



# Inferensia Vektor Nilai Tengah

# Perbandingan Kasus Peubah Tunggal dan Peubah Ganda

	Peubah Tunggal	Peubah Ganda
Penduga titik parameter nilai tengah	Skalar	Vektor nilai tengah
Penduga selang nilai tengah	Selang Kepercayaan	Daerah (elips) Kepercayaan
Pengujian hipotesis nilai tengah satu populasi	Uji t-student	Uji $T^2$ -Hotelling
Pengujian beda nilai tengah dua populasi	Uji t-student	Uji $T^2$ -Hotelling
Pengujian beda nilai tengah beberapa populasi	ANOVA	MANOVA



# **Pengujian Hipotesis: Vektor Nilai Tengah**

# Bentuk Hipotesis

Hipotesis yang diuji dalam pengujian vektor nilai tengah populasi mirip seperti pada kasus univariate, yaitu:

$$H_0: \underline{\mu} = \underline{\mu}_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \underline{\mu} \neq \underline{\mu}_0$$

Dengan,

$$\underline{\mu}_0 = \begin{bmatrix} \mu_{10} \\ \mu_{20} \\ \vdots \\ \mu_{p0} \end{bmatrix}$$

# Statistika uji untuk vektor nilai tengah

Statistik uji yang dapat digunakan dalam pengujian vektor nilai tengah populasi adalah (1)  $T^2$ -Hotelling dan (2) Wilk-lambda.

1.  $T^2$ -Hotelling, sebagai berikut:

$$T^2 = (\bar{\underline{X}} - \underline{\mu}_0)' \left( \frac{1}{n} S \right)^{-1} (\bar{\underline{X}} - \underline{\mu}_0) = n (\bar{\underline{X}} - \underline{\mu}_0)' S^{-1} (\bar{\underline{X}} - \underline{\mu}_0)$$

Dengan,

$$\bar{\underline{X}}_{(px1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \underline{X}_j \quad S_{(p \times p)} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\underline{X}_j - \bar{\underline{X}})(\underline{X}_j - \bar{\underline{X}})'$$

## 2. Uji Wilk-Lambda, sering juga disebut uji rasio kemungkinan (likelihood ratio test)

$$\Lambda = \frac{\max_{\Sigma} L(\underline{\mu}_0, \Sigma)}{\max_{\underline{\mu}, \Sigma} L(\underline{\mu}, \Sigma)} = \left( \frac{|\hat{\Sigma}|}{|\hat{\Sigma}_0|} \right)^{n/2}$$

dengan,

$$L(\underline{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2} |\hat{\Sigma}|^{n/2}} e^{-np/2}$$

$$L(\underline{\mu}_0, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2} |\hat{\Sigma}_0|^{n/2}} e^{-np/2}$$

Hubungan Hotelling dengan Wilk - Lambda,

$$\Lambda^{2/n} = \left( 1 + \frac{T^2}{n-1} \right)^{-1}$$

## Daerah Penolakan $H_0$

Daerah penolakan untuk hipotesis nol dapat dihampiri dengan menggunakan sebaran F, sebagai berikut:

$$T^2 = \left( \bar{\underline{X}} - \underline{\mu}_0 \right) \left( \frac{1}{n} S \right)^{-1} \left( \bar{\underline{X}} - \underline{\mu}_0 \right) > \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p, n-p}(\alpha)$$

Untuk ukuran sampel besar maka  $T^2$ -Hotelling dapat juga dihampiri dengan sebaran khi-kuadrat berderajat bebas  $p$ .

