03: Power Series Derivation

Chapter Goal: To formally derive the "recipe" for building a Taylor Series, step-by-step, confirming the intuitions from the previous video about matching properties.

---

1. Core Idea: Reconstruction from a Single Point

- **Taylor Series Principle:** If a function is "well-behaved" (continuous and infinitely differentiable), then if we know **all the information** about that function at a **single point**, we can reconstruct the entire function elsewhere.
- **"All the information"** means: the function's value (`f`), its first derivative (`f'`), its second derivative (`f''`), and so on, all evaluated at that one point.

---

2. The Construction Process: Matching Properties Layer by Layer

We will build an approximating polynomial `g(x)` for a function `f(x)` around the point `x=0`.

Layer 1: The 0th-Order Approximation (g_0)

- **Goal:** Match the function's **value**.
- **Information Used:** $f(0)$.
- **Polynomial Form:** $g_0(x) = c_0$.
- **Condition:** $g_0(0) = f(0)$.
- **Result:** $c_0 = f(0)$.

> $g_0(x) = f(0)$

Layer 2: The 1st-Order Approximation (g_1)

- **Goal:** Match the **value AND the slope**.
- **Information Used:** $f(0), f'(0)$.
- **Polynomial Form:** $g_1(x) = c_0 + c_1 x$.
- **Conditions:**
  1. $g_1(0) = f(0) \implies c_0 = f(0)$.
  2. $g_1'(0) = f'(0)$. The derivative of $g_1(x)$ is c_1. So, $c_1 = f'(0)$.
- **Result:**

> $g_1(x) = f(0) + f'(0)x$

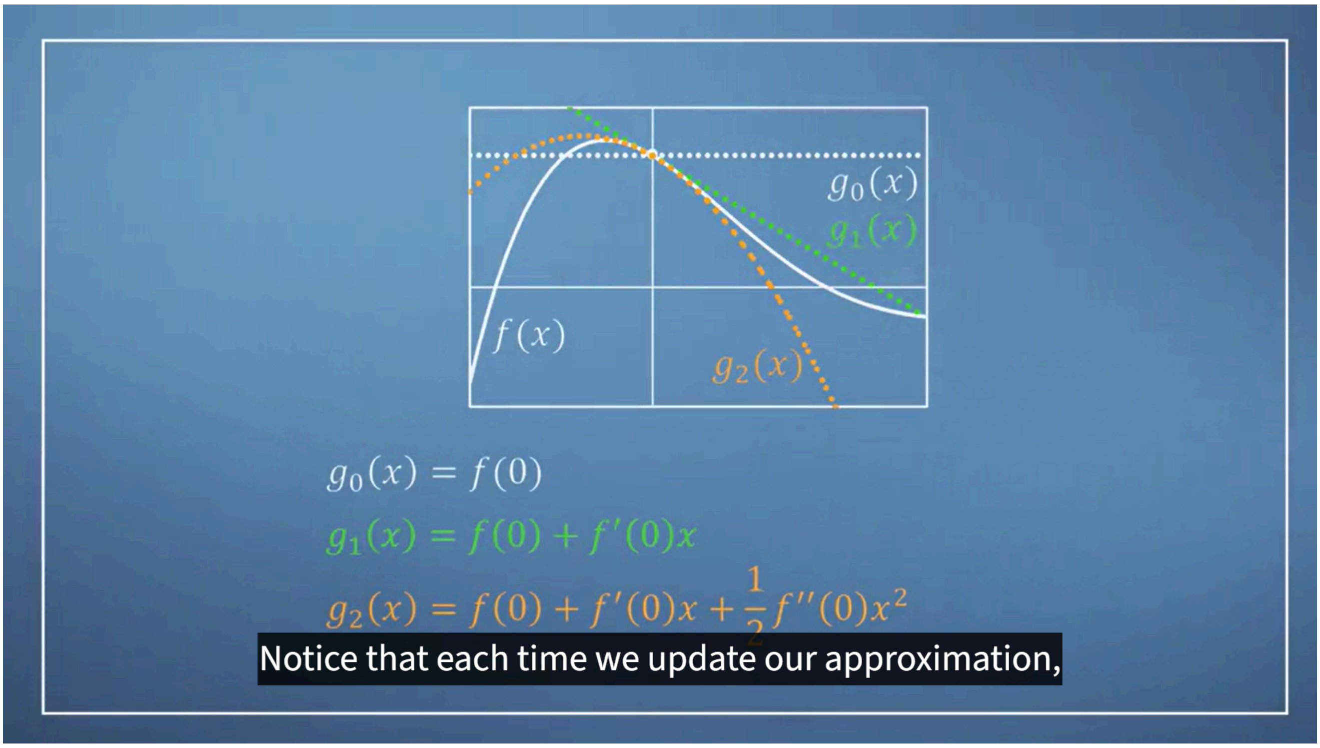
Layer 3: The 2nd-Order Approximation (g_2)

