RESPONSI STA1343-PADK

Pertemuan 5 - 21 September 2023

POKOK BAHASAN

1. Fungsi Likelihood
2. MLE Distribusi Binomial
3. Uji Proporsi Binomial
4. SK Proporsi Binomial

1

Fungsi Likelihood

Fungsi Likelihood

Likelihood function (fungsi kemungkinan) adalah fungsi densitas peluang bersama dari *n* variabel random *x1, x2, x3,...., xn.* atau Fungsi parameter yang berasal dari fungsi peluang data amatan

Misal fungsi peluang Binom(x, n, p) :

$$P(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Fungsi likelihood

$$L(p|n,x) = \left(\frac{n!}{x!\,(n-x)}\right) p^x (1-p)^{n-x}$$

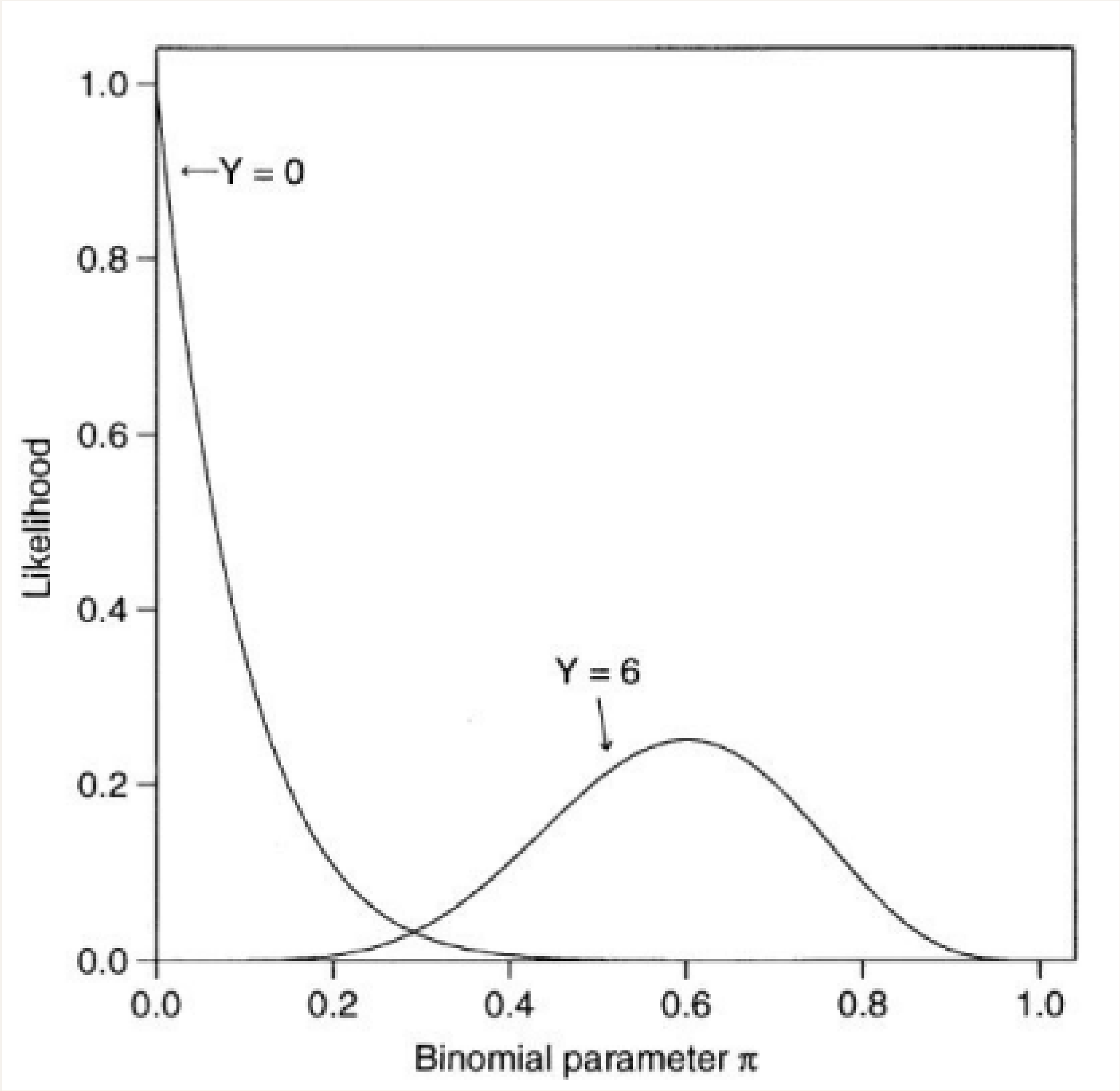
Misal ingin menduga parameter *p*, maka kita asumsikan *x* dan *n* diketahui. Misal x = 0, n = 10 dan x = 6, n = 10, maka fungsi likelihoodnya seperti berikut:

