Analisis Profil (Profile Analysis)

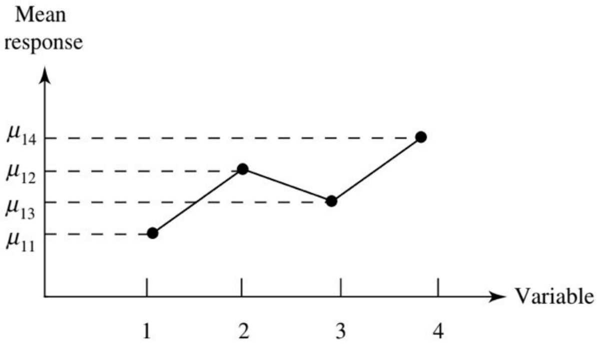
Dhea Dewanti & Nur Khamidah

Analisis Profil

- Sebuah metode dalam statistika multivariat yang menganalisis rangkaian perlakuan (sebanyak *p*) yang dikenakan pada dua populasi/grup/kelompok atau lebih.
- Analisis profil merupakan perluasan dari pengukuran MANOVA yang berulang.
- Tujuannya untuk mengetahui pengaruh perlakuan yang satu dibandingkan dengan yang lain pada setiap populasi. Populasi yang berbeda-beda bisa berupa waktu, tempat, grup, atau lainnya.
- Beberapa asumsi yang mendasari:
    - Semua respon diukur **dalam unit/satuan/skala** yang sama agar dapat dijumlah/dibandingkan
    - Antar respon perlakuan pada kelompok/populasi yang berbeda saling bebas
    - Galat menyebar normal dengan rataan 0 dan simpangan baku σ.

Analisis Profil

- Beberapa contoh kasus yang dapat dilakukan analisis profil:
  - X1, X2, …, X6 adalah hasil pengukuran detak jantung seseorang sebanyak 6 kali selama 24 jam
  - X1, X2, …, X8 adalah total volume susu yang dihasilkan seekor sapi pada laktasi yang ke 1, 2, .., hingga 8 minggu
  - Dan lain-lain
- Tiga hipotesis yang diuji:
  - Uji hipotesis kesejajaran (*parallel test*) -> H_{01}
  - Uji hipotesis keberhimpitan (*coincident test*) -> H_{02}
  - Uji hipotesis kesamaan (*level test*) -> H_{03}



Uji Hipotesis Analisis Profil

- Notasi analisis profil dalam persamaan matriks adalah sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ \cdots \\ y_{1n_1} \\ y_{21} \\ \cdots \\ y_{2n_2} \\ \cdots \\ y_{i1} \\ \cdots \\ y_{in_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1p} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{i1} & \mu_{i2} & \cdots & \mu_{ip} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{11} \\ \cdots \\ e_{1n_1} \\ e_{21} \\ \cdots \\ e_{2n_2} \\ \cdots \\ e_{i1} \\ \cdots \\ e_{in_i} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}_{N\times p} = \boldsymbol{X}_{N\times I}\boldsymbol{\beta}_{I\times p} + \boldsymbol{\varepsilon}_{N\times p}$$

X : matriks rancangan

β : matriks parameter

ε : matriks galat

p : banyak peubah tak bebas/respon

I : banyak perlakuan (populasi)

n_i : banyak pengamatan pada perlakuan ke-*i*

N : banyak total pengamatan

Uji Hipotesis Analisis Profil

Menurut Morisson (1991) analisis profil merupakan suatu bagian dari pengujian hipotesis terhadap nilai tengah dari peubah ganda (*multivariate*) dengan menggunakan prinsip grafik.

Tetapi hanya dengan melihat grafik saja tidaklah cukup, kita juga perlu untuk mengetahui seberapa besar arti kesejajaran (kemiripan) dari populasi itu. Untuk itulah diperlukan serangkaian uji-uji yang berkaitan dengan hipotesis itu.

