

ANALISIS PEUBAH GANDA

SEBARAN NORMAL GANDA

Dr. Ir. I Made Sumertajaya, M.Si



SEBARAN NORMAL GANDA



- Fungsi kepekatan normal ganda (*multivariate normal*) adalah generalisasi dari fungsi kepekatan *univariate* normal dengan $p \geq 2$ dimensi.
- Fungsi kepekatan dari peubah acak x yang menyebar normal dengan nilai tengah μ dan ragam σ^2 adalah :

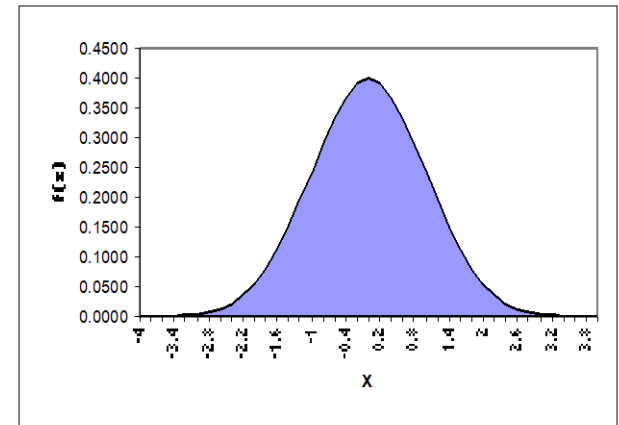
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-[(x-\mu)/\sigma]^2/2}$$

- dimana $-\infty < x < \infty$





- Plot dari fungsi di atas akan menghasilkan kurva berbentuk genta yang memiliki ciri-ciri sebagai berikut:
 - Simetrik terhadap nilai tengah (μ)
 - Mean, median, modus berada pada titik yang sama
 - $P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = 0.683$
 - $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = 0.954$



Chebyshev's Theorem

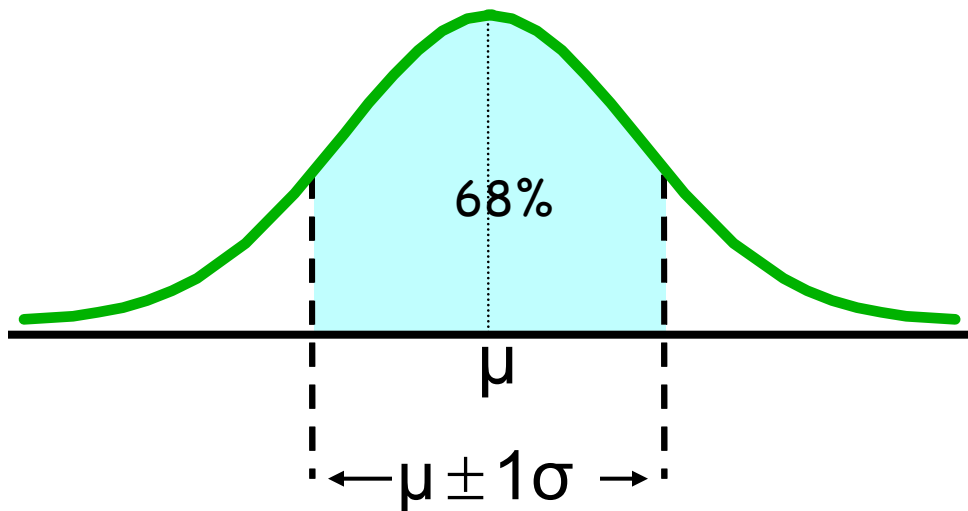
(continued)

- Regardless of how the data are distributed, at least $(1 - 1/k^2)$ of the values will fall within k standard deviations of the mean (for $k > 1$)
 - Examples:

At least	within
$(1 - 1/1^2) = 0\%$	$k=1 \quad (\mu \pm 1\sigma)$
$(1 - 1/2^2) = 75\%$	$k=2 \quad (\mu \pm 2\sigma)$
$(1 - 1/3^2) = 89\%$	$k=3 \quad (\mu \pm 3\sigma)$

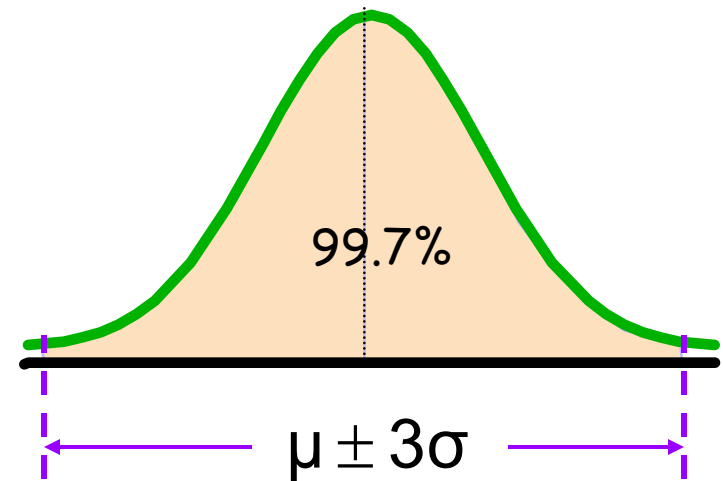
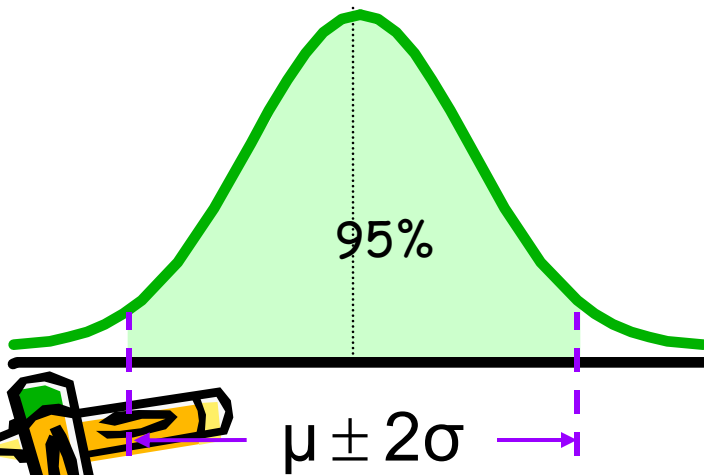
The Empirical Rule

