

The Ultimate Guide: Reflecting in a Plane (Strategi Sandwich)

Dokumen ini adalah panduan komprehensif untuk memahami salah satu aplikasi paling elegan dalam Aljabar Linear: **Memantulkan objek pada cermin miring**.

Kita tidak akan langsung loncat ke rumus. Kita akan mulai dari **filosofi dasar**, membangun intuisi tentang **dimensi, basis**, dan **perpindahan dunia**, baru kemudian menyusun solusinya langkah demi langkah.

BAB 1: MASALAH SUDUT PANDANG (FILOSOFI)

Sebelum kita menghitung apapun, kita harus paham dulu: **Apa masalahnya?**

1.1 Skenario: Ruangan dan Cermin Aneh

Bayangkan kamu sedang berdiri di sebuah **Ruang Tamu Kosong**.

- **Dunia Nyata (Standar):** Untuk menentukan posisi benda di ruangan ini, kita sepakat menggunakan dinding dan lantai sebagai patokan.
 - **Sumbu X:** Garis pertemuan dinding depan dan lantai.
 - **Sumbu Y:** Garis pertemuan dinding samping dan lantai.
 - **Sumbu Z:** Garis pertemuan dua dinding (pojok ruangan) yang naik ke atas.
 - Patokan ini kita sebut **BASIS STANDAR**. Sifatnya tegak lurus dan teratur.
- **Masalahnya:** Ada sebuah **Cermin Besar** yang diletakkan sembarang di tengah ruangan. Cermin itu miring, agak serong ke kiri, dan agak mendongak ke atas. Cermin ini punya "arah"-nya sendiri yang sama sekali tidak sejajar dengan dinding ruanganmu.

1.2 Misi Kita

Kamu melempar sebuah **Bola Tenis** di ruangan itu. Bola itu melayang di posisi koordinat (x, y, z) . Tugasmu: **Hitung di mana letak bayangan bola itu di dalam cermin miring tersebut?**

1.3 Kenapa Cara Biasa Gagal?

Jika kamu mencoba menghitung ini menggunakan Matematika SMA (Trigonometri):

1. Kamu harus hitung sudut kemiringan cermin terhadap lantai.
2. Hitung sudut terhadap dinding.
3. Hitung jarak tegak lurus bola ke cermin (yang miring itu).
4. Pakai Sinus/Cosinus 3D yang sangat rumit.

Peluang salah hitung: **99%**.

1.4 Solusi Aljabar Linear: "Ganti Dunia"

Aljabar Linear menawarkan cara berpikir yang berbeda:

"Daripada pusing menghitung sudut cermin terhadap dinding, kenapa kita tidak berpura-pura bahwa Cermin itu adalah Lantai yang datar?"

Kita akan mengubah cara pandang kita. Kita akan "**Pindah Dunia**" sejenak ke dunia di mana Cermin adalah pusat semesta, melakukan pantulan di sana (yang mana sangat mudah), lalu kembali lagi ke Dunia Nyata.

BAB 2: FUNDAMENTAL BASIS & KOORDINAT (ILMU DASAR)

Sebelum pindah dunia, kita harus paham dulu alat transportasinya.

2.1 Apa itu Basis? (Analogi Penggaris)

Basis adalah sekumpulan vektor yang kita gunakan sebagai "Penggaris Utama" untuk mengukur segala sesuatu.

- **Di Dunia Nyata:** Basis kita adalah penggaris yang menempel di dinding dan lantai (i, j, k).
- **Di Dunia Cermin:** Basis kita haruslah penggaris yang **menempel di Cermin**.

