

Ch 07: Limit, Aturan L'Hôpital, dan Definisi Epsilon-Delta

Tujuan Bab: Meresmikan intuisi tentang "pendekatan" ($dx \rightarrow 0$) dengan konsep [Limit](#), dan memperkenalkan alat-alat yang terkait.

1. Definisi Formal Turunan

- **Intuisi Kita Sejauh Ini:** Turunan $\approx df / dx$ untuk dx yang sangat kecil.
- **Definisi Formal:** [Turunan](#) adalah **nilai yang dituju (limit)** oleh rasio ini saat dx mendekati nol.
- **Notasi Formal:**

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- **Penjelasan Notasi:**
 - \lim : Singkatan dari [Limit](#).
 - h : Nama lain untuk dx (untuk menekankan bahwa ini adalah angka biasa yang kecil, bukan "infinitesimal").
 - $f(x+h) - f(x)$: Ini adalah df , perubahan pada output.
 - **Intinya:** Intuisi df/dx kita adalah "shorthand" yang sangat bagus untuk definisi formal ini. Keduanya adalah cara berpikir yang valid.
-

2. Definisi Epsilon-Delta (Arti "Mendekati")

- **Masalah:** Apa artinya "mendekati" secara matematis yang presisi dan anti-bocor?
- **Ide Intuitif:** Saat input x semakin dekat ke c , output $f(x)$ semakin dekat ke nilai limit L .
- **Definisi sebagai "Permainan Tantangan":**
 - **Penantang (skeptis):** "Aku mau outputnya berada dalam jarak ϵ (epsilon) dari L . ϵ ini bisa sekecil apa pun yang aku mau."
 - **Kamu (pembuktii):** "Oke. Aku bisa menemukan sebuah rentang input di sekitar c (selebar δ delta) di mana **semua** input di dalam rentang itu akan menghasilkan output yang memenuhi tantanganmu."
- **Kesimpulan:** Sebuah limit L ada jika kamu bisa selalu memenangkan permainan ini, tidak peduli seberapa kecil ϵ yang diberikan oleh si penantang.

- **Kapan Limit Tidak Ada?**

Jika ada "lompatan" pada grafik. Si penantang bisa memilih ε yang lebih kecil dari ukuran lompatan, dan kamu tidak akan pernah bisa menemukan δ yang berhasil. Ini karena input dari sisi kiri dan kanan menuju ke nilai L yang berbeda.

3. Aturan L'Hôpital (Trik Menghitung Limit 0/0)

- **Masalah:** Bagaimana cara menghitung limit dari sebuah fungsi $f(x)/g(x)$ di titik a di mana $f(a)=0$ dan $g(a)=0$? Kita tidak bisa langsung memasukkan angkanya karena akan menjadi $0/0$ (bentuk tak tentu).
- **Ide Intuitif (Zoom In):**
 - Jika kita "zoom in" sangat dekat ke titik a pada sebuah grafik, kurva itu akan terlihat seperti **garis lurus** (garis singgungnya). Kemiringan garis itu adalah **turunan**.
 - Jadi, di dekat a , perilaku $f(x)$ bisa diaproksimasi oleh $f'(a) * (x-a)$.
 - Demikian pula, $g(x)$ bisa diaproksimasi oleh $g'(a) * (x-a)$.
- **"Aha!" Moment:**

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(a) \cdot (x-a)}{g'(a) \cdot (x-a)}$$

Suku $(x-a)$ bisa dicoret!

- **Aturan L'Hôpital:**

| Jika $\lim f(x)/g(x)$ menghasilkan bentuk $0/0$, maka limitnya **SAMA DENGAN** $\lim f'(x)/g'(x)$.

- **Cara Pakai:**

1. Pastikan limitnya berbentuk $0/0$.
 2. **Turunkan bagian atas dan turunkan bagian bawah** secara terpisah.
 3. Hitung limit dari rasio turunan yang baru.
-

Tags: #calculus #limits #derivatives #epsilon-delta #lhopitals-rule #3b1b-essence-of-calculus