

# Ch 06: Turunan Implisit

**Tujuan Bab:** Memahami teknik **Turunan Implisit**, dan membangun intuisi di balik "resep sihir" mekanisnya. Ini adalah alat untuk mencari kemiringan kurva yang **bukan** merupakan grafik fungsi  $y = f(x)$ .

---

## 1. Masalah Baru: Kurva Implisit

- **Grafik Fungsi Eksplisit:**  $y = f(x)$ . Untuk setiap  $x$ , hanya ada satu  $y$ .  $x$  adalah "input",  $y$  adalah "output".
  - **Kurva Implisit:** Sebuah persamaan yang "mengikat"  $x$  dan  $y$  bersama-sama. Contoh: Lingkaran  $x^2 + y^2 = 25$ .
    - Di sini,  $x$  dan  $y$  adalah "partner" yang saling bergantung. Untuk satu  $x$ , bisa ada dua nilai  $y$ .
    - Lingkaran secara keseluruhan **bukan** sebuah fungsi  $y(x)$ .
  - **Tujuan:** Kita tetap ingin mencari **kemiringan** ( $dy/dx$ ) dari garis singgung pada kurva implisit ini.
- 

## 2. "Resep Sihir" Turunan Implisit (Prosedur Mekanis)

- **Contoh:**  $x^2 + y^2 = 25$
  - **Langkah-langkah:**
    1. **"Turunkan kedua sisi"** persamaan.
    2. Saat menurunkan suku  $x$ , perlakukan seperti biasa tapi "tempelkan"  $dx$ :  $d(x^2) = 2x \ dx$ .
    3. Saat menurunkan suku  $y$ , perlakukan seperti biasa tapi "tempelkan"  $dy$ :  $d(y^2) = 2y \ dy$ .
    4. Turunan dari konstanta adalah 0:  $d(25) = 0$ .
  - **Hasil:**  $2x \ dx + 2y \ dy = 0$ .
  - **Selesaikan untuk  $dy/dx$ :**
$$2y \ dy = -2x \ dx$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
  - **Masalah:** Kenapa resep ini berhasil? Apa artinya "menempelkan"  $dx$  dan  $dy$ ?
-

### 3. Intuisi Sebenarnya: Melihatnya sebagai Fungsi Multi-Variabel

- Untuk memahami "kenapa"-nya, definisikan sebuah **fungsi baru dengan dua input**:  
 $s(x, y) = x^2 + y^2$ .
- Visualisasi:**  $s$  adalah sebuah "peta ketinggian". Kurva lingkaran kita adalah **garis kontur** di peta ini, yaitu kumpulan semua titik di mana ketinggiannya adalah 25.
- Apa Arti  $ds$  (Turunan Total)?**
  - $ds$  menjawab pertanyaan: "Jika aku mengambil **langkah kecil acak** ( $dx$  ke kanan,  $dy$  ke atas), seberapa besar nilai  $s$  (ketinggian) akan berubah?"
  - Perubahan total  $ds$  adalah jumlah dari perubahan akibat  $dx$  dan perubahan akibat  $dy$ .
  - $ds = (2x * dx) + (2y * dy)$ .
  - Ini adalah **turunan total (total derivative)**.
- "Aha!" Moment:**
  - Apa artinya "tetap berada di atas kurva lingkaran"? Artinya, kita berjalan di sepanjang garis kontur  $s = 25$ . Ketinggian kita **TIDAK BOLEH BERUBAH**.
  - Ini berarti, perubahan total pada  $s$  harus **NOL**.
- $| ds = 0$
- Jadi, syarat agar sebuah langkah kecil ( $dx, dy$ ) tetap berada di sepanjang garis singgung lingkaran adalah:  
 $2x dx + 2y dy = 0$
- Kesimpulan:** "Resep sihir" tadi sebenarnya adalah pernyataan  $ds = 0$ . "Menempelkan  $dx$  dan  $dy$ " adalah cara cepat untuk menghitung perubahan total  $ds$  dan menyetarakananya dengan nol.

---

### 4. Aplikasi: Menemukan Turunan Fungsi Invers

- Turunan implisit adalah alat yang sangat kuat untuk menemukan turunan dari fungsi invers.
- Contoh: Mencari turunan dari  $y = \ln(x)$** 
  - Ubah ke Bentuk Implisit:**  $e^y = x$ . Kita melakukan ini karena kita sudah tahu turunan dari  $e^y$ .
  - Terapkan Turunan Implisit:** Cari perubahan total di kedua sisi ( $d(\dots)$ ) dan samakan.
    - $d(e^y) = e^y dy$  (menggunakan [Aturan Rantai](#)).
    - $d(x) = dx$ .
  - Samakan Perubahannya:**  $e^y dy = dx$ .
  - Selesaikan untuk  $dy/dx$ :**  $dy / dx = 1 / e^y$ .

5. **Gantikan Kembali:** Karena  $e^y = x$ , maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

---

**Tags:** #calculus #derivatives #implicit-differentiation #related-rates #3b1b-essence-of-calculus