06: Linearisation

Chapter Goal: To understand **Linearisation**, which is the most important and common application of the Taylor Series, and to analyze the error of this approximation.

---

1. Rewriting the Taylor Series

The video introduces a more intuitive way to write the Taylor Series for talking about "change".

- **Old Notation:** $f(x) \approx f(p) + f'(p)(x-p) + \ldots$
  - `p` : The center point of the approximation.
  - `x` : The point where we want to guess the function's value.
- **New, More Intuitive Notation:**
  - We replace `p` (the center point) with `x` .
  - We replace `x-p` (the distance from the center) with `Δx` (a "small step").
- **The New Formula:**

> $$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots$$

- **Meaning:** "The value of the function at a **new point** (`x+Δx`) is approximately the value at the **old point** (`f(x)`) plus some correction terms."

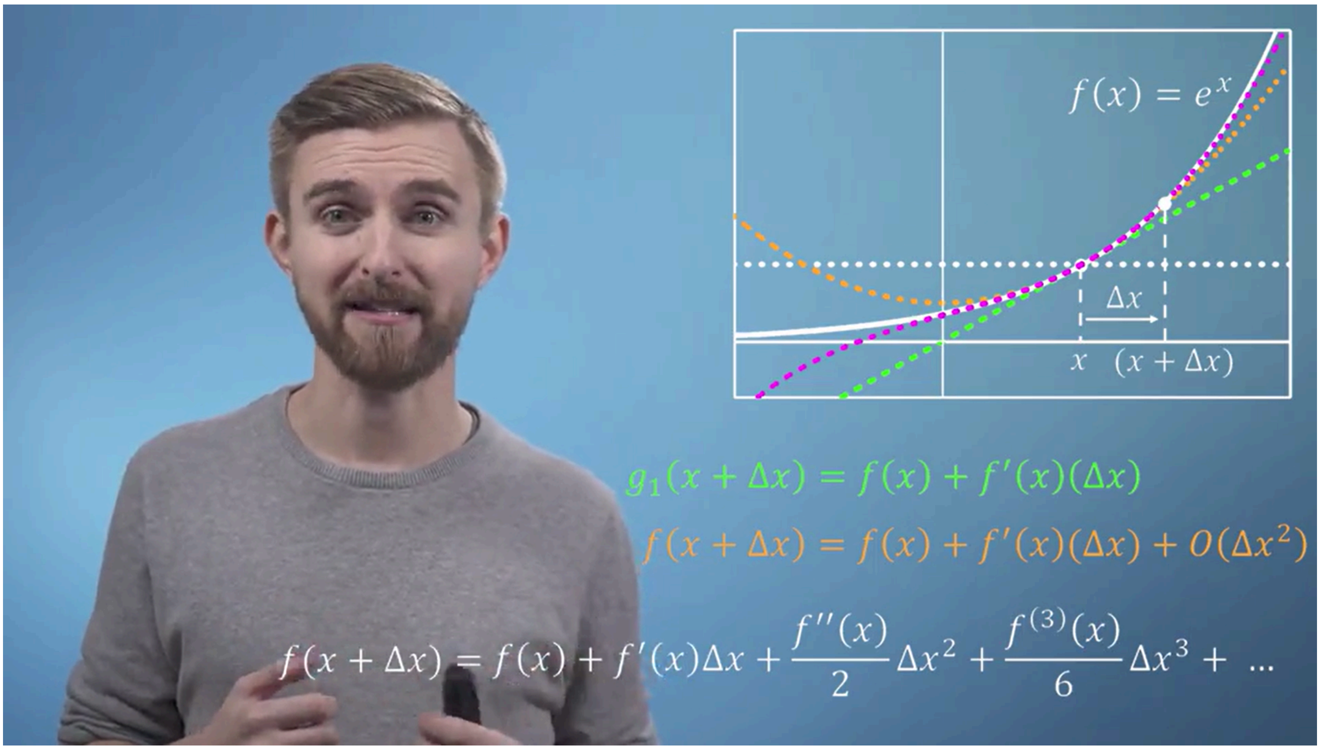
---

2. What is Linearisation?

- **Definition: Linearisation** is the process of approximating a complex function using only the **1st-order approximation** of its Taylor Series.
- **The Linearisation Formula:**

> $$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

- **Geometric Meaning:**
  - This is the equation of the **tangent line** at the point `x` .
  - We are ignoring all curvature and pretending that our function behaves like a straight line around the point `x` .
- **Intuition:** `Change in Output ≈ Slope * Change in Input` or `Rise ≈ Slope * Run` .



