RESPONSI STA1343-PADK

PERTEMUAN 4 - 14 SEPTEMBER 2023

POKOK BAHASAN

1. Sebaran Binomial
2. Sebaran Multinomial

SEBARAN BERNOULLI

- Bersifat biner
- Memiliki dua kemungkinan “sukses” dan “gagal”
- Kasus yang dilakukan adalah kasus tunggal tanpa pengulangan.
- Pemisalan peubah acak 1 untuk kejadian "sukses" dan 0 untuk kejadian "gagal"

Distribusi Peluang

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}; x = 0,1$$

Nilai Harapan & Ragam

Nilai harapan E(X) = p
Ragam V(X) = p(1-p)

Sebaran Bernoulli

- Bersifat biner
- Memiliki dua kemungkinan “sukses” dan “gagal”
- Kasus yang dilakukan adalah kasus tunggal tanpa pengulangan.
- Pemisalan peubah acak 1 untuk kejadian "sukses" dan 0 untuk kejadian "gagal"

Misal, p = P(sukses), maka fungsi massa peluang peubah acak X ~ Bernoulli(p)

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}; x = 0,1$$

Sehingga nilai harapan peubah acak X

$$E(X) = p$$

Ragam peubah acak X

$$Var(X) = p(1-p)$$

1

SEBARAN BINOMIAL

SEBARAN BINOMIAL

- Terdiri dari serangkaian percobaan identik
- Setiap percobaan berakhir dengan salah satu hasil : sukses atau gagal
- Antar percobaan saling bebas; hasil antar percobaan tidak saling mempengaruhi
- Besarnya peluang untuk masing-masing kemungkinan pada setiap percobaan harus sama
- Notasi: Y~Binom(n,p)

Distribusi Peluang

$$P(Y=y)=\binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y}=\frac{n!}{(n-y)!y!}p^y(1-p)^{n-y}$$

Nilai Harapan & Ragam

Nilai harapan E(y) = n.p
Ragam V(y) = n.p(1−p)

y : jumlah kejadian sukses, n−y : jumlah kejadian gagal, p : peluang sukses, 1−p : peluang gagal

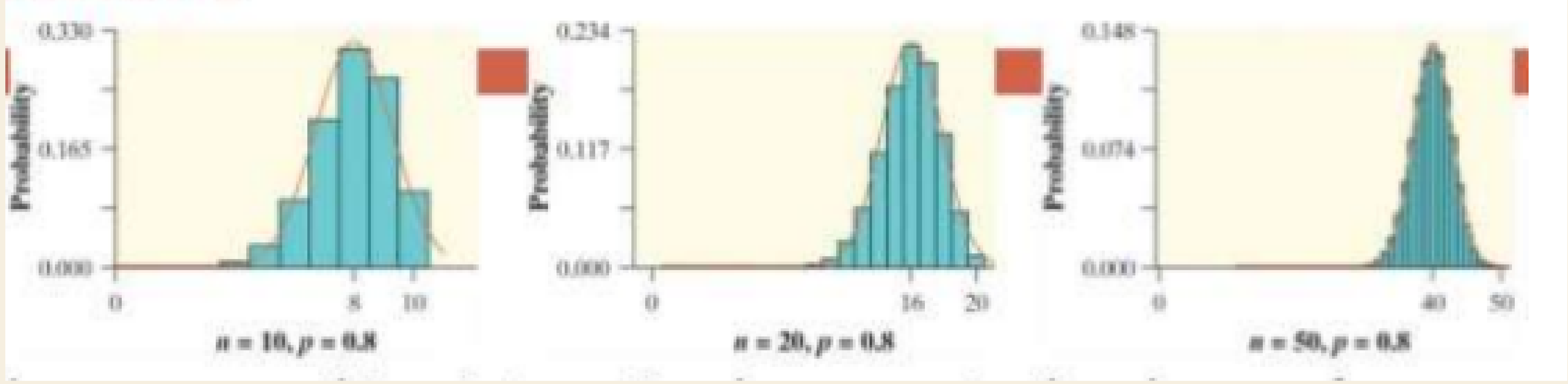
SEBARAN BINOMIAL

Hampiran Normal untuk Sebaran Binomial

Misalkan X menyebar binomial dengan n percobaan dan p peluang sukses. Jika n besar, sebaran dari X bisa didekati oleh sebaran Normal dengan mean dan simpangan baku sebagai berikut:

