang sama terhadap respon.

Contoh Soal 4

Seorang peneliti membagi acak 15 orang ke dalam 3 kelompok. Kelompok pertama mendapatkan informasi diet dari website interaktif, kelompok kedua memperoleh informasi yang sama melalui seorang praktisi, sedangkan kelompok ketiga memperoleh informasi dari rekaman video yang dibuat oleh praktisi yang sama. **Peneliti akan melihat penilaian berdasarkan 3 poin yaitu presentasi (P), kesulitan (K), dan kepentingan (KP).** Data yang diperoleh adalah sebagai berikut. (Asumsikan semua orang memiliki pengetahuan awal yang sama).

Kel.	P	K	KP
1	20	5	18
1	25	9	8
1	23	15	20
1	16	9	22
1	20	6	22

Kel.	P	K	KP
2	28	7	14
2	25	14	5
2	26	9	20
2	19	15	22
2	29	14	12

Kel.	P	K	KP
3	15	6	3
3	22	8	12
3	27	9	14
3	21	10	7
3	17	9	1

Contoh Soal 4

Tentukanlah:

a. Tentukan model linier
b. Hitung vektor rataan untuk setiap metode pemberian informasi
c. Hitunglah matriks jumlah kuadrat dan hasil kali silang untuk perlakuan (B), galat (W), dan Total (T)
d. Uji wilks lambda 5%
e. Kesimpulan

Contoh Soal 4 - Jawaban

a. Model linier

$$\underline{y}_{lj} = \underline{\mu} + \underline{\tau}_l + \underline{\varepsilon}_{lj}\ ;\ l = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4,5$$

Keterangan:

y_{lj} : penilaian orang ke-j pada kelompok dengan metode pemberian informasi ke-l

μ : vector rataan umum

τ_l : pengaruh kelompok dengan metode pemberian informasi ke-l

ε_{lj} : pengaruh acak metode pemberian informasi ke-l dan orang ke-j

b. Vektor rataan

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 20,8 \\ 8,8 \\ 18 \end{pmatrix} \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 25,4 \\ 11,8 \\ 14,6 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 20,4 \\ 8,4 \\ 7,4 \end{pmatrix} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 22,2 \\ 9,6667 \\ 13,3333 \end{pmatrix}$$

Contoh Soal 4 - Jawaban

c. matriks jumlah kuadrat dan hasil kali silang untuk perlakuan (B), galat (W), dan Total (T)

$$B = \sum_{l=1}^{3} n_l(\bar{X}_l - \bar{X})(\bar{X}_l - \bar{X})'$$

$$B = 5\begin{pmatrix} 20{,}8 - 22{,}2 \\ 8{,}8 - 9{,}6667 \\ 18 - 13{,}333 \end{pmatrix}(20{,}8 - 22{,}2 \quad 8{,}8 - 9{,}667 \quad 18 - 13{,}333)$$

$$+ 5\begin{pmatrix} 25{,}4 - 22{,}2 \\ 11{,}8 - 9{,}6667 \\ 14{,}6 - 13{,}333 \end{pmatrix}(25{,}4 - 22{,}2 \quad 11{,}8 - 9{,}6667 \quad 14{,}6 - 13{,}333)$$

$$+ 5\begin{pmatrix} 20{,}4 - 22{,}2 \\ 8{,}4 - 9{,}6667 \\ 7{,}4 - 13{,}333 \end{pmatrix}(20{,}4 - 22{,}2 \quad 8{,}4 - 9{,}6667 \quad 7{,}4 - 13{,}333)$$

$$B = \begin{pmatrix} 77{,}2 & 51{,}6 & 41 \\ 51{,}6 & 34{,}5333 & 30{,}8667 \\ 41 & 30{,}8667 & 292{,}9333 \end{pmatrix}$$

Contoh Soal 4 - Jawaban

$$W = \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}(X_{lj} - \bar{X}_l)(X_{lj} - \bar{X}_l)'$$

$$W = \begin{pmatrix} 20 - 20{,}8 \\ 5 - 8{,}8 \\ 18 - 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 - 20{,}8 & 5 - 8{,}8 & 18 - 18 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 25 - 20{,}8 \\ 9 - 8{,}8 \\ 8 - 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 - 20{,}8 & 9 - 8{,}8 & 8 - 18 \end{pmatrix} + \ldots$$
$$+ \begin{pmatrix} 21 - 20{,}4 \\ 10 - 8{,}4 \\ 7 - 7{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 - 20{,}4 & 10 - 8{,}4 & 7 - 7{,}4 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 17 - 20{,}4 \\ 9 - 8{,}4 \\ 1 - 7{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 - 20{,}4 & 9 - 8{,}4 & 1 - 7{,}4 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 195{,}2 & 6{,}4 & -15 \\ 6{,}4 & 120{,}8 & -7{,}2 \\ -15 & -7{,}2 & 444{,}4 \end{pmatrix}$$

Contoh Soal 4 - Jawaban

$$T = W + B$$

$$T = \begin{pmatrix} 195{,}2 & 6{,}4 & -15 \\ 6{,}4 & 120{,}8 & -7{,}2 \\ -15 & -7{,}2 & 444{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 77{,}2 & 51{,}6 & 41 \\ 51{,}6 & 34{,}5333 & 30{,}8667 \\ 41 & 30{,}8667 & 292{,}9333 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 272{,}4 & 58 & 26 \\ 58 & 155{,}3333 & 23{,}6667 \\ 26 & 23{,}6667 & 737{,}3333 \end{pmatrix}$$

Contoh Soal 4 - Jawaban

d. Uji Wilks lambda 5%

$$\Lambda^* = \frac{|W|}{|W+B|} = \frac{10424903{,}71}{28532047{,}6} = 0{,}3653$$

$$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - p - 2}{p}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) = \left(\frac{15 - 3 - 2}{3}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{0{,}3653}}{\sqrt{0{,}3653}}\right) = 2.1812$$

$$F_{2p,2(\sum n_l - p - 2)}(0{,}05) = F_{6,20}(0{,}05) = 2.59898$$

Contoh Soal 4 - Jawaban

e. Kesimpulan

Karena $\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - p - 2}{p}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) = 2.1812 < F_{2p,2(\sum n_l - p - 2)}(0{,}05) = 2.59898$

maka dapat disimpulkan bahwa pada taraf signifikansi 5%, tidak cukup bukti untuk menolak H0 atau dengan kata lain metode pemberian informasi dari setiap kelompok tidak memberikan pengaruh yang nyata pada penilaian terhadap ketiga poin.