Pembangkitan Bilangan Acak Normal

METODE SIMULASI DAN RESAMPLING

Peubah Acak Normal

Pembangkitan Peubah Acak Normal

1. Dalil Limit Pusat
2. Metode Box-Muller
3. Metode Polar Marsaglia

Dalil Limit Pusat

Pada limit pusat sebaran normal sering ditemui, dan menjadi dasar banyak teori statistik.

menggunakan dalil limit pusat untuk melakukan simulasi peubah acak normal.

Peubah Acak Normal

Pembangkitan Peubah Acak Normal

Dalil Limit Pusat

$n \to \infty$

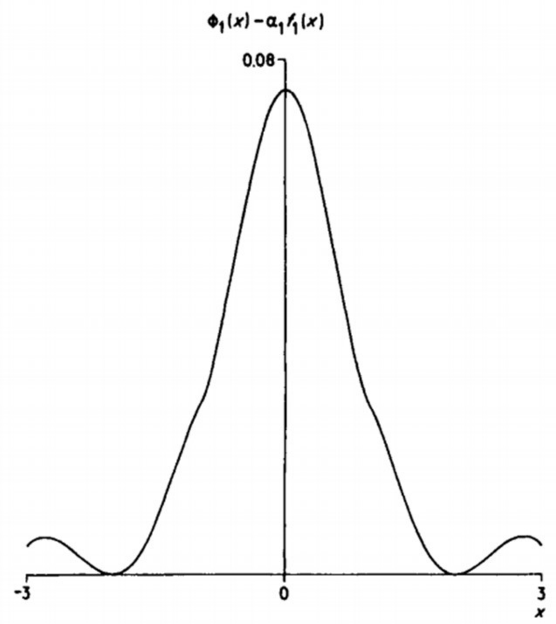
Berapa besar n?

$U_1, U_2, \ldots, U_n \sim \text{Uniform}(0,1) \rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} U_i \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$

tergntung pada kegunaannya, dan seberapa dekat aproksimasi yang diinginkan

Kasus n = 2 tidak cocok, karena
X mempunyai sebaran segitiga,

$$f_2(x) = \beta g(x) + (1 - \beta)h(x)$$



tetapi untuk n = 3, sebaran N
sudah 'berbentuk lonceng'
dengan baik

Sebaran Seragam (uniform)

Uniform(a, b)

pdf	$f(x\|a, b) = \frac{1}{b-a}, \quad a \le x \le b$
mean and variance	$\mathrm{E}X = \frac{b+a}{2}, \quad \mathrm{Var}\, X = \frac{(b-a)^2}{12}$
mgf	$M_X(t) = \frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$

$U_1, U_2, \ldots, U_n \sim$ Seragam(0,1)

$$E(U_i) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Var(U_i) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

Sebaran Normal

Normal(μ, σ^2)

pdf $\quad f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0$

mean and variance $\quad \mathrm{E}X = \mu, \quad \mathrm{Var}\, X = \sigma^2$

mgf $\quad M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$

$E(X) = \mu$ dan $Var(X) = \sigma^2$

$$misalkan\ X = \sum_{i=1}^{n} U_i + k$$

$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} U_i + k\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(U_i) = \frac{n}{12} = \sigma^2$$

$$\boxed{n = 12\sigma^2}$$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} U_i + k\right) = \sum_{i=1}^{n} E(U_i) + k = \frac{n}{2} + k = \mu$$

$$\boxed{k = \mu - \frac{n}{2}}$$

Peubah Acak Normal

$U_1, U_2, \ldots, U_n \sim$ Uniform(0,1) $\rightarrow$ $X = \sum_{i=1}^{n} U_i \sim$ Normal (μ, σ^2)

Paling mudah n=12

$E(U_i) = 1/2$

$Var(U_i) = 1/12$

$\rightarrow$ $X = \sum_{i=1}^{n} U_i - 6 \sim$ Normal (0, 1)

??

$X = \sum_{i=1}^{??} U_i - ?? \sim$ Normal (μ, σ^2)

X~ Normal (0, 1)

$$X = \sum_{i=1}^{n} U_i - 6$$

Y~ Normal (5, 10)

$$n = 12\sigma^2 = 12x10 = 120$$

$$k = \mu - \frac{n}{2} = 10 - \frac{120}{2} = -55$$

$$Y = \sum_{i=1}^{120} U_i - 55$$

$$Y = \sqrt{10}N + 5$$

Buktikan!!

