Chương 1

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài tập 1.1 Đưa các ma trận sau về dang bậc thang:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & -7 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Bài tập 1.2 Đưa các ma trận sau về dang bậc thang rút gọn:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 6 & 6 & 0 & 20 & 19 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & 6 & -5 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 9 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Bài tập 1.3 Xác định hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 21 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Bài tập 1.4 Xác định sự tồn tại nghiệm của mỗi hệ sau:

a. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + x_4 = -8 \\ 6x_1 + 13x_2 - 17x_3 + 4x_4 = -21 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1 - 6x_2 = 5 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ - x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 3 \end{cases}$

Bài tập 1.5 Biện luận các hệ phương trình cho bởi ma trận đầy đủ sau đây theo tham số a, b, c, d.

$$a. \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & b & 7 & 2 \\ 0 & 0 & a & a \end{array}\right] \qquad b. \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & d & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & cd & c \end{array}\right]$$

Bài tập 1.6 Viết ra nghiệm của hệ có ma trận đầy đủ tương đương hàng với mỗi ma trận sau:

a. $A = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ b. $B = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

c. $C = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ d. $D = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Bài tập 1.7 Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

a. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 14 \end{cases}$ e. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$ f. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1` + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$

Bài tập 1.8 Biện luận theo a, b, c, d số nghiệm của hệ phương trình

a. $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = b \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 2x - y + z = b \\ 3x + y - z = c \\ x - 3y + 5z = d \end{cases}$

Bài tập 1.9 Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = m \end{cases}$$

Bài tập 1.10 Giải các hệ thuần nhất sau:

a. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

Chương 2

MA TRẬN

Bài tập 2.1 Thực hiện các phép tính:

a. $A+B$ với $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

b. $3A$ và $-5A$ với $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

c. $2A-3B$ với $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

d. $5A-2B; 2A+3B; A(BC); (AB)C; A^T; B^T; A^TB^T; A^2; AC$ biết

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}; \quad C=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

e. AA^T và A^TA biết $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Bài tập 2.2 Tìm x, y, z, w biết: $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$

Bài tập 2.3 Cho $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ tìm ma trận $B \in M_{2\times 3}$ sao cho $AB=0$

Bài tập 2.4 Cho các ma trận

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Gọi $D=[d_{ij}]=2AB+C^2$ không tính toàn bộ ma trận D mà hãy tính cụ thể mỗi phần tử:

a. d_{11}
b. d_{21}
c. d_{32}

Bài tập 2.5 Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

a. Hãy tính các tích sau đây hoặc giải thích tại sao chúng không tồn tại:

$$AB; BA; AC; DC; CD; C^T D$$

b. Kiểm tra rằng $A(BC) = (AB)C$ và $(AB)^T = B^T A^T$.

c. Không thực hiện phép tính, hãy tìm $D^T C$

Bài tập 2.6

Cho $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ và $x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

a. Tính các tích Ax, Ay, Az

b. Dùng kết quả câu a) để tính tích $A\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$

Bài tập 2.7 Tìm ma trận nghịch đảo của mỗi ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -3 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Bài tập 2.8 Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Ứng dụng: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Bài tập 2.9 Cho $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ là ma trận khả nghịch.

Không tìm toàn bộ ma trận A^{-1} chỉ tìm

a. $c_3(A^{-1})$

b. đồng thời hai cột, $c_1(A^{-1})$ và $c_2(A^{-1})$

c. $h_2(A^{-1})$, từ đó suy ra giá trị x_2 của hệ $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 2.10 Tìm điều kiện của tham số để các ma trận sau khả nghịch, sau đó tìm ma trận nghịch đảo tương ứng của nó:

$$a.\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{bmatrix}; \quad b.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài tập 2.11 Cho ma trận $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Hãy tìm B^{-1}, từ đó giải hệ phương trình $Bx = d$ với $i) d = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, ii) d = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, iii) d = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Bài tập 2.12 Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp ma trận nghịch đảo:

a. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -6 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

Bài tập 2.13 Giải các phương trình ma trận sau đây:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ b. $X.\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.X.\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

e. $X.\begin{bmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Chương 3

ĐỊNH THỨC

Bài tập 3.1 Không khai triển, hãy sử dụng tính chất để tính định thức của mỗi ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài tập 3.2 Tính các định thức sau bằng cách khai triển theo hàng hay theo cột được chọn một cách hợp lí nhất:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}; D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & -6 & -7 & 5 \end{vmatrix}; D_4 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Bài tập 3.3 Viết ra ma trận phụ hợp $C = Cof(A)$ của mỗi ma trận A sau đây rồi kiểm tra lại công thức: $AC^T = (detA)I$