---

3. Analyzing the Approximation "Error"

- **Question:** How "wrong" is our linear approximation?
- **Logic:**
  - The full Taylor Series is exact: $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(\Delta x)^3 + \dots$
  - When we linearize, we are **throwing away all terms after the `Δx` term**.
  - The **error** of our approximation is exactly equal to the sum of all the terms we threw away.
- **"Aha!" Moment (Big O Notation):**
  - The first term we throw away is the $(\Delta x)^2$ term.
  - If `Δx` is a very small number (e.g., 0.01), then $(\Delta x)^2$ (0.0001) will be **much, much smaller**. Subsequent terms $((\mathit{\Delta} x)^3, \dots)$ will be even smaller.
  - Therefore, the size of the error is **dominated** by the first term we discarded.
- **Conclusion about the Error:**
  - The error of linearization is said to be **"of the order of $(\Delta x)^2$"**, written as $((\Delta x)^2)$.
  - **Meaning:** If we make `Δx` **10x smaller**, the error will become roughly $10^2 = 100x$ **smaller**. The approximation gets very good, very quickly.

---

4. Taylor Series "Returning the Favor" to Derivatives

This is a very clever section. We can use the Taylor Series to analyze the error of the `Rise/Run` derivative approximation we used at the very beginning.

- **Problem:** We know $f'(x) = {}_{\Delta x 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. But how "wrong" is this approximation if `Δx` is not approaching zero?
- **Algebraic Process:**
  1. Start with the full Taylor formula:
     $f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \dots$
  2. Rearrange it to isolate $f'(x)$:
     $f'(x) = \left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right] - \left[\frac{f''(x)}{2!}\Delta x + \dots\right]$
- **Interpreting the Result:**

  > **Exact Derivative = (Rise/Run Approximation) + (Error Terms)**

- **Conclusion:**
  - The error of the "Finite Difference" derivative approximation is dominated by the `Δx` term.
  - This method is said to have **first-order accuracy**, or (Δx).
  - **Meaning:** If we make `Δx` **10x smaller**, the error will also only get **10x smaller** (not as fast as the function approximation).
- **Key Message:** The Taylor Series is not just a tool for approximating functions, but also a powerful **analytical tool** for understanding the accuracy of various numerical methods.

---

5. A Concrete Worked Example: Linearizing `f(x) = x³`

Let's make this tangible. We will approximate the function $f(x) = x^3$ using a straight line.

Part 1: The "Old" Notation (using `p` and `x`)

Goal: Find the best linear approximation for $f(x) = x^3$ centered at the point `p = 2`.

Step 1: Gather the Ingredients at `p=2`

- **Function Value:** $f(p) = f(2) = 2^3 = 8$.
- **First Derivative:** $f'(x) = 3x^2$. So, $f'(p) = f'(2) = 3(2^2) = 12$.

Step 2: Build the 1st-Order Taylor Polynomial

The formula is: $f(x) \approx f(p) + f'(p)(x-p)$.

- Substitute the values:

  > $f(x) \approx 8 + 12(x-2)$

This is the equation of the **tangent line** to the curve $y = x^3$ at the point `x=2`.

Step 3: Test the Approximation

Let's try to guess the value of $f(2.1)$ using our line. Here, `x = 2.1`.

- **Approximation:**
  $f(2.1) \approx 8 + 12(2.1 - 2) = 8 + 12(0.1) = 8 + 1.2 = 9.2.$
- **Actual Value:**
  $f(2.1) = (2.1)^3 = 9.261.$

The approximation is very close!

Part 2: The "New" Notation (using `x` and `Δx`)

Now let's phrase the exact same problem using the "change" notation.

Goal: Find the linear approximation for a "small step" `Δx` away from the point `x = 2`.