- If the data distribution is bell-shaped, then the interval:
- $\mu \pm 1\sigma$ contains about 68% of the values in the population or the sample



The Empirical Rule

- $\mu \pm 2\sigma$ contains about 95% of the values in the population or the sample
- $\mu \pm 3\sigma$ contains about 99.7% of the values in the population or the sample



Fungsi Kepekatan Peluang Normal Ganda



- Fungsi kepekatan bersama dari p peubah acak yang menyebar normal dan saling bebas adalah :

$$f(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \sigma_1 \dots \sigma_p} \text{Exp} \left[-1/2 \sum_{i=1}^p \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \right]$$

- Bentuk $[(x_i - \mu_i)/\sigma_i]^2$ dari eksponen fungsi sebaran normal mengukur jarak kuadrat dari x_i ke μ_i dalam unit simpangan baku.
- Bentuk ini dapat digeneralisasikan untuk vektor \underline{x} dari pengamatan beberapa peubah sebagai :
 $(\underline{x} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu})$

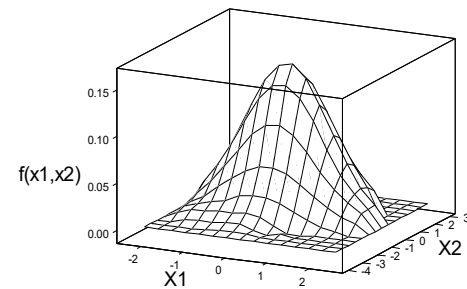




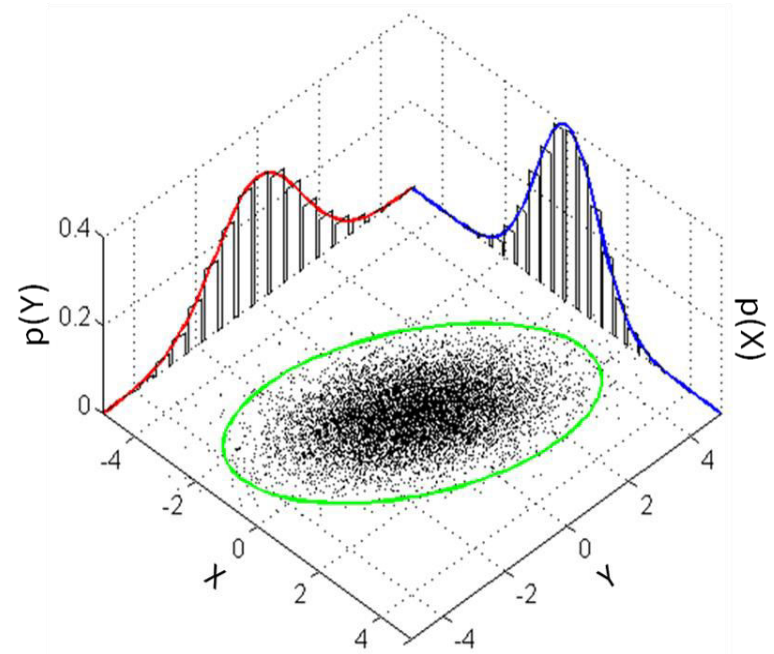
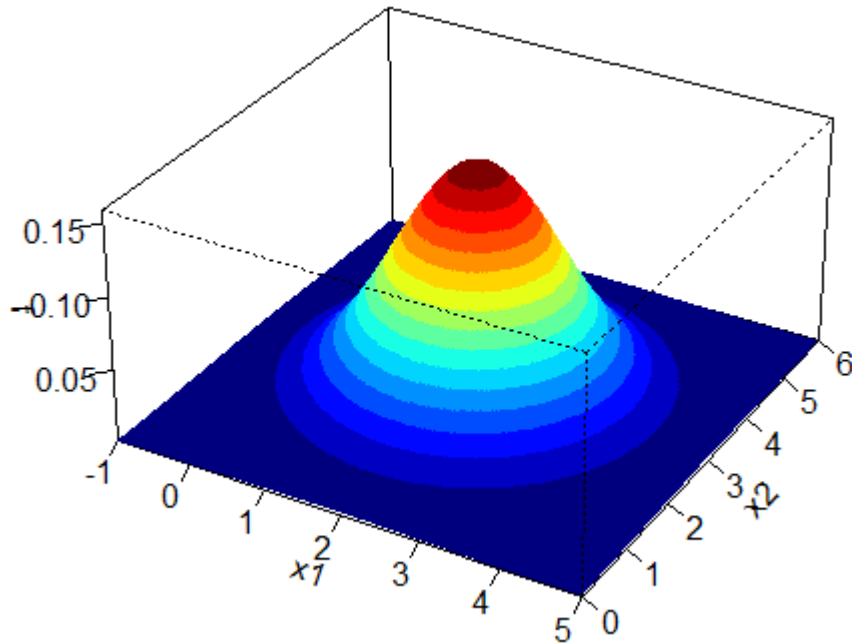
- Secara umum fungsi kepadatan peluang normal bersama untuk p peubah dapat ditulis sebagai berikut :

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \text{Exp}\left[-1/2(\underline{x} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu})\right]$$

- dimana $-\infty < x_i < \infty$, $i = 1, 2, \dots, p$.
- Fungsi kepadatan normal berdimensi p ini dapat ditulis sebagai $N_p(\mu, \Sigma)$ yang analog dengan kasus *univariate*.