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{b. } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{c.} A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài tập 3.4 Chứng minh rằng:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} & \cdots & a_{1n} + a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bài tập 3.5 Tính định thức của mỗi ma trận sau:

$$a.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad b.B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \quad c.C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & 8 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d.D = \begin{bmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{bmatrix} \quad e.E = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \end{bmatrix}; \quad f.F = \begin{bmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{bmatrix}$$

Bài tập 3.6 Tính các định thức sau đây:

$$a. \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad b. \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 5 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}; \quad c. \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ 3 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Bài tập 3.7 Tìm t để ma trận sau khả nghịch bằng cách tính định thức

$$a. \begin{bmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{bmatrix}; \quad b. \begin{bmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{bmatrix}; \quad c. \begin{bmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{bmatrix}$$

Bài tập 3.8 Chứng minh rằng:

$$\text{a. } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \text{c. } \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\text{b. } \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Bài tập 3.9 Tìm các ma trận nghịch đảo bằng 2 cách (phương pháp lập ma trận khối $(A|I_n)$ và phương pháp ma trận phụ hợp $A^{-1} = \dfrac{1}{detA}(Cof(A))^T$):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài tập 3.10 Không giải hệ phương trình, tìm nhanh x_2 bằng hai cách

$$\text{a. } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases} \qquad \text{b. } \begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 8 \end{cases} \qquad \text{d. } \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

Bài tập 3.11 Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer:

a. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 16 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 1 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 9x_3 = -4 \end{cases}$

Bài tập 3.12 Giải và biện luận theo a mỗi hệ phương trình tuyến tính sau:

a. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ 2x_1 + ax_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ *c.* $\begin{cases} x_1 + x_2 + (a+1)x_3 = a^2 + 3a \\ x_1 + (a+1)x_2 + x_3 = a^3 + 3a^2 \\ (a+1)x_1 + x_2 + x_3 = a^4 + 3a^3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + (a-2)x_2 + (a-5)x_3 = 2 \\ ax_1 + x_2 + (a+1)x_3 = -2 \end{cases}$ *d.* $\begin{cases} x_1 + x_2 + (1-a)x_3 = a+2 \\ (1+a)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - ax_2 + 3x_3 = a+2 \end{cases}$

Bài tập 3.13 Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình trên khi $\lambda = 1$.

b. Tìm λ để hệ trên có nghiệm.

Bài tập 3.14 Cho hệ phương trình tuyến tính theo tham số a

$$\begin{cases} ax_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

1. Giải hệ phương trình khi a=2.
2. Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 3.15 Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + mx_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = m+1 \end{cases}$$

a. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

b. Tìm m để hệ có vô nghiệm.

Bài tập 3.16 Cho hệ phương trình tuyến tính theo tham số a:

$$\begin{cases} ax_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 10 \\ x_1 & + & x_2 & & & - & 2x_4 & = & a-5 \\ (a+1)x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & a+5 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & (a-1)x_4 & = & -2 \end{cases}$$

1. Giải hệ phương trình trên khi $a = 3$.

2. Tìm a để hệ trên có nghiệm duy nhất.

Bài tập 3.17 Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & kx_3 & = 3 \\ x_1 & + & kx_2 & + & 3x_3 & = 2 \end{cases}$$

Xác định giá trị của k sao cho:

a. Hệ có nghiệm duy nhất.

b. Hệ không có nghiệm.

c. Hệ có vô số nghiệm.

Bài tập 3.18 Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} kx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 1 \\ x_1 & + & kx_2 & + & x_3 & = 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & kx_3 & = 1 \end{cases}$$

Xác định giá trị của k sao cho:

a. Hệ có nghiệm duy nhất.

b. Hệ không có nghiệm.

c. Hệ có vô số nghiệm.

Bài tập 3.19 Cho phương trình ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 2 & 7 & 2\lambda+1 \\ 3 & 9 & 4\lambda \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a. Giải hệ phương trình với $\lambda = 0$

b. Tìm λ để phương trình trên vô số nghiệm

Chương 4

KHÔNG GIAN VÉC TƠ

Bài tập 4.1 Xác định các tập cùng với phép toán đã chỉ ra sau đây có phải là không gian vectơ không?

