Handout 3

UJI VEKTOR NILAI TENGAH SATU POPULASI

1. Uji Hipotesis

- $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu_0}$

  $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu_0}$

- Statistik Uji :

$$T^2 = n(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{S}^{-1}(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)$$

- Tolak H_0 jika $T^2 = n(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'^{\boldsymbol{S}^{-1}}(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0) > c^2 = \frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{(p,n-p)}(\alpha)$

  dengan n adalah banyaknya sampel dan p adalah banyaknya peubah *(variables)*

2. Selang Kepercayaan (1 – α)100% bagi $\boldsymbol{\mu}$

$$n(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})'^{\boldsymbol{S}^{-1}}(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}) \leq c^2$$

- Selang Kepercayaan Simultan (1 – α)100% bagi $\boldsymbol{\mu}$

$$\boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} \pm c\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}{n}}$$

  atau

$$\mu_i = \overline{\mathrm{x}}_i \pm c\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}}$$

- Selang Kepercayaan Bonferroni (1 – α)100% bagi $\boldsymbol{\mu}$

$$\mu_i : \overline{\mathrm{x}}_i \pm t_{(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\frac{S_{ii}}{n}}$$

3. Bentuk Ellips Selang Kepercayaan (1 – α)100% bagi $\boldsymbol{\mu}$

- Panjang ½ sumbu mayor = $\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{n}}c$
- Panjang ½ sumbu minor = $\frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{n}}c$
- Daerah Kepercayaan (Koordinat)

$$\overline{\mathbf{x}} \pm \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{n}}ce_i$$

  e_i adalah vector eigen dari nilai eigen matriks S

Contoh Kasus:

Berikut ini data dari sampel siswa di sebuah sekolah yang dilihat dari skor nilai matematika (X1) dan fisika (X2). kedua peubah diasumsinkan menyebar normal bivarate:

Siswa	matematika	fisika
1	72.8	69.9
2	46	68.9
3	59.2	58.4
4	66.7	78.2
5	84.2	63.9
6	50.4	54.6
7	49.6	66.5
8	77.9	71.6
9	63.9	77.2
10	55.1	56.8

Pertanyaan :

1. Hitung verktor rataan dan matriks kovariannya?
2. Ujilah pada taraf nyata 10% apakaha vektor rataan populasi $\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}55\\ 60\end{bmatrix}$
3. Tentukan ellips kepercayaan 90% bagi μ dan buatlah gambarnya
4. Apakah seorang siswa yg memiliki skor matematika 65 dan skror fisika 70 masuk ke dalam ellips kepercayaan tersebut?
5. Buatlah selang kepercayaan simultan dan selang bonfeni 90%

PEMBAHASAN

1. **Vektor rataan:**

$$\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{pmatrix} = \begin{matrix}62.58\\ 66.6\end{matrix}$$

Matriks kovarians:

$$\sum = \begin{bmatrix} var(x_1) & covar(x_1 x_2) \\ covar(x_2 x_1) & var(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 164.9329 & 36.0089 \\ 36.0089 & 66.9644 \end{bmatrix}$$

2. **Hipotesis**

H_0: $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$

H_1: $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$

$dimana \;\; \mu_0 = \quad \binom{\mu_1}{\mu_2} = \binom{55}{60}$

Statistik uji yang dapat digunakan dalam pengujian vektor nilai tengah populasi adalah T^2-Hotelling:

$$T^2 = \left(\bar{X} - \mu_0\right)' \left(\frac{1}{n} S\right)^{-1} \left(\bar{X} - \mu_0\right) = n\left(\bar{X} - \mu_0\right)' S^{-1} \left(\bar{X} - \mu_0\right)$$

Di mana,

$$\underset{(px1)}{\bar{X}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$\underset{(pxp)}{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left(X_j - \bar{X}\right)\left(X_j - \bar{X}\right)'$$

