Pembangkitan Bilangan Acak Tunggal

Pika Silvianti

Terima Kasih

Model Simulasi

Inti dari setiap model simulasi terdapat kemampuan untuk menciptakan angka-angka yang meniru angka-angka yang kita harapkan dalam kehidupan nyata.

Dalam pemodelan simulasi kita akan mengasumsikan bahwa proses tertentu akan menyebar menurut peubah acak tertentu.

Ilustrasi

- Asumsi: seorang karyawan di toko donat memerlukan waktu acak untuk melayani pelanggan yang didistribusikan menurut variabel acak Normal dengan rataan μ dan ragam σ^2
- Untuk kemudian melakukan simulasi, komputer perlu menghasilkan waktu penyajian acak.
- Hal ini sesuai dengan simulasi bilangan yang menyebar menurut sebaran tertentu.

Sebaran Peubah Acak

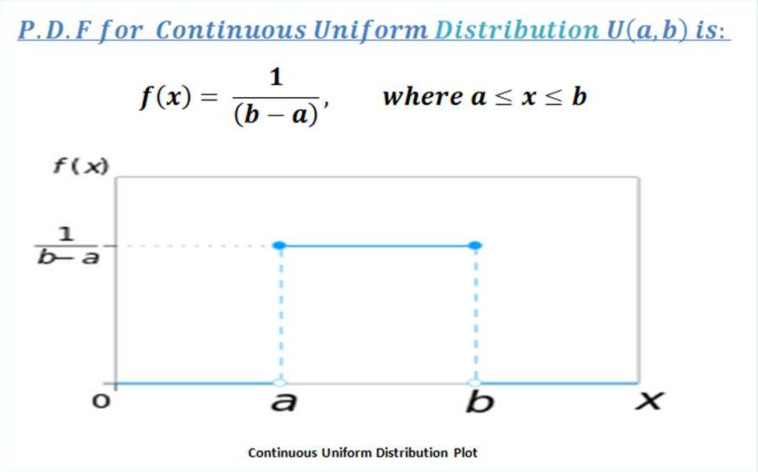
- Bernoulli
- Binomial
- Seragam Diskret
- Poisson
- Seragam
- Normal
- Eksponensial
- dan lain-lain...

Membangkitkan Bilangan Acak Seragam (uniform)

Pertemuan 2

Kenapa Sebaran Seragam?

1. Sebaran kontinu yang paling sederhana itumenggambarkan distribusi beberapa interval bilangan
2. Dari seragam, bisa ditransformasikan menjadi sebaran lain yang rumit



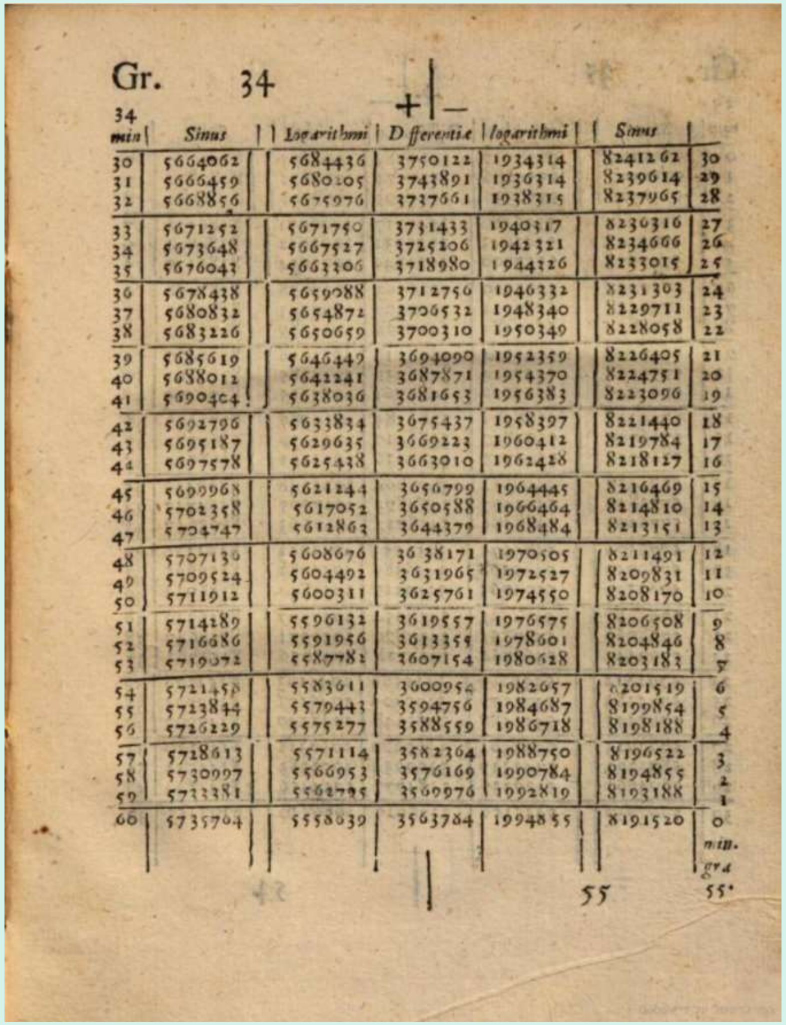
Proses apa pun di alam yang dianggap acak dapat digunakan untuk mencoba mensimulasikan bilangan acak seragam.