a. $\mathbb{R}^2$ với phép toán cộng và phép toán nhân như sau:

$$\begin{cases} (x_1, x_2) & +(y_1, y_2) & = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2) \\ & \alpha(x_1, x_2) & = (\alpha x_1, \alpha x_2) \end{cases}$$

b. $\mathbb{R}^2$ với phép toán cộng và phép toán nhân như sau:

$$\begin{cases} (x_1, x_2) & +(y_1, y_2) & = (3x_1 + 3y_1, x_2 + y_2) \\ & \alpha(x_1, x_2) & (3\alpha x_1, \alpha x_2) \end{cases}$$

c. $\mathbb{R}^2$ với phép toán cộng và phép toán nhân như sau:

$$\begin{cases} (x_1, x_2) & + & (y_1, y_2) & = (x_1 + y_1, 0) \\ & & \alpha(x_1, x_2) & = (\alpha x_1, 0) \end{cases}$$

d. $\mathbb{R}^2$ với phép cộng thông thường và phép nhân với vô hướng định nghĩa như sau: $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_2; \alpha x_1) \forall \alpha \in \mathbb{R}$ và $\forall (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$

e. $\mathbb{F}$ là tập hợp các hàm số thực liên tục trên đoạn $[a, b]$ với phép cộng hai hàm số và phép nhân một số thực với một hàm số.

Bài tập 4.2 Xác định mỗi tập sau có phải là không gian con của $\mathbb{M}(n, n)$ không? Tại sao?(Ký hiệu $\mathbb{M}(n, n)$ là không gian vectơ các ma trận cỡ $n \times n$).

a. Tập hợp A tất cả các ma trận tam giác trên cỡ $n \times n$

b. Tập hợp B tất cả các ma trận chéo cấp n

c. Tập hợp C tất cả các ma trận bậc thang cỡ $n \times n$

d. Tập hợp D tất cả các ma trận đối xứng cỡ $n \times n$

e. Tập hợp E tất cả các ma trận chéo đối xứng cỡ $n \times n$.

Bài tập 4.3 Xác định xem **W** có phải là không gian con của các không gian vectơ tương ứng hay không?

a. $\mathbf{W} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b\} \subset \mathbb{R}^3$

b. $\mathbf{W} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a \leq b \leq c\} \subset \mathbb{R}^3$

c. $\mathbf{W} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : ab = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

d. $\mathbf{W} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = b^2\} \subset \mathbb{R}^3$

e. $\mathbf{W} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : -a - 5b + 2c = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

f. $\mathbf{W} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : 3a - b + 7d = 5\} \subset \mathbb{R}^4$

g. $\mathbf{W} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : 2a - 3b + 4d = 0, a - b + c = 0\} \subset \mathbb{R}^4$

Bài tập 4.4 Cho **V** là không gian vec tơ - tất cả các hàm số thực trên $\mathbb{R}$. Chỉ ra rằng **W** trong mỗi trường hợp sau có là không gian con của **V** hay không?
a. $\mathbf{W} = \{f \in \mathbf{V} : |f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}\}$ b. $\mathbf{W} = \{f \in \mathbf{V} : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$

Bài tập 4.5 Chứng minh mỗi tập bao gồm các vectơ cột sau đây là không gian vectơ, bằng cách chỉ ra nó là không gian con sinh bởi tập các vectơ nào đó.

a. $A = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ 3s \\ 2s \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} \subset [\mathbb{R}]^3;$

b. $D = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \left\{ \begin{array}{ll} a + b - c & = 0 \\ a - c - d & = 0 \end{array} \right. \right\} \subset \mathbb{M}(2, 2)$

c. $B = \{(t; 2t + s, t - s) : t, s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3;$

d. $C = \left\{ p \in \mathbb{P}_3[x] : \left\{ \begin{array}{ll} p(1) & = p(-1) \\ p(2) & = p(-2) \end{array} \right. \right\} \subset \mathbb{P}_3[x]$

Bài tập 4.6 Cho W là tập tất cả các vectơ cột có dạng như đã chỉ ra, trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$. Trong mỗi trường hợp, hãy chỉ ra tập S sao cho $W = Sp(S)$, hoặc chứng tỏ W không phải là không gian con của không gian vectơ tương ứng.

a. $W = \left\{ \begin{bmatrix} 3a + b \\ 4 \\ a - 5b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset [\mathbb{R}]^3$; b. $W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 - a \\ a - 6b \\ a + 2b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset [\mathbb{R}]^3$

c. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a - b \\ b - c \\ c - a \\ b \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset [\mathbb{R}]^4$; d. $W = \left\{ \begin{bmatrix} 4a + 3b \\ 0 \\ a + b + c \\ -2a + c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset [\mathbb{R}]^4$

Bài tập 4.7 Gọi $C_{[a,b]}$ là tập tất cả các hàm thực liên tục trên đoạn [a,b] thì $C_{[a,b]}$ lập thành không gian con của không gian vectơ các hàm thực xác định trên [a,b]. Chứng minh rằng tập $E = \left\{ f \in C_{[a,b]} : f(a) = f(b) \right\}$ là không gian con của $C_{[a,b]}$.

