MANOVA

Pada kasus multivariat, misal terdapat sekumpulan sampel acak yang diambil dari setiap g populasi sebagai berikut:

Populasi 1: $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$
Populasi 2: $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$
$\vdots$
Populasi g: $X_{g1}, X_{g2}, \dots, X_{gn_g}$

terdapat tiga asumsi dasar yang diperlukan oleh sekumpulan sampel acak di atas, yaitu:

1. $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_l}, (l = 1, 2, \dots, g)$ adalah sampel acak berukuran n_l dari suatu populasi dengan rata - rata μ_l.
2. Matriks kovariansi antara g populasi sama.
3. Setiap populasi adalah normal multivariat.

One Way Manova

Ciri-ciri: Keragaman berasal dari satu arah (perlakuan) dari data yang diamati.

→ Model linier :

$$\underline{\mathbf{X}}_{lj} = \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\boldsymbol{\tau}}_l + \underline{\mathbf{e}}_{lj}$$

l = 1, 2, .., g dan j = 1, 2, ..., n_l

$\underline{\mathbf{X}}_{lj}$: Pengamatan pada perlakuan ke-l, ulangan ke-j
$\underline{\boldsymbol{\mu}}$: vektor nilai tengah umum
$\underline{\boldsymbol{\tau}}_l$: pengaruh perlakuan ke-l
$\underline{\mathbf{e}}_{lj}$: adalah peubah acak $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$,

→ Hipotesis : $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_g = 0$
H_1 : minimal ada satu l dimana $\tau_l \neq 0$

Dengan $\tau_l = \begin{pmatrix} \mu_{l1} \\ \vdots \\ \mu_{lp} \end{pmatrix}$ dan l=1,2,…,g

→ Tabel Manova untuk perbandingan vektor nilai tengah

Sumber Variansi	Matriks jumlah dari kuadrat dan hasil kali	Derajat bebas
Perlakuan	$B = \sum_{l=1}^{g} n_l(\bar{x}_{l.} - \bar{x})(\bar{x}_{l.} - \bar{x})^t$	$g - 1$
Galat (sisa)	$W = \sum_{l=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_l}(x_{lj} - \bar{x}_{l.})(x_{lj} - \bar{x}_{l.})^t$	$\sum_{l=1}^{g} n_l - g$
total	$\sum_{l=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_l}(x_{lj} - \bar{x})(x_{lj} - \bar{x})^t$	$\sum_{l=1}^{g} n_l - 1$

→ Statistik Uji :

$$\Lambda^* = \frac{|\mathrm{W}|}{|\mathrm{W} + \mathrm{B}|}$$

→ **Sebaran Wilk Lambda**

$$\boldsymbol{\Lambda}^* = \frac{|\mathbf{W}|}{|\mathbf{W}+\mathbf{B}|}$$

Variabel	Grup	Distribusi sampling untuk data normal multivariat
$p = 1$	$g \geq 2$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - g}{g-1}\right)\left(\frac{1-\Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{g-1, n_l - g}$
$p = 2$	$g \geq 2$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - g - 1}{g-1}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) \sim F_{2(g-1), 2(\sum n_l - g - 1)}$
$p \geq 1$	$g = 2$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - p - 1}{p}\right)\left(\frac{1-\Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{p, \sum n_l - p - 1}$
$p \geq 1$	$g = 3$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - p - 2}{p}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) \sim F_{2p, 2(\sum n_l - p - 2)}$

Distribusi sampling data normal multivariat disesuaikan dengan hasil uji *F* pada kasus univariat, sehingga untuk kasus multivariat Ho ditolak jika statistika uji berdasarkan tabel diatas lebih besar daripada distribusi sampling *F*.

<u>Rancangan Acak Kelompok pada Manova One Way</u>

a. Model linier :

$$\boldsymbol{X}_{ij} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{e}_{ij}$$

i = 1, 2, .., g dan j = 1, 2, ..., n_l

$\boldsymbol{X}_{ij}$: Pengamatan pada perlakuan ke-i, kelompok ke-j

$\underline{\boldsymbol{\mu}}$: vektor nilai tengah umum

$\underline{\boldsymbol{\tau}}_i$: pengaruh perlakuan ke-i

$\underline{\boldsymbol{\beta}}_j$: pengaruh kelompok ke-j

$\underline{\mathbf{e}}_{ij}$: adalah peubah acak $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$

→ **Hipotesis :**

Pengaruh Perlakuan :

$H_0 : \underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_2 = \cdots = \underline{\tau}_g = \underline{0}$ (tidak ada pengaruh perlakuan terhadap respon yang diamati)

$H_1 : \exists l, \underline{\tau}_l \neq \underline{0}, l = 1, 2, 3, \ldots, g$ (paling sedikit ada satu perlakuan yang mempengaruhi respon diamati)

Pengaruh Kelompok :

$H_0 : \underline{\beta}_1 = \underline{\beta}_2 = \cdots = \underline{\beta}_j = \underline{0}$ (tidak ada pengaruh kelompok terhadap respon yang diamati)

$H_1 : \exists j, \underline{\beta}_j \neq \underline{0}, j = 1, 2, 3, \ldots, n_l$ (paling sedikit ada satu kelompok yang mempengaruhi respon diamati)