Step 1: Gather the Ingredients at `x=2`

- **Function Value:** $f(x) = f(2) = 8.$
- **First Derivative:** $f'(x) = f'(2) = 12.$

Step 2: Build the Linearization Formula
The formula is: $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$

- Substitute the values:

  > $f(2 + \Delta x) \approx 8 + 12 \cdot \Delta x$

Step 3: Test the Approximation
Let's guess the value at the same point as before, which is `2.1`.

- In this notation, the "small step" is $\Delta x = 2.1 - 2 = 0.1.$
- **Approximation:**
  $f(2 + 0.1) \approx 8 + 12(0.1) = 8 + 1.2 = 9.2.$

The calculation and the result are **identical**, only the notation is different. The `Δx` notation is often more intuitive for thinking about changes and errors.

Part 3: Analyzing the Error

Question: Why was our approximation `9.2` not exactly `9.261`? Where did the error of `0.061` come from?

Answer: The error comes from the higher-order terms of the Taylor Series that we ignored.

Step 1: Find the Next Term in the Series
The next term in the Taylor series is the second-order term: $\frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2.$

- **Second Derivative:** $f''(x) = 6x$.
- **Evaluate at `x=2`:** $f''(2) = 6(2) = 12$.
- **Calculate the term:**

$$\frac{12}{2!}(0.1)^2 = \frac{12}{2}(0.01) = 6(0.01) = 0.06$$

"Aha!" Moment:

- The **first term we ignored** has a value of **0.06**.
- The **actual error** of our linear approximation was **0.061**.

They are almost the same! The tiny remaining difference (`0.001`) comes from the third-order term ($(\Delta x)^3$) and so on, which are even smaller.

Conclusion on Error:

- The error of our linear approximation is **dominated by the second-order term**. This is what $((\Delta x)^2)$ means.
- **Practical Implication:** If we had chosen a `Δx` that was 10 times smaller (`Δx = 0.01`), our error would have been roughly $10^2 = 100$ times smaller!
    - `Error ≈ 6 * (0.01)² = 0.0006`. This shows how quickly the linear approximation becomes very accurate for very small steps.

> **Note**
>
> Catatan tambahan

Tentu saja. Mari kita lanjutkan persis dari titik pemahaman terakhir kita.

Rekap Cepat Terakhir Kali:

- Kita sudah berhasil memahami **perubahan notasi** dari `y = f(p) + f'(p)(x-p)` menjadi `f(x + Δx) ≈ f(x) + f'(x)Δx`.
- Kita tahu bahwa ini hanyalah **dua cara berbeda untuk menulis persamaan yang sama** untuk **garis singgung**, yang merupakan aproksimasi orde pertama.
- Kita sekarang akan menyebut aproksimasi garis lurus ini dengan nama resminya: **Linearisasi**.

Bagian Selanjutnya: Menganalisis "Kesalahan" dari Aproksimasi Kita

> **Teks:** "What I now want to know is, when I use the first order approximation, instead of evaluating the base function, **how big should I expect the error to be?**"
> *(Apa yang ingin aku ketahui sekarang adalah, saat aku menggunakan aproksimasi orde pertama, alih-alih mengevaluasi fungsi dasarnya, **seberapa besar kesalahan yang harus aku harapkan?**)*

Apa Masalahnya?

- Kita tahu bahwa linearisasi (`f(x + Δx) ≈ f(x) + f'(x)Δx`) hanyalah sebuah **aproksimasi**.
- Itu adalah garis lurus yang "menyerempet" kurva asli.
- Pasti ada **"celah"** atau **"error"** antara nilai aproksimasi (di garis lurus) dengan nilai yang sebenarnya (di kurva).
- Pertanyaannya: **Seberapa besar "celah" ini?**

Menggunakan Deret Taylor Lengkap untuk Menemukan Error

> **Teks:** "Well, one way to think about it is that we know our function can be **exactly represented** by this infinitely long series... the **next term along**, i.e. the first term that we ignore... has a **delta x squared** in it."
> *(Nah, satu cara untuk memikirkannya adalah kita tahu fungsi kita bisa **direpresentasikan secara eksak** oleh deret tak berhingga ini... **suku berikutnya**, yaitu suku pertama yang kita abaikan... memiliki **delta x kuadrat** di dalamnya.)*

Di sinilah Deret Taylor menjadi alat analisis yang sangat kuat.