$$\mu_x = np \qquad \sigma_x = \sqrt{np(1-p)}$$

Dengan syarat bahwa $np \geq 10$ dan $n(1-p) \geq 10$



SEBARAN BINOMIAL

Table 1.1. Binomial Distribution with $n = 10$ and $\pi = 0.20, 0.50$, and 0.80. The Distribution is Symmetric when $\pi = 0.50$

y	$P(y)$ when $\pi = 0.20$	$P(y)$ when $\pi = 0.50$	$P(y)$ when $\pi = 0.80$
0	0.107	0.001	0.000
1	0.268	0.010	0.000
2	0.302	0.044	0.000
3	0.201	0.117	0.001
4	0.088	0.205	0.005
5	0.027	0.246	0.027
6	0.005	0.205	0.088
7	0.001	0.117	0.201
8	0.000	0.044	0.302
9	0.000	0.010	0.268
10	0.000	0.001	0.107

Sebaran binomial selalu simetrik saat p = 0.50.

Untuk n yang fixed, itu menjadi lebih miring (skewed)saat π bergerak menuju 0 atau 1

Untuk π tetap, akan menjadi lebih berbentuk lonceng jika n bertambah.

Syntax Dasar di R:

Binomial:

```
dbinom(x,n,p) #untuk nilai pdf (fungsi massa peluang) P(X=x)

pbinom(x,n,p,TRUE)  #untuk nilai CDF (cumulatif) P(X<=x)


#untuk lebih besar dari P(X>x)
1-pbinom(x,n,p,TRUE)  #P(X>x) = 1-P(X<=x)
#atau
pbinom(x,n,p,FALSE)

#Untuk lebih besar dari sama dengan P(X>=x)
1-pbinom(x-1,n,p,TRUE) #P(X>=x)= 1-P(X<=x-1)
#atau
pbinom(x,n,p,FALSE) #P(X>=2)= P(X>1)

#untuk penjumlahan P(a<=X<=b)
sum(dbinom(a:b,n,p))
```

Syntax Dasar di Ms. Excel untuk Binomial:

Untuk nilai FMP (fungsi massa peluang) atau **P(X=x)**:

=BINOM.DIST(x;n;p;FALSE)

Untuk nilai kumulatif atau **P(X<=x)**:

=BINOM.DIST(x;n;p;TRUE)

Contoh Soal

Tentukan peluang mendapatkan tepat tiga bilangan 2 bila sebuah dadu setimbang dilemparkan 5 kali.

Dik : Y = banyaknya dadu dengan bilangan 2 $n = 5$; $p = 1/6$; $y = 3$

Dit : $P(Y=3)$?

Contoh Soal

Tentukan peluang mendapatkan tepat tiga bilangan 2 bila sebuah dadu setimbang dilemparkan 5 kali.

Dik : Y = banyaknya dadu dengan bilangan 2 n = 5; p = 1/6; y = 3
Dit : P(Y=3)?

$$P(Y=y)=\binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y}=\frac{n!}{(n-y)!y!}p^y(1-p)^{n-y}$$

$$P(Y=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{5!}{2!\,3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$P(Y=3)=0.032$$

=BINOM.DIST(3;5;1/6;FALSE)
0,03215

Contoh Soal

Di kota A, keperluan uang untuk membeli narkoba atau sebangsanya ternyata merupakan latar belakang 75% peristiwa pencurian yang terjadi. Berapa peluang bahwa 2 di antara 4 kasus pencurian berikutnya dilatarbelakangi oleh narkoba?

Dik : Y = banyaknya pencurian karena narkoba $n = 4$; $p = 0.75 = ¾$; $y = 2$
Dit : $P(Y=2)$?