2.2 Analogi: Meja Makan & Tiang Bendera

Untuk mendefinisikan "Dunia Cermin" secara lengkap dalam 3 Dimensi, kita butuh **3 Penggaris Baru**:

1. **Penggaris e_1 (Lebar Meja):** Vektor yang diletakkan rata di permukaan cermin, menunjuk ke kanan.
2. **Penggaris e_2 (Panjang Meja):** Vektor yang diletakkan rata di permukaan cermin, menunjuk ke depan (Tegak lurus dengan e_1).
3. **Penggaris e_3 (Tiang Bendera/Normal):** Vektor yang ditancapkan **TEGAK LURUS** mencuat keluar dari tengah cermin.

Catatan: e_1 dan e_2 mendefinisikan bidang datar cermin itu sendiri.

Kenapa butuh ini? Karena bola kita ada di udara! Kita butuh penggaris e_3 untuk mengukur seberapa jauh jarak bola dari permukaan kaca.

2.3 Peran Gram-Schmidt (Si Tukang Bersih-Bersih)

Di dunia nyata, data cermin yang kita dapatkan biasanya "kotor". Misal: "Cermin ini dibentuk oleh vektor v_1 dan v_2 ." Tapi v_1 dan v_2 itu mungkin tidak siku-siku (miring), atau panjangnya

beda-beda.

Kita tidak bisa mengukur dengan penggaris yang bengkok. Maka, kita gunakan algoritma **Gram-Schmidt** untuk:

1. Meluruskan vektor-vektor itu supaya saling **Tegak Lurus** (90°).
2. Memotongnya supaya panjangnya standar **1 Satuan**.

Hasilnya: Basis Orthonormal $E = \{e_1, e_2, e_3\}$. Ini adalah set penggaris yang sempurna.

BAB 3: MATRIKS SEBAGAI MESIN TELEPORTASI

Sekarang kita punya dua set penggaris:

1. **Penggaris Ruangan** (Standar).
2. **Penggaris Meja** (Basis E).

Bagaimana cara pindah antar dua dunia ini? Jawabannya: **MATRIKS**.

3.1 Matriks E (Kamus Cermin \rightarrow Ruangan)

Jika kita menyusun vektor-vektor basis tadi (e_1, e_2, e_3) menjadi kolom-kolom sebuah matriks:

$$E = \begin{bmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Matriks E ini berfungsi sebagai penerjemah dari **Bahasa Cermin ke Bahasa Ruangan**.

- Jika kamu punya koordinat $(0, 0, 1)$ di cermin (artinya: 1 langkah manjat tiang bendera).
- Kamu kalikan $E \cdot (0, 0, 1)$, hasilnya adalah vektor tiang itu dalam koordinat ruangan (x, y, z) .

3.2 Matriks E^T (Kamus Ruangan \rightarrow Cermin)

TAPI TUNGGU! Masalah kita terbalik. Bola kita ada di **Ruangan**. Kita mau bawa dia masuk ke **Dunia Cermin**.

Kita butuh kebalikannya (Invers): E^{-1} .

Disinilah Keajaiban Gram-Schmidt Bersinar: Karena basis E kita adalah **Matriks Orthogonal** (Tegak lurus & Panjang 1), matematika memberikan diskon besar:

Invers dari Matriks Orthogonal adalah TRANSPOSE-nya (E^T).

Artinya:

- Untuk masuk ke Dunia Cermin, kita tidak perlu hitung invers yang rumit.
- Cukup putar matriksnya (Baris jadi Kolom), jadilah E^T .

- E^T adalah mesin teleportasi dari Ruangan → Cermin.

BAB 4: EKSEKUSI STRATEGI SANDWICH (LANGKAH DEMI LANGKAH)

Panggung sudah siap. Kita punya Bola di posisi \mathbf{r} . Kita mau cari pantulannya. Kita gunakan strategi 3 Langkah (Sandwich).

