

ANALISIS PEUBAH GANDA (MULTIVARIATE ANALYSIS)

PENGENALAN MATRIKS

DEPARTEMEN STATISTIKA DR. IR. I MADE SUMERTAJAYA, MSI Definisi Matriks
Susunan angka-angka di dalam kotak
yang dibagi ke dalam baris dan kolom.
Misalkan terdiri dari n baris dan p kolom,
maka matriks tersebut berdimensi n x p.
contoh :

➤ Matriks Putaran

Diperoleh dengan cara menukar baris dan kolomnya, dinotasikan dengan A'.

contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks Simetrik

Jika A = A' maka A adalah matriks simetrik

Matriks Diagonal Jika matriks n x n yang semua unsur nondiagonalnya bernilai nol, disebut matriks diagonal.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- Matriks Khusus
 - matriks identitas
 - matriks nol
 - matriks segitiga

Kebebasan Linier
Sekumpulan vektor kolom atau baris tak nol dikatakan bebas linier jika tidak ada satupun yang bisa dituliskan sebagai kombinasi linier dari vektor lainnya.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

Pangkat Matriks Banyaknya baris atau kolom pada matriks itu yang bersifat bebas linier. pada matriks di atas berpangkat r(A)=2

- Matriks Singular dan Nonsingular Matriks A n x n dikatakan non singular jika semua baris atau kolomnya saling bebas linier.
- ➤ Kebalikan Matriks
 Untuk matriks persegi A, jika berlaku
 AB = BA= I, maka B adalah matriks
 kebalikan dari A, dinotasikan A⁻¹.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{9}{23} & -\frac{1}{23} \end{bmatrix}$$

Normal Vektor Euclidian
Sebuah vektor <u>a</u> berukuran n x 1 memiliki panjang yang didefinisikan sebagai :

$$\sqrt{\underline{a'a}}$$

Dan vektor normal dari $\underline{a} = a/\sqrt{\underline{a'a}}$ memiliki norma $\sqrt{2^2+1^2+2^2} = 3$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
 $\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\underline{b} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Jarak Euclid antar Dua Vektor Jika dua buah vektor a dan b berukuran n x 1 maka jarak euclid:

$$d(\underline{a},\underline{b}) = \sqrt{(\underline{a} - \underline{b})'(\underline{a} - \underline{b})}$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}
\underline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$d(\underline{a}, \underline{b}) = \sqrt{(5-6)^2 + (3-1)^2 + (2-4)^2} = 3$$

Vektor dan Matriks Ortogonal Dua buah vektor berukuran n x 1 dikatakan ortogonal satu sama lain jika <u>a'b</u>=0.

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sebuah matriks A berukuran n x n adalah matriks ortogonal jika A'A=AA'=I.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Akar Ciri dan Vektor Ciri
Untuk matriks A berukuran n x n
maka pasangan-pasangan $(\lambda_1, x_1), ..., (\lambda_n, x_n)$ dikatakan sebagai
pasangan akar ciri dan vektor ciri
yang ortonormal jika berlaku:

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1$$
:

$$Ax_n = \lambda_n x_n$$

Atau memenuhi det(A – λI)=0

Penguraian Spektral dari Sebuah Matriks Simetrik $A=P\Lambda P'$ dengan A adalah matriks simetrik $n \times n$, P adalah suatu matriks ortogonal dan Λ adalah matriks diagonal. $P=(x_1|x_2|...|x_n)$ dan $\Lambda=diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$

- > Determinan Matriks yaitu perkalian dari seluruh akar ciri dari matriks persegi n x n A, $|A| = \lambda_1 x x \lambda_n$
- Teras Matriks teras dari matriks A n x n, tr(A) adalah penjumlahan semua akar cirinya. $tr(A) = \lambda_1 + + \lambda_{n_i} \text{ yang sebanding dengan jumlah dari semua unsur diagonal utamanya.}$

Bentuk Kuadratik

Misal A adalah matrik berukuran n x n dan x adalah vektor peubah berukuran n x 1

$$\max_{x'Ax} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{i} x_{j}$$

$$= a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \dots + (a_{n-1,n} + a_{n,n-1})x_{n-1}x_n$$