→ **Tabel Manova untuk perbandingan vektor nilai tengah**

Sumber Variansi	Matriks jumlah dari kuadrat dan hasil kali
Perlakuan	$B = \sum_{l=1}^{g} n_l(\bar{x}_{l.} - \bar{x})(\bar{x}_{l.} - \bar{x})^t$
Kelompok	$K = \sum_{l=1}^{g} n_g(\bar{x}_{.j} - \bar{x})(\bar{x}_{.j} - \bar{x})^t$
Galat (sisa)	$W = \sum_{l=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_l}(x_{lj} - \bar{x}_{l.})(x_{lj} - \bar{x}_{l.})^t$
total	$\sum_{l=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_l}(x_{lj} - \bar{x})(x_{lj} - \bar{x})^t$

→ **Statistik Uji :**

$$\Lambda^*(\text{perlakuan}) = \frac{|\mathrm{W}|}{|\mathrm{W} + \mathrm{B}|}$$

$$\Lambda^*(\text{kelompok}) = \frac{|\mathrm{W}|}{|\mathrm{W} + \mathrm{K}|}$$

→ **Sebaran Wilk Lambda** $\boldsymbol{\Lambda^* = \frac{|W|}{|W+B|}}$

Variabel	Grup	Distribusi sampling untuk data normal multivariat
$p = 1$	$g \geq 2$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - g}{g-1}\right)\left(\frac{1-\Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim \mathrm{F}_{g-1, n_l - g}$
$p = 2$	$g \geq 2$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - g - 1}{g-1}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) \sim \mathrm{F}_{2(g-1), 2(\sum n_l - g - 1)}$
$p \geq 1$	$g = 2$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - p - 1}{p}\right)\left(\frac{1-\Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim \mathrm{F}_{p, \sum n_l - p - 1}$
$p \geq 1$	$g = 3$	$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - p - 2}{p}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) \sim \mathrm{F}_{2p, 2(\sum n_l - p - 2)}$

Manova Two Ways

Ciri-ciri: Keragaman berasal dari dua arah dan beberapa kasus dapat terjadi interaksi antar factor

Model umum:

$$\boldsymbol{X}_{ij} = \boldsymbol{\mu} + \tau_l + \boldsymbol{\beta}_k + \boldsymbol{\gamma}_{lk} + \boldsymbol{e}_{lkr}$$

l = 1, 2, .., g; k = 1, 2, ..., b; r = 1,2,…,n

$\boldsymbol{X}_{lj}$: Pengamatan pada perlakuan ke-i, kelompok ke-j

$\underline{\boldsymbol{\mu}}$: vektor nilai tengah umum

$\underline{\boldsymbol{\tau}}_l$: pengaruh perlakuan ke-l

$\boldsymbol{\gamma}_{lk}$: Komponen interaksi

$\underline{\boldsymbol{\beta}}_j$: pengaruh kelompok ke-j

MANOVA Table for Comparing Factors and Their Interaction

Source of variation	Matrix of sum of squares and cross products (SSP)	Degrees of freedom (d.f.)
Factor 1	$\text{SSP}_{\text{fac1}} = \sum_{\ell=1}^{g} bn(\bar{\mathbf{x}}_{\ell\cdot} - \bar{\mathbf{x}})(\bar{\mathbf{x}}_{\ell\cdot} - \bar{\mathbf{x}})'$	$g-1$
Factor 2	$\text{SSP}_{\text{fac2}} = \sum_{k=1}^{b} gn(\bar{\mathbf{x}}_{\cdot k} - \bar{\mathbf{x}})(\bar{\mathbf{x}}_{\cdot k} - \bar{\mathbf{x}})'$	$b-1$
Interaction	$\text{SSP}_{\text{int}} = \sum_{\ell=1}^{g}\sum_{k=1}^{b} n(\bar{\mathbf{x}}_{\ell k} - \bar{\mathbf{x}}_{\ell\cdot} - \bar{\mathbf{x}}_{\cdot k} + \bar{\mathbf{x}})(\bar{\mathbf{x}}_{\ell k} - \bar{\mathbf{x}}_{\ell\cdot} - \bar{\mathbf{x}}_{\cdot k} + \bar{\mathbf{x}})'$	$(g-1)(b-1)$
Residual (Error)	$\text{SSP}_{\text{res}} = \sum_{\ell=1}^{g}\sum_{k=1}^{b}\sum_{r=1}^{n} (\mathbf{x}_{\ell kr} - \bar{\mathbf{x}}_{\ell k})(\mathbf{x}_{\ell kr} - \bar{\mathbf{x}}_{\ell k})'$	$gb(n-1)$
Total (corrected)	$\text{SSP}_{\text{cor}} = \sum_{\ell=1}^{g}\sum_{k=1}^{b}\sum_{r=1}^{n} (\mathbf{x}_{\ell kr} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_{\ell kr} - \bar{\mathbf{x}})'$	$gbn-1$

Latihan Soal

1. Suatu percobaan dilakukan untuk mengetahui perbedaan tiga varietas jagung. Data respon yang diambil antara lain Y1 = Produksi per hektar, dan Y2 = bobot/1000 butir. Rancangan lingkuan yang digunakan adalah rancangan acak lengkap. Datanya diperoleh sebagai berikut :