Kendall and Babbington-Smith (1939a)

Menggunakan rotating disk dengan 10 uniform segments, yang dihentikan secara acak

Tippett (1925)

menggunakan **digit yang dibaca dari tabel logaritma.**



Gr. 34 + | −

34 min	Sinus	Logarithmi	Differentiæ	logarithmi	Sinus	
30	5664062	5684436	3750122	1934314	8241262	30
31	5666459	5680205	3743891	1936314	8239614	29
32	5668856	5675976	3737661	1938315	8237965	28
33	5671252	5671750	3731433	1940317	8236316	27
34	5673648	5667527	3725206	1942321	8234666	26
35	5676043	5663306	3718980	1944326	8233015	25
36	5678438	5659088	3712756	1946332	8231303	24
37	5680832	5654872	3706532	1948340	8229711	23
38	5683226	5650659	3700310	1950349	8228058	22
39	5685619	5646449	3694090	1952359	8226405	21
40	5688012	5642241	3687871	1954370	8224751	20
41	5690404	5638036	3681653	1956383	8223096	19
42	5692796	5633834	3675437	1958397	8221440	18
43	5695187	5629635	3669223	1960412	8219784	17
44	5697578	5625438	3663010	1962428	8218127	16
45	5699968	5621244	3656799	1964445	8216469	15
46	5702358	5617052	3650588	1966464	8214810	14
47	5704747	5612863	3644379	1968484	8213151	13
48	5707136	5608676	3638171	1970505	8211491	12
49	5709524	5604492	3631965	1972527	8209831	11
50	5711912	5600311	3625761	1974550	8208170	10
51	5714289	5596132	3619557	1976575	8206508	9
52	5716686	5591956	3613359	1978601	8204846	8
53	5719072	5587782	3607154	1980628	8203183	7
54	5721458	5583611	3600954	1982657	8201519	6
55	5723844	5579443	3594756	1984687	8199854	5
56	5726229	5575277	3588559	1986718	8198188	4
57	5728613	5571114	3582364	1988750	8196522	3
58	5730997	5566953	3576169	1990784	8194855	2
59	5733381	5562795	3569976	1992819	8193188	1
60	5735764	5558639	3563784	1994855	8191520	0
						min. gra

55 55.

ERNIE

Merupakan komputer yang digunakan untuk memilih obligasi premium yang unggul di lotere warga negara Inggris, menggunakan 'suara' elektronik dari tabung neon.