Bài tập 4.8 Xác định tập nào trong các tập sau đây sẽ lập nên không gian con của $\mathbb{M}(2,2)$:

a. $E = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & b-2d \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}(2,2) : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$

b. $E = \left\{ \begin{bmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}(2,2) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

c. $E = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+2 \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{M}(2,2) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

d. $E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}(2,2) : a + 2b - c + 3d = 0 \right\}$

Bài tập 4.9

Cho F là ma trận cố định nào đó thuộc $\mathbb{M}(3,2)$, gọi $H = \{A \in \mathbb{M}(2,4) : FA = 0\}$; (0 là ma trận không của không gian $\mathbb{M}(3,4)$). Xác định xem H có là không gian con của $\mathbb{M}(2,4)$ không?

Bài tập 4.10 Xác định xem vectơ v có thuộc không gian con sinh bởi các vectơ v_i đã cho trong mỗi trường hợp sau:

a. $v = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}; \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

b. $v = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}; \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

c. $v = 3x^2 + 2x + 9; \{v_1 = x^2 + 1, v_2 = x + 3\}$

d. $v = 2x^2 + x - 3; \{v_1 = x^2 - x + 1, v_2 = x^2 + 2x - 2\}$

Bài tập 4.11 Cho $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \\ -8 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ và $w = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Hãy xác định xem w có là phần tử của $ColA$, của $NulA$ hay không?

Bài tập 4.12 Trong các tập **W** gồm các vectơ cột sau đây, hãy xác định tập nào là không gian vectơ, tập nào không phải là không gian vectơ(bằng cách chỉ ra ma trận A để $\mathbf{W} = NulA$)?

a. $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : a + b + c = 2 \right\}$ b. $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} : \begin{cases} a - 2b & = 0 \\ 2a & = c + 3d \end{cases} \right\}$

c. $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} b - 2d \\ 5 + d \\ b + 3d \\ d \end{bmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$ d. $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} c - 6d \\ d \\ c \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

e. $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : 5a = b + 2c \right\}$

Bài tập 4.13 Tìm ma trận A sao cho $\mathbf{W}$ gồm các vectơ cột cho sau đây là $ColA$:

a. $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} 2s + 3t \\ r + s - 2t \\ 4r + s \\ 3r - s - t \end{bmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$ b. $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} b - c \\ 2b + c + d \\ 5c - 4d \\ d \end{bmatrix} : b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

Bài tập 4.14 Giả sử H và K là hai không gian con của không gian vectơ $\mathbf{V}$. Ta gọi tổng giao của các không gian con H và K tương ứng là:

$H \cap K = \{v \in \mathbf{V} : v \in H \text{ và } v \in K\}$

$H + K = \{v + w : v \in H \text{ và } w \in K\}$

a. Chứng minh rằng $H + K$ và $H \cap K$ là những không gian vectơ con của $\mathbf{V}$.

b. Cho ví dụ, chẳng hạn khi $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$, để chứng tỏ hợp của hai không gian con nói chung không phải là không gian con. (Hợp của hai không gian con được hiểu theo nghĩa hợp của hai tập hợp thông thường).

Bài tập 4.15 Xác định các tập sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

a. $u_1 = (1; 3; -1; 4), u_2 = (3; 8; -5; 7), u_3 = (2; 9; 4; 23)$

b. $u_1 = (1; -2; 4; 1), u_2 = (2; 1; 0; -3), u_3 = (3; -6; 1; 4)$

c. $u_1 = 1 - 2x^2, u_2 = 3 - x - x^2, u_3 = -1 + 2x + 5x^2$

d. $u_1 = x^3 - 4x^2 + 2x + 3, u_2 = x^3 + 2x^2 + 4x - 1, u_3 = 2x^3 - x^2 - 3x + 5$

e. $u_1 = x^3 - 5x^2 - 2x + 3, u_2 = x^3 - 4x^2 - 3x + 4, u_3 = 2x^3 - 7x^2 - 7x + 9$

f. $u_1 = x^3 - 2x + 3, u_2 = x^2 + 1, u_3 = 2x^3 + x^2 - 4x + 10$

g. $u_1 = x^3 - 2x + 3, u_2 = x^2 + x + 1, u_3 = x^3 + 2x^2 + 5$

h. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

i. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \right\}$

Bài tập 4.16 Từ tập hợp các vectơ sau hãy tìm một cơ sở cho không gian vectơ tương ứng

a. $\{v_1 = (1;0;0), v_2 = (0;1;-1), v_3 = (0;4;-3); v_4 = (0;2;0)\} \subset \mathbb{R}^3$

b. $\{p_0 = 2, p_1 = -4x, p_2 = x^2 + x + 1, p_3 = 2x + 7, p_4 = 5x^2 - 1\} \subset \mathbb{P}_2[x]$

