

Linear Algebra: Memahami Basis, Orthogonalitas, & Gram-Schmidt (From Zero)

Catatan ini adalah perjalanan logika dari nol untuk memahami kenapa *Data Scientist* sangat mencintai Matriks Orthogonal dan bagaimana cara menciptakannya menggunakan Gram-Schmidt.

BAB 1: Masalah "Petunjuk Arah" (Konsep Basis)

Lupakan dulu matematika rumit. Bayangkan kita sedang main game **Mencari Harta Karun** di lapangan luas. Aku memegang peta dan harus memberi instruksi kepadamu.

Untuk memberi instruksi, kita butuh **Patokan Arah** (Basis).

Skenario 1: Petunjuk yang Nyebelin (Non-Orthogonal)

Aku orangnya aneh, aku pakai patokan arah:

1. **Timur** (Kanan Lurus).
2. **Timur Laut** (Serong Kanan 45°).

Aku suruh kamu: "*Jalan 3 langkah Timur, terus 4 langkah Timur Laut.*"

- **Masalahnya:** Saat kamu jalan ke Timur Laut, kamu itu sebenarnya **bergerak ke Timur JUGA** dan **bergerak ke Utara JUGA**.
- Arah kedua ini "bocor" atau mencampuri urusan arah pertama.
- Menghitung posisi presisi jadi ribet banget.

Skenario 2: Petunjuk yang Enak (Orthogonal)

Aku pakai patokan normal:

1. **Timur** (Kanan Lurus).
2. **Utara** (Depan Lurus).

Aku suruh kamu: "*Jalan 3 langkah Timur, terus 4 langkah Utara.*"

- Saat kamu jalan ke Timur, kamu **SAMA SEKALI TIDAK** bergerak ke Utara.
- Dua arah ini **Murni Terpisah**.

DEFINISI ORTHOGONAL: Artinya arah-arah tersebut saling **Tegak Lurus** (90°). Arah yang satu tidak mencampuri arah yang lain.

BAB 2: Masalah "Langkah Kaki" (Normalisasi)

Masalah kedua: Langkah kakiku panjang (1 meter), langkah kakimu pendek (0.5 meter). Kalau aku bilang "Maju 3 langkah", kita bakal miskomunikasi.

Solusinya: Kita butuh **Standar**.

"1 Langkah WAJIB hukumnya harus pas **1 Meter**."

Di matematika, standar "1 Satuan" ini disebut **NORMAL** (atau Unit).

The Holy Grail: ORTHONORMAL

Apa yang dicari-cari orang matematika? Sistem arah (Basis) yang memenuhi 2 syarat impian:

1. **ORTHOGONAL**: Saling tegak lurus (biar gak saling ganggu).
2. **NORMAL**: Panjangnya standar 1 (biar hitungan pas).

Bayangkan **Kertas Berpetak (Grid)**: Kotak-kotaknya siku-siku dan ukurannya pas 1x1. Itu basis sempurna.

BAB 3: Matriks sebagai "Rak Arah"

Matematikawan tidak suka nulis arah terpisah. Mereka menyimpannya dalam wadah bernama **MATRIKS**. Bayangkan Matriks sebagai **Rak Sepatu/Arah**:

$$M = \begin{bmatrix} & | & | \\ & \text{Timur} & \text{Utara} \\ & | & | \end{bmatrix}$$

Jika isi rak ini adalah arah-arah yang sempurna (Siku-siku & Panjang 1), maka matriks ini disebut **MATRIKS ORTHOGONAL**.

BAB 4: Keajaiban "Membalik Keadaan" (Inverse)

Kenapa kita terobsesi dengan Matriks Orthogonal? Jawabannya ada di **Jalan Pulang (Inverse)**.

Skenario Arah Miring (Matriks Biasa):

- Kamu jalan zig-zag serong sana-sini.
- Kalau disuruh balik ke posisi awal? Pusing! Rumus jalan pulangnya ribet.

Skenario Sempurna (Matriks Orthogonal):

- Kamu jalan ke Timur, lalu ke Utara.
- Kalau disuruh balik? Gampang! "*Tadi ke Timur, sekarang ke Barat. Tadi ke Utara, sekarang ke Selatan.*"

KUNCINYA: Di dunia Orthogonal, Invers itu semudah "**Memutar Balik**" pandangan.
Secara matematika: $A^{-1} = A^T$ (**Invers = Transpose**).

Komputer sangat suka ini karena Transpose itu cepat dan hemat energi, beda dengan hitung invers biasa yang berat.

BAB 5: Gram-Schmidt (Si Tukang Reparasi)

Masalah Dunia Nyata: Data alam seringkali kasih kita arah yang **Jelek** (Miring-miring/Serong). Kalau arah jelek ini dimasukkan ke matriks → Invers-nya susah.

Kita butuh alat untuk **Meluruskan Arah Jelek** menjadi **Arah Bagus (Orthonormal)**. Alat itu bernama **GRAM-SCHMIDT**.