1. **Tulis Persamaan yang TEPAT (Eksak):**
   Deret Taylor yang lengkap bukanlah aproksimasi. Ia adalah representasi yang **sama persis** dengan fungsi aslinya (jika fungsinya "berperilaku baik").
   `f(x + Δx) = f(x) + f'(x)Δx + (f''(x)/2!)(Δx)² + (f'''(x)/3!)(Δx)³ + ...`
2. **Identifikasi Aproksimasi Kita:**
   Aproksimasi linear kita (`f(x) + f'(x)Δx`) adalah **dua suku pertama** dari deret lengkap ini.
3. **Identifikasi "Error"-nya:**
   Jika `Nilai_Eksak = Aproksimasi + Sisa` , maka `Error = Sisa` .
   "Error" dari linearisasi kita adalah **semua suku yang kita buang**:
   `Error = (f''(x)/2!)(Δx)² + (f'''(x)/3!)(Δx)³ + ...`

"Aha!" Moment: Perilaku Error (`O((Δx)²)`)

> **Teks:** "This means that if we can say that Δx is a small number, then $(\Delta x)^2$ must be a **really small number**... So we can now rewrite our first order approximation to include an error term, which we just say is **on the order of** $(\Delta x)^2$..."
> *(Ini berarti jika kita bisa katakan Δx adalah angka kecil, maka $(\Delta x)^2$ pasti angka yang **sangat kecil**... Jadi kita sekarang bisa menulis ulang aproksimasi orde pertama kita untuk menyertakan suku error, yang kita katakan **berorde** $(\Delta x)^2$...)*

Mari kita pikirkan perilaku dari suku-suku Error itu saat Δx sangat kecil.
Misal $\Delta x = 0.01$.

- `Error = (sesuatu)*(0.01)² + (sesuatu_lain)*(0.01)³ + ...`
- `Error = (sesuatu)*0.0001 + (sesuatu_lain)*0.000001 + ...`

Observasi Kunci:

- Suku pertama dari Error ($(\Delta x)^2$) akan **jauh lebih besar** daripada semua suku-suku error lainnya ($(\Delta x)^3$, $(\Delta x)^4$, dst.).
- Jadi, **ukuran total dari Error akan didominasi oleh suku pertama yang kita buang**.

Ini membawa kita ke sebuah notasi yang sangat berguna bernama **Notasi Big-O**.
Kita bisa mengatakan:
$\text{Error} \approx O((\Delta x)^2)$

- Ini dibaca: "Error-nya **berorde** delta x kuadrat."
- **Artinya:** Saat Δx menjadi sangat kecil, ukuran Error akan **sebanding dengan kuadrat dari** Δx.

Kenapa Ini Penting?
Ini memberitahu kita **seberapa cepat** aproksimasi kita menjadi akurat.

- Jika kamu membuat Δx **10x lebih kecil** (dari 0.1 menjadi 0.01)...
- ...maka Error-nya akan menjadi `10² = **100x**` **lebih kecil**!
- Ini adalah aproksimasi yang sangat bagus dan **konvergen dengan sangat cepat**.

Setup Contoh Konkret

- **Fungsi Asli:** $f(x) = e^x$ (Kita pilih ini karena kita tahu semua turunannya).
- **Tujuan:** Kita ingin membuat **aproksimasi linear** untuk e^x dan menganalisisnya.

Bagian 1: Bekerja dengan Notasi Lama (p dan x)

Langkah 1: Pilih "Titik Jangkar" (p)

- Mari kita buat aproksimasi yang berpusat di $p = 0$. (Ini akan menjadi Deret Maclaurin orde-1).

Langkah 2: Kumpulkan Informasi di $p=0$

- **Nilai Fungsi:** $f(p) = f(0) = e^0 = 1$.
- **Turunan Pertama:** $f'(x) = e^x$.
- **Kemiringan di p:** $f'(p) = f'(0) = e^0 = 1$.

Langkah 3: Bangun Persamaan Garis Singgung (Aproksimasi)

- **Resep:** $y = f(p) + f'(p) * (x - p)$
- Masukkan nilainya:
  $y = 1 + 1 * (x - 0)$
  $y = 1 + x$

Ini adalah **aproksimasi linear** (linearisasi) untuk e^x di sekitar $x=0$.

