

Ch 02: Paradoks Turunan

Tujuan Bab: Menggali lebih dalam tentang [Turunan](#), menghadapi paradoks "laju perubahan sesaat", dan membangun definisi yang kokoh dan intuitif menggunakan konsep [Limit](#).

1. Paradoks Inti: "Laju Perubahan Sesaat"

- **Masalah:** Frasa "laju perubahan sesaat" (instantaneous rate of change) sebenarnya adalah sebuah **oksimoron** (kontradiksi logis).
 - **"Perubahan"** membutuhkan perbandingan antara **dua titik** waktu/posisi yang berbeda.
 - **"Sesaat"** berarti kita hanya melihat pada **satu titik** tunggal.
 - **Pertanyaan Paradoks:** Bagaimana kita bisa mengukur "perubahan" jika kita hanya melihat "satu momen"? Ini seperti mencoba mengetahui kecepatan mobil hanya dari satu foto statis.
-

2. Solusi Praktis (Aproksimasi Dunia Nyata)

- **Bagaimana Speedometer Bekerja:** Speedometer tidak melakukan hal yang mustahil. Ia "curang" dengan cara yang cerdas.
 - Ia mengukur perubahan jarak yang **sangat kecil** (ds) dalam interval waktu yang **sangat singkat** (dt), misalnya 0.01 detik.
 - Lalu ia menghitung rasio: $\text{Kecepatan} \approx ds / dt$.
 - Ini adalah **aproksimasi** dari kecepatan sesaat.
 - **Visualisasi:**
 - dt adalah "langkah maju" (run) yang sangat kecil di sumbu horizontal.
 - ds adalah "langkah naik" (rise) yang dihasilkan di sumbu vertikal.
 - Rasio ds / dt adalah **kemiringan (slope) dari sebuah garis lurus (garis sekan)** yang menghubungkan dua titik yang sangat berdekatan di grafik.
-

3. Solusi Matematis (Jawaban yang Eksak)

- **Masalah dengan Aproksimasi:** Jawabannya bergantung pada seberapa kecil dt yang kita pilih. Ini tidak presisi.
- **Ide Jenius Kalkulus (LIMIT):** Daripada memilih satu dt spesifik, mari kita tanyakan:

"Angka apa yang **didekati** oleh rasio ds/dt saat dt menjadi **semakin kecil dan semakin kecil mendekati nol**?"

- **Definisi TURUNAN:** Turunan adalah **nilai LIMIT** dari rasio ds/dt saat dt mendekati nol.

"Aha!" Moment Visual

- Garis yang menghubungkan dua titik dekat disebut **garis sekan**.
- Saat dua titik itu meluncur semakin dekat (saat $dt \rightarrow 0$), garis sekan itu akan "berubah" menjadi sebuah garis yang hanya **menyentuh kurva di satu titik**.
- Garis "penyentuh" ini disebut **garis singgung (tangent line)**.
- **Kesimpulan:**

Turunan secara geometris adalah **kemiringan (slope)** dari **garis singgung** di satu titik.

Ini adalah solusi elegan dari matematika untuk paradoks awal. Kita berhasil mendefinisikan "kemiringan di satu titik".

4. Cara Berpikir yang "Sehat" tentang Turunan

- Karena "perubahan sesaat" itu paradoks, cara berpikir yang lebih akurat tentang turunan adalah:

Turunan adalah **aproksimasi konstan TERBAIK** untuk laju perubahan di sekitar satu titik.

- **Contoh Paradoks** $s(t) = t^3$ di $t=0$:
 - **Pertanyaan:** Apakah mobil bergerak di $t=0$?
 - **Jawaban #1 (dari Turunan):** Turunan di $t=0$ adalah 0 . Sepertinya mobil diam.
 - **Jawaban #2 (dari Logika):** Jika diam, kapan ia mulai bergerak?
 - **Resolusi:** Turunan 0 **tidak berarti** mobil statis. Itu hanya berarti **aproksimasi konstan terbaik** untuk kecepatannya di sekitar $t=0$ adalah 0 m/s . Mobilnya *memang* bergerak, tapi dengan cara yang sangat lambat di awal sehingga laju perubahan rata-ratanya mendekati nol saat interval waktunya menyusut.

Tags: [#calculus](#) [#derivatives](#) [#limits](#) [#paradox](#) [#3b1b-essence-of-calculus](#)