Dari hasil perhitungan sebagai berikut :

$$\left(\bar{X} - \mu_0\right) = \begin{pmatrix} 7.58 \\ 6.6 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0.00687 & -0.00369 \\ -0.00369 & 0.01692 \end{pmatrix}$$

Sehingga statistik uji T^2 :

T^2 $= 10 \times (7.58 \; 6.6) \times \begin{pmatrix} 0.00687 & -0.00369 \\ -0.00369 & 0.01692 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7.58 \\ 6.6 \end{pmatrix}$

$= 7.621161$

Nilai titik kritis = $\dfrac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha) = \dfrac{9x2}{8} x3.113118 = 7.004515$

Keputusan:

statistik uji T^2 > titik kritis maka tolak H_0.

Kesimpulan :

dengan tingkat kepercayaan 90%, dapat disimpulkan bahwa minimal ada salah satu dari rata-rata ujian matematika dan fisika yang memiliki nilai rata-rata tidak sama dengan nilai 55 atau nilai 60.

3. a. Ellips kepercayaan 90% bagi $\boldsymbol{\mu}$

Daerah kepercayaan 100(1-α)% bagi nilai tengah suatu sebaran normal ganda p adalah suatu elips yang ditentukan oleh semua $\boldsymbol{\mu}$ sedemikian rupa sehingga

$$n\left(\overline{X}-\mu\right)' S^{-1}\left(\overline{X}-\mu\right) \leq \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)$$

Di mana :

$$\underset{(px1)}{\overline{X}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$\underset{(pxp)}{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j-\overline{X}\right)\left(X_j-\overline{X}\right)'$$

Dan $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_n$ adalah pengamatan contoh.

Elips kepercayaan 95% bagi $\boldsymbol{\mu}$ terdiri dari semua nilai (μ_1, μ_2) yang memenuhi:

$$10\left[62.58-\mu_1 \quad 66.6-\mu_2\right]\begin{bmatrix} 0.00687 & -0.00369 \\ -0.00369 & 0.01692 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 62.58-\mu_1 \\ 66.6-\mu_2 \end{bmatrix} \leq \frac{(9)2}{8} F_{2,8}(0.1)$$

711.05-3.680 μ_1 +4.76 μ_2 -0.738 μ_1 μ_2 +0.2377 μ_2^2 $\leq$ 31.520

b. Gambar ellips

Menggambar Elips Kepercayaan

Pasangan akar ciri dan vektorciri bagi **S** adalah

λ_1 = 176.744 $\quad$ $\mathbf{e}_1'$ = [0.95 0.312]

λ_2 = 55.153 $\quad$ $\mathbf{e}_2'$ = [-0.312 0.95]

Pusat elips tersebut pada titik [62.58, 66.6]

Menggambar Elips Kepercayaan

setengah dari panjang sumbu mayor dan minornya masing-masing adalah

$$\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)} = \sqrt{176.744}\sqrt{\frac{2(9)}{(10)(8)}(3.113)} = 11.126$$

$$\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)} = \sqrt{55.153}\sqrt{\frac{2(9)}{(10)(8)}(3.113)} = 6.2154$$

Sumbu-sumbu tersebut teletak sepanjang $\mathbf{e}_1'$ = [0.95 0.312]dan $\mathbf{e}_2'$ = [-0.312 0.95], sehingga:

$$\bar{x} \pm \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}.e_i$$

Untuk λ_1

$$\begin{pmatrix}62.58\\66.6\end{pmatrix} \pm 11.126.\begin{pmatrix}0.95\\0.312\end{pmatrix}$$

Sehingga koordinat yang terbentuk

(73.277; 70.07)