Langkah 4: Gunakan Aproksimasi untuk Menebak

- Mari kita coba tebak nilai dari $e^{0.1}$.
- **Titik Target** kita adalah $x = 0.1$.
- Masukkan $x = 0.1$ ke dalam persamaan aproksimasi kita:
  $y = 1 + 0.1 = 1.1$
- **Hasil Tebakan:** $e^{0.1} \approx 1.1$.

Bagian 2: Bekerja dengan Notasi Baru (x dan Δx)

Sekarang kita akan melakukan hal yang **sama persis**, tapi dengan "bahasa" yang baru.

Langkah 1: Pilih "Titik Awal" (x)

- Kita mulai dari $x = 0$.

Langkah 2: Tentukan "Langkah Kecil" (Δx)

- Kita ingin sampai ke titik 0.1.
- Maka, "langkah" yang kita ambil dari titik awal kita adalah:
  $\Delta x = (\text{Titik Tujuan}) - (\text{Titik Awal}) = 0.1 - 0 = 0.1$.

Langkah 3: Bangun Persamaan Aproksimasi

- **Resep:** $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) * \Delta x$
- Masukkan nilainya ($x=0$ dan $f'(0)=1$):
  $f(0 + \Delta x) \approx f(0) + f'(0) * \Delta x$
  $f(\Delta x) \approx 1 + 1 * \Delta x$

Langkah 4: Gunakan Aproksimasi untuk Menebak

- Kita ingin mencari nilai di `x=0.1`, yang mana adalah `Δx=0.1` dari titik awal kita.
- Masukkan `Δx = 0.1` ke dalam persamaan aproksimasi kita:
  `f(0.1) ≈ 1 + 0.1 = 1.1`
- **Hasil Tebakan:** $e^{0.1} \approx 1.1$.

Kesimpulan: Kedua notasi memberikan hasil yang **sama persis**, karena mereka memang mendeskripsikan hal yang sama.

Bagian 3: Menganalisis Error-nya

Sekarang, mari kita hitung seberapa "salah" tebakan kita.

Langkah 1: Hitung Nilai yang Sebenarnya

- Gunakan kalkulator untuk $e^{0.1}$.
- **Nilai Sebenarnya:** $e^{0.1} \approx 1.10517$

Langkah 2: Hitung Error Aktual

- `Error = Nilai Sebenarnya - Nilai Aproksimasi`
- `Error = 1.10517 - 1.1 = 0.00517`

Langkah 3: Bandingkan dengan Prediksi Error dari Deret Taylor
Teori mengatakan bahwa Error-nya akan **didominasi** oleh suku pertama yang kita buang.

- **Deret Taylor Lengkap untuk e^x:** $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + ...$
- **Aproksimasi kita (`1+x`):** Kita menggunakan dua suku pertama.
- **Suku Pertama yang Dibuang:** $x^2/2!$

Mari kita hitung nilai dari suku yang dibuang ini di `x = 0.1`:

- $\text{Error} \approx (0.1)^2 / 2! = 0.01 / 2 = 0.005$

"AHA!" Moment:

- **Error Aktual kita:** `0.00517`
- **Prediksi Error kita:** `0.005`

Lihat? Keduanya **sangat-sangat dekat!** Ini membuktikan bahwa teori $\text{Error} \approx O((\Delta x)^2)$ itu benar. Kesalahan kita memang "berorde" $(\Delta x)^2$.

Mari kita uji lagi dengan `Δx` yang lebih kecil, misal `Δx = 0.001`.

- $e^{0.001} \approx 1 + 0.001 = 1.001$ (Aproksimasi linear).
- Nilai Sebenarnya: `1.0010005`
- Error Aktual: `0.0000005`

- Prediksi Error ($(\Delta x)^2/2$): `(0.001)² / 2 = 0.000001 / 2 = 0.0000005`.
- **Cocok sempurna!**

Ini menunjukkan bahwa saat Δx semakin kecil, prediksi error dari Deret Taylor menjadi semakin akurat.

Apakah dengan melihat contoh konkret e^x ini dari awal sampai akhir, termasuk perbandingan errornya, konsep linearisasi dan analisis errornya menjadi jauh lebih jelas?

Tags: #mml-specialization #multivariate-calculus #taylor-series #linearization #big-o-notation #error-analysis ````````