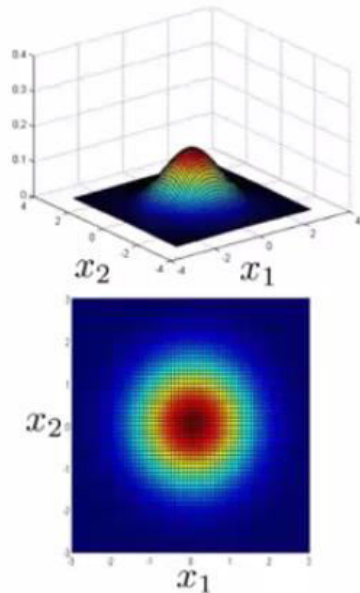
Countur Sebaran Normal Ganda



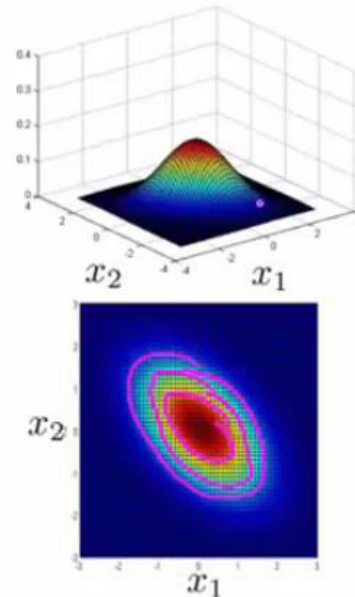
Berbagai Bentuk Countour

Multivariate Gaussian (Normal) examples

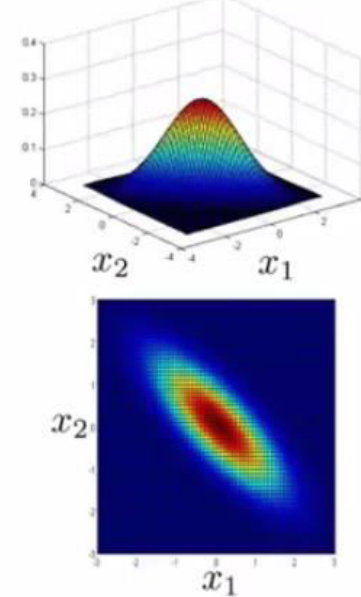
$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

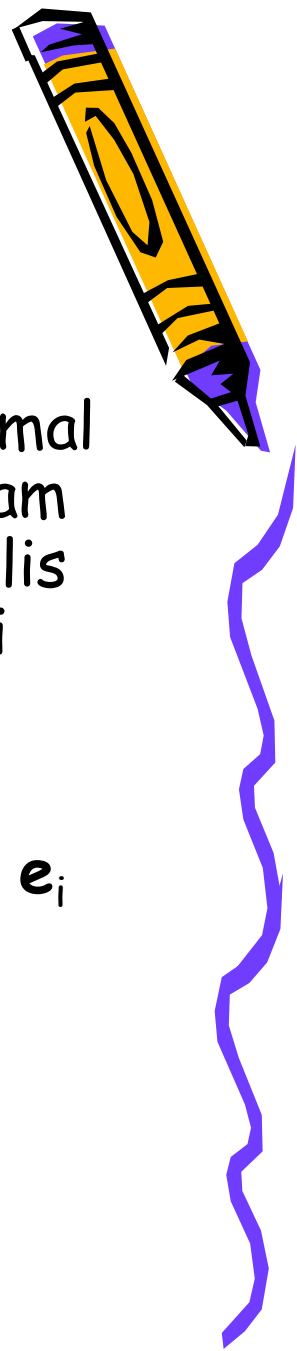


$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix}$$



Countur

Sebaran Normal Ganda



- Eksponen $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ dari kepekatan normal ganda memperlihatkan persamaan ellipsoid dalam ruang peubah berdimensi p jika bentuk ini ditulis dalam sebuah persamaan terhadap sebuah nilai konstanta positif c .

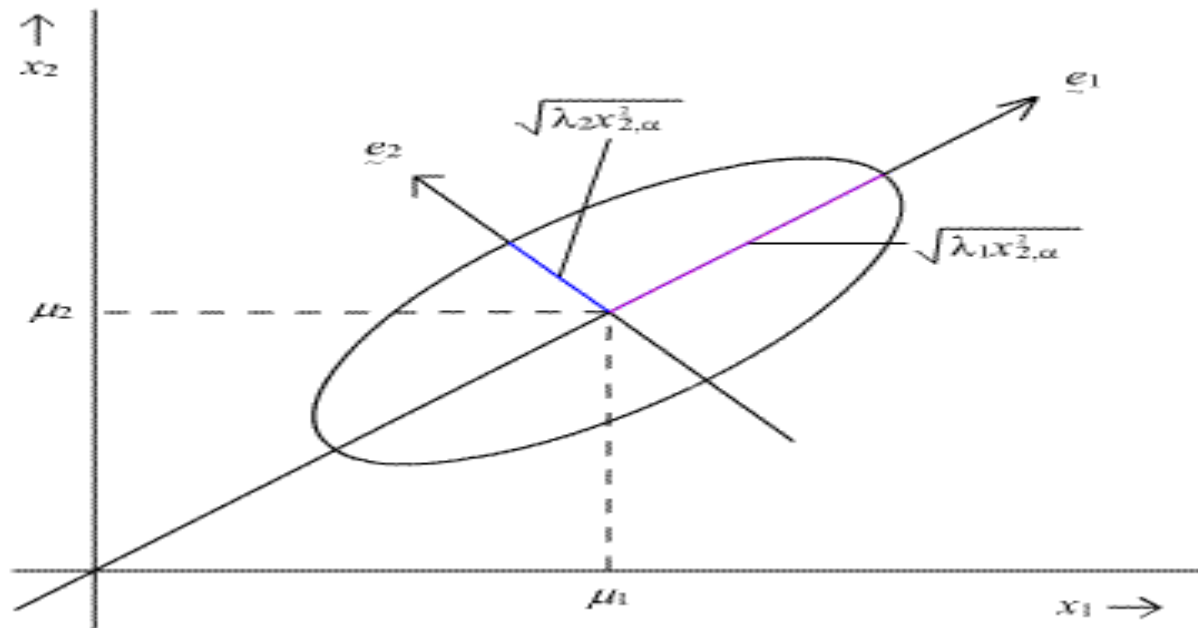
$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = c^2$$