Peubah Acak Normal

Pembangkitan Peubah Acak Normal | Dalil Limit Pusat

Untuk sembarang peubah acak X_i yang saling bebas dan identik, $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ akan menyebar normal untuk n cukup besar

$$\sum_{i=1}^{n} U_i \sim Normal(\mu, \sigma^2)$$

Peubah Acak Normal

Pembangkitan Peubah Acak Normal

Metode Box-Muller

Metode ini memperoleh peubah acak normal melalui transformasi satu-ke-satu dari **dua peubah acak U(0, 1)**.

Untuk dua peubah acak U(0,1) yang saling bebas, U_1 dan U_2,

$$N_1 = (-2 \log_e U_1)^{1/2} \cos (2\pi U_2)$$
$$N_2 = (-2 \log_e U_1)^{1/2} \sin (2\pi U_2)$$

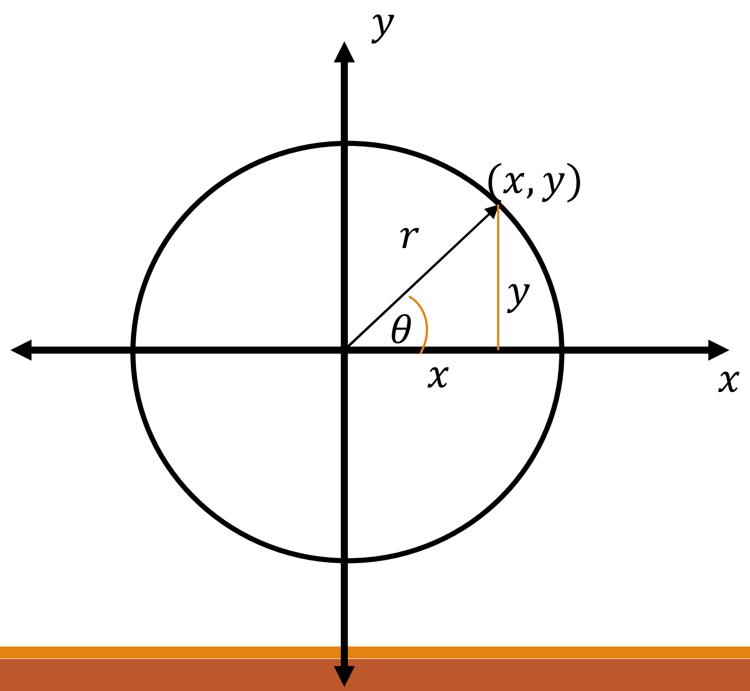
$N_1 \sim N(0,1)$ dan $N_2 \sim N(0,1)$

Peubah Acak Normal

Pembangkitan Peubah Acak Normal

Metode Box-Muller

Jika kita mulai dengan peubah acak independen N(0, 1), X, dan Y , mendefinisikan sebuah titik (x, y) dalam dua dimensi dengan koordinat cartesius, dan kita ubah ke koordinat polar (R,Θ), maka:



- Fungsi sebelumnya bisa dituliskan menjadi:
  - x = r cos θ
  - y = r sin θ

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \sim\chi^2_{(2)} & \sim\chi^2_{(1)} & \sim\chi^2_{(1)} \end{array}$$

$\downarrow$ ekuivalen

$$\sim exponential\left(\lambda = \tfrac{1}{2}\right) \xrightarrow[\text{negative log}]{\text{Bentuk}} -2\log_e U_1$$

$U_1 \sim$ uniform (0,1)

$r^2 = -2\log_e U_1 \Rightarrow r = (-2\log_e U_1)^{1/2}$

$\theta = 2\pi U_2$

U_2~ uniform (0,1)

$r = (-2 \log_e U_1)^{1/2}$

$\theta = 2\pi U_2$

Konversi ke koordinat cartesius

- $X = R \cos \Theta = (-2 \log_e U_1)^{1/2} \cos(2\pi U_2)$
- $Y = R \sin \Theta = (-2 \log_e U_1)^{1/2} \sin(2\pi U_2)$

