

Pembuktian Teorema Statistika

Ketakbiasan dan Selang Kepercayaan

STK473 – Praktikum 6

Ketakbiasan \bar{x} dan s^2 sebagai Penduga μ dan σ^2

- \bar{x} adalah penduga tak bias bagi $\mu \rightarrow E(\bar{x}) = \mu$
- s^2 adalah penduga tak bias bagi $\sigma^2 \rightarrow E(s^2) = \sigma^2$

$$s^2 = \sum \frac{(x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Ketakbiasan \bar{x} dan s^2 sebagai Penduga μ dan σ^2

- Algoritme

- Tentukan sebaran yang akan digunakan, termasuk μ dan σ^2
- Ulangi k kali
 - Bangkitkan n buah data dari sebaran yang ditentukan
 - Hitung \bar{x} dan s^2
- Hitung rata-rata dari \bar{x} dan s^2 , bandingkan dengan μ dan σ^2

Simulasi

```
n<-10
k<-1000 #ulangan
pop<-rnorm(100,10,sqrt(5)) #populasi terhingga
mean(pop)
var(pop)*(100-1)/100 #fungsi var di R adalah ragam contoh
cth<-matrix(NA,k,n)
for (i in 1:k) cth[i,]<-sample(pop,n)

xbar<-apply(cth,1,mean)
dev<-apply(cth,1,var)
mean(xbar)
mean(dev)
```

Ketakbiasan Penduga Least-Square dalam Regresi Linier

- $b = (X'X)^{-1}X'y$ dapat ditunjukkan sebagai penduga tak bias bagi β jika $E(\varepsilon) = 0$

Ketakbiasan Penduga Least-Square dalam Regresi Linier

- Algoritme
 - Tentukan β_0 dan β_1
 - Ulangi k kali
 - Bangkitkan n buah data X dari sebaran yang tertentu (misal: seragam)
 - Bangkitkan ε yang menyebar normal dengan nilai tengah 0 dan ragam σ_ε^2
 - Hitung b_0 dan b_1
 - Hitung rata-rata dari b_0 dan b_1 , bandingkan dengan β_0 dan β_1

Simulasi

```
n<-20 #ukuran contoh
ulangan<-100
beta<-c(8,20) #beta0=8 dan beta1=20
sigmaerror<-3

betaduga<-matrix(NA,ulangan,2)
for (i in 1:ulangan){
  x<-runif(n)*10
  epsilon<-rnorm(n,0,sqrt(sigmaerror))
  X<-cbind(1,x)
  y<-X %*% beta + epsilon
  betaduga[i,]<-solve(t(X) %*% X) %*% (t(X) %*% y)
}
rataanbetaduga<-apply(betaduga,2,mean)
names(rataanbetaduga)<-c("b0","b1")
rataanbetaduga
```

Selang Kepercayaan

- Apa arti dari SK 95%?
 - **SK 95% bagi θ** : Kita percaya 95% bahwa selang a sampai b memuat nilai parameter θ yang sebenarnya
 - **SK 95%**: Jika kita melakukan 100 kali percontohan acak dan setiap percontohan acak dibuat SK-nya, maka dari 100 SK yang terbentuk, ada 95 SK yang mencakup parameter, sisanya sebanyak 5 SK meleset tidak mencakup parameter

Selang Kepercayaan

- Algoritme

- Tentukan sebaran yang akan digunakan, termasuk μ dan σ^2
- Ulangi k kali
 - Bangkitkan n buah data dari sebaran yang ditentukan
 - Hitung \bar{x} dan s^2
 - Hitung $\sigma_{\bar{x}}^2$ dan buat selang kepercayaan $(1-\alpha)\%$
- Hitung proporsi banyaknya selang kepercayaan yang memuat μ , bandingkan dengan $(1-\alpha)$

Simulasi

```
n<-50
ulangan<-50
alpha<-0.05
mu<-50; std<-10
sampel<-matrix(rnorm(n*ulangan,mu,std),ulangan)
xbar<-apply(sampel,1,mean)
dev<-apply(sampel,1,sd)
SE<-dev/sqrt(n)
z<-qnorm(1-alpha/2)
sk<-(xbar-z*SE<mu & mu<xbar+z*SE)
sum(sk)/ulangan #proporsi banyaknya SK yang memuat mu
matplot(rbind(xbar-z*SE,xbar+z*SE), rbind(1:ulangan,1:ulangan),
        col=ifelse(sk,"blue","red"), type="l",lty=1)
abline(v=mu)
```

thank you!