- **Goal:** Match the value, slope, **AND curvature**.
- **Information Used:** $f(0), f'(0), f''(0)$.
- **Polynomial Form:** $g_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$.
- **Conditions:**
  1. $g_2(0) = f(0) \implies c_0 = f(0)$.
  2. $g_2'(0) = f'(0)$. The derivative of $g_2(x)$ is $c_1 + 2c_2 x$. At $x = 0$, this is c_1. So, $c_1 = f'(0)$.
  3. $g_2''(0) = f''(0)$. The second derivative of $g_2(x)$ is $2c_2$. So, $2c_2 = f''(0)$.
- **"Aha!" Moment:** c_2 is not just $f''(0)$. We have to divide.

> $c_2 = \frac{f''(0)}{2}$

- **Result:**

> $g_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$



---

3. Finding the General Pattern (The Factorial)

If we continue to the 3rd order ($c_3 x^3$), we would find $c_3 = \frac{f(0)}{6}$.
If we continue to the 4th order ($c_4 x^4$), we would find $c_4 = \frac{f^4(0)}{24}$.

- **Recognizing the Pattern:**
  - `2 = 2 * 1 = 2!` (2 factorial)

- `6 = 3 * 2 * 1 = 3!` (3 factorial)
- `24 = 4 * 3 * 2 * 1 = 4!` (4 factorial)

- **Why does the factorial appear?** Because each time we differentiate x^n (using the Power Rule), the exponent "hops down" in front and gets multiplied. The nth derivative of x^n is $\frac{n}{x^n}(x^n) = n!$. To "cancel out" this effect, we must divide our coefficient by $n!$.

---

4. The Final Formula: The Maclaurin Series

- **General Formula for the coefficient c_n:**

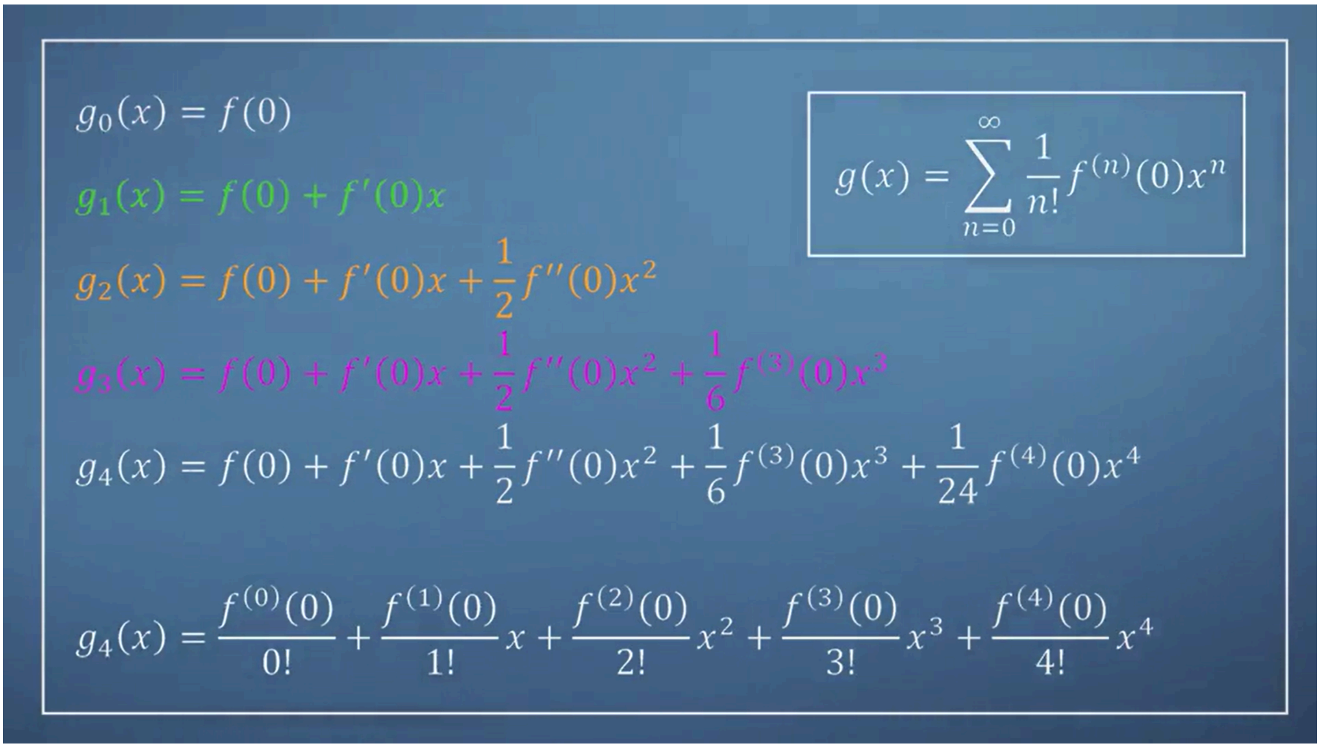
> $$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$
>
> (The nth derivative of `f` at `x=0`, divided by `n` factorial).