Perlakuan	Ulangan	Y1	Y2
Varietas 1	1	6	7
	2	5	9
Varietas 2	1	4	6
	2	6	6
	3	4	7
Varietas 3	1	5	4
	2	6	4

   a. Tuliskan model liniernya beserta keterangan yang jelas.
   b. Hitunglah vektor rataan untuk setiap perlakuan
   c. Hitunglah matriks jumlah kuadrat dan hasil kali silang dari perlakuan (B), galat (W), dan Total (T)
   d. Lakukan pengujian pda taraf nyata 5% untuk mengetahui apakah ketiga varietas memiliki respon yang berbeda. Gunakan Uji Wilks Lambda.
   e. Apa kesimpulan anda?

2. Suatu percobaan dengan menggunakan **2** jenis pupuk. Pupuk-pupuk tersebut kemudian disebar pada petak-petak lahan yang ditanami padi. Karena lahan tidak homogen maka lahan di blok menjadi **2** blok. Setiap blok ada **2** petak. Randomisasi **2** perlakuan dilakukan untuk setiap blok. Pada saat panen diukur **bobot biji** dan **bobot serasak** per petak. Matriks jumlah kuadrat adalah sebagai berikut :

   P (Matriks Perlakuan)= $\begin{bmatrix} 12 & -67 \\ -67 & 32 \end{bmatrix}$

   B (Matriks Blok) = $\begin{bmatrix} 86 & 56 \\ 56 & 75 \end{bmatrix}$

   E (Matriks Galat) = $\begin{bmatrix} 13 & 28 \\ 28 & 71 \end{bmatrix}$

   Pertanyaan = Apakah perlakuan **8** pupuk tersebut mempunyai pengaruh yang sama terhadap respon ? (gunakan alpha 5 %).

3. Suatu percobaan dengan menggunakan 4 perlakuan pupuk. Pupuk-pupuk tersebut kemudian disebar pada petak-petak lahan yang ditanami padi pada di blok menjadi 4 blok. Setiap blok ada 4 petak. Randomisasi 4 perlakuan dilakukan untuk setiap blok. Pada saat panen diukur bobot biji dan bobot serasak per petak. Matriks jumlah kuadrat adalah sebagai berikut :

P (Matriks Perlakuan)= $\begin{bmatrix} 12496.8 & -6786.8 \\ -6786.8 & 32985.0 \end{bmatrix}$

B (Matriks Blok) = $\begin{bmatrix} 86045.8 & 56073.6 \\ 56073.6 & 75841.5 \end{bmatrix}$

E (Matriks Galat) = $\begin{bmatrix} 136792.6 & 58549.0 \\ 58549.0 & 71496.1 \end{bmatrix}$

a. Tentukan derajat bebas perlakuan
b. Tentukan derajat bebas Blok
c. Tentukan derajat bebas Galat
d. Buatlah Hipotesis percobaan di atas
e. Pertanyaan = Apakah perlakuan 4 pupuk tersebut mempunyai pengaruh yang sama terhadap respon ? (gunakan alpha= 5 %).

4. Seorang peneliti membagi acak 15 orang ke dalam 3 kelompok. Kelompok pertama mendapatkan informasi diet dari website interaktif, kelompok kedua memperoleh informasi yang sama melalui seorang praktisi, sedangkan kelompok ketiga memperoleh informasi dari rekaman video yang dibuat oleh praktisi yang sama. Peneliti akan melihat penilaian berdasarkan 3 poin yaitu presentasi (P), kesulitan (K), dan kepentingan (KP). Data yang diperoleh adalah sebagai berikut. (Asumsikan semua orang memiliki pengetahuan awal yang sama)

Kel.	P	K	KP
1	20	5	18
1	25	9	8
1	23	15	20
1	16	9	22
1	20	6	22

Kel.	P	K	KP
2	28	7	14
2	25	14	5
2	26	9	20
2	19	15	22
2	29	14	12

Kel.	P	K	KP
3	15	6	3
3	22	8	12
3	27	9	14
3	21	10	7
3	17	9	1

Tentukanlah:

a. Tentukan model linier
b. Hitung vector rataan untuk setiap metode pemberian informasi
c. Hitunglah matriks jumlah kuadrat dan hasil kali silang untuk perlakuan (B), galat (W), dan Total (T)
d. Uji wilks lambda 5%
e. Kesimpulan

Jawaban

1. Suatu percobaan dilakukan untuk mengetahui perbedaan tiga varietas jagung. Data respon yang diambil antara lain Y1 = Produksi per hektar, dan Y2 = bobot/1000 butir. Rancangan lingkuan yang digunakan adalah rancangan acak lengkap. Datanya diperoleh sebagai berikut :

Perlakuan	Ulangan	Y1	Y2
Varietas 1	1	6	7
	2	5	9
Varietas 2	1	4	6
	2	6	6
	3	4	7
Varietas 3	1	5	4
	2	6	4

a. Tuliskan model liniernya beserta keterangan yang jelas.
b. Hitunglah vektor rataan untuk setiap perlakuan
c. Hitunglah matriks jumlah kuadrat dan hasil kali silang dari perlakuan (B), galat (W), dan Total (T)
d. Lakukan pengujian pda taraf nyata 5% untuk mengetahui apakah ketiga varietas memiliki respon yang berbeda. Gunakan Uji Wilks Lambda.
e. Apa kesimpulan anda?