# Makna Penolakan $H_0$

- Jika hipotesis nol ditolak itu artinya bahwa paling sedikit ada satu kombinasi linier peubah yang rata-ratanya berada diluar selang kepercayaan  $(1-\alpha)$ .
- Perlu uji lanjut, yaitu:
  - Daerah kepercayaan ganda, dapat disajikan dalam bentuk Ellips.
  - Selang kepercayaan simultan
  - Selang kepercayaan Bonferoni



## ILUSTRASI

Perspirasi dari 20 wanita yang tergolong sehat dianalisa. Tiga komponen, yaitu  $X_1$  = laju perspirasi,  $X_2$  = kandungan sodium dan  $X_3$  = kandungan potasium diukur

Ujilah apakah hipotesis  $H_0: \underline{\mu}' = [4, 50, 10]$  lawan  $H_1: \underline{\mu}' \neq [4, 50, 10]$  pada taraf nyata  $\alpha = 0.10$

# Ringkasan Data

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 4.640 \\ 45.400 \\ 9.965 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2.879 & 10.010 & -1.810 \\ 10.010 & 199.788 & -5.640 \\ -1.810 & -5.640 & 3.628 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} .586 & -.022 & .258 \\ -.022 & .006 & -.002 \\ .258 & -.002 & .402 \end{bmatrix}$$

# Perhitungan $T^2$ -Hotelling

$$T^2 = 20 \begin{bmatrix} 4.640 - 4 & 45.400 - 50 & 9.965 - 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .586 & -.022 & .258 \\ -.022 & .006 & -.002 \\ .258 & -.002 & .402 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.640 - 4 \\ 45.400 - 50 \\ 9.965 - 10 \end{bmatrix} = 9.74$$

$$\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p, n-p}(.10) = \frac{19(3)}{17} F_{3,17}(.10) = 3.353(2.44) = 8.18$$

Terlihat bahwa  $T^2 = 9.74 > 8.18$ ,  
sehingga konsekuensinya kita tolak  $H_0$   
pada taraf nyata 10%.



**Daerah (ellips) Kepercayaan  
bagi Vektor Nilai Tengah**

## Daerah (ellips) Kepercayaan

Suatu daerah kepercayaan  $100(1-\alpha)\%$  bagi nilai tengah suatu sebaran normal ganda  $p$  adalah suatu elips yang ditentukan oleh semua  $\underline{\mu}$  sedemikian rupa sehingga

$$n(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu})' S^{-1} (\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}) \leq \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p, n-p}(\alpha)$$

di mana

$$\underline{\bar{X}}_{(p \times 1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \underline{X}_j \quad S_{(p \times p)} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\underline{X}_j - \underline{\bar{X}})(\underline{X}_j - \underline{\bar{X}})'$$

dan  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  adalah pengamatan contoh.

## ILUSTRASI

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} .564 \\ .603 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} .0144 & .0117 \\ .0117 & .0146 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 203.018 & -163.391 \\ -163.391 & 200.228 \end{bmatrix}$$

ellips kepercayaan 95% bagi  $\mu$  terdiri dari semua nilai  $(\mu_1, \mu_2)$  yang memenuhi

$$42 \begin{bmatrix} .564 - \mu_1 & .603 - \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 203.018 & -163.391 \\ -163.391 & 200.228 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .564 - \mu_1 \\ .603 - \mu_2 \end{bmatrix} \leq \frac{2(41)}{40} F_{2,40}(.05)$$

# Mencari Akar dan Vektor Ciri

Pasangan akar ciri dan vektor ciri bagi  $S$  adalah

$$\lambda_1 = .026 \quad \underline{e}_1' = [.704, .710]$$

$$\lambda_2 = .002 \quad \underline{e}_2' = [-.710, .704]$$

Pusat ellips tersebut pada titik  $[\cdot564, \cdot603]$

# Hitung Panjang Sumbu

setengah dari panjang sumbu mayor dan minornya masing-masing adalah:

$$\sqrt{\lambda_1} \sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} = \sqrt{.026} \sqrt{\frac{2(41)}{(42)(40)} (3.23)} = .064$$