- Dengan pusat ellips adalah $\boldsymbol{\mu}$ dan absis $\pm c \sqrt{\lambda_i} \mathbf{e}_i$ dimana,

$$\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$



Sketsa Persamaan Countour Sebaran Normal Ganda



- Misalkan untuk normal bivariat dengan parameter berikut:

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

- Mempunyai dua nilai eigen dari Σ

$$\lambda_1 = 3 + \sqrt{2} \quad \lambda_2 = 3 - \sqrt{2}$$

- Dua vektor eigen (yang sudah dinormalkan yang bersesuaian dengan masing-masing nilai eigen:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$



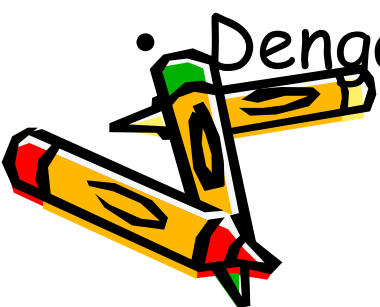
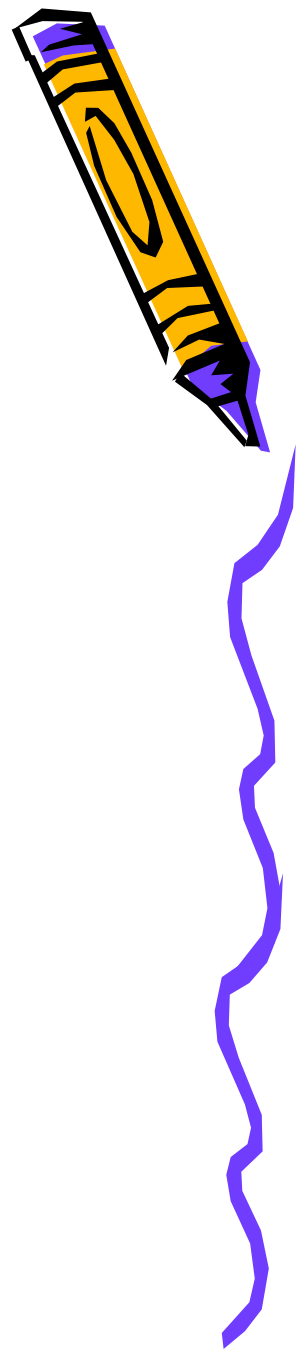
- Misalkan: $c^2 = \chi^2_2(0.05) = 5.9$

- Sumbu mayor dengan arah: $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

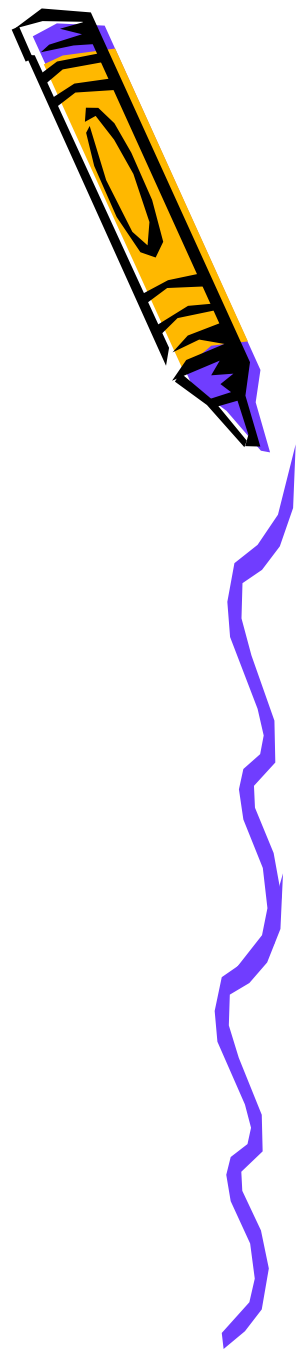
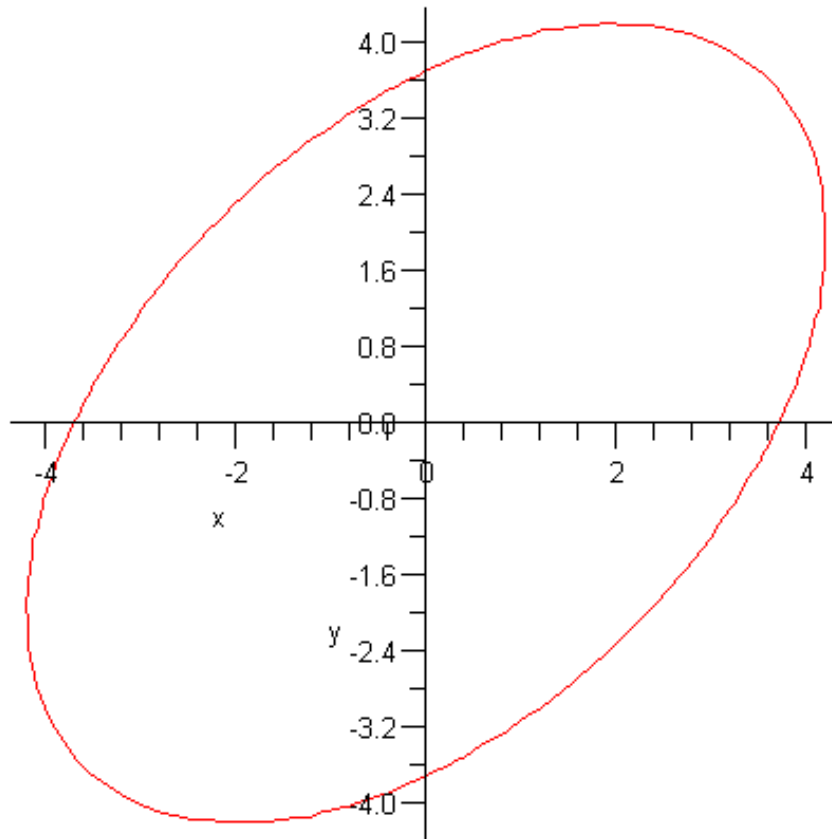
- Dengan panjang: $\pm c\sqrt{\lambda_1} = 2.42 \times \sqrt{3 + \sqrt{2}} = 5.1$