Sip! Karena kamu sudah paham **KENAPA** kita butuh Gram-Schmidt (buat ngelurusin arah yang miring-miring), sekarang kita masuk ke intinya: **BAGAIMANA CARANYA?**

Kita akan bedah algoritma **Gram-Schmidt** ini pakai logika "Membersihkan Kontaminasi".

Bayangkan kita punya 2 arah (vektor) yang **Jelek/Mentah**:

1. **Vektor A (v_1)**: Arahnya ke **Timur**, tapi panjangnya ngaco (misal 5 meter).
2. **Vektor B (v_2)**: Arahnya **Timur Laut** (Serong Kanan 45°). Ini biang keroknya.

Tujuan kita: Bikin arah **Timur Murni (e_1)** dan **Utara Murni (e_2)** yang panjangnya 1 meter.

LANGKAH 1: Urus Anak Pertama (Si v_1)

Anak pertama itu paling enak. Dia jadi patokan utama. Dia nggak perlu tegak lurus sama siapa-siapa (karena belum ada siapa-siapa).

- **Kondisi:** Arahnya sudah oke (Timur), tapi kepanjangan (5 meter).
- **Solusi:** Potong aja biar jadi 1 meter.
- **Rumus:** Bagi v_1 dengan panjangnya sendiri.

$$e_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$$

Hasil: Kita punya e_1 (Timur, 1 meter). 

LANGKAH 2: Urus Anak Kedua (Si v_2) - "Operasi Pembersihan"

Nah, masuk si v_2 (Timur Laut).

Masalahnya: Dia Serong. Artinya, di dalam diri v_2 , ada unsur Timur (searah e_1) dan ada unsur Utara.

Kita nggak mau unsur Timurnya! Kita mau dia murni Utara (Tegak Lurus sama e_1).

Proses Pembersihan (Gram-Schmidt):

1. Cek Kontaminasi (Proyeksi/Bayangan):

Kita senter si v_2 ke arah e_1 .

"Eh v_2 , seberapa banyak sih unsur 'Timur' di dalam dirimu?"

Rumus: $(v_2 \cdot e_1) \times e_1$ (Ini adalah "Bayangan" v_2 yang jatuh di e_1).

2. Buang Sampahnya (Pengurangan):

Sekarang kita ambil v_2 asli, lalu kita Gunting/Buang bagian bayangan tadi.

Logikanya: (Timur Laut) - (Timur) = Utara.

$$u_2 = v_2 - \text{Bayangan}$$

$$u_2 = v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1$$

Hasil (u_2): Sekarang kita punya sisa potongan yang arahnya sudah **MURNI UTARA** (90° dari e_1). Hore!

3. Finishing (Normalisasi):

Sama kayak langkah 1, si u_2 ini arahnya udah bener (Utara), tapi panjangnya mungkin masih ngaco (misal 3 meter).

Potong biar jadi 1 meter.

$$e_2 = \frac{u_2}{|u_2|}$$

Hasil Akhir: Kita punya e_2 (Utara, 1 meter). 

Note

Oeee, aku mau nanya, aku paham secara esensinya cuman mau nanya rumusnyaaa kenapa kok bisa begini

LANGKAH 2: Urus Anak Kedua (Si v_2) - "Operasi Pembersihan" Nah, masuk si v_2 (Timur Laut). Masalahnya: Dia Serong. Artinya, di dalam diri v_2 , ada unsur Timur (searah e_1) dan ada unsur Utara. Kita nggak mau unsur Timurnya! Kita mau dia murni Utara (Tegak Lurus sama e_1). Proses Pembersihan (Gram-Schmidt): Cek Kontaminasi (Proyeksi/Bayangan): Kita senter si v_2 ke arah e_1 . "Eh v_2 , seberapa banyak sih unsur 'Timur' di dalam dirimu?" Rumus: $(v_2 \cdot e_1) \times e_1$ (Ini adalah "Bayangan" v_2 yang jatuh di e_1). Buang Sampahnya (Pengurangan): Sekarang kita ambil v_2 asli, lalu kita

Gunting/Buang bagian bayangan tadi. Logikanya: (Timur Laut) - (Timur) = Utara.

$$u_2 = v_2 - \text{Bayangan}$$

$$u_2 = v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1$$

Hasil (u_2): Sekarang kita punya sisa potongan yang arahnya sudah MURNI UTARA (90° dari e_1). Hore! Finishing (Normalisasi): Sama kayak langkah 1, si u_2 ini arahnya udah bener (Utara), tapi panjangnya mungkin masih ngaco (misal 3 meter). Potong biar jadi 1 meter.

$$e_2 = \frac{u_2}{|u_2|}$$

Hasil Akhir: Kita punya e_2 (Utara, 1 meter).

