

Abstract geometric lines in the top-left corner of the slide, consisting of several thin black lines forming various polygons and intersecting patterns.

AKAR PERSAMAAN SPL

STA1373 - Optimisasi Statistika

TUJUAN PERKULIAHAN

- Membuat solusi numerik system persamaan linear dengan metode langsung (direct method): Eliminasi Gauss, Row Echelon Form, Eliminasi Gauss-Jordan
- Membuat solusi numerik system persamaan linear dengan metode iteratif: Jacobi & Gauss-Seidel

Pendahuluan: Persamaan Linier

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1N}x_N = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2N}x_N = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3N}x_N = b_3$$

⋮

$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + a_{M3}x_3 + \dots + a_{MN}x_N = b_M$$

- N variable yang tidak diketahui ($x_j, j=1, 2, \dots, N$)
- M persamaan
- Koefisien dalam persamaan ($a_{ij}, i=1, 2, \dots, N ; j=1, 2, \dots, M$) dan koefisien hasil ($b_i, i=1, 2, \dots, M$) adalah parameter yang diketahui

Pendahuluan: Persamaan Linier

Persamaan linier dapat ditulis dalam bentuk matrix:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dimana A adalah koefisien matrix, dan b adalah vector sisi kanan:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ & \dots & & \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_M \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_M \end{bmatrix}$$

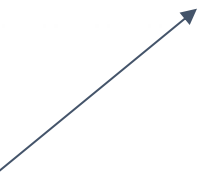
Jika jumlah koefisien yang tidak diketahui sama dengan jumlah persamaan, $N=M$, kita bisa mencari solusinya.

ELIMINASI GAUSS

$$\begin{bmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & \cdots & a_{1.n} & b_1 \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & \cdots & a_{2.n} & b_2 \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & \cdots & a_{3.n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m.1} & a_{m.2} & a_{m.3} & \cdots & a_{m.n} & b_n \end{bmatrix}$$

$$A = [A|B]$$

Augmented Matrix



SYARAT:

- ukuran persamaan linier simultan bujursangkar (jumlah persamaan sama dengan jumlah variabel bebas).
- sistem persamaan linier *non-homogen* di mana minimal ada satu nilai vektor konstanta **B** tidak nol atau terdapat $b_n \neq 0$
- Determinan dari matriks koefisien sistem persamaan linier tidak sama dengan nol

ELIMINASI GAUSS

Selesaikan Sistem Persamaan berikut:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

Solusi: (1,2,3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_3 - 2B_1]{B_2 - B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Row echelon form

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 - B_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Substitusi balik

$$x_3 = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{1}(-4 - (-2)3) = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{1}(6 - 2 - 3) = 1$$

ELIMINASI GAUSS

Selesaikan Sistem Persamaan berikut:

$$\begin{array}{rrcrcl} -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 6x_1 & - & 6x_2 & + & 7x_3 & = & -7 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & -6 \end{array}$$

Solusi: (2,2,-1)

ELIMINASI GAUSS JORDAN

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \end{bmatrix}$$

- metode eliminasi Gauss-Jordan membentuk matriks menjadi bentuk *reduced row echelon form*.
- Metode ini merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss, dimana matriks sebelah kiri *augmented matrix* diubah menjadi matriks ?

ELIMINASI GAUSS JORDAN

Selesaikan Sistem Persamaan berikut:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 8\end{aligned}$$

Solusi: (2,1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{B_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - B_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ELIMINASI GAUSS JORDAN

Selesaikan Sistem Persamaan berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Solusi: (1, -1, 2)

ITERASI JACOBI

- Ditemukan oleh matematikawan Jerman, yaitu Carl Gustav Jakob Jacobi
- Dalam hal tertentu metode ini lebih baik dibanding dengan metode langsung, misal untuk matriks yang tersebar, yaitu matriks **dengan banyak element nol**
- Dapat juga digunakan untuk menyelesaikan system persamaan tidak linier