- Sumbu minor dengan arah: $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

- Dengan panjang: $\pm c\sqrt{\lambda_1} = 2.42 \times \sqrt{3 - \sqrt{2}} = 3.05$



Kontur bagi fungsi sebaran normal bivariat



Sifat-sifat Sebaran Normal Ganda



- Kombinasi linier dari semua komponen peubah x juga menyebar normal. Jika $\underline{X}_p \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$, maka kombinasi linear :

$$\underline{a}'\underline{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_p X_p \text{ menyebar } N(\underline{a}'\underline{\mu}, \underline{a}'\Sigma\underline{a})$$

- Jika $\underline{X}_p \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ maka semua anak gugus dari X juga menyebar normal
- Jika \underline{X}_1 dan \underline{X}_2 saling bebas, dan menyebar $N_{q_1}(\underline{\mu}_1, \Sigma_{11})$ dan $N_{q_2}(\underline{\mu}_2, \Sigma_{22})$ maka sebaran bersyarat $[\underline{X}_1/\underline{X}_2]$ adalah normal ganda :

$$N_{q_1+q_2}\left(\begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{bmatrix}\right)$$





- Jika $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ dengan $|\Sigma| \neq 0$ maka:
 - $(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) \sim \chi_{(p)}^2$ dimana χ_p^2 menyatakan sebaran khi kuadrat dengan derajat bebas p .
 - Selang kepercayaan ganda (*multivariate confidence interval*) $(1-\alpha)100\% \rightarrow$
$$(\underline{x} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) \leq \chi_{(\alpha, p)}^2$$



Contoh terapan sifat-sifat sebaran normal multivariat

Contoh 1:

- Untuk

$$\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$$

- Tentukan sebaran dari \mathbf{AX} dengan: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{pmatrix}$$



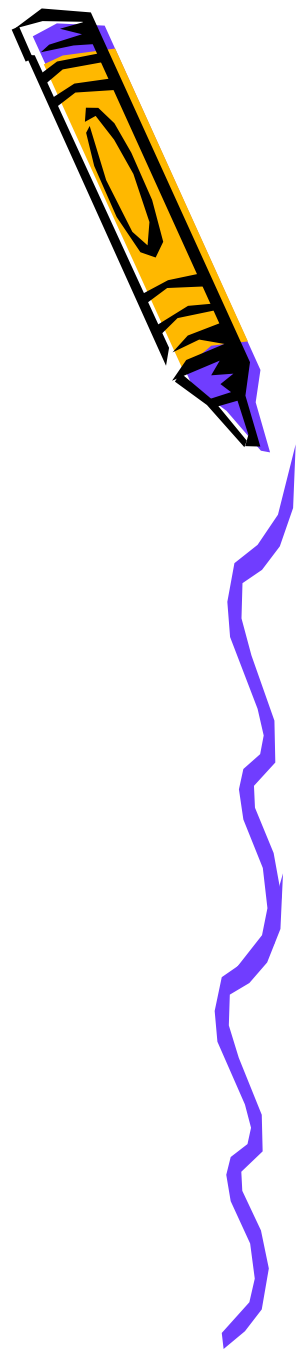
Dari sifat sebaran normal multivariat:

- Jika \mathbf{X} menyebar $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.
- Maka kombinasi linier dari \mathbf{X} :

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} a_{11}X_1 + \cdots + a_{1p}X_p \\ a_{21}X_1 + \cdots + a_{2p}X_p \\ \vdots \\ a_{q1}X_1 + \cdots + a_{qp}X_p \end{bmatrix} \sim N_q(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T)$$

- Nilai tengah kombinasi linier:

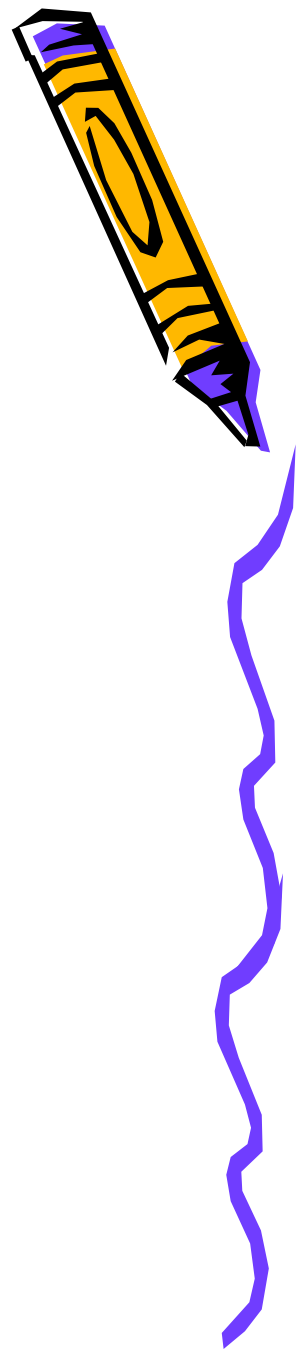
$$\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \end{pmatrix}$$



- Ragam peragam kombinasi linier:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^t &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22} & \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{22} - \sigma_{13} \\ \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{22} - \sigma_{13} & \sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{AX} \sim N_3(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T)$$



Contoh 2:

• Jika: $\mathbf{x} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Sigma = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Seperti apa sebaran marjinal bagi X_1 ?
- Sifat yang sama berlaku seperti pada sebaran normal bivariat, masing-masing variabel mempunyai sebaran normal univariat.

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X_1 \sim N_1(0, 7)$$



- Seperti apa sebaran marginal dari

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

- Ingat sifat sebaran dari variabel hasil partisi.

$$\mathbf{x}^{(1)} \sim N(\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \Sigma_{11}) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{11} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$



Contoh 3:

- Diberikan $\mathbf{x} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Apakah X_1 dan X_2 saling bebas?

- Dapat dilihat dari σ_{12} , $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Karena $\sigma_{12}=1 \neq 0$, maka X_1 dan X_2 tidak saling bebas?