Jawaban:

a. Model linear:

$$\underline{y}_{lj} = \underline{\mu} + \underline{\tau}_l + \underline{\varepsilon}_{lj} \qquad ; l = 1,2,3 ; j = 1,2,\ldots,n_l$$

keterangan:

$\underline{y}_{lj}$ = respon varietas ke *l* ulangan ke *j*

$\underline{\mu}$ = vektor rataan umum

$\underline{\tau}_l$ = pengaruh varietas ke *l*

$\underline{\varepsilon}_{lj}$ = pengaruh acak varietas ke *l* ulangan ke *j*

b. Vektor Rataan

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 8 \end{pmatrix} ; \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 4{,}67 \\ 6{,}33 \end{pmatrix} ; \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 5{,}14 \\ 6{,}14 \end{pmatrix}$$

c. Matriks Jumlah Kuadrat

$$\mathrm{B} = \sum_{l=1}^{3} n_l \left(\underline{\mathbf{X}}_{lj} - \underline{\bar{\mathbf{X}}}\right)\left(\underline{\mathbf{X}}_{lj} - \underline{\bar{\mathbf{X}}}\right)'$$

$$= 2\begin{pmatrix} 5{,}5 - 5{,}14 \\ 8 - 6{,}14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5{,}5 - 5{,}14 & 8 - 6{,}14 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 4{,}67 - 5{,}14 \\ 6{,}33 - 6{,}14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4{,}67 - 5{,}14 & 6{,}33 - 6{,}14 \end{pmatrix} +$$

$$2\begin{pmatrix} 5{,}5 - 5{,}14 \\ 4 - 6{,}14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5{,}5 - 5{,}14 & 4 - 6{,}14 \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} 0{,}36 \\ 1{,}86 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}36 & 1{,}86 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -0{,}47 \\ 0{,}19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}47 & 0{,}19 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0{,}36 \\ -2{,}14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}36 & -2{,}14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}1811 & -0{,}4695 \\ -0{,}4695 & 16{,}1867 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}(\underline{\mathbf{x}}_{lj} - \underline{\bar{\mathbf{x}}})(\underline{\mathbf{x}}_{lj} - \underline{\bar{\mathbf{x}}})'$$

$$= \begin{pmatrix} 6-5{,}5 \\ 7-8 \end{pmatrix}(6-5{,}5 \quad 7-8) + \begin{pmatrix} 5-5{,}5 \\ 9-8 \end{pmatrix}(5-5{,}5 \quad 9-8) + \begin{pmatrix} 4-4{,}67 \\ 6-6{,}33 \end{pmatrix}(4-4{,}67 \quad 6-6{,}33) +$$
$$\begin{pmatrix} 6-4{,}67 \\ 6-6{,}33 \end{pmatrix}(6-4{,}67 \quad 6-6{,}33) + \begin{pmatrix} 4-4{,}67 \\ 7-6{,}33 \end{pmatrix}(4-4{,}67 \quad 7-6{,}33) + \begin{pmatrix} 5-5{,}5 \\ 4-4 \end{pmatrix}(4-4) +$$
$$\begin{pmatrix} 6-5{,}5 \\ 4-4 \end{pmatrix}(6-5{,}5 \quad 4-4)$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}25 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}25 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}4489 & 0{,}2211 \\ 0{,}2211 & 0{,}1089 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}7689 & -0{,}4389 \\ -0{,}4389 & 0{,}1089 \end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix} 0{,}4489 & -0{,}4489 \\ -0{,}4489 & 0{,}4489 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3{,}6667 & -1{,}6667 \\ -1{,}6667 & 2{,}6667 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \sum_{l=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_l}(\underline{\mathbf{x}}_{lj} - \underline{\bar{\mathbf{x}}})(\underline{\mathbf{x}}_{lj} - \underline{\bar{\mathbf{x}}})'$$
$$= \mathbf{W} + \mathbf{B}$$
$$= \begin{pmatrix} 3{,}6667 & -1{,}6667 \\ -1{,}6667 & 2{,}6667 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}1811 & -0{,}4695 \\ -0{,}4695 & 16{,}1867 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}8478 & -2{,}1362 \\ -2{,}1362 & 18{,}8534 \end{pmatrix}$$

d. Hipotesis

$H_0 : \underline{\tau_1} = \underline{\tau_2} = \underline{\tau_3} = \underline{\tau_4} = \underline{0}$

H_1 : minimal ada satu $\underline{\tau_l}$ yang tidak sama dengan $\underline{\mathbf{0}}$

Statistik Uji :

$$\Lambda^* = \frac{|\mathbf{W}|}{|\mathbf{B}+\mathbf{W}|}$$
$$\Lambda^* = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3{,}6667 & -1{,}6667 \\ -1{,}6667 & 2{,}6667 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 4{,}8478 & -2{,}1362 \\ -2{,}1362 & 18{,}8534 \end{pmatrix}\right|}$$
$$\Lambda^* = 0{,}081$$

