Ch 13: Perubahan Basis

Tujuan Bab: Memahami konsep **Basis** **alternatif** dan cara "menerjemahkan" deskripsi vektor dan transformasi dari satu "bahasa" (sistem koordinat) ke bahasa lain.

---

1. Ide Utama: "Bahasa" yang Berbeda untuk Vektor yang Sama

- **Sistem Koordinat Standar (Bahasa Kita):**
  - Menggunakan Vektor Basis `î` dan `ĵ`.
  - Koordinat `[3, 2]` berarti `3 * î + 2 * ĵ`.
- **Sistem Koordinat Alternatif (Bahasa Jennifer):**
  - Menggunakan vektor basis lain, sebut saja b_1 dan b_2.
  - Di dunianya, b_1 adalah `[1, 0]` dan b_2 adalah `[0, 1]`.
  - Vektor yang sama bisa punya koordinat yang sangat berbeda di bahasanya.
- **Intinya:** Kita semua melihat **vektor yang sama** di ruang, tapi kita menggunakan **angka (koordinat) yang berbeda** untuk mendeskripsikannya, tergantung pada "penggaris" (vektor basis) yang kita gunakan.

---

2. Menerjemahkan Vektor

Dari Bahasa Jennifer ke Bahasa Kita

- **Masalah:** Jennifer menyebut sebuah vektor dengan koordinat `[-1, 2]`. Apa artinya itu bagi kita?
- **Logika:** Di bahasanya, itu berarti $-1 * b_1 + 2 * b_2$.
- **Matriks Penerjemah (`A`):**
  - Buat sebuah matriks di mana **kolom-kolomnya adalah vektor basis Jennifer, tapi ditulis dalam bahasa kita**.
  - Untuk menerjemahkan vektor `v_jen` dari bahasanya ke bahasa kita (`v_kita`), hitung:

    > `v_kita = A * v_jen`

- **Intuisi:** Matriks `A` adalah sebuah Transformasi Linear yang mengubah *grid kita* menjadi *grid Jennifer*. Secara numerik, ia menerjemahkan deskripsi *vektor Jennifer* menjadi *vektor kita*.

Dari Bahasa Kita ke Bahasa Jennifer

- **Masalah:** Kita punya vektor `[3, 2]`. Apa koordinatnya menurut Jennifer?
- **Logika:** Kita butuh "mesin penerjemah" yang melakukan kebalikannya, yaitu Matriks Invers.
- **Matriks Penerjemah (A^{-1}):**
  - Gunakan **invers** dari matriks penerjemah sebelumnya: A^{-1}.
  - Untuk menerjemahkan `v_kita` ke `v_jen`, hitung:

    > $v_{jen} = A^{-1} * v_{kita}$

---

3. Menerjemahkan Transformasi

- **Masalah:** Kita punya sebuah transformasi (misal: Rotasi 90°). Matriks kita untuk ini adalah `M`. Bagaimana Jennifer akan menulis matriks untuk **aksi yang sama persis** di dalam bahasanya? Sebut matriksnya `M_jen`.
- **Alur Logika Penerjemahan (Perjalanan 3 Langkah):**
  1. **Terjemahkan ke Duniamu:** Ambil vektor Jennifer (`v_jen`), ubah ke bahasamu (`A * v_jen`).
  2. **Lakukan Aksi di Duniamu:** Lakukan transformasi `M` pada vektor hasil (`M * (A * v_jen)`).
  3. **Terjemahkan Kembali ke Dunianya:** Ubah hasilnya kembali ke bahasa Jennifer ($A^{-1} * (M * A * v_{jen})$).
- **Menggabungkan Menjadi Satu "Mesin Super":**
  Seluruh perjalanan 3 langkah itu bisa dirangkum menjadi satu matriks tunggal: $A^{-1} * M * A$. Matriks inilah resep yang dicari Jennifer.

  > $M_{jen} = A^{-1} * M * A$

---

4. Intisari Ekspresi $A^{-1}\ M\ A$ ("Empati Matematis")

- Ekspresi $A^{-1}\ M\ A$ selalu menyiratkan sebuah **perubahan sudut pandang**.
- **Cara Membacanya (dari Kanan ke Kiri):**
  1. `A` **:** "Pergi dari dunia Jennifer ke duniaku."
  2. `M` **:** "Lakukan aksi di duniaku."
  3. A^{-1} **:** "Kembali dari duniaku ke dunia Jennifer."
- **Keseluruhan** $A^{-1}\ M\ A$: Sebuah matriks tunggal yang melakukan aksi `M`, tapi sepenuhnya dari **perspektif Jennifer** (input dalam bahasanya, output dalam bahasanya).

Tags: #linear-algebra #change-of-basis #transformations #matrices #3b1b-essence-of-linear-algebra