Bài tập 4.17 Hãy mở rộng các tập sau thành một cơ sở của không gian vectơ tương ứng

a. $\{v_1 = (1;0;0;0), v_2 = (1;1;0;0), v_3 = (1;1;1;0)\} \subset \mathbb{R}^4$

b. $\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}(2,2)$

Bài tập 4.18 Tìm cơ sở và số chiều của $NulA$, $ColA$, $RowA$ biết A:

a. $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 11 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 15 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 19 & -2 \end{bmatrix}$

Bài tập 4.19 Tìm cơ sở và số chiều của $Sp(S)$, biết:

a. $S = \{(1;1;1;2;3), (1:2;-1;-2;1), (3;5;-1;-2;5), (1;2;1;-1;4)\}$

b. $S = \{(1;0;1;1;1), (2;1;2;0;1), (1;1;2;3;4), (4;1;5;4;6)\}$

c. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \right\}$

d. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

e. $S = \{1 - 2x^2, 3 - x - x^2, -1 + 2x + 5x^2\}$

Bài tập 4.20 Cho $S = \{(1;-1;-1), (3;-1;5), (-1;2;1), (1;-3;-6)\}$.

a. $u = (-3;6;2)$ có thuộc $Sp(S)$ hay không?

b. S có phải là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ hay không?

Bài tập 4.21 Cho $S = \{1 + 2x - x^2, -2 + 3x + x^2, 1 + 9x - 2x^2, 5 - 4x - 3x^2\}$.

a. $p(x) = 4 + x - 3x^2$ có thuộc $Sp(S)$ hay không?

b. S có phải là tập sinh của $\mathbb{P}_2[x]$ hay không?

Bài tập 4.22

a. Tìm cơ sở của không gian con $P = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 | 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0\}$

b. Tìm cơ sở của mặt phẳng cho bởi phương trình $x_1 - x_2 + 8x_3 = 0$

Bài tập 4.23 Hãy tìm số chiều của các không gian con sau đây:

a. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a - b + 2c \\ a + 3c \\ b - 3c \\ a + 2b - c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

b. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a - 4b - 2c \\ 2a + 5b - 4c \\ -a + 2c \\ -3a + 7b + 6c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

c. $W = \{(a; b; c) : a - 3b + c = 0, b - 2c = 0, 2b - c = 0\}$

d. $W = \{(a, b, c) : a - 3b + c = 0\}$

e. $Sp(S)$ với $S = \{(1; 1; 2; 1), (-2; -2; -4; -2), (1; -1; 1; 0), (3; 1; 5; 2)\}$

f. $Sp(S)$ với $S = \{1 + 2x - x^2, 1 - x + x^2 + x^3, 1 + 2x - x^3\}$

Bài tập 4.24 Tìm số chiều của các không gian con của $\mathbb{M}(3, 3)$ sau đây:

a. Không gian con các ma trận chéo.

b. Không gian con các ma trận đối xứng.

c. Không gian con của các ma trận tam giác trên.

Bài tập 4.25 Tìm số chiều mỗi không gian con của $\mathbb{P}_5[x]$ sau đây:

a. $U = \{(1 + x^2)p : p \in \mathbb{P}_3[x]\}$

b. $U = \{p \in \mathbb{P}_3[x] : p(-x) = -p(x) \forall x\}$

Bài tập 4.26 Cho U và W là các tập con của $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} U &= \{(a, b, c, d) : b - 2c + d = 0\} \\ W &= \{(a, b, c, d) : a = d, b = 2c\} \end{aligned}$$

a. Chứng minh U, W là các không gian con của $\mathbb{R}^4$

b. Tìm cơ sở và số chiều của $U, W, U \cap W$

Bài tập 4.27

a. Tìm cơ sở cho mặt phẳng có phương trình: $x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$ trong $\mathbb{R}^3$, rồi mở rộng cơ sở vừa tìm được thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b. Tập hợp các điểm $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ thỏa mãn phương trình:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5 = 0; (c_i \in \mathbb{R})$$

được gọi là siêu phẳng trong $\mathbb{R}^4$.