- Apakah (X_1, X_2) dan X_3 saling bebas?
- Dapat dikerjakan dengan melakukan partisi.

$$\mathbf{x} = \left(\begin{array}{c|c} X_1 & \\ \hline X_2 & \\ \hline X_3 & \end{array} \right) \quad \Sigma = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_{12} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array} \right)$$

- Kovarians dari (X_1, X_2) dan X_3 adalah vektor nol $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}^T = 0$
- Sehingga (X_1, X_2) dan X_3 adalah saling bebas.



Contoh 4:

• Jika: $\mathbf{x} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$

- Seperti apa sebaran bagi $X_1, X_2 \mid X_3=1$?
- Dari sifat sebaran normal multivariat, berdasarkan partisi:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \text{---} \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \text{---} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \text{---} \\ \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$N_2(\boldsymbol{\eta}, \Sigma_{11 \cdot 2})$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu}^{(1)} + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})$$

$$\Sigma_{11 \cdot 2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$$



$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = 1$$

$$\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}^{(2)} = -2$$

$$\Sigma_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{12} = \Sigma'_{21} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{22} = 1$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu}^{(1)} + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} (1)(\mathbf{x}^{(2)} - (-2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix} + \mathbf{x}^{(2)} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 4.4 \end{pmatrix} + \mathbf{x}^{(2)} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

pada $\mathbf{x}^{(2)} = 1$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 4.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 4.6 \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(2)} = 1$$

$$\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}^{(2)} = -2 \quad \Sigma_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad \Sigma_{12} = \Sigma'_{21} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad \Sigma_{22} = 1$$

$$\Sigma_{11 \bullet 2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} (1) \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.16 & 0.08 \\ 0.08 & 0.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.84 & 0.42 \\ 0.42 & 0.96 \end{pmatrix}$$

Sebaran bagi $X_1, X_2 \mid X_3=1$: $N_2\left(\begin{pmatrix} 2.2 \\ 4.6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.84 & 0.42 \\ 0.42 & 0.96 \end{pmatrix}\right)$

Contoh 5:

- Jika: $\mathbf{x} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$
- Seperti apa sebaran bagi $(2X_1 + X_2, X_1 + 2X_2 + 3X_3)$?
- Dapat dibentuk matriks \mathbf{B} yang mendefinisikan kombinasi linier dari peubah-peubah tsb.

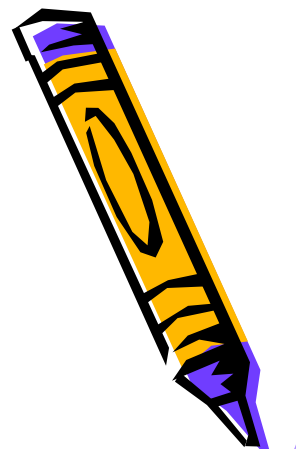
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BX} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2X_1 + X_2 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 \end{pmatrix} \sim N_2(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^T)$$

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9.5 \\ 9.5 & 20.8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{X} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 9.5 \\ 9.5 & 20.8 \end{pmatrix} \right)$$



Fungsi Likelihood Normal Multivariat

- Fungsi kepadatan normal multivariat: $N_p(\mu, \Sigma)$

$$f(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right\}$$

$$-\infty < x_i < \infty; \quad i = 1, 2, \dots, p$$

- Untuk sampel acak (multivariat) $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$
- Fungsi likelihood bagi normal multivariat:

$$L(\mu, \Sigma) = \prod_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i | \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}np} |\Sigma|^{\frac{1}{2}n}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \mu) \right)$$

- Atau dapat digunakan fungsi ln likelihood:

$$l(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \ln L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{1}{2} n p \ln(2\pi) - \frac{1}{2} n \ln |\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})$$

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})$$

$$= \text{tr} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \underbrace{\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})'}_A + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})$$

$$l(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{1}{2} n p \ln(2\pi) - \frac{1}{2} n \ln |\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} \text{tr} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} A - \frac{n}{2} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})$$

- Penduga bagi μ dan Σ dipilih sedemikian sehingga fungsi likelihood tsb maksimum.
 - Memilih penduga μ dan Σ yang paling mungkin bagi sampel acak.
- Diperoleh dari solusi ketika turunan parsial fungsi (ln) likelihood terhadap μ dan Σ sama dengan nol

$$l(\mu, \Sigma) = -\frac{1}{2} n p \ln(2\pi) - \frac{1}{2} n \ln|\Sigma| - \frac{1}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} A - \frac{n}{2} (\bar{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} l(\mu, \Sigma) = n \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu) = 0 \quad \Leftrightarrow \hat{\mu} = \bar{x}$$

- Penduga Σ diperoleh dari turunan parsial fungsi (ln) likelihood terhadap Σ : $\hat{\Sigma} = ((n-1)/n)S.$

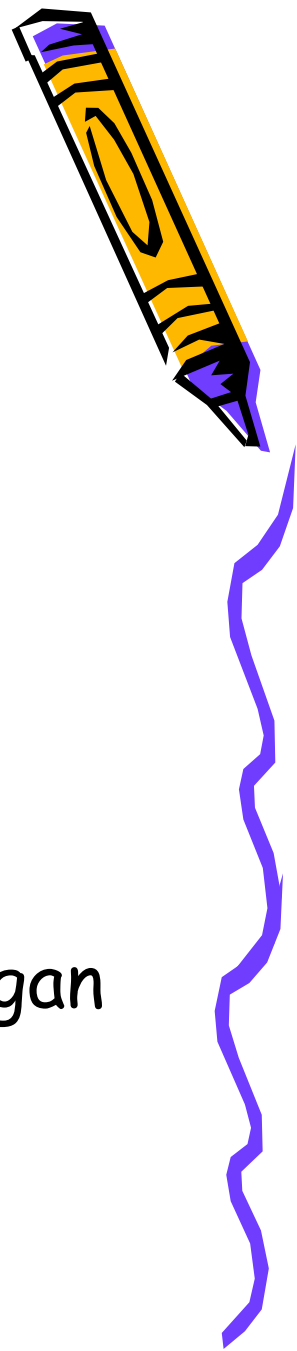
Sebaran Penarikan Sampel Penduga Parameter

