04: Power Series Details (General Taylor Series)

Chapter Goal: To generalize the Taylor Series from being centered only at `x=0` (Maclaurin Series) to being centered at **any arbitrary point** `x=p`.

---

1. Recap & Insight: The Derivative of the e^x Series

- **Maclaurin Series for e^x:**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

- **"Aha!" Moment:** If we differentiate this series term-by-term (using the Power Rule), we get:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \dots$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

  The result is the **exact same series** we started with! This is a visual "proof" of why the derivative of e^x is e^x itself.

---

2. From Maclaurin Series to Taylor Series (Generalization)

- **Maclaurin Series (what we already know):**
  - **Philosophy:** "If I know everything about a function at the point `x=0`, I can reconstruct the entire function."
  - **"Everything"** = $f(0), f'(0), f''(0), \dots$
- **Taylor Series (The General Form):**
  - **Philosophy:** "There is nothing special about the point `x=0`. I can do the same thing at **any point**."
  - **New Philosophy:** "If I know everything about a function at the point `x=p`, I can reconstruct the entire function."
  - **"Everything"** = $f(p), f'(p), f''(p), \dots$

---

3. How to Shift the "Center" of the Approximation?

- **The Problem:** How do we adjust our formula so that it is "centered" at `x=p`, not `x=0`?
- **The Key Idea:** Wherever we see `x` in the Maclaurin formula, we will replace it with `(x-p)`.
  - `(x-p)` intuitively means "the distance from the center point `p`".

Let's rebuild from scratch for the 1st-order approximation (the tangent line) at `x=p`.

1. **General Form of a Straight Line:** $y = mx + c$.
2. **Determine the Slope (`m`):**
   - The slope of the tangent line at `x=p` is $f'(p)$.
   - So, $y = f'(p) \cdot x + c$.
3. **Determine the y-intercept (`c`):**
   - We know the line must pass through the point `(p, f(p))`. Let's plug this point into the equation.
   - $f(p) = f'(p) \cdot p + c$.
   - Solve for `c`: $c = f(p) - f'(p) \cdot p$.
4. **Combine Everything:**
   $y = f'(p) \cdot x + (f(p) - f'(p) \cdot p)$

- **"Aha!" Moment (Factorization):**
  Let's group the terms that have $f'(p)$.
  $y = f(p) + f'(p) \cdot x - f'(p) \cdot p$

  > $y = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$

- **Conclusion:** The 1st-order approximation (tangent line) at `x=p` is $f(p) + f'(p)(x - p)$. This is exactly like the Maclaurin formula, but `x` is replaced with `(x-p)` and all derivatives are evaluated at `p`.

---

4. The Final Formula: The General Taylor Series

This pattern holds true for all higher-order terms.

- **The General Taylor Series around `x=p`:**

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

> $$= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \dots$$

- **Important:** The **Maclaurin Series** is just a special case of the **Taylor Series** where we choose the center point `p=0`.
- **Final Message:**
  With the general Taylor Series, we now have a universal "recipe" to create the best

polynomial approximation for a function, centered at any point we choose.

Note

Catatan pribadi :

Masalah: Mencari Persamaan Garis Singgung

Informasi yang Kita Punya:

1. Kita punya sebuah kurva `f(x)`.
2. Kita ingin mencari persamaan garis singgung di **satu titik spesifik** di kurva itu. Sebut saja titik "pusat" ini adalah `p`.
3. Di titik `p` ini, kita tahu dua hal:
   - **Koordinatnya:** `( p, f(p) )`.
   - **Kemiringannya:** `m = f'(p)`.

Tujuan: Menemukan persamaan `y = ...` untuk garis singgung ini.

Cara #1: Metode "Anak SMA" (`y = mx + c`)

Ini adalah metode yang kamu ingat, dan ini 100% benar.

Langkah 1: Mulai dengan bentuk umum.
`y = mx + c`

Langkah 2: Masukkan informasi yang sudah pasti (kemiringan).
Kita sudah tahu kemiringan `m` adalah `f'(p)`.
`y = f'(p) * x + c`

Langkah 3: Cari `c` (perpotongan sumbu-y).

