

Ch 06: Turunan Implisit

Tujuan Bab: Memahami teknik **Turunan Implisit**, dan membangun intuisi di balik "resep sihir" mekanisnya. Ini adalah alat untuk mencari kemiringan kurva yang **bukan** merupakan grafik fungsi $y = f(x)$.

1. Masalah Baru: Kurva Implisit

- **Grafik Fungsi Eksplisit:** $y = f(x)$. Untuk setiap x , hanya ada satu y . x adalah "input", y adalah "output".
 - **Kurva Implisit:** Sebuah persamaan yang "mengikat" x dan y bersama-sama. Contoh: Lingkaran $x^2 + y^2 = 25$.
 - Di sini, x dan y adalah "partner" yang saling bergantung. Untuk satu x , bisa ada dua nilai y .
 - Lingkaran secara keseluruhan **bukan** sebuah fungsi $y(x)$.
 - **Tujuan:** Kita tetap ingin mencari **kemiringan** (dy/dx) dari garis singgung pada kurva implisit ini.
-

2. "Resep Sihir" Turunan Implisit (Prosedur Mekanis)

- **Contoh:** $x^2 + y^2 = 25$
 - **Langkah-langkah:**
 1. "Turunkan kedua sisi" persamaan.
 2. Saat menurunkan suku x , perlakukan seperti biasa tapi "tempelkan" dx : $d(x^2) = 2x \, dx$.
 3. Saat menurunkan suku y , perlakukan seperti biasa tapi "tempelkan" dy : $d(y^2) = 2y \, dy$.
 4. Turunan dari konstanta adalah 0: $d(25) = 0$.
 - **Hasil:** $2x \, dx + 2y \, dy = 0$.
 - **Selesaikan untuk dy/dx :**
$$2y \, dy = -2x \, dx$$
$$dy / dx = -x / y$$
 - **Masalah:** Kenapa resep ini berhasil? Apa artinya "menempelkan" dx dan dy ?
-

3. Intuisi Sebenarnya: Melihatnya sebagai Fungsi Multi-Variabel

- Untuk memahami "kenapa"-nya, definisikan sebuah **fungsi baru dengan dua input**:
 $s(x, y) = x^2 + y^2$.
 - **Visualisasi**: s adalah sebuah "peta ketinggian". Kurva lingkaran kita adalah **garis kontur** di peta ini, yaitu kumpulan semua titik di mana ketinggiannya adalah 25.
 - **Apa Arti ds (Turunan Total)?**
 - ds menjawab pertanyaan: "Jika aku mengambil **langkah kecil acak** (dx ke kanan, dy ke atas), seberapa besar nilai s (ketinggian) akan berubah?"
 - Perubahan total ds adalah jumlah dari perubahan akibat dx dan perubahan akibat dy .
 - $ds = (2x * dx) + (2y * dy)$.
 - Ini adalah **turunan total (total derivative)**.
 - **"Aha!" Moment:**
 - Apa artinya "tetap berada di atas kurva lingkaran"? Artinya, kita berjalan di sepanjang garis kontur $s = 25$. Ketinggian kita **TIDAK BOLEH BERUBAH**.
 - Ini berarti, perubahan total pada s harus **NOL**.
$$ds = 0$$
 - Jadi, syarat agar sebuah langkah kecil (dx , dy) tetap berada di sepanjang garis singgung lingkaran adalah:
$$2x dx + 2y dy = 0$$
 - **Kesimpulan**: "Resep sihir" tadi sebenarnya adalah pernyataan $ds = 0$. "Menempelkan dx dan dy " adalah cara cepat untuk menghitung perubahan total ds dan menyatakannya dengan nol.
-

4. Aplikasi: Menemukan Turunan Fungsi Invers

- Turunan implisit adalah alat yang sangat kuat untuk menemukan turunan dari fungsi invers.
- **Contoh: Mencari turunan dari $y = \ln(x)$**
 1. **Ubah ke Bentuk Implisit**: $e^y = x$. Kita melakukan ini karena kita sudah tahu turunan dari e^y .
 2. **Terapkan Turunan Implisit**: Cari perubahan total di kedua sisi ($d(\dots)$) dan samakan.
 - $d(e^y) = e^y dy$ (menggunakan [Aturan Rantai](#)).
 - $d(x) = dx$.
 3. **Samakan Perubahannya**: $e^y dy = dx$.
 4. **Selesaikan untuk dy/dx** : $dy / dx = 1 / e^y$.

5. **Gantikan Kembali:** Karena $e^y = x$, maka:

| $dy / dx = 1 / x$

Tags: #calculus #derivatives #implicit-differentiation #related-rates #3b1b-essence-of-calculus