Kriteria pengujian :

Tolak H_0 jika $\left[\frac{\sum n_l - p - 2}{p}\right]\left[\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right] \geq F_{2p;2(\sum n_l - p - 2)}(\alpha)$

Telah diketahui bahwa $\alpha = 5\%$, total perlakuan *(l)* = 3 dan total peubah *(p)* = 2. Sehingga diperoleh :

$$\left[\frac{7-2-2}{2}\right]\left[\frac{1-\sqrt{0{,}081}}{\sqrt{0{,}081}}\right] = 3{,}7704$$

dan

$$F_{2(2);2(7-2-2)}(0{,}05) = 4{,}5337$$

e. Kesimpulan

Karena $\left[\frac{\sum n_l - p - 2}{p}\right]\left[\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right] = 3{,}7704 < F_{2p;2(\sum n_l - p - 2)}(\alpha) = 4{,}5337$, maka dapat disimpulkan bahwa tidak cukup bukti untuk menolak H_0 (terima H_0) atau dengan kata lain dapat dikatakan bahwa varietas memberikan pengaruh yang nyata pada pengukuran secara bersama peubah produksi perhektar dan bobot/1000.

2. Suatu percobaan dengan menggunakan **2** jenis pupuk. Pupuk-pupuk tersebut kemudian disebar pada petak-petak lahan yang ditanami padi. Karena lahan tidak homogen maka lahan di blok menjadi **2** blok. Setiap blok ada **2** petak. Randomisasi **2** perlakuan dilakukan untuk setiap blok. Pada saat panen diukur **bobot biji** dan **bobot serasak** per petak. Matriks jumlah kuadrat adalah sebagai berikut :

   P (Matriks Perlakuan)= $\begin{bmatrix} 12 & -67 \\ -67 & 32 \end{bmatrix}$

   B (Matriks Blok) = $\begin{bmatrix} 86 & 56 \\ 56 & 75 \end{bmatrix}$

   E (Matriks Galat) = $\begin{bmatrix} 13 & 28 \\ 28 & 71 \end{bmatrix}$

   Pertanyaan = Apakah perlakuan **8** pupuk tersebut mempunyai pengaruh yang sama terhadap respon ? (gunakan alpha 5 %).

$$\Delta = \frac{|E|}{|E+P|}$$

<u>Penyelesaian :</u>

Rancangan merupakan rancangan acak kelompok dengan keterangan sebagai berikut :

- Faktor : Jenis Pupuk
- Level : 2
- Blok (Kelompok) : 2
- Setiap Blok ada 2 petak lahan
- Jadi banyak unit percobaan : 2 x 2 = 4

  Hipotesis yang digunakan untuk melihat perbedaan perlakuan terhadap respon adalah :
  Hipotesis :

  $H_0 : \underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_2 = \cdots = \underline{\tau}_t = \underline{0}$

  $H_1 : \exists\, i, \underline{\tau}_i \neq \underline{0}, i = 1, 2, \cdots, t$

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat
Perlakuan	1	$\begin{bmatrix} 12 & -67 \\ -67 & 32 \end{bmatrix}$
Blok	1	$\begin{bmatrix} 86 & 56 \\ 56 & 75 \end{bmatrix}$
Galat	1	$\begin{bmatrix} 13 & 28 \\ 28 & 71 \end{bmatrix}$
Total	3	$\begin{bmatrix} 111 & 17 \\ 17 & 178 \end{bmatrix}$

Statistik uji

$$\Lambda = \frac{|G|}{|G+P|} = \frac{139}{1054} = 0{,}131879 \text{ benar}$$

Karena p = 2 dan g = 2, maka:

$$F = \left(\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\right)\frac{\left(\sum n_i - g - 1\right)}{(g-1)} = \left(\frac{1-\sqrt{0{,}131879}}{\sqrt{0{,}131879}}\right)\frac{(4-2-1)}{2-1} = 1.753676 \text{ benar}$$

Wilayah kritis:

$$F_{0,05;db1;db2} \quad \rightarrow \quad db_1 = 2(g-1) = 2$$

$$db_2 = 2\left(\sum n - g - 1\right) = 2$$

$$F_{0,05;db1;db2} = 19$$

Kesimpulan :

Karena F hitung < F tabel maka H0 gagal ditolak atau dengan kata lain terima H0. Hal ini berarti bahwa tidak terdapat perbedaan pengaruh pupuk terhadap **bobot biji** dan **bobot serasak** per petak pada taraf nyata 5%. Atau dengan kata lain 2 jenis pupuk tersebut memberikan pengaruh yang sama terhadap respon.

