Cálculo de la región de decisión

Pedro Gómez Martín

11 de abril de 2019

1. Introducción

En la teoría de detección, para la decisión óptima en función de la potencia media (P_e) debemos de dividir el un plano cartesiano en regiones de decisión para determinar la señal transmitida teniendo en cuenta la distorsión y atenuación que produce la transmisión.

Para realizar las divisiones debemos tener en cuenta la probabilidad de cada una de las señales, en este caso consideraremos señales equiprobables.

2. Intuición

Asumiendo que no hay dos señales representadas en el mismo punto del plano cartesiano y que conforme aumentamos la distancia al punto que se obtiene colocando el vector que representa una señal en el origen la probabilidad de que esa fuera la señal transmitida decrece, podemos asignar a cada punto del plano un valor proporcional a dicha probabilidad.

$$f_n(x,y) = \frac{1}{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2} \tag{1}$$

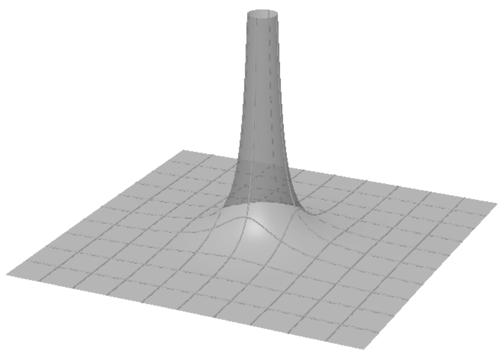

Figura 1: Grafica potencial un punto

3. Desarrollo

Pensando en la función $f_n(x,y)$1 como una función de potencial, podemos desarrollar el campo vectorial asociado a ella y mediante el principio de superposición podemos obtener el campo que dicta la tendencia a la señal transmitida.

$$\begin{align} F_n(x,y) &= -\nabla f_n(x,y) \tag{2} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} f_n(x,y)\,\vec{i} - \frac{\partial}{\partial y} f_n(x,y)\,\vec{j} \tag{3} \end{align}$$

Procedemos a derivar una función más general.

$$-\frac{\partial}{\partial n} f_i(n,m) = -\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{(n-n_i)^2+(m-m_i)^2}\right] \tag{4}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial n}\left((n-n_i)^2+(m-m_i)^2\right)^{-1} \tag{5}$$

$$= \left(\left((n-n_i)^2+(m-m_i)\right)^2\right)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial n}(n-n_i)^2 \tag{6}$$

$$= 2\frac{n-n_i}{\left((n-n_i)^2+(m-m_i)^2\right)^2} \tag{7}$$

Caracterizando $\frac{\partial}{\partial n} f_i(n,m)$ con $n = x, m = y$ y viceversa obtenemos el campo vectorial.

$$F_i(x,y) = 2\begin{pmatrix} \frac{x-x_n}{\left((x-x_n)^2+(y-y_n)^2\right)^2} \\ \frac{y-y_n}{\left((x-x_n)^2+(y-y_n)^2\right)^2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Aplicando el principio de superposición, podemos obtener la siguiente fórmula, donde i representa el índice de los símbolos y S el conjunto de todos los símbolos posibles.

$$\vec{T_S}(x,y) = \sum_i \vec{F_i}(x,y) \tag{9}$$

Si resolvemos $\vec{T_S}(x,y) = \vec{0}$, obtendremos la ecuaciones que delimitan las regiones de decisión.

3.1. Generalización a $\mathbb{R}^n$

Aun que se ha desarrollado para una función f de dos variables, se puede generalizar a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde n viene dado por la dimensión de la base del espacio de símbolos. Y f se puede definir de la siguiente forma:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{(x_1-x_{1i})^2+(x_2-x_{2i})^2+\cdots+(x_n-x_{ni})^2} \tag{10}$$

Obteniendo lo siguiente: [1]

$$\vec{T_S}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_i -\nabla f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{11}$$

4. Ejemplo

Si consideramos dos símbolos con una base compuesta por por dos vectores Φ_1 y Φ_2, con coordenadas $S_1 = (x_{10}, y_{10})$ y $S_2 = (x_{20}, y_{20})$, los podemos representar en $\mathbb{R}^2$

[1] Este método se puede utilizar para el cálculo de diagramas de Voronoi en $\mathbb{R}^n$ con las soluciones a $T_S = \vec{0}$