Hãy tìm một cơ sở cho siêu phẳng: $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$, rồi mở rộng cơ sở đó thành cơ sở cho $\mathbb{R}^4$.

Bài tập 4.28 Cho $\mathbb{E} = \{(x^2-4)(ax^2+bx+a), a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{P}_4[x]$

a. Chứng minh $\mathbb{E}$ là không gian con của $\mathbb{P}_4[x]$.

b. Tìm $\dim \mathbb{E}$

Bài tập 4.29 Cho $\mathbb{E} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = m\text{hằng số}\} \subset \mathbb{R}^3$

a. Tìm m để $\mathbb{E}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

b. Tìm $\dim \mathbb{E}$ khi $m = 0$

Bài tập 4.30 Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ cho tập

$$\mathbb{E} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)\mathbb{R}^3 : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

Chứng minh rằng $\mathbb{E}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Tìm số chiều và một cơ sở của $\mathbb{E}$

Bài tập 4.31 Tìm tọa độ của các vectơ đối với cơ sở tương ứng được cho dưới đây

a. $u = (9, 1, 5)$ với cơ sở của $\mathbb{R}^3$ là $\mathscr{B} = \{(-1; 2; 1), (2; -5; -3), (5; -7; -3)\}$

b. $u = 7e_1 + 5e_2 - e_3$, với cơ sở của $\mathbb{R}^3$ là $\mathscr{B} = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$

c. $p(x) = 5x^2 - 2x + 3$, với cơ sở của $\mathbb{P}_2[x]$ là $\mathscr{B} = \{1, 1 + x, 1 + x^2\}$

d. $u = av_1 + bv_2 + cv_3$, với cơ sở $\mathscr{C} = \{v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_3\}$, trong đó $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

e. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}(2, 2)$ đối với cơ sở

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Bài tập 4.32 Hãy tìm vectơ, biết cơ sở $\mathscr{B}$ và $\mathscr{B}$-tọa độ của vectơ đó trong mỗi trường hợp sau:

a. $\mathscr{B} = \{(1; -4; 3), (5; 2; -2), (4; -7; 0)\}$ và $(x)_{\mathscr{B}} = (3; 0; -1)$

b. $\mathscr{B} = \{(-1;2;0),(3;-5;2),(4;-7;3)\}$ và $(x)_{\mathscr{B}} = (-4;8;-7)$

c. $\mathscr{B} = \{x+x^2, x-x^2, 1+x\}$ và $(p(x))_{\mathscr{B}} = (3;1;2)$

Bài tập 4.33 Trong $\mathbb{P}_2[x]$, cho $p_1(x) = x^2-1, p_2(x) = x^2+x+1, p_3(x) = x^2-mx-3$.

a. Với giá trị nào của m thì p_1, p_2, p_3 trở thành cơ sở của $\mathbb{P}_2[x]$?

b. Với $m = 2$, hãy biểu diễn $p(x) = 3x^2+x+1$ theo p_1, p_2, p_3.

Bài tập 4.34 Cho $E = \left\{ \begin{bmatrix} 2a+b-c \\ a-2b \\ -3a-4b+2c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

1. Chứng minh E là một không gian con của $\mathbb{R}^3$.
2. Tìm một cơ sở và số chiều của E.

Bài tập 4.35 Cho không gian vectơ $\mathbb{P}_3[x]$- không gian các đa thức bậc không quá 3.

a. Chứng minh rằng $\mathscr{B} = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$ là cơ sở của $\mathbb{P}_3[x]$.

b. Tìm tọa độ của vectơ $u = 2-3x-x^2-2x^3$ đối với cơ sở $\mathscr{B}$.

Bài tập 4.36

1. Chứng minh $E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}(2,2) : a-2c+d = 0 \right\}$ là một không gian con của $\mathbb{M}(2,2)$.

2. Trong không gian véc tơ $\mathbb{P}_2[x]$ cho tập $\mathscr{B} = \{1, 1+x, (1+x)^2\}$.

   a. Chứng minh $\mathscr{B}$ là cơ sở của $\mathbb{P}_2[x]$.
   b. Tìm tọa độ của $p(x) = -x^2+4$ đối với cơ sở $\mathscr{B}$.

Bài tập 4.37 Cho $\mathscr{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ và $\mathscr{C} = \{c_1, c_1, c_3\}$ là hai cơ sở của không gian vectơ **V**. Giả sử $b_1 = 4c_1 - c_2; b_2 = -c_1 + c_2 + c_3; b_3 = c_2 - 2c_3$.

a. Tìm ma trận chuyển tọa độ từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{C}$.

b. Tìm $[x]_{\mathscr{C}}$ biết $x = 3b_1 + 4b_2 + b_3$.