3. Suatu percobaan dengan menggunakan 4 perlakuan pupuk. Pupuk-pupuk tersebut kemudian disebar pada petak-petak lahan yang ditanami padi pada di blok menjadi 3 blok. Setiap blok ada 4 petak. Randomisasi 4 perlakuan dilakukan untuk setiap blok. Pada saat panen diukur bobot biji dan bobot serasak per petak. Matriks jumlah kuadrat adalah sebagai berikut :

   P (Matriks Perlakuan)= $\begin{bmatrix} 12496.8 & -6786.8 \\ -6786.8 & 32985.0 \end{bmatrix}$

   B (Matriks Blok) = $\begin{bmatrix} 86045.8 & 56073.6 \\ 56073.6 & 75841.5 \end{bmatrix}$

   E (Matriks Galat) = $\begin{bmatrix} 136792.6 & 58549.0 \\ 58549.0 & 71496.1 \end{bmatrix}$

   a. Tentukan derajat bebas perlakuan=
      4-1=3
   b. Tentukan derajat bebas Blok
      3-1=2
   c. Tentukan derajat bebas Galat
      4x3 – 3- 2- 1= 6
   d. Buatlah Hipotesis percobaan di atas
      Hipotesis terhadap perlakuan
      Ho : $\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}_{p1} = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}_{p2} = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}_{p3} = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}_{p4}$

H1 : Vektor rataan ke i tidak sama dengan vektor rataan ke j, i tidak sama dengan j

Hipotesis terhadap blok

Ho : $\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}_{blok1} = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}_{blok2} = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}_{blok3}$

H1: : $min. ada\ satu\ blok\ dengan\ vektor\ rataan\ yang\ berbeda\ dengan\ yang\ lain.$

e. Pertanyaan = Apakah perlakuan 4 pupuk tersebut mempunyai pengaruh yang sama terhadap respon ? (gunakan alpha= 5 %).

P (Matriks Perlakuan)= $\begin{bmatrix}12496.8 & -6786.8\\ -6786.8 & 32985.0\end{bmatrix}$

B (Matriks Blok) = $\begin{bmatrix}86045.8 & 56073.6\\ 56073.6 & 75841.5\end{bmatrix}$

E (Matriks Galat) = $\begin{bmatrix}136792.6 & 58549.0\\ 58549.0 & 71496.1\end{bmatrix}$

P+E= $\begin{bmatrix}12496.8 & -6786.8\\ -6786.8 & 32985.0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}136792.6 & 58549.0\\ 58549.0 & 71496.1\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}149289,4 & 51762,2\\ 51762,2 & 104481,1\end{pmatrix}$

$$\Lambda = \frac{|E|}{|E+\mathbf{P}|} = \frac{6352152008}{12918595382} = 0.49$$

$U^{0,05}_{2;3;6} = 0,116$

Karena nilai $\Lambda > U^{0,05}_{2;3;6}$ $maka$ Terima Ho. Cukup bukti untuk menyatakan bahwa perlakuan 4 pupuk tersebut memiliki pengaruh yang sama terhadap respon.

4. Seorang peneliti membagi acak 15 orang ke dalam 3 kelompok. Kelompok pertama mendapatkan informasi diet dari website interaktif, kelompok kedua memperoleh informasi yang sama melalui seorang praktisi, sedangkan kelompok ketiga memperoleh informasi dari rekaman video yang dibuat oleh praktisi yang sama. Peneliti akan melihat penilaian berdasarkan 3 poin yaitu presentasi (P), kesulitan (K), dan kepentingan (KP). Data yang diperoleh adalah sebagai berikut. (Asumsikan semua orang memiliki pengetahuan awal yang sama)

Kel.	P	K	KP
1	20	5	18
1	25	9	8
1	23	15	20
1	16	9	22
1	20	6	22

Kel.	P	K	KP
2	28	7	14
2	25	14	5
2	26	9	20
2	19	15	22
2	29	14	12

Kel.	P	K	KP
3	15	6	3
3	22	8	12
3	27	9	14
3	21	10	7
3	17	9	1

Tentukanlah:

a. Tentukan model linier
b. Hitung vector rataan untuk setiap metode pemberian informasi
c. Hitunglah matriks jumlah kuadrat dan hasil kali silang untuk perlakuan (B), galat (W), dan Total (T)
d. Uji wilks lambda 5%
e. Kesimpulan

Jawab:

a. Model linier

$$\underline{y}_{lj} = \underline{\mu} + \underline{\tau}_l + \underline{\varepsilon}_{lj} \; ; \; l = 1,2,3; \; j = 1,2,3,4,5$$

Keterangan:

y_{lj} : penilaian orang ke-j pada kelompok dengan metode pemberian informasi ke-l

μ : vector rataan umum

τ_l : pengaruh kelompok dengan metode pemberian informasi ke-l

ε_{lj} : pengaruh acak metode pemberian informasi ke-l dan orang ke-j

b. Vektor rataan

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 20{,}8 \\ 8{,}8 \\ 18 \end{pmatrix} \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 25{,}4 \\ 11{,}8 \\ 14{,}6 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 20{,}4 \\ 8{,}4 \\ 7{,}4 \end{pmatrix} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 22{,}2 \\ 9{,}6667 \\ 13{,}3333 \end{pmatrix}$$

c. matriks jumlah kuadrat dan hasil kali silang untuk perlakuan (B), galat (W), dan Total (T)

