Ch 14: Eigenvectors dan Eigenvalues

Tujuan Bab: Membangun intuisi di balik **Eigenvector** dan **Eigenvalue**, dan memahami mengapa mereka sangat penting untuk "merangkum" esensi dari sebuah Transformasi Linear.

---

1. Ide Utama: Vektor Spesial yang Tidak Berubah Arah

- **Masalah:** Kebanyakan vektor, setelah melalui sebuah transformasi, akan "terlempar" dari garis span-nya (berubah arah).
- **Eigenvector:** Adalah **vektor spesial** yang, setelah transformasi, tetap berada di **garis span-nya sendiri**.
- **Artinya:** Transformasi tersebut hanya **meregangkan (stretch)** atau **mengerutkan (squish)** eigenvector, tanpa mengubah arah dasarnya. Vektor hasil adalah kelipatan skalar dari vektor asli.
- **Visualisasi:** Bayangkan sebuah arus sungai. Kebanyakan tongkat akan berputar dan berubah arah. Eigenvector adalah tongkat yang hanya bergerak maju atau mundur di sepanjang arusnya tanpa berputar.
- **Eigenvalue (`λ`):** Adalah **faktor pengali** peregangan/pengerutan tersebut.
  - `λ > 1` : Vektor diregangkan.
  - `0 < λ < 1` : Vektor dikerutkan.
  - `λ < 0` : Vektor dibalik arahnya.
  - `λ = 1` : Vektor tidak berubah sama sekali.

---

2. Kenapa Ini Berguna? Menyederhanakan Transformasi

- Eigenvector/value memberikan **"sumbu aksi"** dari sebuah transformasi yang kompleks.
- **Contoh Paling Intuitif (Rotasi 3D):**
  - Matriks rotasi 3x3 sangat rumit.
  - **Eigenvector** dari rotasi adalah **sumbu rotasi**-nya (satu-satunya arah yang tidak berubah).
  - **Eigenvalue**-nya pasti `λ = 1` (karena rotasi tidak meregangkan).
  - Memahami rotasi sebagai "sebuah sumbu dan sudut putar" jauh lebih mudah daripada melihat matriks 3x3-nya.

---

3. Cara Menemukannya (Logika, Bukan Hafalan)

- **Definisi Aljabar:** `A * v = λ * v`
  - Kita mencari `v` (bukan nol) dan `λ` yang membuat persamaan ini benar.
- **Langkah-Langkah Logika:**
  1. Ubah persamaan menjadi `(A - λI) * v = 0`. (`I` adalah matriks identitas).
  2. Kita mencari vektor `v` yang **bukan nol** yang setelah ditransformasi oleh matriks baru `(A - λI)`, hasilnya menjadi **vektor nol**.
  3. Ini hanya mungkin jika transformasi `(A - λI)` **"meremukkan" ruang** ke dimensi yang lebih rendah (memiliki Null Space yang bukan hanya titik nol).
  4. Sebuah transformasi "meremukkan" ruang jika dan hanya jika **determinannya adalah nol**.
  5. **Jadi, tugas kita adalah:** Mencari nilai `λ` yang membuat `det(A - λI) = 0`.
- **Proses Praktis:**
  1. Selesaikan persamaan `det(A - λI) = 0` untuk menemukan semua nilai `λ` (eigenvalue).
  2. Untuk setiap `λ` yang ditemukan, masukkan kembali ke `(A - λI) * v = 0` dan selesaikan untuk `v` untuk menemukan Eigenvector yang bersesuaian.

---

4. Eigenbasis: "Sistem Koordinat Sempurna"

- **Matriks Diagonal:** Jika sebuah matriks berbentuk diagonal, maka Vektor Basis-nya (`î`, `ĵ`) adalah eigenvector, dan entri diagonalnya adalah eigenvalue-nya.
- **Ide Perubahan Basis:**
  - Jika sebuah transformasi punya cukup banyak eigenvector untuk merentang seluruh ruang, kita bisa **berpindah ke sistem koordinat di mana eigenvector itu adalah basisnya**.
  - **Eigenbasis:** Sebuah himpunan vektor basis yang semuanya adalah eigenvector.
- **Keuntungan:**
  - Di "dunia" eigenbasis ini, matriks transformasinya akan menjadi **matriks diagonal** yang sangat sederhana.
  - Ini membuat perhitungan yang rumit (seperti `A^100`) menjadi sangat mudah. Caranya:
    1. Pindah ke dunia eigenbasis (`D = P⁻¹AP`).
    2. Lakukan perhitungan mudah di sana (`D^100`).
    3. Pindah kembali ke dunia kita (`A^100 = PD^100P⁻¹`).

Tags: #linear-algebra #eigenvectors #eigenvalues #eigenbasis #change-of-basis #3b1b-essence-of-linear-algebra