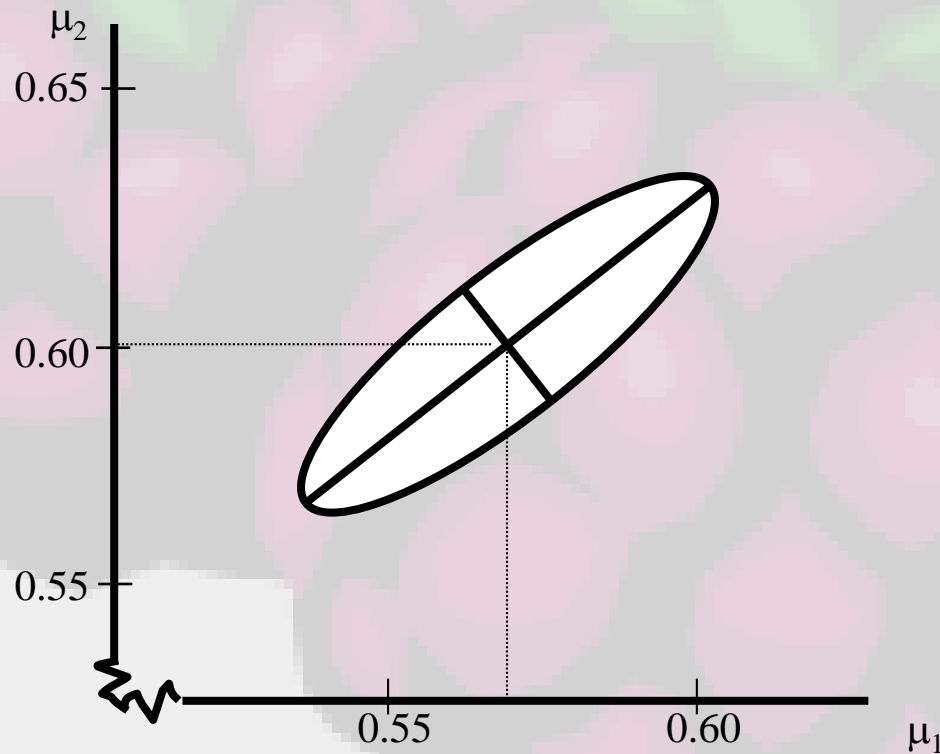
$$\sqrt{\lambda_2} \sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} = \sqrt{.002} \sqrt{\frac{2(41)}{(42)(40)} (3.23)} = .018$$

Sumbu-sumbu tersebut terletak sepanjang  $\underline{\mathbf{e}}_1' = [.704, .710]$  dan  $\underline{\mathbf{e}}_2' = [-.710, .704]$



# Menggambar Ellips Kepercayaan

## Menggambar Elips Kepercayaan



## Selang kepercayaan simultan

- Selang kepercayaan simultan  $(1-\alpha)100\%$  untuk  $\underline{\ell}' \underline{\mu}$  artinya selang kepercayaan ini berlaku untuk seluruh kombinasi linier dari  $x$  yang diamati.
- Konsepnya menggunakan ragam bersama, sebaran bersama.

$$\underline{\ell}' \underline{\bar{x}} \pm c S_{\underline{\ell}' \underline{\bar{x}}}$$

$$\text{dimana } c = \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{(\alpha; p, n-p)}}$$

$$S_{\underline{\ell}' \underline{\bar{x}}} = \sqrt{\frac{1}{n} \underline{\ell}' S \underline{\ell}}$$



## Penentuan Nilai $\underline{\ell'}$

- Misal selang kepercayaan simultan untuk setiap parameter dari peubah  $x_1$  dan  $x_2$

- untuk  $\mu_1$

$$1 \mu_1 + 0 \mu_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\ell'}} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

- untuk  $\mu_2$

$$0 \mu_1 + 1 \mu_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{\ell'}} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

# Selang Kepercayaan Bonferroni

- Konsepnya mirip dengan selang kepercayaan pada kasus univariat.
- Dalam selang kepercayaan bonferroni nilai  $\alpha$  dibagi dengan banyaknya selang kepercayaan yang ingin dibuat.
- Secara umum dapat dituliskan :

$$x_i \pm t_{n-1} \left( \frac{\alpha}{2p} \right) \sqrt{\frac{S_{ii}}{n}}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

dimana  $p$  = banyaknya peubah

$S_{ii}$  = ragam peubah ke- $i$