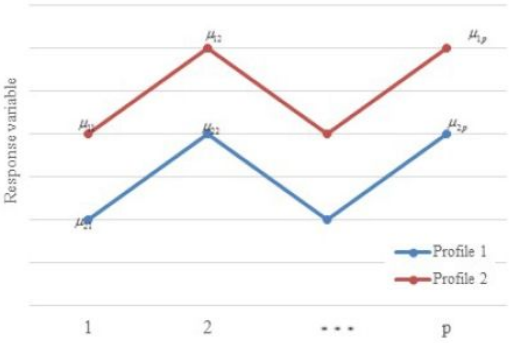


Figure 2: Illustration of a parallel profile analysis plot

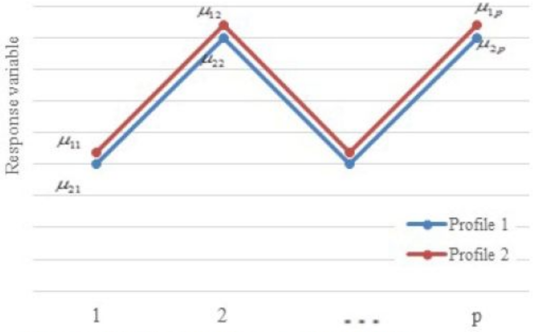


Figure 3: Illustration of a same level profile analysis plot.

Uji Hipotesis Kesejajaran (*Parallel Test*)

Hipotesis kesejajaran berkaitan dengan interaksi/pengaruh antar kelompok perlakuan. Jika sejajar (H0 diterima), maka interaksi/pengaruh antar perlakuan tidak ada.

$$H_{01}: \mu_{1i} - \mu_{1i-1} = \mu_{2i} - \mu_{2i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, p,$$

Atau bentuk umumnya: $\boxed{H_{01}: \mathbf{C}\boldsymbol{\mu}_1 = \mathbf{C}\boldsymbol{\mu}_2}$

Di mana **C** adalah matriks konstanta berikut:

$$\underset{((p-1)\times p)}{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Uji Hipotesis Kesejajaran (*Parallel Test*) 2 Populasi

Jika kita mempunyai 2 populasi berukuran n_1 dan n_2, observasi pada masing-masing populasi dapat dibentuk dengan:

$$\mathbf{C}\mathbf{x}_{1j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n_1$$

$$\mathbf{C}\mathbf{x}_{2j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n_2$$

Dan pengujiannya dapat dilakukan dengan:

$$T^2 = (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)'\mathbf{C}'\left[\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\mathbf{C}\mathbf{S}_{\text{pooled}}\mathbf{C}'\right]^{-1}\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) > c^2$$

S$_{\text{pooled}}$ adalah matriks ragam-peragam gabungan dari kedua populasi

Di mana:

$$c^2 = \frac{(n_1 + n_2 - 2)(p - 1)}{n_1 + n_2 - p} F_{p-1, n_1+n_2-p}(\alpha)$$

Tolak H01 ketika nilai $T^2 > c^2$

Uji Hipotesis Keberhimpitan (*Coincident Test*)

Jika profil dikatakan sejajar/*parallel* (H01 diterima), maka dapat diketahui bahwa $\mu_{1i} > \mu_{2i}$ untuk semua *i* atau sebaliknya. Dalam kondisi semacam ini, profil dikatakan **berhimpit** hanya jika total rataan

$$\mu_{11} + \mu_{12} + \cdots + \mu_{1p} = \mathbf{1}'\boldsymbol{\mu}_1$$

dan

$$\mu_{21} + \mu_{22} + \cdots + \mu_{2p} = \mathbf{1}'\boldsymbol{\mu}_2$$

adalah sama. Artinya, pengaruh tiap perlakuan pada tiap kelompok sama.

Hipotesis nol pada pengujian tahap 2 ini dapat dituliskan dengan:

$$H_{02}: \mathbf{1}'\boldsymbol{\mu}_1 = \mathbf{1}'\boldsymbol{\mu}_2$$

Uji Hipotesis Keberhimpitan (*Coincident Test*) 2 Populasi

Jika kita mempunyai 2 populasi berukuran n_1 dan n_2, observasi pada masing-masing populasi dapat dibentuk dengan:

$$\mathbf{1}'\mathbf{x}_{1j},\ j = 1, 2, \ldots, n_1$$
$$\mathbf{1}'\mathbf{x}_{2j},\ j = 1, 2, \ldots, n_2$$

Pengujiannya dapat dilakukan dengan menghitung statistik uji berikut:

$$T^2 = \mathbf{1}'(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)\left[\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\mathbf{1}'\mathbf{S}_{\text{pooled}}\mathbf{1}\right]^{-1}\mathbf{1}'(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)$$

Tolak H02 jika statistik uji di atas **lebih besar** dari: $t^2_{n_1+n_2-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = F_{1,n_1+n_2-2}(\alpha)$

Uji Hipotesis Kesamaan (*Level Test*)

Jika profil-profil dikatakan berhimpit (H02 diterima), apakah semua observasi berasal dari populasi normal yang sama? Maka dari itu ingin diuji apakah semua peubah memiliki rataan yang sama, sehingga profil dikatakan setara.