Contoh Soal

Di kota A, keperluan uang untuk membeli narkoba atau sebangsanya ternyata merupakan latar belakang 75% peristiwa pencurian yang terjadi. Berapa peluang bahwa 2 di antara 4 kasus pencurian berikutnya dilatarbelakangi oleh narkoba?

Dik : Y = banyaknya pencurian karena narkoba n = 4; p = 0.75 = ¾; y = 2

Dit : P(Y=2)?

$$P(Y=y)=\binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y}=\frac{n!}{(n-y)!y!}p^y(1-p)^{n-y}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{4!}{2!\,2!}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=2)=0.211$$

2

SEBARAN MULTINOMIAL

SEBARAN MULTINOMIAL

- Percobaan binomial akan menjadi percobaan multinomial jika setiap percobaan akan memberikan lebih dari 2 kemungkinan. Misalnya hasil produksi pabrik dapat dikelompokkan menjadi barang baik, kurang baik, dan cacat.
- Bersifat independen dengan peluang kategori yang sama untuk setiap percobaan

Distribusi Peluang

Fungsi di R

dmultinom(x=c(n1,n2,n3), prob=c(π1,π2,π3))

$$P(n_1, n_2, \dots, n_c) = \left(\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_c!}\right) \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots \pi_c^{n_c}$$

nj : banyak data pada masing-masing kategori

n : jumlah semua data (n = n1 + n2 + … +nc)

π : peluang masing-masing kategori (Σπ = 1)

Contoh Soal

Berdasarkan laporan sebuah penelitian tahun 1995, diantara produk mikroprosesor pentium generasi pertama diketahui terdapat cacat yang mengakibatkan kesalahan dalam operasi aritmatika. Setiap mikroprosesor dapat dikategorikan sebagai baik, rusak dan cacat (dapat digunakan dengan kemungkinan muncul kesalahan operasi aritmatika). Diketahui bahwa 70% mikroprosesor dikategorikan baik, 25% cacat dan 5% rusak. Jika sebuah sample random berukuran 20 diambil, berapa probabilitas ditemukan 15 mikroprosesor baik, 3 cacat dan 2 rusak?

Contoh Soal

$n = 20$

$n_1 = 15;\quad n_2 = 3;\quad n_3 = 2$

$\pi_1 = 0.7;\quad \pi_1 = 0.25;\quad \pi_3 = 0.05$

$$P(n_1, n_2, n_3) = \left(\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}\right) \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \pi_3^{n_3}$$

$$\mathrm{P}(15{,}3{,}2) = \frac{20!}{15!\,3!\,2!} 0.7^{15} 0.25^{3} 0.05^{2}$$

$$\mathrm{P}(15{,}3{,}2) = 0.0288$$

```
> dmultinom(x=c(15,3,2), prob=c(0.7,0.25,0.05))
[1] 0.02875242
```

Contoh Soal

Hasil wawancara terkait pemilu di suatu kota menunjukkan 40% mendukung kandidat A, 10% kandidat B, dan 50% tidak memberi tahu pilihannya. Diambil sampel acak 10 pemilih, berapa peluang 4 diantaranya mendukung kandidat A, 1 kandidat B, dan 5 tidak diketahui?

Contoh Soal

Hasil wawancara terkait pemilu di suatu kota menunjukkan 40% mendukung kandidat A, 10% kandidat B, dan 50% tidak memberi tahu pilihannya. Diambil sampel acak 10 pemilih, berapa peluang 4 diantaranya mendukung kandidat A, 1 kandidat B, dan 5 tidak diketahui?

$$n = 10$$
$$n_1 = 4; \quad n_2 = 1; \quad n_3 = 5$$
$$\pi_1 = 0.4; \quad \pi_2 = 0.1; \quad \pi_3 = 0.5$$

$$P(n_1, n_2, n_3) = \left(\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}\right) \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \pi_3^{n_3}$$

$$P(4,1,5) = \frac{10!}{4!\,1!\,5!} 0.4^4 0.1^1 0.5^5 = 0.1008$$

Soal Tambahan

Hasil wawancara terkait pemilu di suatu kota menunjukkan 40% mendukung kandidat A, 10% kandidat B, dan 50% tidak memberi tahu pilihannya. Diambil sampel acak 10 pemilih, berapa peluang 5 diantaranya mendukung kandidat A?