Peubah Acak Normal

Pembangkitan Peubah Acak Normal

Metode Box-Muller

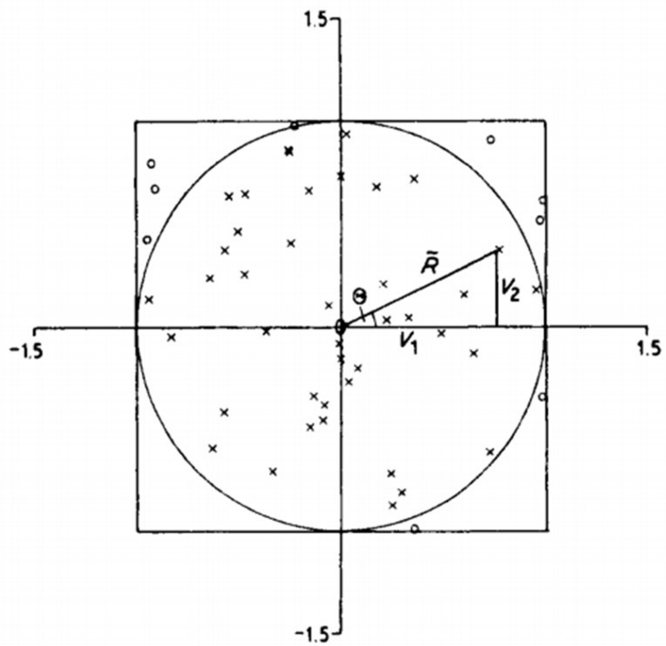
Jika kita mulai dengan peubah acak independen N(0, 1), X, dan Y , mendefinisikan sebuah titik (N1, N2) dalam dua dimensi dengan koordinat cartesius, dan kita ubah ke koordinat polar (R,Θ), maka:

- Fungsi sebelumnya bisa dituliskan menjadi:
  - $X = R \cos \Theta$
  - $Y = R \sin \Theta$
- dengan
  - $R = (-2 \log_e U_1)^{1/2}$ ~ Eksponensial (1/2)
  - $\Theta = 2\pi U_2$ ~ $U(0,2\pi)$

- $(X, Y) \leftrightarrow (R, \Theta)$
- Koordinat Cartesius $\leftrightarrow$ koordinat polar

Metode Polar Marsaglia

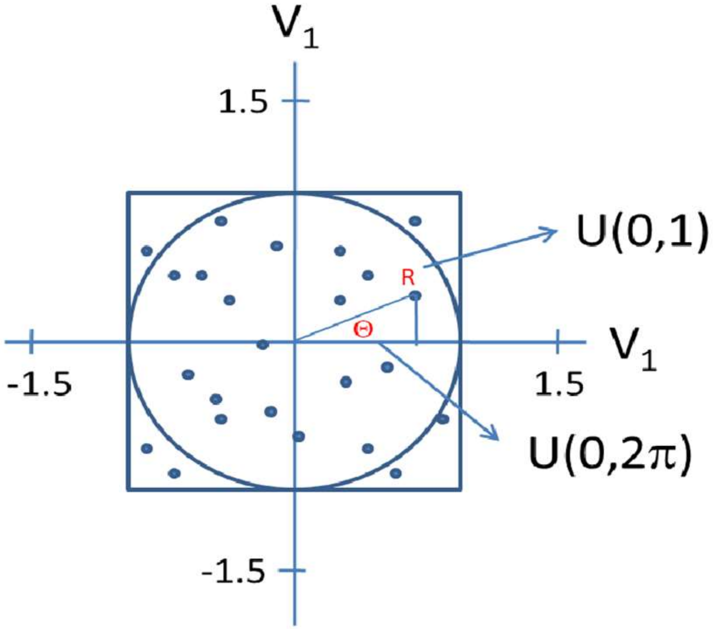
- Cara menghindari penggunaan fungsi trigonometri adalah dengan membuat sinus dan cosinus sudut-sudut yang menyebar uniform secara langsung tanpa simulasi terlebih dahulu.
- Hal ini dapat dilakukan dengan metode *rejection* sebagai berikut:
  - Jika U~ U(0, 1),
  - maka 2U ~ U(0, 2),
  - dan V = 2U —1 ~ U(-1, 1)
- Jika kita memilih dua peubah acak independen U(-1, 1), V1 dan V2 , maka ini menentukan suatu titik secara acak dalam kuadrat Gambar di samping, dengan koordinat polar (R, Θ) diberikan oleh:
  - $R^2 = V_1^2 + V_2^2$
  - $\tan \Theta = V_2/V_1$