(52.007,63.133)

untuk λ_2

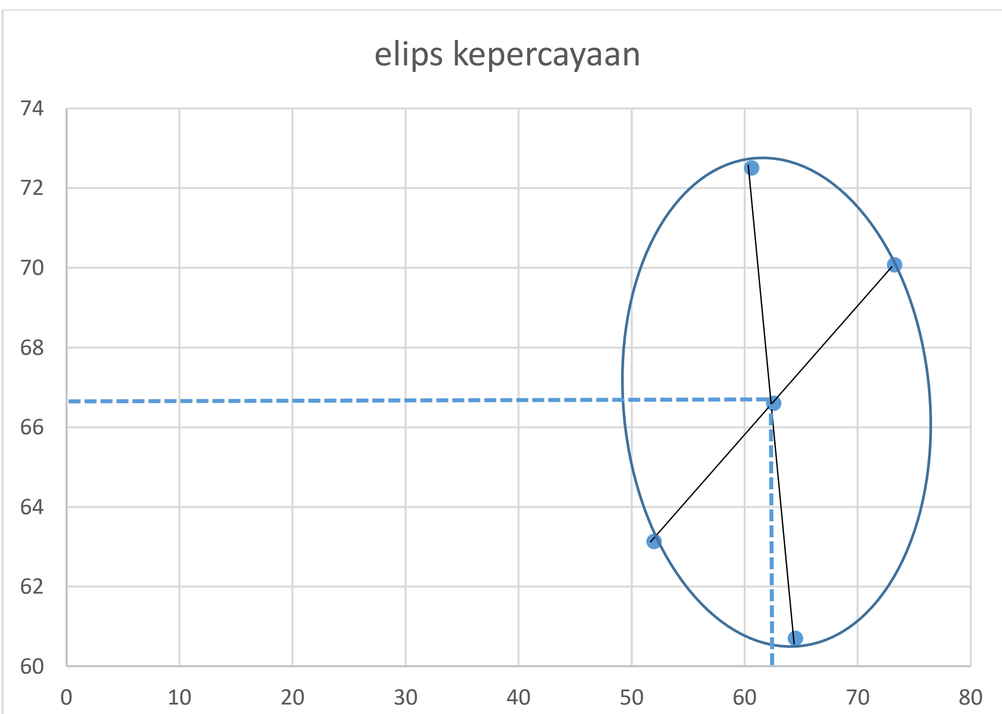
$$\begin{pmatrix}62.58\\66.6\end{pmatrix} \pm 6.2154\begin{pmatrix}-0.312\\0.95\end{pmatrix}$$

Sehingga koordinat yang terbentuk

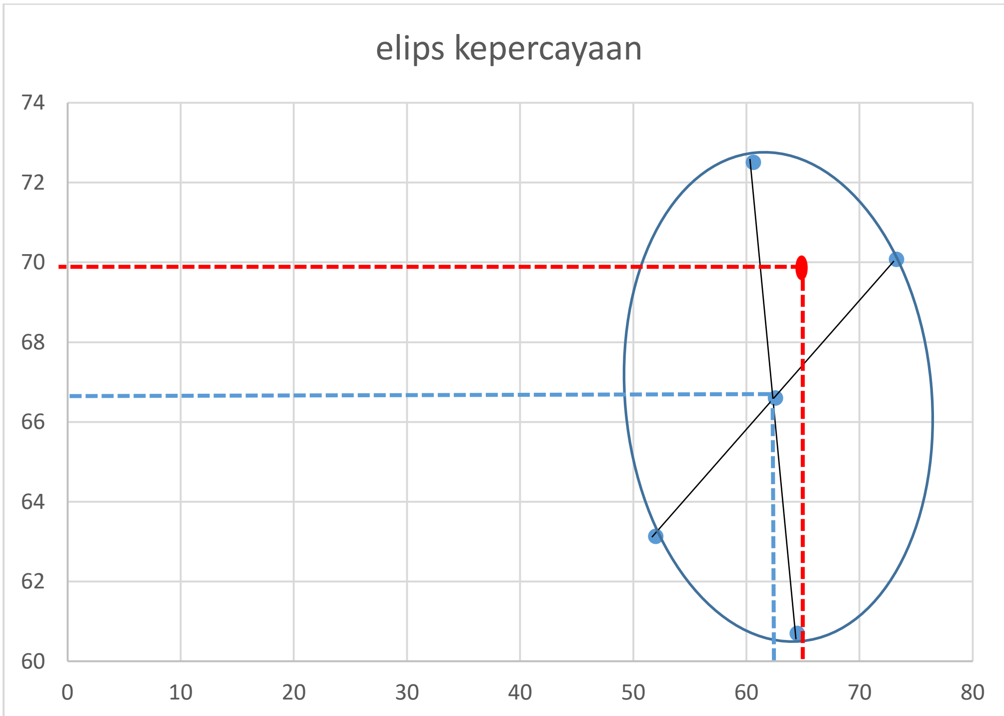
(60.642, 72.505)