$$l(p) = (1-p)^{10}$$

$$l(p) = \left(\frac{10!}{6!4!}\right) p^6 (1-p)^4$$

Metode (MLE) merupakan metode untuk menduga parameter populasi yang tidak diketahui. Dalam prosesnya, metode ini berupaya menemukan nilai penduga bagi parameter yang dapat memaksimalkan fungsi likelihood

Fungsi Likelihood



MLE

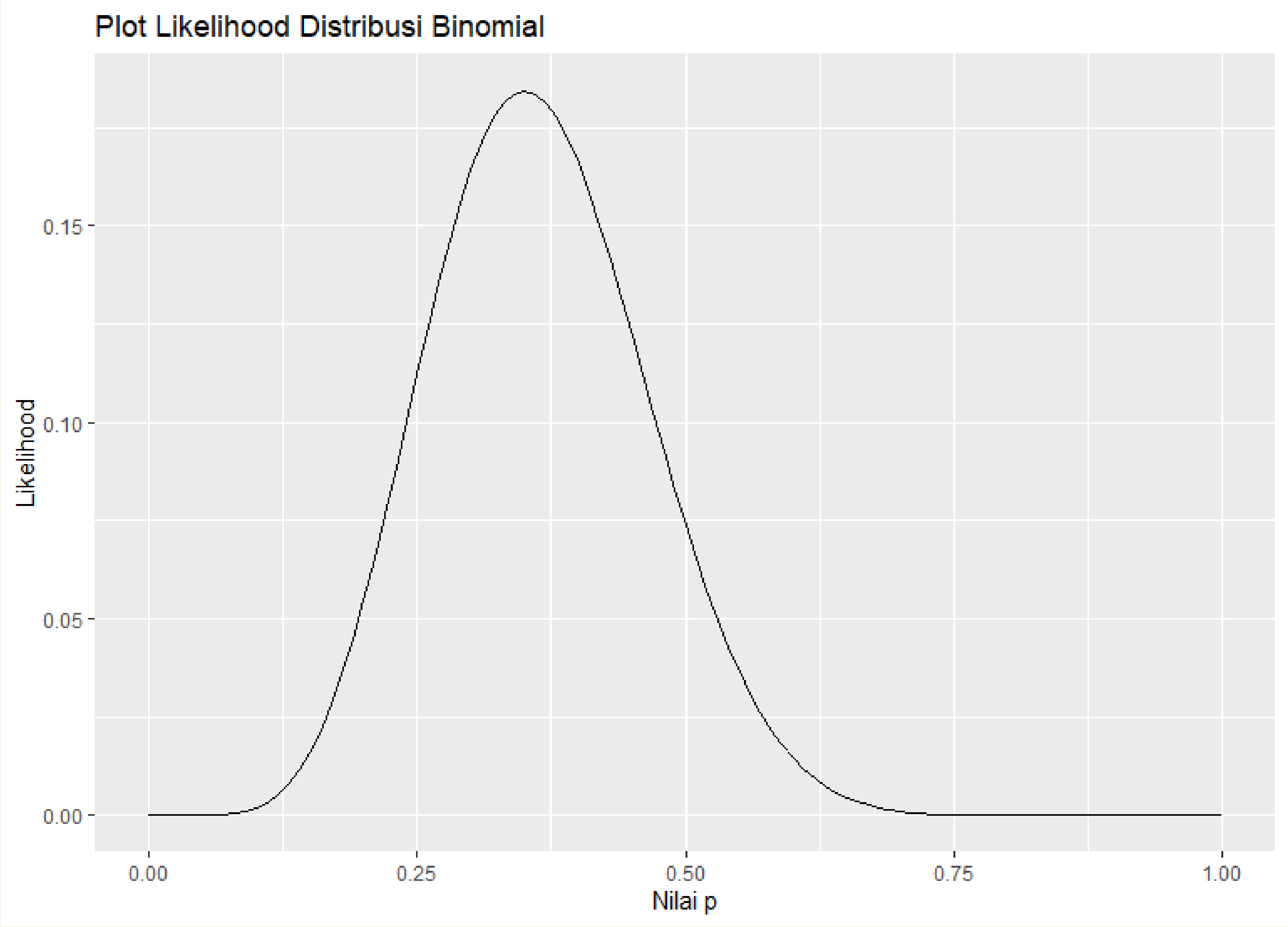
$$l(p) = (1-p)^{10} \rightarrow p_{\max} = 0.00$$

