Ch 11: Deret Taylor (Taylor Series)

Tujuan Bab: Memahami bagaimana kita bisa **mengaproksimasi fungsi yang rumit** dengan **polinomial sederhana** menggunakan informasi dari Turunan di satu titik.

---

1. Masalah: Fungsi Rumit vs. Polinomial Sederhana

- **Masalah:** Fungsi seperti `cos(x)`, e^x, `ln(x)` sulit dihitung secara langsung.
- **Solusi:** Buatlah **polinomial sederhana** ($P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$) yang bisa "meniru" perilaku fungsi asli di sekitar satu titik.
- **Kenapa Polinomial?** Mudah dihitung, diturunkan, diintegralkan.

---

2. Strategi: Meniru Sifat Fungsi Asli

- Untuk membuat peniru polinomial `P(x)` yang baik untuk `f(x)` di sekitar `x=a`, kita harus memastikan sifat-sifat `P(x)` cocok dengan `f(x)` di titik `a`.
- **Cocokkan Sifat secara Berurutan:**
  1. **Nilai:** `P(a) = f(a)`.
  2. **Kemiringan (Turunan 1):** `P'(a) = f'(a)`.
  3. **Kelengkungan (Turunan 2):** `P''(a) = f''(a)`.
  4. **Dan seterusnya...** $P^n(a) = f^n(a)$.

---

3. Membangun Polinomial Peniru (Secara Umum)

- **Koefisien Polinomial:** Kita mencari nilai koefisien c_n agar polinomial `P(x)` meniru `f(x)`.
- **Rumus Koefisien:** Dengan mencocokkan turunan di titik `a`, kita menemukan bahwa:

  > $c_n = f^n(a) / n!$
  > Di mana:

  - $f^n(a)$ adalah turunan ke-`n` dari `f`, dievaluasi di `x=a`.
  - `n!` adalah **faktorial** dari `n` (`n! = n * (n-1) * ... * 1`).
- **Formula Umum Polinomial Taylor (di sekitar `x=a`):**

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

- **Kasus Sederhana (di sekitar `x=0`):**

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

---

4. Contoh Ajaib

Aproksimasi `cos(x)` di Sekitar `x=0`

- **Turunan `cos(x)`:** `cos(x), -sin(x), -cos(x), sin(x), ...`
- **Nilai di `x=0`:** `1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, ...`
- **Koefisien (c_n):** `1/0!, 0/1!, -1/2!, 0/3!, 1/4!, ...`
- **Deret Taylor:** $\cos(x) \approx 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots$

Aproksimasi e^x di Sekitar `x=0`

- **Turunan e^x:** e^x (selalu sama).
- **Nilai di `x=0`:** $e^0 = 1$ (semua turunan bernilai 1).
- **Koefisien (c_n):** `1/n!`
- **Deret Taylor:** $e^x \approx 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \dots$

---

5. Polinomial Taylor vs. Deret Taylor

- **Polinomial Taylor:** Aproksimasi dengan **jumlah berhingga** suku. Semakin banyak suku, semakin akurat.
- **Deret Taylor:** Penjumlahan **tak terhingga** dari semua suku.
- **Konvergensi:**
  - Jika deretnya konvergen, ia mendekati nilai fungsi asli.
  - Jika tidak, ia divergen.

Intuisi Akhir: Deret Taylor adalah cara untuk "menerjemahkan" informasi tentang **sifat-sifat lokal** (turunan di satu titik) menjadi **aproksimasi global** (perilaku fungsi di sekitar titik itu).

Tags: #calculus #taylor-series #derivatives #approximation #3b1b-essence-of-calculus