1. Vektor rata-rata sampel juga mempunyai sebaran normal p variat

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{pmatrix} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n} \Sigma)$$

2. Sebaran bagi $(n-1)\mathbf{S}$ adalah Wishart dengan derajat bebas $(n-1)$

$$(n-1)\mathbf{S} \sim W(\Sigma, n-1)$$



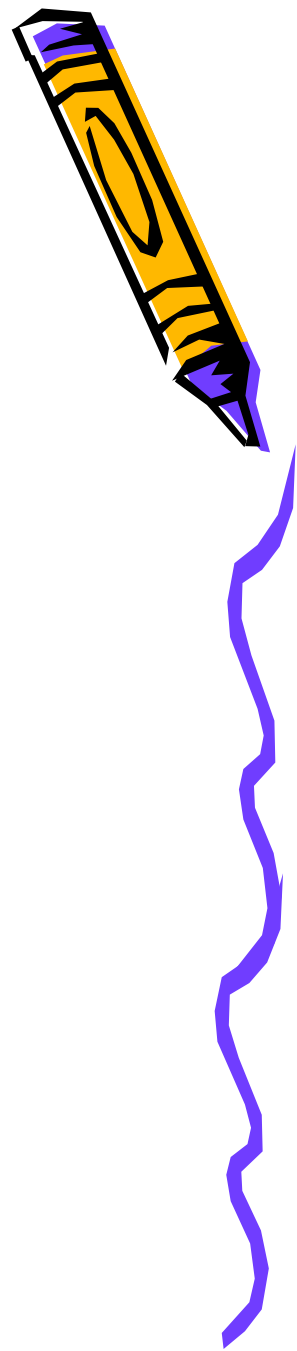
3. Sebaran Wishart adalah sebaran bagi

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{z}_j \mathbf{z}_j^T \sim W(\Sigma, m) \quad \mathbf{z}_j \sim N_p(0, \Sigma)$$

4. $\bar{\mathbf{X}}$ dan \mathbf{S} saling bebas

5. Pada sebaran Wishart, berlaku:

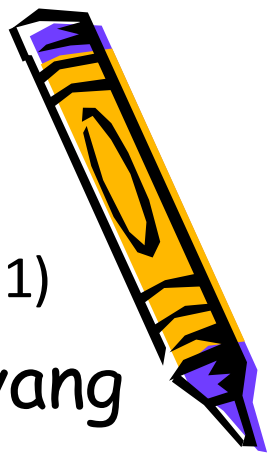
$$(n-1)\mathbf{S} \sim W(\Sigma, n-1) \rightarrow (n-1)\mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{C}' \sim W(\mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}', n-1)$$



$$\mathbf{A}_1 = (n_1 - 1)\mathbf{S}_1 \sim W(\Sigma, n - 1) \quad \mathbf{A}_2 = (n_2 - 1)\mathbf{S}_2 \sim W(\Sigma, n - 1)$$

- Dengan \mathbf{S}_1 dan \mathbf{S}_2 adalah dua penduga Σ yang saling bebas, maka:

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = (n_1 - 1)\mathbf{S}_1 + (n_2 - 1)\mathbf{S}_2 \sim W(\Sigma, n_1 + n_2 - 2)$$



Ketika Sampel Berukuran Besar

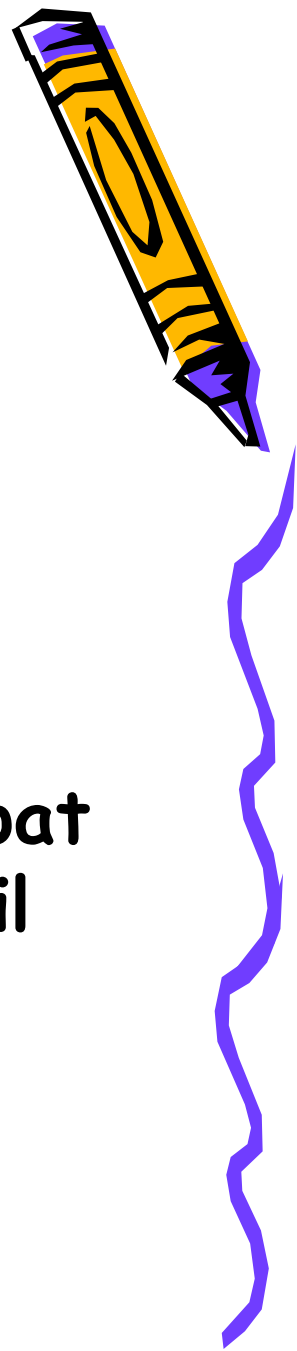
- Untuk sampel acak (multivariat) x_1, \dots, x_n
- Ketika sampel berukuran besar $\rightarrow (n-p)$ besar, maka:

$\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})$ Mendekati sebaran $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$

dan: $n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_p^2$



Eksplorasi Sebaran Normal Ganda

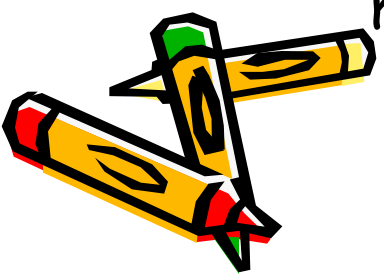


- Untuk mengevaluasi apakah data yang dimiliki menyebar normal ganda dapat ditelusuri secara eksplorasi
- Seperti halnya untuk kasus *univariate* penelusuran sebaran normal ganda dapat juga memanfaatkan plot quantil-quantil
→ quantil khi-kuadrat