Bentuk itu adalah bentuk kuadratik dari x.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$$

maka

$$x'Ax = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

```
Matriks Definit dan Semidefinit Positif
 Matriks simetrik berukuran n x n bersifat:
  -definit positif jika
  x'Ax > 0 untuk sembarang vektor x \neq 0
 -semidefinit positif jika
  x'Ax \ge 0 untuk sembarang vektor x \ne 0
```

Akar Kuadratik Matrik Semidefinit Positif

A=matrik semidefinit positif, diperoleh matriks \(\Delta \) atas U sehingga (penguraian Cholesky) A=U'UAkar kuadrat dari matrik simetrik: $A = P \wedge P' = (P \wedge 1/2 P')(P \wedge 1/2 P') = A^{1/2} A^{1/2}$ dimana P matrik ortogonal dan A matriks diagonal.

> Perkalian Kronecker Perkalian Kronecker C denganD dinotasikan

 $C \otimes D$

Yaitu dengan mengalikan setiap unsur matriks C dengan matriks D, dan kemudian membuat matriks gabungannya.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Contoh:
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad C \otimes D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 9 & 12 \\ 7 & 0 & 21 & 28 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 12 & 3 & -3 \\ 0 & 28 & 7 & -7 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -9 & 6 \\ 7 & 7 & -21 & 14 \end{bmatrix}$$



MATRIKS DALAM MULTIVARIATE

Untuk banyaknya pengamatan (observasi) sebesar n dan banyaknya peubah sebesar p, matriks datanya dituliskan

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} X'1$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{1p} & s_{2p} & \dots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{n-1} X' \left(I - \frac{1}{n} 11' \right) X$$

$$D_{(p \times p)}^{-1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{s_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \sqrt{s_{pp}} \end{bmatrix}$$

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_{1} \\ \overline{x}_{2} \\ \vdots \\ \overline{x}_{p} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D_{(p \times p)}^{-1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s_{11}}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{s_{22}}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{s_{pp}}} \end{bmatrix}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n} X' \mathbf{1}$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{1p} & s_{2p} & \dots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{s_{11}}{\sqrt{s_{11}}} & \frac{s_{12}}{\sqrt{s_{11}}} & \dots & \frac{s_{1p}}{\sqrt{s_{11}}} & \frac{1}{\sqrt{s_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{s_{1p}}{\sqrt{s_{11}}} & \frac{s_{2p}}{\sqrt{s_{22}}} & \dots & \frac{s_{pp}}{\sqrt{s_{pp}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{1p} & r_{2p} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

 $R = D^{-1/2}SD^{-1/2}$ atau

 $S = D^{1/2}RD^{1/2}$

Jika vektor <u>a</u> dikalikan terhadap X sehingga membentuk kombinasi linier dari X, maka

Rataan ($\underline{a}'X$) = $\underline{a}'\overline{x}$

Ragam ($\underline{a}'X$) = $\underline{a}'S\underline{a}$

Ragam ($\underline{a}'X$ dan $\underline{b'X}$) = $\underline{a'}S\underline{b}$

Partisi Matriks

$$\overline{X}_{(px1)} = \begin{bmatrix} \overline{X}_{1} \\ \vdots \\ \overline{X}_{q} \\ -\overline{X}_{q+1} \\ \vdots \\ \overline{X}_{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{X}^{(1)} \\ -\overline{X}^{(2)} \end{bmatrix} \quad S_{n} = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1q} & \cdots & S_{1q+1} & \cdots & S_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{q1} & \cdots & S_{qq} & \cdots & S_{q,q+1} & \cdots & S_{qp} \\ -\overline{X}_{q+1,1} & \cdots & S_{q+1,q} & \cdots & S_{q+1,p+1} & \cdots & S_{q+1,p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{p1} & \cdots & S_{pq} & \cdots & S_{p,q+1} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix}$$

$$q \quad p-q$$

$$= q \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{12} \\ -\cdots & \cdots & \cdots & S_{pq} \end{bmatrix}$$

$$q \quad p-q$$

$$= q \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{12} \\ -\cdots & \cdots & \cdots & S_{pq} \end{bmatrix}$$

TERIMAKASIH