- **The Taylor Series around `x=0` (also called the Maclaurin Series):**

$$f(x) \approx {}_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

> $$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

- **Conclusion:**
This is the formal "recipe" for building a polynomial approximation that "hugs" a function around `x=0` as tightly as possible. Each new term that is added has the job of matching a higher-order derivative.



Note

Tentu saja! Mengerjakan contoh konkret adalah cara terbaik untuk melihat bagaimana "resep" Deret Maclaurin ini bekerja dalam praktik.

Kita akan gunakan salah satu fungsi paling penting: $f(x) = e^x$.

Tujuan:
Mencari polinomial aproksimasi (Deret Maclaurin) untuk e^x di sekitar $x=0$.

Langkah 1: Kumpulkan "Bahan Baku" (Turunan e^x di $x=0$)

Ini adalah bagian termudah untuk e^x, karena turunan dari e^x adalah e^x itu sendiri, selamanya!

1. **Turunan ke-0:**
   $f(x) = e^x$ → $f(0) = e^0 = 1$
2. **Turunan Pertama:**
   $f'(x) = e^x$ → $f'(0) = e^0 = 1$
3. **Turunan Kedua:**
   $f''(x) = e^x$ → $f''(0) = e^0 = 1$
4. **Turunan ke-n:**
   $f^n(x) = e^x$ → $f^n(0) = e^0 = 1$

Kesimpulan: Semua turunan dari e^x saat dievaluasi di $x=0$ nilainya selalu **1**.

Langkah 2: Hitung Koefisien c_n Satu per Satu

Sekarang kita gunakan "resep" kita: $c_n = f^n(0) / n!$

- c_0 **(Suku Konstan):**
  $c_0 = f(0) / 0! = 1 / 1 = 1$
  (Ingat: $0!$ didefinisikan sebagai 1)
- c_1 **(Koefisien untuk x^1):**
  $c_1 = f'(0) / 1! = 1 / 1 = 1$
- c_2 **(Koefisien untuk x^2):**
  $c_2 = f''(0) / 2! = 1 / 2 = 1/2$
- c_3 **(Koefisien untuk x^3):**
  $c_3 = f'''(0) / 3! = 1 / 6$
- c_4 **(Koefisien untuk x^4):**
  $c_4 = f^4(0) / 4! = 1 / 24$

- **Pola Umum:** $c_n = 1 / n!$

Langkah 3: Susun "Bata Lego" Polinomialnya

Kita sekarang susun polinomialnya, selapis demi selapis, seperti di video "Power Series".

- **Aproksimasi Orde ke-0 (Garis Horizontal):**
  $P_0(x) = c_0 = 1$
- **Aproksimasi Orde ke-1 (Garis Singgung):**
  $P_1(x) = c_0 + c_1x = 1 + 1*x = 1 + x$
- **Aproksimasi Orde ke-2 (Parabola "Pelukan"):**
  $P_2(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 = 1 + x + (1/2)x^2$
- **Aproksimasi Orde ke-3 (Kubik):**
  $P_3(x) = 1 + x + (1/2)x^2 + (1/6)x^3$

...dan seterusnya.

Hasil Akhir: Deret Maclaurin untuk e^x

Jika kita melanjutkan ini sampai tak hingga, kita mendapatkan Deret Maclaurin yang lengkap untuk e^x:

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + ...$$

Apa Artinya Ini?
Ini berarti, jika kamu ingin menghitung nilai $e^{0.1}$ tanpa kalkulator, kamu bisa mengaproksimasinya dengan sangat baik menggunakan beberapa suku pertama:

- $e^{0.1} \approx 1 + 0.1 = 1.1$ (aproksimasi orde 1)
- $e^{0.1} \approx 1 + 0.1 + (0.1)^2/2 = 1 + 0.1 + 0.005 = 1.105$ (aproksimasi orde 2)
- *Nilai sebenarnya adalah* `1.10517...`

Lihat? Hanya dengan dua suku, aproksimasinya sudah sangat akurat! Inilah kekuatan dari Deret Taylor.