$$B = \sum_{l=1}^{3} n_l(\bar{X}_l - \bar{X})(\bar{X}_l - \bar{X})'$$

$$B = 5\begin{pmatrix} 20{,}8 - 22{,}2 \\ 8{,}8 - 9{,}6667 \\ 18 - 13{,}333 \end{pmatrix}(20{,}8 - 22{,}2 \quad 8{,}8 - 9{,}667 \quad 18 - 13{,}333)$$
$$+ 5\begin{pmatrix} 25{,}4 - 22{,}2 \\ 11{,}8 - 9{,}6667 \\ 14{,}6 - 13{,}333 \end{pmatrix}(25{,}4 - 22{,}2 \quad 11{,}8 - 9{,}6667 \quad 14{,}6 - 13{,}333)$$
$$+ 5\begin{pmatrix} 20{,}4 - 22{,}2 \\ 8{,}4 - 9{,}6667 \\ 7{,}4 - 13{,}333 \end{pmatrix}(20{,}4 - 22{,}2 \quad 8{,}4 - 9{,}6667 \quad 7{,}4 - 13{,}333)$$

$$B = \begin{pmatrix} 77{,}2 & 51{,}6 & 41 \\ 51{,}6 & 34{,}5333 & 30{,}8667 \\ 41 & 30{,}8667 & 292{,}9333 \end{pmatrix}$$

$$W = \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{11}(X_{lj} - \bar{X}_l)(X_{lj} - \bar{X}_l)'$$

$$W = \begin{pmatrix} 20 - 20{,}8 \\ 5 - 8{,}8 \\ 18 - 18 \end{pmatrix}(20 - 20{,}8 \quad 5 - 8{,}8 \quad 18 - 18)$$
$$+ \begin{pmatrix} 25 - 20{,}8 \\ 9 - 8{,}8 \\ 8 - 18 \end{pmatrix}(25 - 20{,}8 \quad 9 - 8{,}8 \quad 8 - 18) + \ldots$$
$$+ \begin{pmatrix} 21 - 20{,}4 \\ 10 - 8{,}4 \\ 7 - 7{,}4 \end{pmatrix}(21 - 20{,}4 \quad 10 - 8{,}4 \quad 7 - 7{,}4)$$
$$+ \begin{pmatrix} 17 - 20{,}4 \\ 9 - 8{,}4 \\ 1 - 7{,}4 \end{pmatrix}(17 - 20{,}4 \quad 9 - 8{,}4 \quad 1 - 7{,}4)$$

$$W = \begin{pmatrix} 195{,}2 & 6{,}4 & -15 \\ 6{,}4 & 120{,}8 & -7{,}2 \\ -15 & -7{,}2 & 444{,}4 \end{pmatrix}$$

T = W + B

$$T = \begin{pmatrix} 195{,}2 & 6{,}4 & -15 \\ 6{,}4 & 120{,}8 & -7{,}2 \\ -15 & -7{,}2 & 444{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 77{,}2 & 51{,}6 & 41 \\ 51{,}6 & 34{,}5333 & 30{,}8667 \\ 41 & 30{,}8667 & 292{,}9333 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 272{,}4 & 58 & 26 \\ 58 & 155{,}3333 & 23{,}6667 \\ 26 & 23{,}6667 & 737{,}3333 \end{pmatrix}$$

d. Uji Wilks lambda 5%

$$\Lambda^* = \frac{|W|}{|W+B|} = \frac{10424903{,}71}{28532047{,}6} = 0{,}3653$$

$$\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - p - 2}{p}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) = \left(\frac{15-3-2}{3}\right)\left(\frac{1-\sqrt{0{,}3653}}{\sqrt{0{,}3653}}\right) = 6{,}1073$$

$$F_{2p,2(\sum n_l - p - 2)}(0{,}05) = F_{6,10}(0{,}05) = 3{,}2171$$

e. Kesimpulan

Karena nilai $\left(\frac{\sum_{l=1}^{g} n_l - p - 2}{p}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda^*}}{\sqrt{\Lambda^*}}\right) = 6{,}1073 > F_{2p,2(\sum n_l - p - 2)}(0{,}05) = 3{,}2171$ maka tolak H0. Cukup bukti untuk menyatakan bahwa metode pemberian informasi dari setiap kelompok memberikan pengaruh yang nyata pada penilaian terhadap ketiga poin.

5. Diberikan data sebagai berikut. Terdapat tiga respon yaitu X1: tear resistance, X2: gloss dan X3: opacity dengan dua level factor dan diulang sebanyak 5 kali. Ujilah hipotesis apakah kedua factor berpengaruh terhadap respon?

TABLE 6.4 PLASTIC FILM DATA

x_1 = tear resistance, x_2 = gloss, and x_3 = opacity

		Factor 2: Amount of additive					
		Low (1.0%)			High (1.5%)		
		x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
Factor 1: Change in rate of extrusion	Low (−10)%	[6.5	9.5	4.4]	[6.9	9.1	5.7]
		[6.2	9.9	6.4]	[7.2	10.0	2.0]
		[5.8	9.6	3.0]	[6.9	9.9	3.9]
		[6.5	9.6	4.1]	[6.1	9.5	1.9]
		[6.5	9.2	0.8]	[6.3	9.4	5.7]
	High (10%)	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
		[6.7	9.1	2.8]	[7.1	9.2	8.4]
		[6.6	9.3	4.1]	[7.0	8.8	5.2]
		[7.2	8.3	3.8]	[7.2	9.7	6.9]
		[7.1	8.4	1.6]	[7.5	10.1	2.7]
		[6.8	8.5	3.4]	[7.6	9.2	1.9]