$$l(p) = \left(\frac{10!}{6!4!}\right)p^6(1-p)^4 \rightarrow p_{\max} = 0.60$$

nilai p yang memaksimumkan fungsi likelihood saat x = 0 kejadian sukses dari n = 10 percobaan adalah p = 0. Sedangkan jika x = 6 dari n = 10 percobaan, nilai p yang memaksimumkan fungsi likelihood adalah p = 0.6

Respon sebanyak x = 0 kejadian sukses dari n = 10 percobaan, lebih mungkin terjadi bila p = 0.00 dibandingkan saat p pada nilai lainnya.

Fungsi Likelihood



misal x = 7 kejadian sukses dari n = 20 percobaan, berapa nilai p yang memaksimalkan fungsi likelihood?

```
library(ggplot2)

# Data yang akan digunakan
p_values <- seq(0, 1, by = 0.01)  # Berbagai nilai p yang diuji
k <- 7  # Jumlah sukses yang diamati
n <- 20  # Jumlah percobaan

# Hitung likelihood untuk setiap nilai p
likelihood <- dbinom(k, size = n, prob = p_values)

# Data frame untuk plot
likelihood_data <- data.frame(p = p_values, likelihood = likelihood)

# Buat plot likelihood menggunakan ggplot2
ggplot(likelihood_data, aes(x = p, y = likelihood)) +
  geom_line() +
  labs(x = "Nilai p", y = "Likelihood") +
  ggtitle("Plot Likelihood Distribusi Binomial")
```

MLE Sebaran Binomial

Fungsi Likelihood untuk sebaran binomial

$$L(p \mid x, n) = \left(\frac{n!}{x!(n-x)!}\right) p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\begin{aligned}\ln L(p \mid x, n) &= \ln\left(\frac{n!}{x!(n-x)!}\right) + \ln\left(p^x\right) + \ln\left[(1-p)^{n-x}\right] \\ &= \ln\left(\frac{n!}{x!(n-x)!}\right) + x\ln p + (n-x)\ln(1-p)\end{aligned}$$

Proses Pemaksimuman

$$\frac{d}{dp}\ln L(p \mid x, n) = 0$$

$$0 + \frac{x}{p} - \frac{n-x}{1-p} = 0$$

$$x(1-p) - (n-x)p = 0 \qquad p = \frac{x}{n}$$

dan

$$\frac{d}{dp^2}\ln L(p \mid x, n) = -\frac{x}{p^2} - \frac{n-x}{(1-p)^2} < 0$$

Jadi, penduga kemungkinan maksimum bagi p adalah $\hat{p} = \frac{x}{n}$

Uji Proporsi Binomial

- Jika setiap keberhasilan dilambangkan dengan 1 dan setiap kegagalan dilambangkan dengan 0 maka proporsi sampel sama dengan rata-rata sampel

$$\hat{p} = \Sigma \frac{y_i}{n}$$

- Sebaran contoh dari p memiliki mean dan standar baku sebagai berikut

$$E(p) = \pi, \;\; \sigma(p) = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

Uji Proporsi Binomial

Misal :

- seorang analis pasar mungkin ingin tahu proporsi keluarga di daerah tertentu yang memiliki TV kabel,
- Seorang sosiolog mungkin ingin mengetahui proporsi kepala rumah tangga di daerah tertentu yang adalah perempuan

Peneliti mendasarkan keputusan mengenai proporsi populasi pada kesimpulan yang dibuat dengan menganalisis sampel yang diambil dari populasi

Uji Proporsi

Pengujian hipotesis mengenai proporsi populasi yang didasarkan atas informasi (data) sampelnya.