Tentu saja! Mari kita kerjakan satu contoh lagi yang sangat klasik dan penting: `f(x) = sin(x)`. Ini akan menunjukkan pola yang berbeda dan menarik.

Tujuan:
Mencari polinomial aproksimasi (Deret Maclaurin) untuk `sin(x)` di sekitar `x=0`.

Langkah 1: Kumpulkan "Bahan Baku" (Turunan `sin(x)` di `x=0`)

Kita tahu bahwa turunan dari `sin(x)` dan `cos(x)` berulang dalam sebuah siklus.

1. **Turunan ke-0:**
   `f(x) = sin(x)` → `f(0) = sin(0) = 0`
2. **Turunan Pertama:**
   `f'(x) = cos(x)` → `f'(0) = cos(0) = 1`
3. **Turunan Kedua:**
   `f''(x) = -sin(x)` → `f''(0) = -sin(0) = 0`
4. **Turunan Ketiga:**
   `f'''(x) = -cos(x)` → `f'''(0) = -cos(0) = -1`
5. **Turunan Keempat:**
   `f⁽⁴⁾(x) = sin(x)` → `f⁽⁴⁾(0) = sin(0) = 0`

Kesimpulan:
Pola nilai turunan di `x=0` adalah siklus yang berulang: `0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, ...`

Langkah 2: Hitung Koefisien c_n Satu per Satu

Sekarang kita gunakan resep kita: $c_n = f^{(n)}(0) / n!$

- **c_0 (Suku Konstan):**
  $c_0 = f(0) / 0! = 0 / 1 = 0$
- **c_1 (Koefisien untuk x^1):**
  $c_1 = f'(0) / 1! = 1 / 1 = 1$
- **c_2 (Koefisien untuk x^2):**
  $c_2 = f''(0) / 2! = 0 / 2 = 0$
- **c_3 (Koefisien untuk x^3):**
  $c_3 = f'''(0) / 3! = -1 / 6$
- **c_4 (Koefisien untuk x^4):**
  $c_4 = f^{(4)}(0) / 4! = 0 / 24 = 0$
- **c_5 (Koefisien untuk x^5):**
  (Polanya berulang, $f^{(5)}(0)$ akan sama dengan `f'(0)`, yaitu `1`)
  $c_5 = f^{(5)}(0) / 5! = 1 / 120$

Langkah 3: Susun "Bata Lego" Polinomialnya

Mari kita susun polinomialnya selapis demi selapis.

- **Aproksimasi Orde ke-1:**
  $P_1(x) = 0 + 1*x = x$
  - *Intuisi:* Di dekat `x=0`, grafik `sin(x)` sangat mirip dengan garis `y=x`.
- **Aproksimasi Orde ke-2:**
  $P_2(x) = 0 + 1*x + 0*x^2 = x$
  - Tidak ada perubahan! Ini karena kelengkungan `sin(x)` di `x=0` adalah nol.
- **Aproksimasi Orde ke-3:**
  $P_3(x) = 0 + 1*x + 0*x^2 + (-1/6)x^3 = x - x^3/6$
- **Aproksimasi Orde ke-4:**
  $P_4(x) = x - x^3/6 + 0*x^4 = x - x^3/6$
  - Tidak ada perubahan lagi.
- **Aproksimasi Orde ke-5:**
  $P_5(x) = x - x^3/6 + (1/120)x^5$

Hasil Akhir: Deret Maclaurin untuk `sin(x)`

Jika kita melanjutkan polanya, kita mendapatkan deret yang indah:

$$\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \ldots$$

Observasi Menarik:

- Hanya **pangkat ganjil** yang muncul. Ini masuk akal, karena `sin(x)` adalah fungsi ganjil (`sin(-x) = -sin(x)`).
- Tandanya **bergantian** (plus, minus, plus, minus...).

Apa Artinya Ini?

Jika kamu ingin menghitung `sin(0.1)` (di mana 0.1 dalam radian), kamu bisa aproksimasi:

- $\sin(0.1) \approx 0.1$ (Aproksimasi yang sangat bagus untuk sudut kecil!)
- $\sin(0.1) \approx 0.1 - (0.1)^3/6 = 0.1 - 0.001/6 \approx 0.1 - 0.000166 = 0.099834$
- *Nilai sebenarnya adalah* `0.0998334...`

Tags: #mml-specialization #multivariate-calculus #taylor-series #maclaurin-series #derivation