Peubah Acak Normal

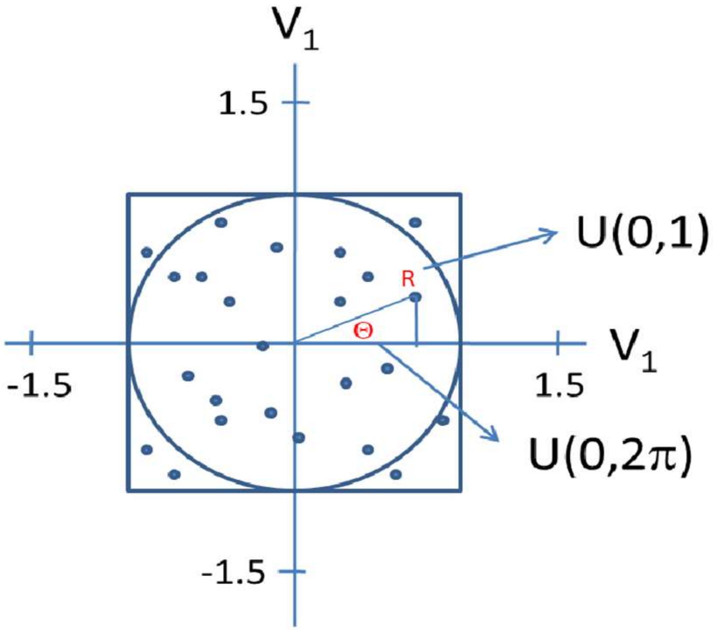
Pembangkitan Peubah Acak Normal

Metode Polar-Marsaglia



- Bila $U \sim U(0,1)$
  - $2U \sim U(0,2)$
  - $V = (2U - 1) \sim U(-1,1)$

- $V_1, V_2 \sim U(-1,1)$
  - $R^2 = V_1^2 + V_2^2$
  - $\tan \Theta = V_2/V_1$



- Pemilihan titik-titik tersebut secara berulang-ulang menghasilkan penyebaran titik-titik secara acak di dalam persegi
- penolakan titik-titik di luar lingkaran yang ditunjukkan menyisakan penyebaran titik-titik acak yang seragam di dalam lingkaran.

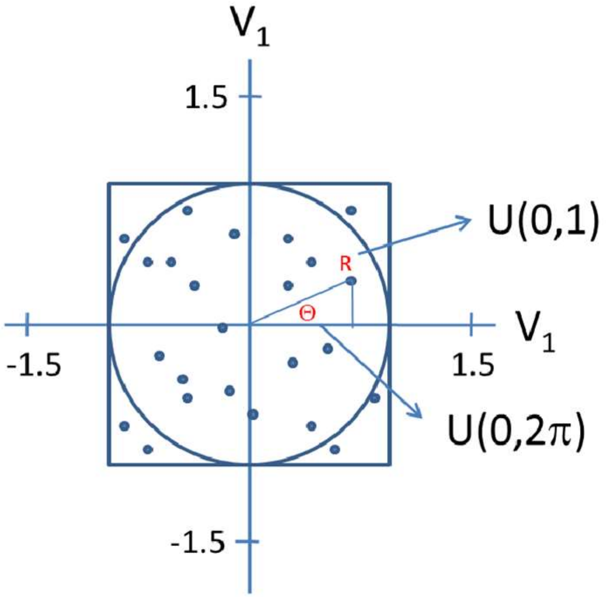
- koordinat kutub R dan Θ adalah peubah acak independen, dan selanjutnya Θ adalah peubah acak U(0, 2π).
- Selain itu R^2~U(0, 1) dan pasangan (R, Θ) adalah yang dibutuhkan oleh metode Box-Muller, dan di sini kita cukup menulis

$$\sin\Theta = \frac{V_2}{R} = V_2(V_1^2 + V_2^2)^{-1/2}$$

$$\cos\Theta = V_1(V_1^2 + V_2^2)^{-1/2}$$

Peubah Acak Normal

Pembangkitan Peubah Acak Normal Metode Polar-Marsaglia



Dari Metode Box-Muller:

- $X = R \cos \Theta = (-2 \log_e U_1)^{1/2} \operatorname{Cos}(2\pi U_2)$
- $Y = R \sin \Theta = (-2 \log_e U_1)^{1/2} \operatorname{Sin}(2\pi U_2)$

R

$$\cos\Theta = \frac{V_1}{R} = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

$$\sin\Theta = \frac{V_2}{R} = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

Peubah Acak Normal

Pembangkitan Peubah Acak Normal Metode Polar-Marsaglia

- $X = (-2 \log_e U_1)^{1/2} \cos(2\pi U_2)$
- $Y = (-2 \log_e U_1)^{1/2} \sin(2\pi U_2)$

- $X = (-2 \log_e R^2)^{1/2} V_1 (V_1^2 + V_2^2)^{-1/2}$
- $Y = (-2 \log_e R^2)^{1/2} V_2 (V_1^2 + V_2^2)^{-1/2}$

- $X = (-2 \log_e (V_1^2 + V_2^2))^{1/2} V_1 (V_1^2 + V_2^2)^{-1/2}$
- $Y = (-2 \log_e (V_1^2 + V_2^2))^{1/2} V_2 (V_1^2 + V_2^2)^{-1/2}$

- $X = (-2 \log_e W)^{1/2} V_1 (W)^{-1/2}$
- $Y = (-2 \log_e W)^{1/2} V_2 (W)^{-1/2}$
- $X = V_1 \{(-2 \log_e W)/W\}^{1/2}$
- $Y = V_2 \{(-2 \log_e W)/W\}^{1/2}$

- dengan $W = V_1^2 + V_2^2$

TERIMA KASIH