Ch 04: Perkalian Matriks sebagai Komposisi

Tujuan Bab: Membangun intuisi geometris tentang apa arti dari **perkalian dua matriks**. Ini bukan sekadar operasi angka, melainkan sebuah **komposisi (penggabungan) dari dua transformasi linear**.

Ide Utama: Melakukan Dua Transformasi Berturut-turut

- **Masalah:** Apa yang terjadi jika kita menerapkan satu transformasi (misal: Rotasi), lalu **dilanjutkan** dengan transformasi lain (misal: Shear)?
- **Jawabannya:** Hasil gabungan dari dua transformasi linear juga akan menjadi **satu transformasi linear baru** yang unik.
- **Komposisi:** Aksi "melakukan satu transformasi lalu yang lain" ini disebut **komposisi** transformasi.

Perkalian Matriks adalah cara numerik untuk menghitung matriks dari transformasi gabungan ini.

> $M_2 * M_1$ secara geometris berarti: **Terapkan transformasi M_1 DULU, lalu terapkan transformasi M_2.**

Aturan Baca: Kanan ke Kiri

Sama seperti komposisi fungsi matematika `g(f(x))` di mana kita mengerjakan `f(x)` dulu, perkalian matriks juga dibaca dari **kanan ke kiri**.

- Dalam ekspresi $M_2 * M_1 * v$, urutan aksinya adalah:
  1. Vektor `v` ditransformasi oleh M_1.
  2. Hasilnya kemudian ditransformasi oleh M_2.

Cara Menghitung (Tanpa Hafalan)

Untuk mencari matriks hasil $C = M_2 * M_1$, kita hanya perlu melacak di mana vektor basis $\hat{i}$ dan $\hat{j}$ berakhir setelah melalui **DUA** transformasi.

- **Mencari Kolom Pertama `C` (Perjalanan $\hat{i}$):**
  1. Cari tahu di mana $\hat{i}$ mendarat setelah transformasi M_1. Ini adalah **kolom pertama dari M_1**.

2. Ambil vektor hasil dari langkah 1, lalu transformasikan lagi dengan `M₂`. Caranya adalah dengan mengalikan matriks `M₂` dengan vektor hasil tadi.
3. Hasil akhir dari perjalanan ini adalah **kolom pertama dari** `C`.

> **Secara Rumus:** `Kolom_1_C = M₂ * (Kolom_1_M₁)`

- **Mencari Kolom Kedua** `C` **(Perjalanan** `ĵ`**):**
  1. Prosesnya sama persis. Cari tahu di mana `ĵ` mendarat setelah transformasi `M₁` (ini adalah **kolom kedua dari** `M₁`).
  2. Transformasikan lagi hasilnya dengan `M₂`.
  3. Hasil akhir perjalanan `ĵ` adalah **kolom kedua dari** `C`.

  > **Secara Rumus:** `Kolom_2_C = M₂ * (Kolom_2_M₁)`

- **Visualisasi:**
  Bayangkan `î` dan `ĵ` melakukan perjalanan dua langkah. `M₁` adalah langkah pertama, `M₂` adalah langkah kedua. Matriks `C` adalah "jalan pintas" yang langsung membawa mereka dari titik awal ke tujuan akhir dalam satu langkah.

Properti Penting (Dipahami, Bukan Dihafal)

1. Urutan itu PENTING (`A * B ≠ B * A`)

- **Sifat:** Perkalian matriks **Tidak Komutatif**.
- **Alasan Visual:** "Memutar lalu menggeser" (`Shear * Rotate`) memberikan hasil akhir yang **BERBEDA** dengan "menggeser lalu memutar" (`Rotate * Shear`).
- **Intuisi:** Urutan aksi di dunia nyata sangat penting, begitu pula dengan transformasi linear.

2. Pengelompokan Tidak Penting (`(A * B) * C = A * (B * C)`)

- **Sifat:** Perkalian matriks **Asosiatif**.
- **Alasan Visual:** Ini **BUKAN** tentang mengubah urutan aksi. Urutan fundamentalnya tetap sama: lakukan `C`, lalu `B`, lalu `A`.
- **Intuisi:** Tanda kurung hanya mengubah cara kita berpikir tentangnya:
  - `(AB)C`: "Lakukan `C`, lalu lakukan aksi gabungan `AB`."
  - `A(BC)`: "Lakukan aksi gabungan `BC`, lalu lakukan `A`."
  - Hasil akhirnya **pasti sama** karena urutan aksi (`C → B → A`) tidak pernah berubah.

Tags: #linear-algebra #matrix-multiplication #compositions #3b1b-essence-of-linear-algebra