(64.517, 60,694)

Gambar selang kepercayaan elips :



4. berikut ini gambar letak skor matematika 65 dan fisika 70, berdasarkan gambar terlihat bahwa nilai tersebut dalam elips, dengan kata lain masuk ke dalam elips kepercayaan.



5. Buatlah selang kepercayaan simultan dan selang bonfeni 90%

   A. Selang kepercayaan simultan

$$a'\bar{x} - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\,\frac{\sqrt{a'Sa}}{\sqrt{n}} \le a'\mu \le a'\bar{x} - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\,\frac{\sqrt{a'Sa}}{\sqrt{n}}$$

Sehingga selang kepercayaan untuk peubah ke-p:

$$\bar{x}_i - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\,\frac{\sqrt{S_{ii}}}{\sqrt{n}} \le \mu_i \le \bar{x}_i - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\,\frac{\sqrt{S_{ii}}}{\sqrt{n}}$$

Selang kepercayaan 90% bagi μ_1:

$$62{,}58 - \sqrt{\frac{2x9}{8}3.113}\,\frac{\sqrt{164.9329}}{\sqrt{10}} \le \mu_1 \le 62.58 + \sqrt{\frac{2x9}{8}3.113}\,\frac{\sqrt{164.9329}}{10}$$

$$62{,}58 - 10.745 \le \mu_1 \le 62.58 + 10.745$$

$$51.83 \le \mu_1 \le 73.334$$

Interpretasi : dengan tingkat kepercayaan 90% nilai matematika kelas tersebut adalah antara 51.83 hingga 73.334

Selang kepercayaan 90% bagi μ_2:

$$66.6-\sqrt{\frac{2x9}{8}3.113}\frac{\sqrt{66.964}}{\sqrt{10}} \leq \mu_2 \leq 66.6+\sqrt{\frac{2x9}{8}3.113}\frac{\sqrt{66.964}}{10}$$

$$66{,}6-6.8486 \leq \mu_2 \leq 66.6+6.8486$$

$$59.75 \leq \mu_2 \leq 73.45$$

Interpretasi : dengan tingkat kepercayaan 90% nilai fisika kelas tersebut adalah antara 59.75 hingga 73.45

B. Selang bofeni

$\bar{x}_i \pm t_{(n-1),}(\frac{\alpha}{2p})\frac{\sqrt{S_{ii}}}{\sqrt{n}}$; p = banyaknya selang kepercayaan yang akan di buat.

Selang kepercayaan 90% bagi μ_1 :

$$\bar{x}_1 \pm t_{(\frac{\alpha}{2p})(n-1)}\frac{\sqrt{S_{ii}}}{\sqrt{n}}$$

$$62.58 \pm 2.262\frac{\sqrt{164.9329}}{\sqrt{10}}$$

$$62.58-9.186 \leq \mu_1 \leq 62.58+9.186$$

$$53.394 \leq \mu_1 \leq 71.766$$

Interpretasi : dengan tingkat kepercayaan 90% nilai matematika kelas tersebut adalah antara 53.39 hingga 71.77

