

Ch 09: Dot Product dan Dualitas

Tujuan Bab: Memberikan dua sudut pandang tentang **Dot Product**: (1) Interpretasi geometris standar sebagai **proyeksi**, dan (2) Sudut pandang yang lebih dalam sebagai manifestasi dari konsep **Dualitas**.

1. Dot Product: Pengenalan Standar

Secara Numerik

Menjumlahkan hasil perkalian dari komponen-komponen yang bersesuaian.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd$$

Secara Geometris (Proyeksi)

Dot product dari $\vec{v} \cdot \vec{w}$ dapat diartikan sebagai:

(Panjang dari proyeksi \vec{w} ke \vec{v}) * (Panjang \vec{v})

- **Tanda Hasil:**
 - **Positif:** Jika \vec{v} dan \vec{w} menunjuk ke arah yang umumnya sama.
 - **Nol:** Jika \vec{v} dan \vec{w} saling tegak lurus (proyeksinya adalah titik).
 - **Negatif:** Jika \vec{v} dan \vec{w} menunjuk ke arah yang umumnya berlawanan.
 - **Sifat Komutatif:** $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$. Urutan tidak penting karena geometrinya simetris.
 - **Misteri Awal:** Kenapa perhitungan numerik $(ac + bd)$ bisa sama dengan konsep geometris "proyeksi"? Jawabannya ada di Dualitas.
-

2. Jembatan ke Dualitas: Transformasi $nD \rightarrow 1D$

- **Ide Kunci:** Mari kita analisis transformasi linear yang mengubah vektor n -dimensi menjadi **satu angka tunggal** (ruang 1D).
- **Representasi Matriks:** Transformasi seperti ini (misal, $2D \rightarrow 1D$) direpresentasikan oleh matriks 1×2 .
 - $[a, b]$
- **"Aha!" Moment Numerik:**
 - Mengaplikasikan transformasi ini ke vektor $[x, y]$ adalah $[a, b] \cdot [x, y] = ax + by$.

- Melakukan dot product dengan vektor $[a, b]$ adalah $[a, b] \cdot [x, y] = ax + by$.
- **Perhitungannya IDENTIK!**

Ini adalah petunjuk bahwa ada hubungan tersembunyi antara **transformasi 2D→1D** (sebuah "aksi") dengan **vektor 2D** (sebuah "benda").

3. Dualitas: Jembatan Antar Dunia

Dualitas adalah adanya hubungan "kembar" satu-satu yang sempurna antara dua jenis objek matematika yang kelihatannya berbeda.

Di Aljabar Linear:

Setiap **Transformasi Linear** $nD \rightarrow 1D$ memiliki "kembaran" berupa **satu vektor unik** di ruang nD .

Mengaplikasikan transformasi itu sama dengan melakukan **Dot Product** dengan vektor kembarannya.

- **Dual dari sebuah Vektor:** Adalah transformasi linear yang diwakilinya.
- **Dual dari sebuah Transformasi** $nD \rightarrow 1D$: Adalah vektor di ruang nD tersebut.

"Aha!" Moment Geometris (Membuktikan Hubungan)

1. **Ciptakan Aksi Geometris Murni:** Definisikan sebuah transformasi $2D \rightarrow 1D$ sebagai "proyeksikan vektor apa pun ke sebuah garis \hat{u} (vektor unit), lalu ukur hasilnya di garis itu". Ini adalah transformasi linear.
2. **Cari Kembarannya:** Karena ini adalah transformasi $2D \rightarrow 1D$, ia **PASTI** punya kembaran (vektor dual) p di ruang $2D$.
3. **Penemuan via Simetri:** Dengan argumen simetri, dibuktikan bahwa vektor p ini adalah **vektor \hat{u} itu sendiri**.
4. **Kesimpulan Logis:**
 - Karena Aksi "Proyeksi ke \hat{u} " memiliki kembaran Benda \hat{u} , maka:
 - Melakukan **Aksi Proyeksi** pada vektor v ...
 - ...**HARUS** memberikan hasil yang sama dengan melakukan **Dot Product** antara **Benda \hat{u}** dengan v .

Inilah jawaban dari misteri awal: hubungan antara proyeksi dan dot product **bukanlah kebetulan**, melainkan konsekuensi dari prinsip Dualitas.

Kesimpulan Utama

- **Di Permukaan:** Dot product adalah alat geometris untuk mengukur **proyeksi** dan **kesejajaran**.
 - **Di Level Terdalam:** Melakukan dot product dengan sebuah vektor adalah cara untuk **mengubah vektor itu menjadi "kembaran" transformasinya** dan mengaplikasikannya ke vektor lain.
-

Tags: [#linear-algebra](#) [#dot-product](#) [#duality](#) [#projection](#) [#3b1b-essence-of-linear-algebra](#)