Bài tập 4.38 Cho $\mathscr{B} = \{(1;2;0),(1;3;2),(0;1;3)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

a. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc $\mathscr{E}$ sang cơ sở $\mathscr{B}$.

b. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở chính tắc $\mathscr{E}$.

Bài tập 4.39 Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{C}$ với:

a. $\mathscr{B} = \{b_1 = (1;1), b_2 = (1;0)\}$ và $\mathscr{C} = \{c_1 = (0;1), c_2 = (1;1)\}$

b. $\mathscr{B} = \{b_1 = (1;0;1), b_2 = (1;1;0), b_3 = (0;1;1)\}$ và $\mathscr{C} = \{c_1 = (0;1;1), c_2 = (1;1;0), c_3 = (1;0;1)\}$

Chương 5

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài tập 5.1 Cho mỗi ánh xạ sau đây, hãy chứng minh nó là ánh xạ tuyến tính hoặc chỉ ra tại sau nó không phải là ánh xạ tuyến tính.

a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 3x + 2y$.

b. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (xy, 0)$

c. $f : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n+1}, f(p(x)) = (x + 1)p(x)$

d. $f : \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}, f(p(x)) = \int\limits_0^1 p(x)dx$

e. $f : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n, f(p(x)) = p^{'}(x) + (5x + 2)$ với $p^{'}(x)$ là đạo hàm của $p(x)$

f. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$

g. $f : \mathbb{M}(n, m) \to \mathbb{M}(m, n), f(A) = A^T$

h. $f : \mathbb{M}(n, n) \to \mathbb{R}, f(A) = det(A)$

Bài tập 5.2 Chứng minh mỗi ánh xạ sau đây là ánh xạ tuyến tính rồi tìm nhân, ảnh của nó.

a. $f : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x], f(ax^2 + bx + c) = (a + b)x^2 + bx + 2c$

b. $f : \mathbb{P}_3[x] \to \mathbb{M}(2, 2), f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d + 2a \end{bmatrix}$

c. $f : \mathbb{P}_n[x] \to \mathbb{R}, f(p(x)) = \int\limits_0^1 p(x)dx$

d. $f : \mathbb{M}(2, 2) \to \mathbb{M}(2, 2), f(A) = A + A^T$

e. $T : \mathbb{F} \to \mathbb{F}, T(f) = 2f$

Bài tập 5.3 Cho ánh xạ $T : \mathbb{M}(2, 2) \to \mathbb{M}(2, 2)$ được xác định bởi
$T(A) = A + A^T$ trong đó $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

a. Chứng minh rằng T là ánh xạ tuyến tính.

b. Giả sử $B \in \mathbb{M}(2,2)$ sao cho $B^T = B$. Tìm $A \in \mathbb{M}(2,2)$ để $T(A) = B$.

c. Chứng minh rằng $ImT = \{B \in \mathbb{M}(2,2) : B^T = B\}$.

d. Tìm $KerT$.

Bài tập 5.4 Ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{P}_2[x] \to [\mathbb{R}]^2$ thỏa mãn

$$f(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, f(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, f(x^2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tìm $f(p), p = a + bx + cx^2$.

Bài tập 5.5 Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3; x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$$

a. Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b. Tìm cơ sở và số chiều của $Kerf$

Bài tập 5.6 Cho ánh xạ $T : [\mathbb{R}]^4 \to [\mathbb{R}]^3$, được xác định bởi ma trậnchính tắc $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{bmatrix}$

Tìm cơ sở và số chiều của $KerT$ và ImT

Bài tập 5.7 Cho ánh xạ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, được xác định bởi ma trận chính tắc $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 13 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

Tìm cơ sở và số chiều của $KerT$ và ImT

Bài tập 5.8 Chứng minh rằng mỗi ánh xạ sau đây là ánh xạ tuyến tính rồi tìm nhân của mỗi ánh xạ.

a. $f : \mathbb{M}(2,3) \to \mathbb{M}(2,3), f\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. $f : \mathbb{M}(3,3) \to \mathbb{R}, f(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ (Ảnh của ma trận A là tổng các phần tử trên đường chéo).

c. $f : \mathbb{M}(3,3) \to \mathbb{M}(3,3), f(A) = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$

Bài tập 5.9 Chứng minh rằng mỗi ánh xạ sau là ánh xạ tuyến tính bằng cách chỉ ra nó là ánh xạ ma trận.

