

Ch 03: Rumus Turunan Melalui Geometri

Tujuan Bab: Membangun intuisi geometris di balik beberapa rumus turunan dasar, agar kita paham dari mana mereka berasal, bukan hanya menghafal.

Prinsip Utama: Selalu kembali ke ide dasar Turunan: $d(\text{output}) / d(\text{input})$ (ratio perubahan kecil di output terhadap perubahan kecil di input).

1. Turunan dari $f(x) = x^2$ (Visualisasi Persegi)

- **Interpretasi Geometris x^2 :** Luas dari sebuah persegi dengan sisi x .
 - **Eksperimen "Dorongan Kecil":**
 - **Input:** Sisi x kita beri "dorongan" kecil dx .
 - **Output:** Luas $f = x^2$ akan bertambah sebesar df .
 - **Visualisasi df :** Penambahan luas df ini terdiri dari 2 strip utama dan 1 kotak super kecil.
 - **Perubahan Utama:** Dua persegi panjang tipis, masing-masing dengan luas $x * dx$.
 - **Perubahan yang Diabaikan:** Satu persegi super kecil di pojok dengan luas $(dx)^2$. Saat dx sangat kecil, $(dx)^2$ menjadi **jauh lebih kecil lagi dan bisa diabaikan**.
 - **Hubungan:** $df \approx 2 * x * dx$
 - **Hitung Turunannya:**
$$df / dx \approx (2 * x * dx) / dx = 2x$$
 - **Kesimpulan:** $d/dx (x^2) = 2x$.
-

2. Turunan dari $f(x) = x^3$ (Visualisasi Kubus)

- **Interpretasi Geometris x^3 :** Volume dari sebuah kubus dengan sisi x .
- **Eksperimen:** Sisi x bertambah sebesar dx . df adalah perubahan volume.
- **Visualisasi df :** Penambahan volume utamanya berasal dari **tiga "lembaran" tipis** yang menempel di tiga sisi kubus.
 - Setiap lembaran punya luas x^2 dan ketebalan dx . Volumenya = $x^2 * dx$.
- **Aproksimasi:** Bagian lain (garis-garis di rusuk dan titik di pojok) melibatkan $(dx)^2$ atau $(dx)^3$ dan bisa diabaikan.
- **Hubungan:** $df \approx 3 * x^2 * dx$
- **Hitung Turunannya:** $df / dx \approx (3 * x^2 * dx) / dx = 3x^2$

- **Kesimpulan:** $d/dx (x^3) = 3x^2$.
-

3. Aturan Pangkat (Power Rule)

- **Pola Umum:** $d/dx (x^2) = 2x^1$, $d/dx (x^3) = 3x^2$.

- **Aturan Umum:**

$$d/dx (x^n) = n * x^{n-1}$$

- **Intuisi:** Perubahan utama pada "hyper-volume" x^n datang dari n buah "lembaran" ($n-1$) -dimensi.
-

4. Turunan dari $f(x) = 1/x$ (Visualisasi Area Konstan)

- **Interpretasi Geometris $1/x$:** Jika sebuah persegi panjang punya **lebar x** dan **luas totalnya harus 1**, maka **tingginya pasti $1/x$** .
 - **Eksperimen:** Kita tambah lebarnya sebesar dx . Agar luas tetap 1, tingginya harus berkurang sebesar df .
 - **Area Bertambah (kanan):** $\text{Area_Gained} \approx \text{Tinggi} * dx = (1/x) * dx$.
 - **Area Berkurang (atas):** $\text{Area_Lost} \approx \text{Lebar} * |df| = x * |df|$.
 - **Hubungan (Keseimbangan):** $\text{Area_Gained} \approx \text{Area_Lost}$
 $(1/x) * dx \approx x * |df|$
 - **Hitung Turunannya df/dx :**
 - Susun ulang: $|df| / dx \approx 1/x^2$.
 - Karena tingginya berkurang, df bernilai negatif.
 - **Kesimpulan:** $d/dx (1/x) = -1/x^2$. Ini cocok dengan Power Rule untuk $n=-1$.
-

5. Turunan dari $f(\theta) = \sin(\theta)$ (Visualisasi Lingkaran Satuan)

- **Interpretasi Geometris $\sin(\theta)$:** **Ketinggian (y)** dari sebuah titik di lingkaran satuan (radius 1) setelah berjalan sejauh θ .
- **Eksperimen:** Kita berjalan sedikit lagi di keliling sejauh $d\theta$. Ketinggian bertambah sebesar $d(\sin\theta)$.
- **"Aha!" Moment Geometris (Zoom In):**
 - Jika di-zoom, busur $d\theta$ terlihat seperti **garis lurus** dan membentuk segitiga siku-siku kecil.
 - **Sisi Miring:** $d\theta$.

- **Sisi Vertikal:** $d(\sin\theta)$.
 - **Kesamaan Segitiga:** Segitiga kecil ini **sebangun (similar)** dengan segitiga besar yang dibentuk oleh radius.
 - **Hitung Turunannya:**
 - $d(\sin\theta) / d\theta$ dalam segitiga kecil ini adalah rasio $(\text{sisi_samping_sudut}_\theta) / (\text{sisi_miring})$.
 - Menurut definisi trigonometri, samping/miring adalah $\cos(\theta)$.
 - **Kesimpulan:** $d/d\theta (\sin\theta) = \cos(\theta)$.
-

Tags: #calculus #derivatives #geometry #power-rule #trigonometry #3b1b-essence-of-calculus