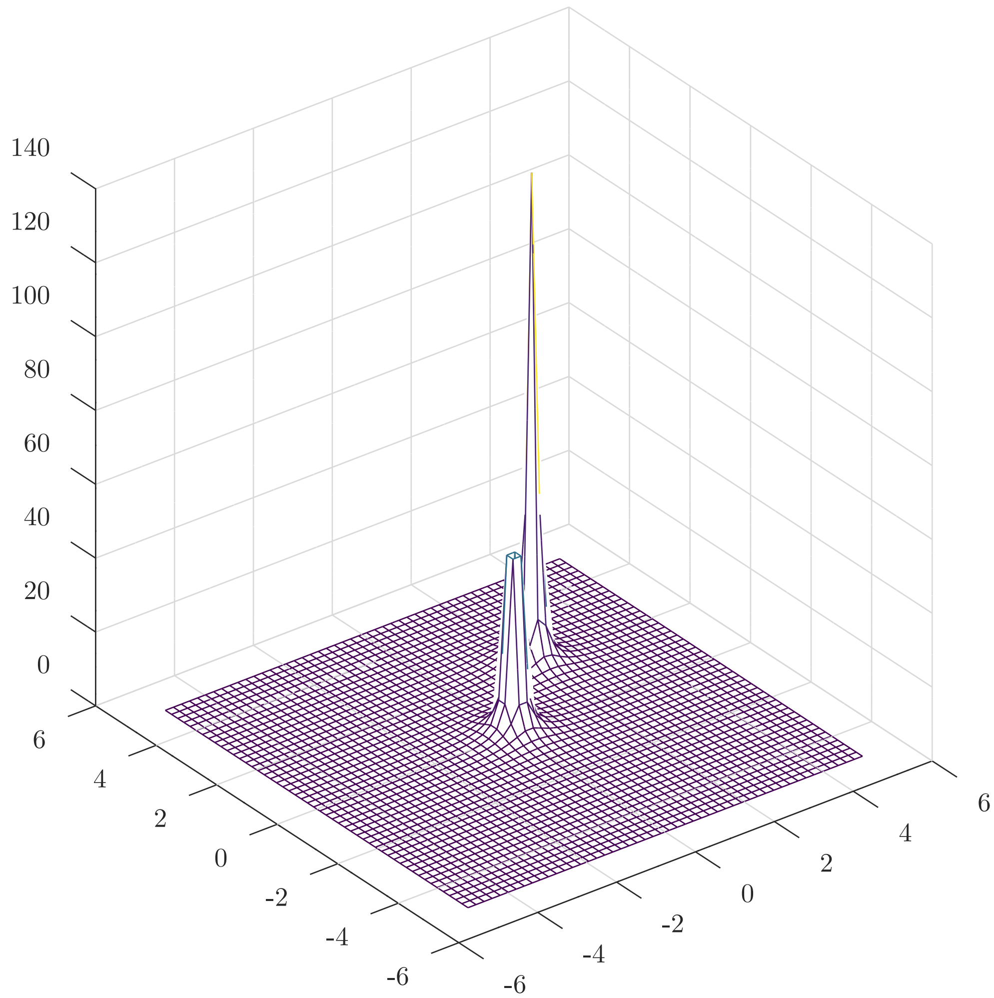

Figura 2: Potencial

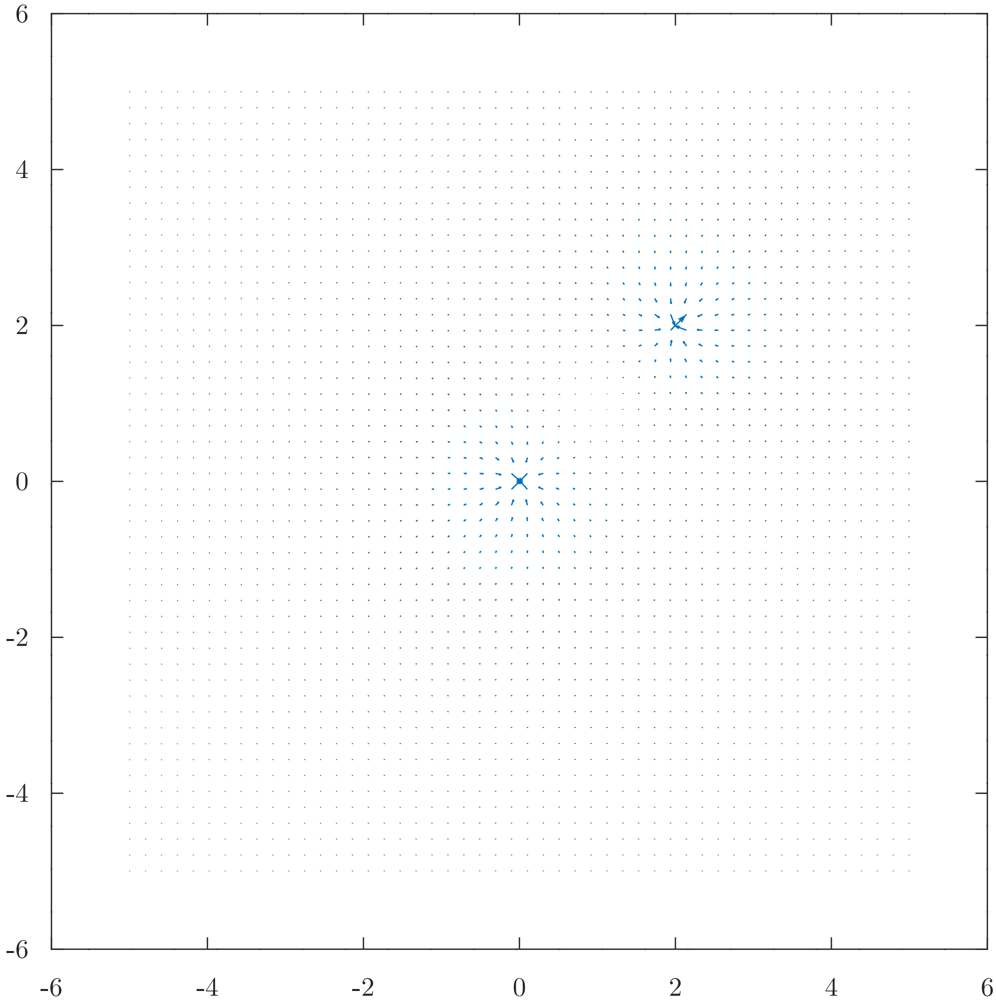

Figura 3: Campo vectorial