Rumus: $(v_2 \cdot e_1) \times e_1$ (Ini adalah "Bayangan" v_2 yang jatuh di e_1). ? kok bisa? aku agak agak lupa

Pertanyaan yang bagus! Wajar banget kalau lupa, karena rumus proyeksi itu sering bikin bingung antara yang **Skalar** (angka doang) dan **Vektor** (ada arahnya).

Mari kita bedah kenapa rumusnya $(v_2 \cdot e_1) \times e_1$.

Kuncinya ada di dua bahan resep untuk membuat sebuah Vektor Bayangan:

1. **Seberapa Panjang** bayangannya? (Ukuran)
2. **Ke Arah Mana** bayangannya menunjuk? (Arah)

1. Bahan Pertama: Ukuran (The "How Long")

Kita mau tahu panjang bayangan v_2 yang jatuh di atas e_1 .

Ingat rumus dasar Dot Product:

$$A \cdot B = |A||B| \cos(\theta)$$

Nah, di sini ada hal spesial. Vektor e_1 itu adalah Unit Vector (Vektor Satuan).

Artinya, panjangnya ($|e_1|$) adalah 1.

Jadi kalau kita masukkan ke rumus:

$$v_2 \cdot e_1 = |v_2| \times (1) \times \cos(\theta)$$

$$v_2 \cdot e_1 = |v_2| \cos(\theta)$$

Secara trigonometri (segitiga siku-siku), $|v_2| \cos(\theta)$ itu MURNI adalah **Panjang Sisi Samping** alias **Panjang Bayangan**.

Jadi: $(v_2 \cdot e_1)$ itu hanyalah sebuah **ANGKA** (Skalar) yang mewakili panjang bayangan. Misal hasilnya: 5.

2. Bahan Kedua: Arah (The "Which Way")

Sekarang kita sudah punya angka "5" (Panjang bayangan). Tapi "5" itu cuma konsep abstrak. Kita butuh menjadikannya benda nyata (vektor) di lantai.

Lantainya adalah e_1 . Arahnya ke sana.

Bagaimana cara membuat vektor sepanjang 5 di arah e_1 ?

Gampang! Ambil vektor e_1 (yang panjangnya cuma 1), lalu kalikan dengan 5.

$$5 \times e_1$$

3. Gabungkan (The "Kok Bisa")

Jadi, rumus $(v_2 \cdot e_1)e_1$ itu sebenarnya gabungan dari dua langkah tadi:

$$\underbrace{(v_2 \cdot e_1)}_{\text{Angka 5 (Panjang)}} \times \underbrace{e_1}_{\text{Arah Lantai}}$$

- **Bagian dalam kurung:** Menghitung "Berapa meter panjang bayangannya?" (Skalar).
- **Bagian luar kurung:** Menempelkan panjang itu ke arah e_1 supaya jadi Vektor.

Kenapa Rumusnya Gak Ribet (Gak Ada Pembagian)?

Mungkin kamu ingat rumus proyeksi yang lebih ribet ini:

$$\text{Proj} = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b$$

Kenapa di Gram-Schmidt rumusnya jadi simpel banget (gak ada per b^2)?

Karena e_1 sudah dinormalisasi (Panjangnya 1).

Pembaginya adalah $|e_1|^2$. Karena panjangnya 1, maka $1^2 = 1$.

Membagi dengan 1 itu gak ngefek apa-apa. Makanya rumusnya jadi ringkas/bersih:

$$(v_2 \cdot e_1)e_1$$

Gimana? Masuk akal kan? Itu cuma **(Panjang Bayangan) × (Arah Lantai)**.

Visualisasi Gampang: "Tiang Bendera"

1. **Tiang 1:** Tancapkan lurus saja. (Ini e_1).
 2. **Tiang 2:** Awalnya miring nyender ke Tiang 1.
 - Gram-Schmidt itu ibarat kamu **mendorong** Tiang 2 menjauh dari Tiang 1 sampai dia berdiri tegak lurus sendiri.
 - "Dorongan" itulah proses pengurangan bayangan tadi.
-

Kalau Ada Vektor Ketiga (v_3)?

Sama aja! Misal v_3 arahnya miring ke segala arah (3D).

Dia "terkontaminasi" oleh e_1 dan e_2 .

Cara bersihkannya:

1. Ambil v_3 .
 2. Buang unsur e_1 -nya (Kurangi Proyeksi ke e_1).
 3. Buang unsur e_2 -nya (Kurangi Proyeksi ke e_2).
 4. Sisanya pasti arah baru yang tegak lurus sama dua-duanya (Murni Atas/Bawah).
 5. Normalkan jadi 1 meter.
-

KESIMPULAN AKHIR

Rumus Gram-Schmidt:

$$u_k = v_k - \sum \text{proj}(v_k)$$

Terjemahan Manusia:

"**Vektor Baru = Vektor Lama dikurangi SEMUA bayangan dia di vektor-vektor yang sudah jadi sebelumnya.**"

Intinya cuma "**Buang bagian yang nyerempet/searah**" biar sisanya tegak lurus murni.