Uji Proporsi untuk contoh kecil n ≤ 25

Uji dua pihak	: $H_0: p = po$ dan $H_a: p \neq po$
Uji pihak kiri	: $H_0: p \leq po$ dan $H_a: p > po$
Uji pihak kanan	: $H_0: p \geq po$ dan $H_a: p < po$

Kaidah Keputusan Tolak H0

a. $P = 2P(X \leq x)$ atau $P = 2P(X \geq x) < {}^{\alpha}/_{2}$

b. $P = P(X \geq x) < \alpha$

c. $P = P(X \leq x) < \alpha$

Statistik Uji

a. $P = 2P(X \leq x)$ atau $P = 2P(X \geq x)$

b. $P = P(X \geq x)$

c. $P = P(X \leq x)$

Uji Proporsi Binomial

Statistik Uji

- Untuk sembarang nilai P = 0 ≤ P ≤ 1 dan n ≤ 25

$$p(x) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

atau;

$$p(x) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

dengan

$$\binom{n}{x} = nCx = \frac{n!}{(n-x)!\ .\ x!}$$

- Untuk nilai P = 0.5 dan $n \le 25$ gunakan tabel binomial (tabel A.1 di buku daniel)
- Untuk sampel besar, $n > 25$ kita dapat menggunakan prosedur hampiran sebaran normal (uji Z):

$$z_{hit} = \frac{\hat{p} - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$$

Uji Proporsi untuk contoh besar n > 25

Uji dua pihak $: H_0 : p = po$ dan $H_a : p \neq po$

Uji pihak kiri $: H_0 : p \le po$ dan $H_a : p > po$

Uji pihak kanan $: H_0 : p \ge po$ dan $H_a : p < po$

a. H0 : π= π0 vs H1 : π≠ π0 (dua arah)

b. H0 : π< π0 vs H1 : π> π0 (satu arah)

c. H0 : π> π0 vs H1 : π< π0 (satu arah)

Tolak H0 jika:

a. $|z_{hit}| > Z_{\alpha/2}$

b. $z_{hit} > Z_{\alpha}$

c. $z_{hit} < -Z_{\alpha}$

atau

a. $P(|z| > Z) < {}^{\alpha}/_{2}$

b. $P(z < -Z) < \alpha$

c. $P(z > Z) < \alpha$

Selang Kepercayaan

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\, SE \text{ dimana } SE = \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p}\,)}{n}}$$

Contoh Soal

1

Sebuah studi berminat melakukan uji fluorescent antibody guna meneliti adanya reaksi serum setelah pengobatan pada penderita malaria falcifarum. Dari 25 subjek yang telah disembuhkan, 15 subjek ditemukan bereaksi positif. Jika sampel itu memenuhi semua asumsi yang mendasari uji binomial, dapatkah kita menyimpulkan dari data itu bahwa proporsi reaksi positif dalam populasi yang bersangkutan adalah lebih besar dari 0,5? Misalkan α = 0,05 (Wayne W.Daniel, 2003, hal 67)

Contoh Soal

Sebuah studi berminat melakukan uji fluorescent antibody guna meneliti adanya reaksi serum setelah pengobatan pada penderita malaria falcifarum. Dari 25 subjek yang telah disembuhkan, 15 subjek ditemukan bereaksi positif. Jika sampel itu memenuhi semua asumsi yang mendasari uji binomial, dapatkah kita menyimpulkan dari data itu bahwa proporsi reaksi positif dalam populasi yang bersangkutan adalah lebih besar dari 0,5? Misalkan α = 0,05 (Wayne W.Daniel, 2003, hal 67)

Hipotesis

H0 : $p \leq 0.5$
H1 : $p > 0.5$

Kaidah Keputusan Tolak H0

a. $P = 2P(X \leq x)$ atau $P = 2P(X \geq x) < {}^{\alpha}/_{2}$
b. $P = P(X \geq x) < \alpha$
c. $P = P(X \leq x) < \alpha$

Statistik uji

$P = P(X \geq x) = P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) = 1 - 0.7878 = 0.2122$

Karena p > 0.05, maka terima H0 sehingga kita dapat menyimpulkan bahwa proporsi reaksi serum diantara populasi yang telah mendapat pengobatan malaria tidak dapat dikatakan lebih besar dari 0.5.

Contoh Soal

2

Menurut pengelola bioskop, terdapat 50% dari pengunjung yang memilih untuk menonton film Indonesia. Diambil sampel secara acak 15 pengunjung dan 6 diantaranya menonton fil Indonesia. Jika taraf nyata yang digunakan adalah 5%, ujilah pernyataan pengelola bioskop tersebut.

Contoh Soal

Menurut pengelola bioskop, terdapat 50% dari pengunjung yang memilih untuk menonton film Indonesia. Diambil sampel secara acak 15 pengunjung dan 6 diantaranya menonton fil Indonesia. Jika taraf nyata yang digunakan adalah 5%, ujilah pernyataan pengelola bioskop tersebut.