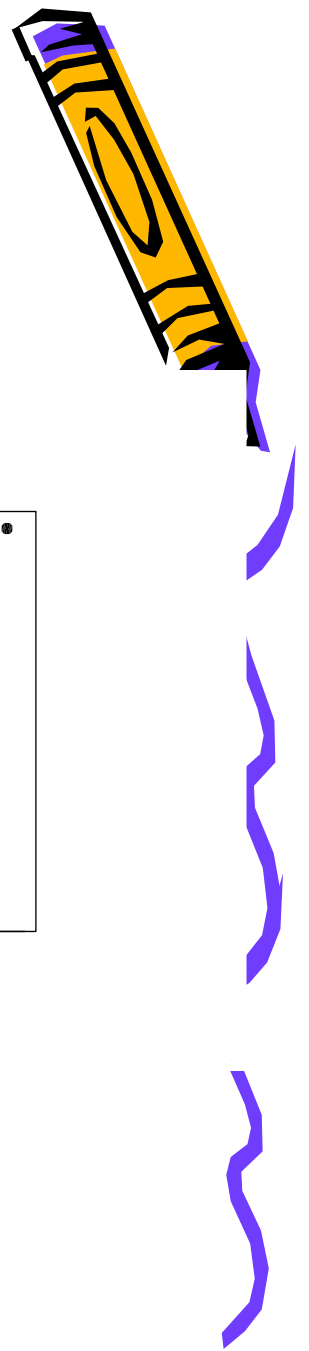


Beberapa tahapan yang harus dilakukan dalam menyusun Plot Kuantil χ^2 adalah sebagai berikut:

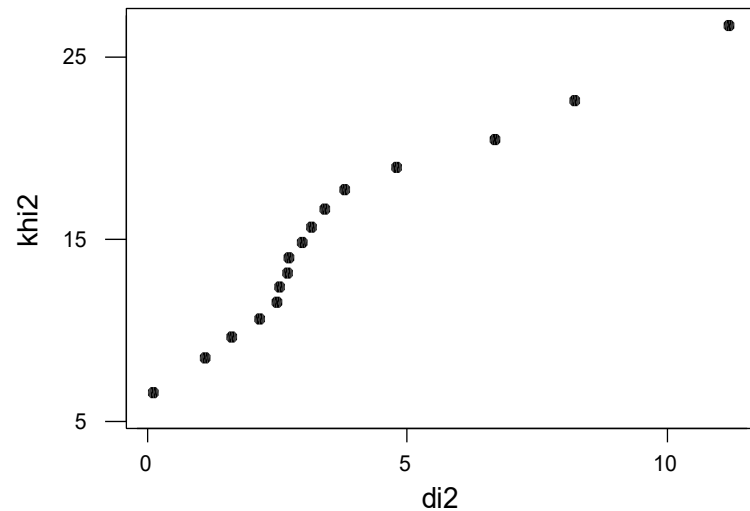
1. Hitung: $d_i^2 = (\underline{x}_i - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{x}_i - \underline{\mu})$
 2. Beri peringkat k untuk nilai d_i^2
 3. Carilah nilai khi-kuadrat dari nilai $(k-1/2)/n$ dengan derajat bebas p, misal $\chi_p^2 \left(\frac{k - 1/2}{n} \right)$
 4. Buat plot d_i^2 dengan $\chi_p^2 \left(\frac{k - 1/2}{n} \right)$
 5. Jika plot tersebut membentuk garis lurus maka data tersebut menyebar normal ganda p.
- 

Contoh kasus

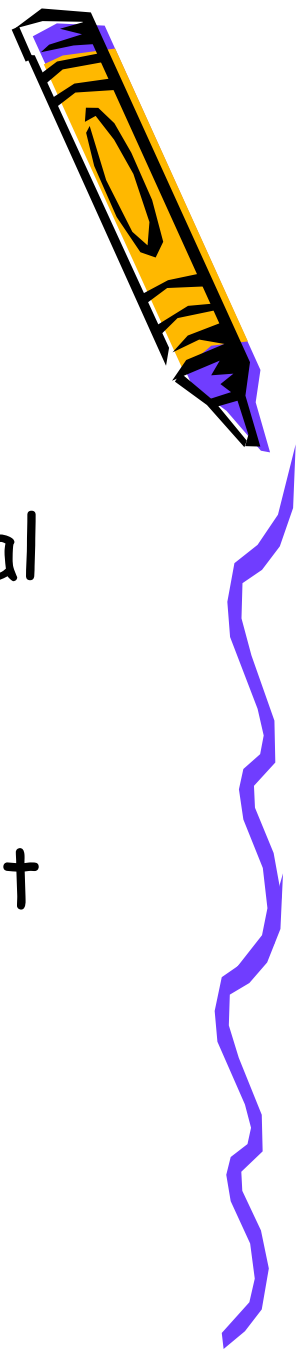
Obs	x1	x2	x3	x4	d_i^2	k	p(k)	$\chi_{(4)}^2$
1	1.29	0.98	0.99	1.05	8.25	15	0.91	22.57
2	1.28	1.08	1.06	1.08	6.71	14	0.84	20.42
3	0.79	1.06	1.01	1.05	11.22	16	0.97	26.70
4	0.80	1.01	1.01	1.05	2.55	6	0.34	12.30
5	1.39	1.03	1.03	1.04	2.19	4	0.22	10.59
6	0.89	0.97	0.99	1.02	2.72	7	0.41	13.11
7	1.40	1.06	1.05	1.06	2.74	8	0.47	13.92
8	0.72	1.00	1.02	1.03	3.81	12	0.72	17.65
9	1.03	1.00	1.00	1.01	1.13	2	0.09	8.41
10	0.69	0.97	0.99	1.01	3.00	9	0.53	14.76
11	1.29	1.05	1.03	1.04	1.64	3	0.16	9.61
12	1.17	1.00	1.00	1.01	3.43	11	0.66	16.59
13	0.82	1.00	1.01	1.01	2.50	5	0.28	11.47
14	1.23	1.05	1.03	1.02	3.17	10	0.59	15.64
15	1.09	1.02	1.02	1.03	0.13	1	0.03	6.56
16	1.00	1.04	1.05	1.03	4.82	13	0.78	18.89



- Korelasi antara d_i^2 dengan kuantil khi-kuadrat adalah 0.941
- Bandingkan dengan tabel, jika lebih besar dari tabel berarti normal ganda



Penanganan Masalah



- Jika data tidak normal maka dapat didekati dengan transformasi, misal transformasi Box-Cox
- Lakukan eksplorasi pengamatan-pengamatan ekstrem, buat box-plot untuk data d_i^2 (aturan main sama seperti kasus univariate)



Terima Kasih