Uji ini dilakukan berdasarkan hipotesis berikut:

$$H_{03}\colon \mathbf{C}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$$

Di mana **C** merupakan matriks konstanta sebelumnya sebagai berikut:

$$\underset{((p-1)\times p)}{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Uji Hipotesis Keberhimpitan (*Coincident Test*) 2 Populasi

Jika kesejajaran dan keberhimpitan diterima, maka vektor rataan dari dua populasi yang berukuran n1 dan n2 dapat diduga dengan:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n_1 + n_2}\left(\sum_{j=1}^{n_1} \mathbf{x}_{1j} + \sum_{j=1}^{n_2} \mathbf{x}_{2j}\right) = \frac{n_1}{(n_1 + n_2)}\bar{\mathbf{x}}_1 + \frac{n_2}{(n_1 + n_2)}\bar{\mathbf{x}}_2$$

Tolak H03 jika memenuhi ketentuan sebagai berikut:

$$(n_1 + n_2)\bar{\mathbf{x}}'\mathbf{C}'[\mathbf{CSC}']^{-1}\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} > c^2$$

Dimana **S** adalah matriks ragam-peragam contoh berdasarkan semua observasi (sebanyak n1+n2), dan

$$c^2 = \frac{(n_1 + n_2 - 1)(p - 1)}{(n_1 + n_2 - p + 1)} F_{p-1,n_1+n_2-p+1}(\alpha)$$

Alur Pengerjaan Analisis Profil

1. Eksplorasi data menggunakan grafik
2. Uji Kesejajaran
   - Jika Uji Kesejajaran diterima, maka dilanjutkan dengan Uji Keberhimpitan
   - Jika Uji Keberhimpitan diterima, maka dilanjutkan dengan Uji Kesamaan
3. Selesai

Contoh Soal

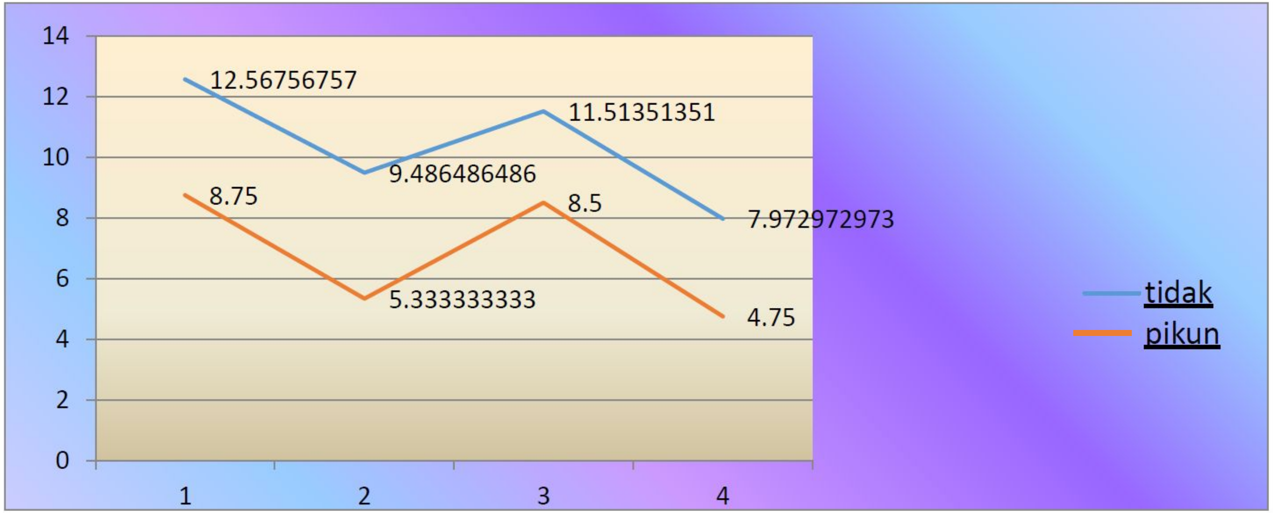
Empat puluh sembilan lansia yang berpartisipasi dalam studi tentang “*human aging*” dikelompokkan ke dalam kategori diagnostik “adanya faktor kepikunan / snile factor” dan “tidak ada faktor kepikunan / no snile factor” pada tes psikiatri yang intensif. Test psikiatri meliputi empat sub test, yaitu Informasi, Similaritas, Aritmetik, dan Gambar. Hasil skor tes psikiatri tersebut adalah sebagai berikut :

