Ch 07: Matriks Invers, Column Space, dan Null Space

Tujuan Bab: Memberikan intuisi geometris untuk **sistem persamaan linear** dan memperkenalkan konsep-konsep kunci yang muncul darinya, seperti Matriks Invers, Column Space, Rank, dan Null Space.

Sistem Persamaan Linear sebagai Transformasi

Sebuah sistem persamaan linear seperti:

$$-4x + 2y = 7$$
$$-x + 0y = -8$$

dapat ditulis ulang dalam bentuk perkalian matriks-vektor yang ringkas: `A * x_vektor = v_output`.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

- **Interpretasi Geometris:**
  Ini adalah sebuah "teka-teki terbalik".

  > "Vektor tak dikenal `x_vektor` **mana**, yang setelah melalui transformasi `A`, akan **mendarat** di vektor `v_output`?"

Solusi #1: Matriks Invers (`A⁻¹`) - "Memutar Balik Waktu"

- **Kapan Ini Bekerja?**
  Hanya jika `det(A) ≠ 0`. Artinya, transformasi `A` **tidak meremukkan ruang** menjadi dimensi yang lebih rendah. Setiap output hanya berasal dari satu input unik.
- **Apa itu `A⁻¹` (A-invers)?**
  - `A⁻¹` adalah sebuah transformasi "lawan" yang **membatalkan** aksi `A`.
  - **Visualisasi:** Jika `A` adalah rotasi 90° ke kiri, `A⁻¹` adalah rotasi 90° ke kanan. Jika `A` adalah shear ke kanan, `A⁻¹` adalah shear ke kiri.
  - **Secara Aljabar:** `A⁻¹ * A = I` (Matriks Identitas, atau transformasi "tidak melakukan apa-apa").
- **Bagaimana Menggunakannya untuk Menyelesaikan `Ax = v`?**
  1. Mulai dari `Ax = v`.
  2. Kalikan kedua sisi dari kiri dengan `A⁻¹`: `A⁻¹(Ax) = A⁻¹v`.

3. Sederhanakan: $(A^{-1}A)x = A^{-1}v$ → $Ix = A^{-1}v$ → $x = A^{-1}v$.

- **Intuisi Geometris:**
  Untuk menemukan `x` yang asli, kita tinggal **"memutar balik waktu"**. Ambil `v_output` dan lihat ke mana ia pergi setelah melalui transformasi A^{-1}.

Solusi #2: Jika `det(A) = 0` (Ruang "Gepeng")

- Jika `det(A) = 0`, transformasi `A` meremukkan ruang.
- **Tidak ada** A^{-1}. Kamu tidak bisa "mengembalikan" sebuah garis yang sudah gepeng menjadi sebuah bidang.
- Solusi untuk `Ax = v` **mungkin ada, mungkin juga tidak**.
  - **Solusi ada** jika `v_output` kebetulan berada di dalam ruang yang sudah gepeng (garis/bidang).
  - **Solusi tidak ada** jika `v_output` berada di luar ruang yang gepeng itu.
- Kita butuh bahasa yang lebih presisi untuk mendeskripsikan "tingkat kegepengan" ini.

Column Space & Rank - "Jangkauan Output"

- **Column Space (Ruang Kolom):**
  - **Definisi:** Himpunan **SEMUA output yang mungkin** dari sebuah transformasi `A`.
  - **Visualisasi:** Bisa berupa sebuah garis, sebuah bidang, atau seluruh ruang.
  - **Kenapa Namanya Itu?** Karena ini adalah Span dari **kolom-kolom matriks** `A` (tujuan `î` & `ĵ`).
- **Rank:**
  - **Definisi: Dimensi** dari Column Space.
  - `Rank = 1`: Outputnya adalah sebuah garis.
  - `Rank = 2` (di 3D): Outputnya adalah sebuah bidang.
  - **"Full Rank"**: Rank setinggi mungkin (sama dengan jumlah kolom/dimensi input). Ini adalah nama lain untuk kondisi `det(A) ≠ 0` (untuk matriks persegi).

Null Space (Kernel) - "Pasukan yang Lenyap ke Titik Nol"

- **Null Space (Ruang Nol) atau Kernel:**
  - **Definisi:** Himpunan **SEMUA vektor input** yang setelah ditransformasi, mendarat di **titik nol (origin)**.
  - Ini adalah solusi untuk persamaan spesial `Ax = 0`.
- **Kapan Ini Menarik?**

  - **Full Rank (`det(A) ≠ 0`):** Hanya vektor nol `[0,0]` yang masuk ke Null Space.
  - **Tidak Full Rank (`det(A) = 0`):** Bisa ada **satu garis penuh** atau bahkan **satu bidang penuh** berisi vektor-vektor yang semuanya "lenyap" ke titik nol.
- **Visualisasi:**
  Bayangkan transformasi yang meremukkan bidang 2D menjadi sebuah garis. Akan ada satu garis lain (Null Space) yang semua vektornya "gepeng" menjadi titik nol.

Tags: #linear-algebra #inverse-matrix #column-space #null-space #rank #3b1b-essence-of-linear-algebra