Alat bantu Simulasi

- Dadu dan mesin tidak praktis kecuali untuk simulasi terkecil, yang mana sekarang dalam hal apapun mungkin dilakukan dengan bantuan tabel yang tersedial
- Simulasi skala besar biasanya dilakukan dengan menggunakan komputer, dan komputer di awal perkembangannya dilengkapi dengan generator nomor acak bawaan dari jenis fisik, menggunakan fitur elektronik acak, seperti di ERNIE
- kalkulator memiliki tombol RND untuk mensimulasikan U (0, 1) peubah acak

Masalah…

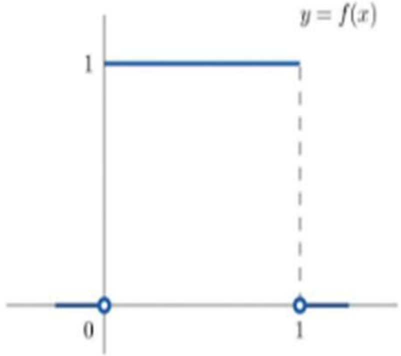
- perangkat tersebut menjadi tidak dapat diandalkan, karena perubahan pada perangkat seiring berjalannya waktu; jadi dadu, misalnya, bisa menjadi tidak rata, sehingga menimbulkan bias.
- Pemeriksaan terhadap angka-angka yang dihasilkan harus sering dilakukan

Pendekatan Modern

Pendekatan modern terhadap simulasi skala besar dilakukan untuk menghindari perlunya pemeriksaan yang sering dengan memproduksi barisan bilangan yang dapat ditunjukkan secara matematis mempunyai sifat tertentu sesuai fitur yang diinginkan.

Pendekatan ini juga mempunyai kelemahan

X ~ Uniform (0,1)



Jadi, bagaimana kita menghasilkan angka acak yang menyebar seragam?

Mulai dari sebaran seragam yang paling sederhana

X ~ Uniform (0,1)

So we have intervals of x_i, $0 \leq x_i \leq 1$

Congruential Generator :

$$X_{n+1} = aX_n + b \ (\mathrm{mod}\ m), n \geq 0$$

$$U_i = \frac{X_i}{m} \sim U(0,1)$$

Congruental Generator

Bilangan yang dihasilkan tidak benar-benar acak, Sehingga disebutr Pseudo-random Number

Maximum cycle

- b & m don't have same factors
- (a-1) (mod prime factor of m) = 0
- (a-1) (mod 4) = 0, if m (mod 4) = 0

So we got :

$\boxed{m = 2^k, k \geq 2}$ $\boxed{a = 4c + 1}$

$\boxed{b > 0, \text{odd numbers}}$

Independence of Observations

$$cov(X_i, X_j) \approx 0$$

$$\rho = \left[\frac{1}{a} - \frac{6b}{am}\left(1 - \frac{b}{m}\right)\right] \pm \frac{a}{m}$$

Congruential Generator (2)

Note:
Modulus adalah sisa pembagian dari suatu bilangan terhadap bilangan lainnya.
Contoh: 100 mod 9 = 1. Karena 100/9 = 11 dengan sisa sebesar 1.

Ilustrasi

$$X_{n+1} = aX_n + b \ (\mathrm{mod}\ m), n \geq 0$$
$$U_i = \frac{X_i}{m} \sim U(0,1)$$

$a = 1598$ $X_0 = 78$

$b = 17$

$m = 1000$

i	$aX_{i-1} + b$	X_i	U_i
0		78	
1	124661	661	0.661
2	1056295	295	0.295
3	471427	427	0.427
4	682363	363	0.363
5	580091	91	0.091
6	145435	435	0.435
7	695147	147	0.147
8	234923	923	0.923
9	1474971	971	0.971
10	1551675	675	0.675
11	1078667	667	0.667
12	1065883	883	0.883
13	1411051	51	0.051

Aplikasi di R

```
x0<-78
n<-250
xi<-matrix(NA,n,3)
colnames(xi)<-c("aX(i-1)+b","Xi","Ui")
for (i in 1:n)
{
xi[i,1]<-(1598*x0+17)
xi[i,2]<-xi[i,1]%%1000
xi[i,3]<-xi[i,2]/1000
x0<-xi[i,2]
}
hist(xi[,3])
```