Selang kepercayaan 90% bagi μ_2 :

$$\bar{x}_2 \pm t_{(\frac{\alpha}{2p})(n-1)}\frac{\sqrt{S_{ii}}}{\sqrt{n}}$$

$$66.6 \pm 2.262\frac{\sqrt{66.96}}{\sqrt{10}}$$

$$66.6-5.85 \leq \mu_2 \leq 66.6+5.85$$

$$60.75 \leq \mu_2 \leq 72.45$$

Interpretasi : dengan tingkat kepercayaan 90% nilai fisika kelas tersebut adalah antara 60.75 hingga 72.45.

Sintaks SAS

```
data satumean;
input matematika fisika;
datalines;
72.8 69.9
46.0 68.9
59.2 58.4
66.7 78.2
84.2 63.9
50.4 54.6
49.6 66.5
77.9 71.6
63.9 77.2
55.1 56.8
;
run;
proc print data=satumean;
run;
/*Uji satu sampel t-hotelling*/

proc iml;
TITLE 'UJI DUA VEKTOR';
USE satumean;
read all var {matematika  fisika} into xx;
u0={55,60};
xr=xx[:,];
*hitung matriks peragam;
n=nrow(xx);
satu=repeat(1,n,1);
I0=i(n)-(1/n)#(satu*satu`);
s=(1/(n-1))#(xx`*i0*xx);
is=inv(s);
*hitung t2;
T2=n#(xr`-u0)`*is*(xr`-u0);
print T2;
*nilai kritis;
p=ncol(xx);
alpha=0.10;
F=FINV(1-alpha,p,n-p);
nk=((n-1)#p/(n-p))#F;
pvalue=1-probf(nk,p,n-p);
print u0 s n p f nk pvalue;
if T2>nk then
print 'T2 > nilai kritis';
else
print 'T2 < nilai kritis';
*buat titik koordinat ellips;
call eigen(val,vec,s);
print val vec;
*sumbu mayor dan minor;
mayor=sqrt(val[1])*sqrt(nk/n);
minor=sqrt(val[2])*sqrt(nk/n);
print mayor minor;
quit;

/*membuat ellips kepercayaan*/

proc sgplot data=satumean;
```

```
title "ELLIPS KEPERCAYAAN";
   scatter x=matematika y=fisika;
   ellipse x=matematika y=fisika /
   alpha=0.05
   legendlabel="95% prediction ellipse";

   ellipse x=matematika y=fisika /
   alpha=0.20
   legendlabel="80% prediction ellipse";
 run;

/*ATAU*/

 proc sgscatter data=satumean;
compare y=fisika x=matematika
 / ellipse=(type=mean);
 title "SK 90%"
;
run;

 /*membuat selang simultan*/

%let p=2;
data satumean;
infile "C:\Arie Anggreyani\KULIAH PASCA\SEMESTER III\APG\praktikum apg
latihan\APG 4 dan 5\datathot1.txt";
input matematika fisika;
  variable="matematika"; x=matematika; output;
  variable="fisika"; x=fisika; output;
  keep variable x;
  run;
proc print data=satumean;
run;

proc sort;
  by variable;
  run;
proc means noprint;
  by variable;
  var x;
  output out=a n=n mean=xbar var=s2;
  run;
data b;
  set a;
  t1=tinv(1-0.05,n-1);
  tb=tinv(1-0.05/&p,n-1);
  f=finv(0.90,&p,n-&p);
  *selang kepercayaan univariat;
  loone=xbar-t1*sqrt(s2/n);
  upone=xbar+t1*sqrt(s2/n);
  *selang kepercayaan simultan;
  losim=xbar-sqrt(&p*(n-1)*f*s2/(n-&p)/n);
  upsim=xbar+sqrt(&p*(n-1)*f*s2/(n-&p)/n);
  *selang kepercayaan bonferoni;
  lobon=xbar-tb*sqrt(s2/n);
  upbon=xbar+tb*sqrt(s2/n);
  run;
proc print;
  run;
```