Hipotesis

H0 : p = 0.5
H1 : p ≠ 0.5

Kaidah Keputusan Tolak H0

a. $P = 2P(X \leq x)$ atau $P = 2P(X \geq x) < {}^{\alpha}/_{2}$
b. $P = P(X \geq x) < \alpha$
c. $P = P(X \leq x) < \alpha$

Statistik uji

P = P(X ≤ 6) = 0.303619

atau

P = P(X ≥ 6) = 1 - P(X < 6) = 0.849121

Karena 2 P(X ≤ 6) atau 2P(X ≥ 6) > 0.025 maka tak tolak H0

Atau, nilai P = 0.5 dan n ≤ 25 gunakan tabel binomial (tabel A.1 di buku daniel) dengan n = 15, x = 6 dan p =0.5

Contoh Soal

3

Suatu obat penenang ketegangan syaraf diduga hanya 60% efektif. Hasil percobaan dengan obat baru terhadap 100 orang dewasa penderita ketegangan syaraf yang diambil secara acak menunjukkan bahwa obat baru ini 70% efektif. Apakah ini merupakan bukti yang cukup untuk menyimpulkan bahwa obat baru itu lebih baik dari yang beredar sekarang ? (gunakan taraf nyata 0.05)

Contoh Soal

$H_0 : \pi = 0.60 \; vs \; H_1 : \pi > 0.6$

$\pi = 0.7$

Statistik Uji

$$z = \frac{0.7 - 0.6}{\sqrt{(0.6)(1-0.6)/100}} = 2.04$$

$P(z > 2.04)$ =1- $P(z < 2.04) = 1 - 0.9793 = 0.0207$

Karena $P(z > 2.04)$ < 0.05 maka tolak H_0 , artinya cukup bukti untuk mengatakan bahwa obat baru tersebut memang lebih unggul dari yang biasa.

Contoh Soal

Dari suatu contoh acak 500 orang yang makan siang di sebuah restoran selama beberapa hari Jum'at, diperoleh informasi x=160 orang yang menyukai seafood. Tentukan selang kepercayaan 95% bagi proporsi sesungguhnya orang yang menyukai seafood untuk makan siang pada hari Jum'at di restoran ini.

Contoh Soal

Dari suatu contoh acak 500 orang yang makan siang di sebuah restoran selama beberapa hari Jum'at, diperoleh informasi x=160 orang yang menyukai seafood. Tentukan selang kepercayaan 95% bagi proporsi sesungguhnya orang yang menyukai seafood untuk makan siang pada hari Jum'at di restoran ini.

$$p = \frac{x}{n} = \frac{160}{500} = 0.32$$

$$p \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$0.32 \pm z_{\frac{0.05}{2}} \sqrt{\frac{0.32(1-0.32)}{500}}$$

$$0.32 \pm (1.96) \sqrt{\frac{0.32(1-0.32)}{500}}$$

$$0.32 \pm 0.041$$

Sehingga diperoleh SK 95% bagi P

$$0.32 - 0.041 < P < 0.32 + 0.041$$

$$0.279 < P < 0.361$$

Kesimpulan: Kita percaya 95% bahwa proporsi orang yang menyukai seafood untuk makan siang pada hari Jum'at di restoran tersebut berada di antara 27.9% dan 36.1%.

Latihan Soal

1

Suatu obat penenang ketegangan syaraf diduga hanya 60% efektif. Hasil percobaan dengan obat baru terhadap 100 orang dewasa penderita ketegangan syaraf. Yang diambil secara acak. Menunjukkan bahwa obat baru ini 70% efektif. Apakah ini merupakan bukti yang cukup untuk menyimpulkan bahwa obat baru itu lebih baik dari yang beredar sekarang ? Buatlah selang kepercayaan untuk kasus ini! (gunakan taraf nyata 0.05)

2

The U.S. Bureau of Labor Statistics reports that 11.3% of U.S. workers belong to unions (BLS website, January 2014). Suppose a sample of 400 U.S. workers is collected in 2014 to determine whether union efforts to organize have increased union membership.

Jika terdapat 52 pekerja yang baru bergabung dalam serikat, apakah cukup untuk menyimpulkan bahwa usaha pengorganisasian serikat meningkatkan keanggotaan? Buatlah selang kepercayaan untuk kasus ini! (gunakan taraf nyata 10%)

Latihan Soal

3

When the 2000 General Social Survey asked subjects whether they would be willing to accept cuts in their standard of living to protect the environment, 344 of 1170 subjects said "yes."

a. Estimate the population proportion who would say "yes."

b. Conduct a significance test to determine whether a majority or minority of the population would say "yes." Report and interpret the P-value.

c. Construct and interpret a 99% confidence interval for the population proportion who would say "yes."

TERIMA KASIH