Ch 05: Keistimewaan Bilangan Euler `e`

Tujuan Bab: Membangun intuisi di balik bilangan `e`, dan memahami mengapa ia menjadi basis "alami" untuk fungsi eksponensial dalam kalkulus.

---

1. Misteri Turunan Fungsi Eksponensial

- **Masalah:** Kita ingin mencari turunan dari fungsi eksponensial, misalnya $f(t) = 2^t$.
- **Intuisi Awal:** Bayangkan 2^t adalah massa populasi yang berlipat ganda setiap hari. Laju pertumbuhannya (dm/dt) tampaknya berhubungan dengan ukurannya saat ini (m).
- **Observasi Kasar ($\Delta t=1$):** Pertumbuhan dalam satu hari ternyata sama dengan massa di awal hari. Ini memunculkan hipotesis bahwa $d/dt\ (2^t) = 2^t$.

---

2. Menuju Presisi (Menggunakan Aljabar `dt`)

- **Setup Turunan:** Kita analisis $(2^{(t+dt)} - 2^t) / dt$ saat $dt \to 0$.
- **Langkah Kunci Aljabar:** $2^{(t+dt)} = 2^t * 2^{dt}$.
- **Menyusun Ulang:**
  $\text{Turunan} = 2^t * ((2^{dt} - 1) / dt)$
- **"Aha!" Moment (Pemisahan Variabel):**
  - Bagian 2^t bergantung pada t.
  - Bagian $(2^{dt} - 1) / dt$ **hanya bergantung pada** dt. Saat $dt \to 0$, bagian ini mendekati sebuah **angka konstan** (sekitar `0.6931...`).
- **Kesimpulan Penting:**

  > **Turunan dari a^t selalu PROPORSIONAL dengan a^t itu sendiri.**
  > $d/dt\ (a^t) = (\text{Konstanta}_a) * a^t$

  Ini adalah sifat ajaib dari semua fungsi eksponensial: laju pertumbuhannya sebanding dengan ukurannya saat ini.

---

3. Definisi `e` (Basis Paling "Sopan")

- **Pertanyaan Kunci:** Apakah ada sebuah basis "ajaib" di mana konstanta proporsionalitasnya adalah **persis 1**?
- **Jawaban:** Ya, ada. Bilangan itu kita sebut e (sekitar `2.718...`).
- **Definisi e dalam Kalkulus:**

> **e adalah satu-satunya bilangan di mana turunan dari e^t adalah e^t itu sendiri.**
> `d/dt (eᵗ) = eᵗ`

- **Intuisi Grafis:** Grafik $y = e^t$ punya sifat unik di mana **kemiringan (slope)** di setiap titik **sama dengan ketinggian** titik itu.

---

4. Memecahkan Misteri Konstanta

- Sekarang kita bisa mencari tahu apa "konstanta misterius" (`Konstanta_a`) untuk basis lain.
- **Trik:** Tulis `a` sebagai `e` pangkat sesuatu: `a = e^(ln a)` . (Ini definisi logaritma natural, `ln`).
- **Terapkan pada a^t :**
  $a^t = (e^{\ln a})^t = e^{(\ln a) \cdot t}$
- **Cari Turunannya (menggunakan Aturan Rantai):**
  $\frac{d}{dt}(e^{(\ln a)t}) = e^{(\ln a)t} \cdot (\ln a)$
  $= a^t \cdot \ln(a)$
- **Misteri Terpecahkan:**

> $\frac{d}{dt}(a^t) = a^t \cdot \ln(a)$
> Konstanta proporsionalitas untuk basis `a` adalah `ln(a)` .

---

5. Kenapa `e` Sangat Penting di Dunia Nyata?

- Banyak fenomena alam di mana **"laju perubahan" sebanding dengan "jumlah saat ini"** (pertumbuhan populasi, peluruhan radioaktif, bunga majemuk).
- Semua fenomena ini secara matematis dideskripsikan oleh persamaan diferensial: `dy/dt = k * y` .
- Satu-satunya fungsi yang memenuhi persamaan ini adalah `y(t) = C * e^(kt)` .
- **Keindahan `e` :** Dengan menulisnya dalam basis `e` , konstanta `k` di dalam eksponen secara langsung memberitahu kita **konstanta proporsionalitas** antara laju perubahan dan jumlah itu sendiri.

Tags: #calculus #derivatives #exponential-functions #eulers-number #natural-logarithm #3b1b-essence-of-calculus