Soal Tambahan

Hasil wawancara terkait pemilu di suatu kota menunjukkan 40% mendukung kandidat A, 10% kandidat B, dan 50% tidak memberi tahu pilihannya. Diambil sampel acak 10 pemilih, berapa peluang 5 diantaranya mendukung kandidat A?

$n = 10; \quad p = 0.4; \quad a = 5$

binomial

$$P(A = a) = \binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a} = \frac{n!}{(n-a)!a!} p^a (1-p)^{n-a}$$

$$P(A = 5) = \frac{10!}{5!\,5!} 0.4^5 0.6^5$$

$$P(A = 5) = 0.201$$

Soal Tambahan

Hasil wawancara terkait pemilu di suatu kota menunjukkan 40% mendukung kandidat A, 10% kandidat B, dan 50% tidak memberi tahu pilihannya. Diambil sampel acak 10 pemilih, berapa peluang 5 diantaranya mendukung kandidat A?

```
> dmultinom(x=c(5,0,5), prob=c(0.4,0.1,0.5))
[1] 0.08064
> dmultinom(x=c(5,1,4), prob=c(0.4,0.1,0.5))
[1] 0.08064
> dmultinom(x=c(5,2,3), prob=c(0.4,0.1,0.5))
[1] 0.032256
> dmultinom(x=c(5,3,2), prob=c(0.4,0.1,0.5))
[1] 0.0064512
> dmultinom(x=c(5,4,2), prob=c(0.4,0.1,0.5))
[1] 0.00177408
> dmultinom(x=c(5,5,0), prob=c(0.4,0.1,0.5))
[1] 2.58048e-05
> 0.08064+0.08064+0.032256+0.0064512+0.00177408+2.58048e-05
[1] 0.2017871
```

multinomial

LATIHAN SOAL

1. Suatu ujian terdiri atas 10 pertanyaan pilihan ganda, masing-masing dengan 4 kemungkinan jawaban, yaitu A, B, C, D, dan hanya 1 jawaban yang benar. Jika seseorang menjawab dengan menebak-nebak saja, berapa peluang orang tersebut:
   a. Memperoleh 6 jawaban benar?
   b. Memperoleh paling banyak 3 jawaban benar?
   c. Memperoleh minimal 3 jawaban benar?
   d. Memperoleh 5 sampai 8 jawaban yang benar?

2. Peluang seseorang sembuh dari suatu penyakit darah adalah 0.4. Jika 15 orang diketahui menderita penyakit ini, berapa peluang bahwa
   a. Sekurang-kurangnya 10 orang dapat sembuh
   b. Ada 3 sampai 8 orang yang sembuh
   c. Tepat 5 orang yang sembuh

LATIHAN SOAL

3

Dalam suatu areal perkebunan coklat terdapat 100 tanaman kakao. Dilakukan pengamatan apakah tanaman coklat tersebut terkena penyakit tertentu atau tidak. Daya tahan tanaman coklat terhadap serangan penyakit tersebut mencapai 90%. Berapa:

a. Peluang tanaman kakao yang terkena penyakit kurang dari 20 pohon?

b. Peluang tanaman kakao yang terkena penyakit maksimal 30 pohon?

4

Sebuah kotak berisi 5 bola merah, 4 bola putih, dan 3 bola biru. Sebuah bola dipilih secara acak dari kotak, warnanya dicatat, dan kemudian bolanya dimasukkan kembali. Tentukan peluang bahwa dari 6 bola yang diambil secara acak dengan cara ini, 3 diantaranya berwarna merah, 2 adalah putih, dan 1 biru?

LATIHAN SOAL

5

Dua buah dadu dilempar enam kali, berapa peluang muncul bilangan yang hasil penjumlahannya adalah 7 atau 11 sebanyak dua kali, bilangan yang sama muncul sekali dan hasil yang lainnya muncul tiga kali?

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

TERIMA KASIH