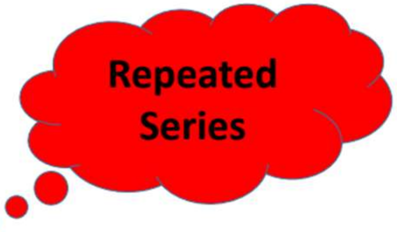
Other Generator Function

$$\boxed{U_{n+1} = (\pi + U_n)^5 (\mathrm{mod}\ 1), n \geq 0}$$

```
n<-1000
x1<-0.9
for (i in 2:n) x1[i]<-(pi+x1[i-1])^5%%1
hist(x1)
```

```
> cbind("i"=1:20, "Xi"=xi[1:20,2], "i"=101:120,
  "Xi"=xi[101:120,2], "i"=201:220,
  "Xi"=xi[201:220,2])
```

	i	Xi	i	Xi	i	Xi
[1,]	1	661	101	411	201	411
[2,]	2	295	102	795	202	795
[3,]	3	427	103	427	203	427
[4,]	4	363	104	363	204	363
[5,]	5	91	105	91	205	91
[6,]	6	435	106	435	206	435
[7,]	7	147	107	147	207	147
[8,]	8	923	108	923	208	923
[9,]	9	971	109	971	209	971
[10,]	10	675	110	675	210	675
[11,]	11	667	111	667	211	667
[12,]	12	883	112	883	212	883
[13,]	13	51	113	51	213	51
[14,]	14	515	114	515	214	515
[15,]	15	987	115	987	215	987
[16,]	16	243	116	243	216	243
[17,]	17	331	117	331	217	331
[18,]	18	955	118	955	218	955
[19,]	19	107	119	107	219	107
[20,]	20	3	120	3	220	3



Hasil pembangkitan data

- Pada hasil disamping terlihat series dari angka-angka yang berulang
- Hal ini menunjukkan kalua bilangan yang dibangkitkan memang tidak sepenuhnya random
- Hal ini misa diminimalisir dengan menggunakan aturan maximum cycle

$$X \sim \text{Uniform}\ (0,1) \xrightarrow{?} Y \sim \text{Uniform}\ (a,b)$$

If we have X~U 0,1 , how to generate Y~U(a, b) ?

X ~ Uniform (0,1)

$$f(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq 0 \\ 0 \;, x\ lainnya \end{cases}$$

Y ~ Uniform (a,b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a \leq x \leq b \\ 0 \;, x\ lainnya \end{cases}$$

Y = (b-a)X + a

transformasi

Aplikasi di R

$Y \sim \text{Uniform}(3,20)$

```
Y<-(20-3)*x1+3
hist(Y)
```

Ilustrasi (soal 3.5)

100 kelereng bernomor membentuk populasi dalam percobaan pengambilan sampel. Siswa menduga berat rata-rata populasi(μ= **37,63 g**) dengan memilih 10 kelereng secara **acak menggunakan tabel bilangan acak (random)**, dan juga dengan memilih sampel 10 kelereng, **menggunakan penilaian subjektif mereka saja (judgement).** Hasil yang diperoleh dari 32 kelas diberikan di samping ini:

Judgement sample means	Random sample means
62.63	31.45
35.85	32.12
55.36	51.93
66.43	24.74
34.96	43.32
37.23	29.41
34.45	42.67
60.53	47.94
49.61	28.76
56.07	56.43
59.02	31.21
50.65	32.73
33.34	55.37
58.62	36.65
47.02	22.44
48.34	40.04
28.56	44.65
26.65	41.43
46.34	39.39
27.86	26.39
39.62	23.88
25.45	35.15
48.82	35.88
66.56	28.03
37.25	31.71
45.98	43.98
32.46	61.49
54.03	31.52
51.89	33.99
62.81	33.78
59.74	49.69
14.05	22.97

(lanjutan ilustrasi soal 3.5)

Hitung:

	Judgement	Random
$\bar{x}$		
s		

Diskusikan, dengan mengacu pada data ini, pentingnya pengambilan sampel secara acak.