ITERASI JACOBI

- Hitungan dimulai dengan perkiraan sembarang untuk variable yang dicari (biasanya semua variable diambil sama dengan nol)
- Nilai perkiraan awal tersebut disubstitusikan ke dalam ruas kanan dari system persamaan yang sudah dimodifikasi
- Nilai variable baru yang didapat disubstitusikan lagi ke ruas kanan dari system persamaan untuk mendapatkan nilai perkiraan baru
- Prosedur diulang sampai nilai setiap variable pada iterasi ke n mendekati nilai pada iterasi ke $n-1$ (converged)

ITERASI JACOBI

- Sebagai contoh, sistem 3 persamaan dengan 3 bilangan tak diketahui :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$$

- Persamaan pertama dari sistem di atas dapat digunakan untuk menghitung x_1 sebagai fungsi dari x_2 dan x_3 . Demikian juga persamaan kedua dan ketiga untuk menghitung x_2 dan x_3 , sehingga didapat :

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)}{a_{33}}$$

ITERASI JACOBI

- Sebagai contoh, sistem 3 persamaan dengan 3 bilangan tak diketahui :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$$

- Persamaan pertama dari sistem di atas dapat digunakan untuk menghitung x_1 sebagai fungsi dari x_2 dan x_3 . Demikian juga persamaan kedua dan ketiga untuk menghitung x_2 dan x_3 , sehingga didapat :

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)}{a_{33}}$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_i^n - x_i^{n-1}}{x_i^n} \right| * 100\% < \varepsilon_s$$

converged

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{n+1} - x_i^n)^2} < t_0$$

ITERASI JACOBI

Selesaikan Sistem Persamaan berikut:

$$3x + y - z = 5$$

$$4x + 7y - 3z = 20$$

$$2x - 2y + 5z = 10$$

$$x = \frac{(5 - y + z)}{3}$$

$$y = \frac{(20 - 4x + 3z)}{7}$$

$$z = \frac{(10 - 2x + 2y)}{5}$$

Dicoba iterasi awal:

$$x = y = z = 0$$

$$x' = \frac{(5 - y + z)}{3} = \frac{(5 - 0 + 0)}{3} = \mathbf{1,667}$$

$$y' = \frac{(20 - 4x + 3z)}{7} = \frac{(20 - 4.0 + 3.0)}{7} = \mathbf{2,857}$$

$$z' = \frac{(10 - 2x + 2y)}{5} = \frac{(10 - 2.0 + 2.0)}{5} = \mathbf{2}$$

ITERASI JACOBI

Digunakan nilai x, y, dan z pada hitungan sebelumnya (x',y',z')

$$x'' = \frac{(5 - y + z)}{3} = \frac{(5 - 2,857 + 2)}{3} = \mathbf{1,381}$$

$$\varepsilon_x = \left| \frac{1,381 - 1,667}{1,381} \right| * 100\% = \mathbf{20,69\%}$$

$$y'' = \frac{(20 - 4x + 3z)}{7} = \frac{(20 - 4 \cdot (1,667) + 3 \cdot (2))}{7} = \mathbf{2,762}$$

$$\varepsilon_y = \left| \frac{2,762 - 2,857}{2,762} \right| * 100\% = \mathbf{3,45\%}$$

$$z'' = \frac{(10 - 2x + 2y)}{5} = \frac{(10 - 2 \cdot (1,667) + 2 \cdot (2,857))}{5} = \mathbf{2,476}$$

$$\varepsilon_z = \left| \frac{2,476 - 2}{2,476} \right| * 100\% = \mathbf{19,22\%}$$

Hitungan dilanjutkan dengan prosedur yang sama, sampai pada akhirnya diperoleh kesalahan yang relative kecil pada setiap variable nya