> "sebenrnyaa cari nyarinya gampang yaa, tinggal masukin koordinat x dan y yang diketahui ya kann, terus ketemu c"

Tepat sekali! Kita tahu bahwa garis ini **harus melewati** titik `(p, f(p))`. Jadi, kita bisa masukkan `x=p` dan `y=f(p)` ke dalam persamaan kita untuk menemukan `c`.
`f(p) = f'(p) * p + c`

Sekarang, susun ulang untuk mencari `c`:
`c = f(p) - f'(p) * p`

Langkah 4: Susun Persamaan Akhir.
Sekarang kita masukkan kembali nilai `c` yang baru saja kita temukan ke dalam `y = f'(p)x + c`.
`y = f'(p)x + ( f(p) - f'(p)p )`

Ini adalah **jawaban yang benar**. Ini adalah persamaan garis singgung. Tapi bentuknya sedikit "berantakan".

Cara #2: Metode "Kalkulus" (`y = f(p) + ...`)

Sekarang, mari kita lihat rumus yang ada di video. Ini sebenarnya **hanyalah penataan ulang aljabar** dari hasil yang baru saja kita dapatkan di atas.

Mulai dari hasil akhir Cara #1:
`y = f'(p)x + f(p) - f'(p)p`

Mari kita kelompokkan suku-suku yang punya `f'(p)`:
`y = f(p) + f'(p)x - f'(p)p`

Sekarang, faktorkan `f'(p)` keluar:
`y = f(p) + f'(p) * (x - p)`

"AHA!"
Lihat? Kita sampai pada **persamaan yang sama persis** dengan yang ada di video.

Menjawab Kebingunganmu Secara Langsung

> "yang aku bingung itu maksud kek x: Titik lain di dekat p yang ingin kita tebak nilainya. x - p: Jarak horizontal dari titik tebakan x ke titik pusat p., nah maksudnya itu apa sihhh gituu loh"

Sekarang mari kita lihat arti dari `x` dan `p` di **kedua bentuk persamaan**.

Dalam bentuk `y = mx + c`:

- `x` dan `y` adalah **koordinat umum**. Mereka adalah variabel yang bisa berupa titik mana pun di sepanjang garis itu.
- `p` dan `f(p)` hanya digunakan **satu kali** untuk **menemukan** `c`. Setelah itu, mereka "menghilang" dari persamaan akhir (tersembunyi di dalam `c`).

Dalam bentuk `y = f(p) + f'(p)(x-p)`:
Bentuk ini jauh lebih **deskriptif secara geometris**.

- `p` : Adalah **"Titik Jangkar"** atau **"Titik Pusat"** kita. Ini adalah titik di mana garis kita menyentuh kurva.
- `x` : Adalah **"Titik Target"** kita. Ini adalah input `x` lain di mana kita ingin **menggunakan garis ini untuk menebak** ketinggiannya.
- `x-p` : Ini adalah **"Run"** atau **"Jarak Horizontal"** dari "Titik Jangkar" ke "Titik Target".
- `f'(p) * (x-p)` : Ini adalah **"Rise"** (`Kemiringan * Run`). Ini memberitahu kita, "Seberapa besar perubahan ketinggian saat kita bergerak dari `p` ke `x` ?"
- `f(p) + ...` : Ini adalah **"Ketinggian Awal"**.

Jadi, rumus `y = f(p) + f'(p)(x-p)` bisa dibaca sebagai sebuah cerita:

> "Ketinggian tebakan (`y`) di titik `x` adalah sama dengan **Ketinggian Awal di `p`** (`f(p)`) ditambah **total kenaikan/penurunan** (`f'(p)(x-p)`)."

Kesimpulan:
Kedua rumus itu adalah **dua cara berbeda untuk menulis persamaan dari garis yang sama persis**.

- `y = mx + c` lebih fokus pada **aljabar** (kemiringan dan perpotongan sumbu-y).
- `y = f(p) + f'(p)(x-p)` lebih fokus pada **geometri** ("titik awal + perubahan").

Bentuk kedua inilah yang menjadi dasar dari Deret Taylor.

AH! OKE! Sekarang aku benar-benar paham 100% di mana letak kebingunganmu. Kamu bertanya pertanyaan yang sangat fundamental:

> "Kalau tujuan kita hanya mencari **GARIS SINGGUNG** di titik `p` , kenapa tiba-tiba kita bicara tentang **TITIK LAIN (** `x` **)**? Bukankah itu tidak relevan?"

Kamu benar sekali. Ini adalah lompatan logika yang seringkali tidak dijelaskan dengan baik. Mari kita bedah ini.