LANGKAH 1: Log In ke Dunia Cermin (E^T)

Kita bertanya: "*Wahai Bola, kalau posisimu diukur pakai penggaris Meja Makan, koordinatmu berapa?*"

Kita terjemahkan Bola (\mathbf{r}) pakai mesin E^T :

$$\mathbf{r}_{cermin} = E^T \cdot \mathbf{r}$$

Sekarang, bola tidak lagi punya koordinat (x, y, z) dinding. Dia sekarang punya koordinat baru (u, v, w) :

- u = Jarak di sepanjang lebar meja (e_1).
- v = Jarak di sepanjang panjang meja (e_2).
- w = Tinggi bola di atas meja (e_3).

LANGKAH 2: Lakukan Aksi Pantulan (T_E)

Sekarang bola sudah ada di "Dunia Cermin". Di sini, aturan pantulannya **SANGAT SEDERHANA & INTUITIF**.

Mari kita lihat per komponen:

1. **Komponen Lebar Meja (e_1)**: Kalau bola jatuh tepat di permukaan meja, apakah posisi kanan-kirinya berubah? **TIDAK**. Bayangan di cermin tetap di posisi horizontal yang sama. (Kalikan 1).
2. **Komponen Panjang Meja (e_2)**: Sama juga. Posisi depan-belakang di permukaan cermin tidak berubah. (Kalikan 1).
3. **Komponen Tiang Bendera (e_3)**: Nah! Bola datang dari "Atas" meja (Positif). Bayangannya seolah-olah ada di "Bawah" meja (Negatif). Jaraknya sama, cuma **ARAHNYA DIBALIK**. (Kalikan -1).

Maka, Matriks Refleksi (T_E) hanyalah matriks diagonal sederhana:

$$T_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Kita terapkan ke bola di dunia cermin:

$$\mathbf{r}'_{cermin} = T_E \cdot \mathbf{r}_{cermin}$$

LANGKAH 3: Log Out Kembali ke Dunia Nyata (E)

Sekarang kita sudah punya posisi bayangan (\mathbf{r}'_{cermin}). TAPI, bahasanya masih "Bahasa Meja" (sekian lebar, sekian panjang, minus tinggi).

Orang di ruangan bingung, "*Itu di mana relatif terhadap pintu?*" Kita harus terjemahkan balik.

Kita pakai mesin penerjemah asli (E):

$$\mathbf{r}'_{akhir} = E \cdot \mathbf{r}'_{cermin}$$

BAB 5: KESIMPULAN RUMUS TOTAL

Jika kita gabungkan ketiga langkah tadi dalam satu baris persamaan matematika (ingat, matriks bekerja dari Kanan ke Kiri):

$$\mathbf{r}' = \underbrace{E}_{\substack{3. \text{ Keluar}}} \cdot \underbrace{T_E}_{\substack{2. \text{ Aksi Pantul}}} \cdot \underbrace{E^T}_{\substack{1. \text{ Masuk}}} \cdot \mathbf{r}$$

Kenapa ini disebut "Transformation Matrix"?

Seringkali, kita tidak cuma mau memantulkan satu bola. Kita mau memantulkan ribuan titik (misalnya titik-titik wajah karakter Panda Bear).

Daripada mengulang 3 langkah tadi untuk setiap titik, kita bisa menghitung **Mesin Gabungannya** dulu:

$$T = E \cdot T_E \cdot E^T$$

- T adalah **Matriks Transformasi Total**.
- Sekali kita hitung matriks T ini, kita bisa lemparkan ribuan titik apapun ke dalamnya, dan dia akan langsung memuntahkan hasil pantulannya dalam sekali hitung.

Ringkasan Alur Logika:

1. **Masalah:** Cermin miring susah dihitung.
2. **Ide:** Bikin koordinat sendiri yang nempel di cermin.
3. **Alat 1 (Gram-Schmidt):** Bikin koordinatnya tegak lurus (Orthonormal) biar hitungannya gampang.
4. **Alat 2 (Transpose):** Pakai E^T buat pindah dari Ruangan ke Cermin.
5. **Aksi (T_E):** Pantulkan di dunia cermin (cuma balik tanda Z).
6. **Alat 3 (E):** Balik lagi ke Ruangan.