Hasil Output SAS

UJI DUA VEKTOR

T2
7.621161

u0	s		n	p	F	nk	pvalue
55	164.93289	36.008889	10	2	3.1131176	7.0045147	0.0174565
60	36.008889	66.964444					

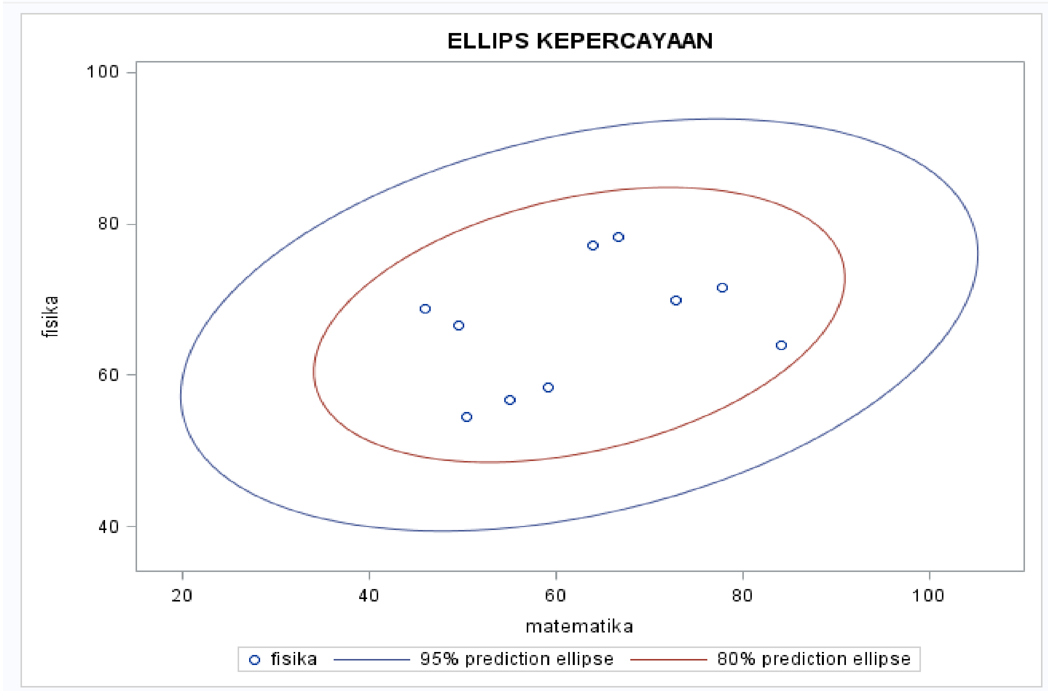
T2 > nilai kritis

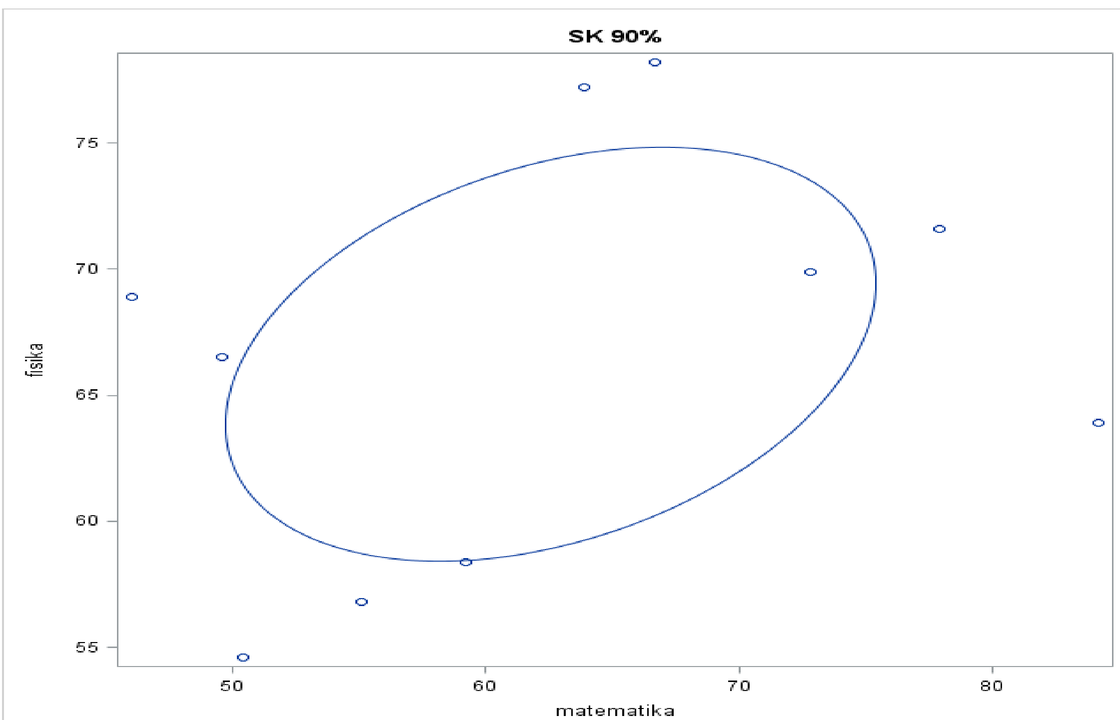
val	vec	
176.74418	0.9501897	-0.311672
55.153156	0.3116721	0.9501897

mayor	minor
11.126577	6.2154734

Output di atas menampilkan nilai T^2 sebesar 7.621161 dan c^2 sebesar 7.005415. Hasil ini menunjukkan hasil yang sama dibandingkan dengan hasil perhitungan manual. Nilai T^2 dan c^2 digunakan untuk pengujian hipotesis. Sehingga diperoleh bahwa $T^2_{hot} < c^2$ yaitu **7,621161 < 7,004515** maka kesimpulan tolak H_0 dapat dinyatakan bahwa vektor rataan populasi tidak sama dengan $\binom{55}{60}$. Selain itu dari output diatas menampilkan panjang mayor sebesar 11.126577 dan panjang minor sebesar 6.2154734 sama seperti perhitungan manual.

Selang Kepercayaan





SELANG KEPERCAYAAN SIMULTAN DAN BENFERONI

Obs	variable	_TYPE_	_FREQ_	n	xbar	s2	t1	tb	f	loone	upone	losim	upsim	lobon	upbon
1	fisika	0	10	10	66.60	66.964	1.83311	2.26216	3.11312	61.8564	71.3436	59.7513	73.4487	60.7461	72.4539
2	matematika	0	10	10	62.58	164.933	1.83311	2.26216	3.11312	55.1354	70.0246	51.8316	73.3284	53.3929	71.7671

Output di atas menampilkan selang kepercayaan simultan dan benferoni. Dari output diatas diperoleh selang kepercayaan simultan untuk rataan fisika sebesar 59,7513 sampai dengan 73,4487. Dan selang kepercayaan benferoninya sebesar 60,7461 sampai dengan 72,4539. Sedangkan selang kepercayaan simultan untuk rataan matematika sebesar 51,8316 sampai dengan 73,3284. Dan selang kepercayaan benferoninya sebesar 53,3929 sampai dengan 71,7671.

Hasil ini sama dengan perhitungan manual.

DAFTAR PUSTAKA

Johnson RA, Wichern DW. 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Ed ke-6. New Jersey: Prentice Hall, Inc

Kartiko, Sri haryani, et. Al. 2005. *Metode Statistika Multivariat.* Jakarta : Universitas Terbuka

Sartono, Affendi, et. Al. 2003. Analisis Peubah Ganda. Bogor: IPB Press