Link data:

https://drive.google.com/file/d/1v8BHJY-TUc0Surm-V3IS1Cc0IlUERsle/view?usp=sharing

Lakukan pengujian dengan taraf nyata 5%, apakah profile Lansia yang teridentifikasi ada faktor kepikunan dengan yang teridentifikasi tidak ada faktor kepikunan sejajar, berhimpit, atau konstan?

Pembahasan



Berdasarkan grafik terlihat bahwa profil pikun sejajar dengan profil tidak pikun. Selain ini kedua profil tidak berhimpit. Dengan kata lain berdasarkan grafik peningkatan faktor pikun dan tidak pikun terhadap beberapa subtes sama. Sedangkan rata-rata hasil skor pikun berbeda dengan yang tidak pikun, di mana yang tidak pikun lebih tinggi.

Pembahasan

UJI KESEJAJARAN (PARALLEL TEST)

Hipotesis:

H_{01} : $\mu_{12} - \mu_{11} = \mu_{22} - \mu_{21}$

$\mu_{13} - \mu_{12} = \mu_{23} - \mu_{22}$

$\mu_{14} - \mu_{13} = \mu_{24} - \mu_{23}$

$C\ \mu_1 = C\ \mu_2$

$C\ (\mu_1 - \mu_2) = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{14} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \\ \mu_{24} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

H_{11} : $C\ (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$

Pembahasan

Statistik uji:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \begin{bmatrix} 3.8 \\ 4.15 \\ 3.01 \\ 3.22 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = \begin{bmatrix} 11.47 & 8.54 & 6.39 & 2.07 \\ 8.54 & 11.42 & 5.49 & 0.29 \\ 6.39 & 5.49 & 11.31 & 1.81 \\ 2.07 & 0.29 & 1.81 & 3.69 \end{bmatrix}$$

$$s_2 = \begin{bmatrix} 10.5 & 10.45 & 9.68 & 7.65 \\ 10.45 & 18.24 & 12.09 & 8.90 \\ 9.68 & 12.09 & 13.18 & 5.31 \\ 7.65 & 8.90 & 5.31 & 12.75 \end{bmatrix}$$

$$S_{pooled} = \frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2} S_1 + \frac{n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2} S_2$$

$$S_{pool} = \begin{bmatrix} 11.2624 & 8.9954 & 7.1642 & 3.3791 \\ 8.9954 & 13.0194 & 7.0374 & 2.30822 \\ 7.1642 & 7.0374 & 11.7499 & 2.63859 \\ 3.3791 & 2.3082 & 2.6386 & 5.81325 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)' C' [\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) C S_{pooled} C']^{-1} C (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$$

$= 1.22$

Pembahasan

Kriteria uji:

Tolak H_0 jika $T^2 > c^2$, dimana

$$c^2 = \frac{(n_1 + n_2 - 2)(p-1)}{n_1 + n_2 - p} F_{p-1, n_1+n_2-p(\alpha)}$$

$= 8.809503$

Kesimpulan :

Karena ($T^2 = 1.22$) <(c^2 =8.809503) maka terima H_0.

Interpretasi :

Dengan taraf nyata 5%, peningkatan skor sub tes pada lansia kelompok yang tidak ada faktor kepikunan dan kelompok yang memiliki faktor kepikunan sama. Dengan kata lain dengan adanya tes tidak menambah atau mengurangi peningkatan skor kepikunan.

Pembahasan

UJI KEBERHIMPITAN (COINCIDENT)

Hipotesis:

H_{02} : $\mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{14} = \mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23} + \mu_{24}$

$\mathbf{1}' \underline{\mu}_1 = \mathbf{1}' \underline{\mu}_2$

H_{12} : $\mathbf{1}' \underline{\mu}_1 \neq \mathbf{1}' \underline{\mu}_2$

$\mathbf{1}' = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]$

$$\bar{\boldsymbol{x}}_1 = \begin{pmatrix} 12,57 \\ 9,49 \\ 11,51 \\ 7,97 \end{pmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{x}}_2 = \begin{pmatrix} 8,75 \\ 5,33 \\ 8,51 \\ 4,75 \end{pmatrix}$$