Source of variation	SSP	d.f.
Factor 1: change in rate of extrusion	$\begin{bmatrix} 1.7405 & -1.5045 & .8555 \\ & 1.3005 & -.7395 \\ & & .4205 \end{bmatrix}$	1
Factor 2: amount of additive	$\begin{bmatrix} .7605 & .6825 & 1.9305 \\ & .6125 & 1.7325 \\ & & 4.9005 \end{bmatrix}$	1
Interaction	$\begin{bmatrix} .0005 & .0165 & .0445 \\ & .5445 & 1.4685 \\ & & 3.9605 \end{bmatrix}$	1
Residual	$\begin{bmatrix} 1.7640 & .0200 & -3.0700 \\ & 2.6280 & -.5520 \\ & & 64.9240 \end{bmatrix}$	16
Total (corrected)	$\begin{bmatrix} 4.2655 & -.7855 & -.2395 \\ & 5.0855 & 1.9095 \\ & & 74.2055 \end{bmatrix}$	19

Uji interaksi

Dilakukan pengujian interaksi terlebih dahulu karna jika terdapat interaksi, maka hasil pengujian di factor 1 akan dipengaruhi factor 2.

To test for interaction, we compute

$$\Lambda^* = \frac{|\mathbf{SSP}_{res}|}{|\mathbf{SSP}_{int} + \mathbf{SSP}_{res}|} = \frac{275.7098}{354.7906} = .7771$$

For $(g-1)(b-1) = 1$,

$$F = \left(\frac{1-\Lambda^*}{\Lambda^*}\right)\frac{(gb(n-1)-p+1)/2}{(|(g-1)(b-1)-p|+1)/2}$$

has an exact F-distribution with $\nu_1 = |(g-1)(b-1)-p|+1$ and $\nu_2 = gb(n-1)-p+1$ d.f. (See [1].) For our example.

$$F = \left(\frac{1-.7771}{.7771}\right)\frac{(2(2)(4)-3+1)/2}{(|1(1)-3|+1)/2} = 1.34$$

$$\nu_1 = (|1(1)-3|+1) = 3$$

$$\nu_2 = (2(2)(4)-3+1) = 14$$

and $F_{3,14}(.05) = 3.34$. Since $F = 1.34 < F_{3,14}(.05) = 3.34$, we do not reject the hypothesis $H_0: \boldsymbol{\gamma}_{11} = \boldsymbol{\gamma}_{12} = \boldsymbol{\gamma}_{21} = \boldsymbol{\gamma}_{22} = \mathbf{0}$ (no interaction effects).

Uji Hipotesis Faktor 1 dan 2

To test for factor 1 and factor 2 effects (see page 317), we calculate

$$\Lambda_1^* = \frac{|\text{SSP}_{\text{res}}|}{|\text{SSP}_{\text{fac}\,1} + \text{SSP}_{\text{res}}|} = \frac{275.7098}{722.0212} = .3819$$

and

$$\Lambda_2^* = \frac{|\text{SSP}_{\text{res}}|}{|\text{SSP}_{\text{fac}\,2} + \text{SSP}_{\text{res}}|} = \frac{275.7098}{527.1347} = .5230$$

For both $g - 1 = 1$ and $b - 1 = 1$,

$$F_1 = \left(\frac{1 - \Lambda_1^*}{\Lambda_1^*}\right)\frac{(gb(n-1) - p + 1)/2}{(|(g-1) - p| + 1)/2}$$

and

$$F_2 = \left(\frac{1 - \Lambda_2^*}{\Lambda_2^*}\right)\frac{(gb(n-1) - p + 1)/2}{(|(b-1) - p| + 1)/2}$$

have F-distributions with degrees of freedom $\nu_1 = |(g-1) - p| + 1$, $\nu_2 = gb(n-1) - p + 1$ and $\nu_1 = |(b-1) - p| + 1$, $\nu_2 = gb(n-1) - p + 1$, respectively. (See [1].) In our case,

$$F_1 = \left(\frac{1 - .3819}{.3819}\right)\frac{(16 - 3 + 1)/2}{(|1 - 3| + 1)/2} = 7.55$$

$$F_2 = \left(\frac{1 - .5230}{.5230}\right)\frac{(16 - 3 + 1)/2}{(|1 - 3| + 1)/2} = 4.26$$

and

$$\nu_1 = |1 - 3| + 1 = 3 \qquad \nu_2 = (16 - 3 + 1) = 14$$

From before, $F_{3,14}(.05) = 3.34$. We have $F_1 = 7.55 > F_{3,14}(.05) = 3.34$, and therefore, we reject $H_0\colon \boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{0}$ (no factor 1 effects) at the 5% level. Similarly, $F_2 = 4.26 > F_{3,14}(.05) = 3.34$, and we reject $H_0\colon \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$ (no factor 2 effects) at the 5% level. We conclude that both the *change in rate of extrusion* and the *amount of additive* affect the responses, and they do so in an additive manner.