Ch 09: Hubungan Antara Area dan Kemiringan

Tujuan Bab: Memberikan **perspektif kedua yang berbeda** tentang kenapa Integral dan Turunan adalah kebalikan satu sama lain, dengan melihatnya melalui "kacamata" **rata-rata**.

---

1. Masalah Baru: Rata-Rata dari Fungsi Kontinu

- **Pertanyaan:** Apa **nilai rata-rata** dari `f(x)` (misal: `sin(x)`) pada sebuah interval `[a, b]`?
- **Paradoks:** Rata-rata biasa membutuhkan jumlah nilai yang berhingga. Fungsi kontinu memiliki **tak berhingga banyaknya nilai**.
- **Intuisi:** Setiap kali kita ingin "menjumlahkan tak hingga banyaknya hal", **Integral** adalah alat yang tepat.

---

2. Dari Rata-Rata Biasa ke Rata-Rata Integral

- **Aproksimasi:**
  1. Ambil `N` buah sampel titik yang berjarak sama (`dx`) di interval.
  2. `Rata-rata ≈ (Σ f(x)) / N` (Jumlah tinggi sampel / Banyaknya sampel).
- **Menghubungkannya dengan `dx`:**
  - `N ≈ (b - a) / dx` (Banyaknya sampel ≈ Panjang Interval / Jarak Antar Sampel).
- **"Aha!" Moment Aljabar:**
  - `Rata-rata ≈ (Σ f(x)) / ((b-a) / dx)`
  - `Rata-rata ≈ (Σ f(x) * dx) / (b - a)`
- **Mengambil Limit (saat `dx` → 0):**
  - Bagian atas (`Σ f(x) * dx`) menjadi **Integral** `∫f(x)dx`.
- **Rumus Rata-Rata Fungsi:**

  > `Rata-rata f(x) di [a, b] = ( ∫ (dari a ke b) f(x) dx ) / (b - a)`

- **Intuisi Geometris:**
  `Rata-rata Tinggi = Luas di Bawah Kurva / Lebar Interval`.

---

3. Sudut Pandang Kedua: Rata-Rata Kemiringan

- Ini adalah perspektif alternatif yang indah tentang Teorema Fundamental Kalkulus.

- Lihat kembali rumus rata-rata kita, tapi dalam bentuk Anti-Turunan `F(x)`:
  `Rata-rata f(x) = ( F(b) - F(a) ) / ( b - a )`
- **Apa arti dari ekspresi ini?**
  - `F(b) - F(a)`: Perubahan total ketinggian (**Rise**) dari grafik `F(x)`.
  - `b - a`: Perubahan total horizontal (**Run**).
  - Jadi, ekspresi ini adalah **kemiringan (slope) dari garis lurus** yang menghubungkan titik awal dan akhir pada grafik anti-turunan `F(x)`.
- **"Aha!" Moment Kedua:**
  - `f(x)` (fungsi asli) adalah **turunan** dari `F(x)`. Artinya, `f(x)` adalah **kemiringan sesaat (slope)** dari `F(x)` di setiap titik.
  - Jadi, "rata-rata dari `f(x)`" sama saja dengan **"rata-rata dari semua kemiringan sesaat"** dari `F(x)`.
- **Kesimpulan Intuitif:**

  > **"Rata-rata dari semua kemiringan kecil di sepanjang perjalanan (`f(x)`)" secara logis harus sama dengan "kemiringan total dari awal sampai akhir (`(F(b)-F(a))/(b-a)`)".**

Ini memberikan alasan kedua **kenapa** Integral (area) dan Turunan (kemiringan) saling berhubungan. Menjumlahkan semua "tinggi" `f(x)` (Integral) sama dengan melihat perubahan total "ketinggian" `F(x)`.

Tags: #calculus #integrals #derivatives #average-value #fundamental-theorem #3b1b-essence-of-calculus