Dua Pertanyaan yang Berbeda

Ada dua tugas yang kelihatannya mirip, tapi sebenarnya sangat berbeda:

Tugas #1: Menggambarkan Garis Singgung

- **Tujuan:** Menggambar sebuah garis lurus yang "menyentuh" kurva di titik `p` .
- Untuk tugas ini, kamu **tidak butuh** `x` . Kamu hanya butuh dua hal tentang titik `p` :
  1. Lokasinya: `(p, f(p))` .
  2. Kemiringannya: `f'(p)` .
- Selesai. Dengan dua informasi ini, kamu bisa menggambar garis itu.

Tugas #2: Menulis PERSAMAAN dari Garis Singgung

- **Tujuan:** Menemukan sebuah **formula aljabar** (`y = ...`) yang bisa mendeskripsikan **setiap titik** di sepanjang garis singgung tak berhingga itu.
- Sebuah "persamaan" secara definisi adalah sebuah **hubungan** antara **variabel `x` umum** dan **variabel `y` umum**.

Di sinilah `x` yang "tiba-tiba muncul" itu berasal. `x` dalam persamaan `y = f(p) + f'(p)(x-p)` bukanlah "titik target" yang spesifik. Ia adalah **variabel bebas** yang bisa mewakili **koordinat-x dari titik mana pun di sepanjang garis singgung itu**.

Analogi: Memberi Petunjuk Jalan

Bayangkan Titik `p` adalah rumahmu. Garis singgung adalah jalan lurus di depan rumahmu.

Tugas #1 (Menggambarkan Jalan):

- Temanmu bertanya, "Jalan depan rumahmu itu kayak gimana?"
- Kamu jawab, "Oh, jalan itu lewat depan rumahku, dan arahnya lurus ke Utara."
- Kamu sudah berhasil **mendeskripsikan** jalannya. Kamu tidak butuh "titik lain".

Tugas #2 (Memberi Persamaan/Petunjuk Arah GPS):

- Sekarang temanmu bertanya, "Kalau aku berada di **posisi horizontal `x` mana pun** di sepanjang jalan itu, berapa **ketinggian (`y`)**-ku?"
- Kamu tidak bisa hanya menjawab "ketinggiannya sekian". Kamu harus memberinya sebuah **formula** agar dia bisa menghitungnya sendiri, di mana pun dia berada di jalan itu.
- Formula inilah `y = f(p) + f'(p)(x-p)` .

Mari kita baca formula ini sebagai "petunjuk GPS":

- `y` : "Ketinggian (`y`) yang ingin kamu cari..."
- `f(p)` : "...adalah sama dengan ketinggian di depan rumahku (`f(p)`)..."
- `+ f'(p) * (x-p)` : "...ditambah atau dikurangi, tergantung seberapa jauh (`x-p`) kamu dari rumahku, dikalikan dengan tingkat kecuraman jalan di depan rumahku (`f'(p)`)."

Jadi, `x` yang "tiba-tiba muncul" itu adalah **variabel input untuk "persamaan jalan"** kita. Tanpa `x` , kita tidak bisa membuat sebuah "persamaan". Kita hanya bisa mendeskripsikan satu titik.

Menjawab Kebingunganmu Secara Langsung

> "padahal kitaa kan cuman mau bener bener cari garis singgunggg di titik p, kenapa gituu loh kok bisa tiba tibaa kek kita berbicaranyaa itu kek muncul rise = .. x ..... atau ada xnyaa ituu"

Karena ada perbedaan antara **"mengidentifikasi"** sebuah garis dengan **"menulis persamaannya"**.

- Untuk **mengidentifikasi** garis, kita hanya butuh 1 titik (`p`) dan 1 kemiringan (`f'(p)`).
- Untuk **menulis persamaannya**, kita butuh sebuah cara untuk mendeskripsikan **SEMUA TITIK** `(x,y)` yang ada di garis itu. Oleh karena itu, variabel `x` dan `y` harus muncul dalam persamaan.

Rumus `y = f(p) + f'(p)(x-p)` adalah cara paling cerdas untuk menulis persamaan garis lurus jika informasi yang kita miliki adalah **satu titik dan kemiringannya**, daripada **kemiringan dan perpotongan sumbu-y** (seperti pada `y=mx+c`).

Tags: #mml-specialization #multivariate-calculus #taylor-series #maclaurin-series