Keterangan:

$\bar{\boldsymbol{x}}_1$= rata-rata kelompok yang tidak ada faktor kepikunan

$\bar{\boldsymbol{x}}_2$= rata-rata kelompok yang ada faktor kepikunan

Pembahasan

Statistik uji:

$$T^2 = 1'(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)[\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)1'S_{pooled}1]^{-1}1'(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \left(\frac{1'(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)1'S_{pooled}1}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)\left(\begin{pmatrix}12{,}57\\9{,}49\\11{,}51\\7{,}97\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8{,}75\\5{,}33\\8{,}51\\4{,}75\end{pmatrix}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{37} + \frac{1}{12}\right)(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)\begin{bmatrix}11{,}26236 & 8{,}995389 & 7{,}164167 & 3{,}379098\\8{,}995389 & 13{,}01935 & 7{,}037373 & 2{,}308224\\7{,}164167 & 7{,}037373 & 11{,}74985 & 2{,}63859\\3{,}379098 & 2{,}308224 & 2{,}63859 & 5{,}813252\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}}\right)^2$$

$T^2 = 17{,}43685$

Pembahasan

Kriteria uji:

Tolak H0 jika $T^2 > c^2$, dimana

$$c^2 = t^2_{n_1+n_2-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = F_{1,n_1+n_2-2(\alpha)}$$

$$c^2 = F_{1,47(0.05)} = 4.0471$$

Kesimpulan :

Karena (T^2 = 17,43685) > (c^2 = 4.0471) maka menolak H_0.

Interpretasi :

Dengan taraf nyata 5%, rata-rata skor sub tes pada lansia kelompok yang tidak ada faktor kepikunan dan kelompok yang memiliki faktor kepikunan tidak sama. Dengan memperhatikan rata-rata skor pada masing-masing sub tes, dapat dikatakan bahwa rata-rata skor sub tes pada lansia kelompok yang tidak ada faktor kepikunan lebih tinggi.

Pembahasan

UJI KESAMAAN*

Hipotesis:

H_{01} : $C(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) = \underline{0}$

$C\,\underline{\mu} = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{14} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \\ \mu_{24} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

H_{11} : $C\,\underline{\mu} \neq \underline{0}$

*Note: Uji Kesamaan Level tidak perlu dilakukan karena pada uji keberhimpitan H0 ditolak

Pembahasan

dengan;

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 11,63 \\ 8,47 \\ 10,78 \\ 7,18 \end{pmatrix}$$

*) $\overline{\boldsymbol{x}}$ = matriks rataan dari $(n_1 + n_2)$ pengamatan

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 13,78 & 11,8 & 9,19 & 5,63 \\ 11,8 & 16 & 9,25 & 4,79 \\ 9,19 & 9,25 & 13,22 & 4,42 \\ 5,63 & 4,79 & 4,42 & 7,65 \end{pmatrix}$$

*) S = matriks *variance covariance* dari $(n_1 + n_2)$ pengamatan

Pembahasan

Statistik uji:

$$T^2 = (n_1 + n_2)\bar{x}'C'[CSC']^{-1}C\bar{x}$$

$$T^2 = (37+12)\begin{pmatrix}11{,}63 & 8{,}47 & 10{,}78 & 7{,}18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13{,}78 & 11{,}8 & 9{,}19 & 5{,}63\\ 11{,}8 & 16 & 9{,}25 & 4{,}79\\ 9{,}19 & 9{,}25 & 13{,}22 & 4{,}42\\ 5{,}63 & 4{,}79 & 4{,}42 & 7{,}65\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11{,}63\\ 8{,}47\\ 10{,}78\\ 7{,}18\end{pmatrix}$$

T^2 = 165,74

Kriteria uji:

Tolak H0 jika $T^2 > c^2$, dimana

$$c^2 = \frac{(n_1 + n_2 - 1)(p-1)}{n_1 + n_2 - p + 1} F_{p-1, n_1+n_2-p+1(\alpha)} = 8.78$$

Pembahasan

Kesimpulan :

Karena (T^2 = 165,74) > (c^2 = 8.78) maka menolak H_0.

Interpretasi :

Dengan taraf nyata 5%, rata-rata untuk setiap sub tes pada lansia kelompok yang ada faktor kepikunan dan kelompokyang tidak ada faktor kepikunan meninjukkan konstanta yang berbeda.