ITERASI JACOBI

I	x	y	z	x^*	y^*	z^*	ϵx	ϵy	ϵz
1	0	0	0	1,666667	2,857143	2			
2	1,666667	2,857143	2	1,380952	2,761905	2,47619	-20,69%	-3,45%	19,23%
3	1,380952	2,761905	2,47619	1,571429	3,129252	2,552381	12,12%	11,74%	2,99%
4	1,571429	3,129252	2,552381	1,474376	3,053061	2,623129	-6,58%	-2,50%	2,70%
5	1,474376	3,053061	2,623129	1,523356	3,13884	2,631474	3,22%	2,73%	0,32%
6	1,523356	3,13884	2,631474	1,497545	3,114428	2,646194	-1,72%	-0,78%	0,56%
7	1,497545	3,114428	2,646194	1,510588	3,135486	2,646753	0,86%	0,67%	0,02%
8	1,510588	3,135486	2,646753	1,503756	3,128272	2,649959	-0,45%	-0,23%	0,12%
9	1,503756	3,128272	2,649959	1,507229	3,133551	2,649807	0,23%	0,17%	-0,01%
10	1,507229	3,133551	2,649807	1,505419	3,131501	2,650529	-0,12%	-0,07%	0,03%
11	1,505419	3,131501	2,650529	1,506343	3,132844	2,650433	0,06%	0,04%	0,00%
12	1,506343	3,132844	2,650433	1,505863	3,132275	2,650601	-0,03%	-0,02%	0,01%
13	1,505863	3,132275	2,650601	1,506108	3,132622	2,650565	0,02%	0,01%	0,00%
14	1,506108	3,132622	2,650565	1,505981	3,132466	2,650605	-0,01%	0,00%	0,00%
15	1,505981	3,132466	2,650605	1,506046	3,132556	2,650594	0,00%	0,00%	0,00%

ITERASI GAUSS-SEIDEL

- Teknik iterasi jarang digunakan untuk menyelesaikan system persamaan linier berukuran kecil karena metode-metode langsung seperti Eliminasi Gauss lebih efisien daripada metode iterative
- Akan tetapi untuk system persamaan linier berukuran besar dengan persentase element nol pada matriks koefisien besar, Teknik iterasi lebih efisien daripada metode langsung dalam hal penggunaan memori computer maupun waktu komputasi
- Iterasi Gauss Seidel dapat memberikan tingkat toleransi yang lebih kecil karena dapat meneruskan iterasi sampai solusi seteliti mungkin sesuai dengan batas toleransi yang ditentukan

ITERASI GAUSS-SEIDEL

- Pada iterasi Jacobi, nilai x_1 yang dihitung dari persamaan pertama tidak digunakan untuk menghitung nilai x_2 dengan persamaan kedua. Demikian juga nilai x_2 tidak digunakan untuk mencari x_3 , sehingga nilai tersebut tidak dimanfaatkan
- Sebenarnya nilai-nilai baru tersebut lebih baik dari nilai-nilai lama
- Dalam Iterasi Gauss-Seidel, nilai-nilai tersebut dimanfaatkan untuk menghitung variable baru nya

ITERASI GAUSS-SEIDEL

$$x_1^1 = \frac{(b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0)}{a_{11}}$$

- Nilai baru dari x_1^1 tersebut kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan kedua dari sistem yang termodifikasi :

$$x_2^1 = \frac{(b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0)}{a_{22}}$$

- Demikian juga ke dalam persamaan ketiga dari sistem termodifikasi, disubstitusikan nilai baru x_1^1 dan x_2^1 , sehingga didapat :

$$x_3^1 = \frac{(b_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1)}{a_{33}}$$

- Dengan cara seperti ini nilai x_1 , x_2 , dan x_3 akan diperoleh lebih cepat

ITERASI GAUSS-SEIDEL

Selesaikan Sistem Persamaan berikut:

$$3x + y - z = 5$$

$$4x + 7y - 3z = 20$$

$$2x - 2y + 5z = 10$$

$$x = \frac{(5 - y + z)}{3}$$

$$y = \frac{(20 - 4x + 3z)}{7}$$

$$z = \frac{(10 - 2x + 2y)}{5}$$

Dicoba iterasi awal:

$$x = y = z = 0$$

ITERASI JACOBI

$$x' = \frac{(5 - y + z)}{3} = \frac{(5 - 0 + 0)}{3} = 1,667$$

$$y' = \frac{(20 - 4x + 3z)}{7} = \frac{20 - 4.0 + 3.0}{7} = 2,857$$

$$z' = \frac{(10 - 2x + 2y)}{5} = \frac{(10 - 2.0 + 2.0)}{5} = 2$$

ITERASI GAUSS-SEIDEL

Dicoba estimasi awal $y = z = 0$ dan dihitung x'

$$x' = \frac{(5 - y + z)}{3} = \frac{(5 - 0 + 0)}{3} = \mathbf{1,667}$$

Lanjutkan menghitung y' dengan mensubstitusikan nilai x'

$$y' = \frac{(20 - 4x + 3z)}{7} = \frac{(20 - 4(1,667) + 3 \cdot (0))}{7} = \mathbf{1,90467}$$

Lanjutkan menghitung z' dengan mensubstitusikan nilai x' dan y'

$$z' = \frac{(10 - 2x + 2y)}{5} = \frac{(10 - 2(1,667) + 2(1,90467))}{5} = \mathbf{2,09524}$$

Nilai x' , y' , z' yang diperoleh belum sama dengan asumsi awal, sehingga perlu dilakukan pengulangan atau iterasi berikutnya

ITERASI GAUSS-SEIDEL

Iterasi dilanjutkan

$$x'' = \frac{(5 - y + z)}{3} = \frac{(5 - 1,904 + 2,09524)}{3} = \mathbf{1,73016}$$

$$\varepsilon_x = \left| \frac{1,73016 - 1,667}{1,73016} \right| * 100\% = \mathbf{3,67\%}$$

$$y'' = \frac{(20 - 4x + 3z)}{7} = \frac{(20 - 4 \cdot (\mathbf{1,73016}) + 3 \cdot (2,09524))}{7} = \mathbf{2,7664}$$

$$\varepsilon_y = \left| \frac{2,7664 - 1,904}{2,7664} \right| * 100\% = \mathbf{31,15\%}$$

$$z'' = \frac{(10 - 2x + 2y)}{5} = \frac{(10 - 2 \cdot (\mathbf{1,73016}) + 2 \cdot (2,7664))}{5} = \mathbf{2,4154}$$

$$\varepsilon_z = \left| \frac{2,4154 - 2,095}{2,4154} \right| * 100\% = \mathbf{13,22\%}$$

Hitungan dilanjutkan dengan prosedur yang sama, sampai pada akhirnya diperoleh kesalahan yang relative kecil di setiap variabelnya

ITERASI GAUSS-SEIDEL

I	x	y	z	x^*	y^*	z^*	ϵx	ϵy	ϵz
1	1,666667	0	0	1,6667	1,9048	2,0952			
2	1,7302	1,904762	2,095238	1,7302	2,7664	2,4145	3,67%	31,15%	13,22%
3	1,5494	2,76644	2,414512	1,5494	3,0066	2,5829	-11,67%	7,99%	6,52%
4	1,5254	3,006587	2,582892	1,5254	3,0924	2,6268	-1,57%	2,78%	1,67%
5	1,5115	3,092419	2,626794	1,5115	3,1192	2,6431	-0,92%	0,86%	0,62%
6	1,5080	3,119221	2,643105	1,5080	3,1282	2,6481	-0,23%	0,29%	0,19%
7	1,5066	3,12821	2,648099	1,5066	3,1311	2,6498	-0,09%	0,09%	0,06%
8	1,5062	3,131111	2,649793	1,5062	3,1321	2,6503	-0,03%	0,03%	0,02%
9	1,5061	3,132067	2,650336	1,5061	3,1324	2,6505	-0,01%	0,01%	0,01%
10	1,5060	3,132378	2,650516	1,5060	3,1325	2,6506	0,00%	0,00%	0,00%

A series of white, thin, overlapping geometric lines on a black background, creating a complex, abstract pattern on the left side of the slide.

SEKIAN
TERIMA KASIH