a. $T : [\mathbb{R}]^3 \to [\mathbb{R}]^3, T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$ b. $T : [\mathbb{R}]^2 \to [\mathbb{R}]^4, T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_2 - x_1 \\ 0 \\ 3x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

c. $T : [\mathbb{R}]^3 \to [\mathbb{R}]^3, T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 \\ 4x_2 + 3x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$

d. $T : [\mathbb{R}]^4 \to [\mathbb{R}]^3, T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \end{bmatrix}$

e. $T : [\mathbb{R}]^4 \to [\mathbb{R}]^1, T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.10

a. Cho $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là ánh xạ tuyến tính sao cho

$$T(x_1; x_2) = (x_1 + x_2; 4x_1 + 7x_2)$$

Tìm vectơ x thỏa $T(x) = (-2; -5)$.

b. Cho $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính sao cho

$$T(x_1; x_2) = (x_1 + 2x_2; -x_1 - 3x_2; -3x_1 - 2x_2)$$

Tìm vectơ x thỏa $T(x) = (-4; 7; 0)$.

Bài tập 5.11 Giả sử T là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ tương ứng:

a. Cho $T(1; 0) = (3; 1)$ và $T(0; 1) = (-2; 5)$. Hãy tìm $T(4; -6)$.

b. Cho $T(-1; 0) = (2; 3)$ và $T(0; 1) = (5; 1)$. Hãy tìm $T(-3; -5)$.

c. Cho $T(1; 0; 0) = (-3; 1), T(0; 1; 0) = (-4; 1), T(0; -1; 1) = (3; -5)$. Hãy tìm $T(-1; 4; 2)$

d. Cho $T(1; 2; -3) = (1; 0; 4; 2), T(3; 5; 2) = (-8; 3; 0; 1)$,$T(-2; -3; -4) = (0; 2; -1; 0)$. Hãy tìm $T(5; -1; 4)$

Bài tập 5.12 Hãy tìm ma trận chính tắc của ánh xạ tuyến tính $T : [\mathbb{R}]^n \to [\mathbb{R}]^m$ tương ứng, xác định bởi công thức sau:

a. $T : [\mathbb{R}]^2 \to [\mathbb{R}]^2, T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$

b. $T : [\mathbb{R}]^3 \to [\mathbb{R}]^3, T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

c. $T : [\mathbb{R}]^3 \to [\mathbb{R}]^1, T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.13

a. Tìm ma trận chính tắc của ánh xạ tuyến tính $T : [\mathbb{R}]^2 \to [\mathbb{R}]^2$ sao cho không gian triệt của T là $KerT = Sp\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ và không gian ảnh của T là $ImT = Sp\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

b. Tìm ma trận chính tắc của ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sao cho không gian triệt của T là $KerT = Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ và không gian ảnh của T là $ImT = Sp\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$.

Bài tập 5.14 Cho $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh $f(\mathbb{E})$ là không gian con của không gian $\mathbb{W}$, sau đó tìm cơ sở và số chiều của $f(\mathbb{E})$ trong mỗi trường hợp sau:

a. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_2; x_1 + x_2; x_2), \mathbb{E} = \{(a; 2a + b; a - 2b), a, b \in \mathbb{R}\}$

b. $f : \mathbb{M}(2,2) \to [\mathbb{R}]^2, f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + 2b \\ c - d \end{bmatrix}, \mathbb{E} = \{A \in \mathbb{M}(2,2) : A + A^T = \theta\}$

c. $f : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x], f(ax^2 + bx + c) = (a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1), \mathbb{E} = \{p \in \mathbb{P}_2[x] : p(0) = p(1)\}$

Bài tập 5.15 Cho mỗi ánh xạ tuyến tính sau, xác định ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh, song ánh, hay không phải là đơn ánh và toàn ánh

a. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y, z)$ b. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$

c. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (y, y, y)$ d. $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2, f(a_0 + a_1x) = a_0x + a_1x^2$

e. $f : \mathbb{M}(2,2) \to \mathbb{R}, f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + b + c + d$

Bài tập 5.16 Tìm cơ sở cho $Imf, Kerf$ của các ánh xạ tuyến tính cho ở bài tập trên.

Bài tập 5.17 Sử dụng tính chất của ánh xạ tọa độ, hãy xác định tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của mỗi tập các đa thức sau:

a. $B = \{p_1 = 1 + 2x, p_2 = 3 - x, p_3 = -1 + 3x^2\}$

b. $B = \{p_1 = 1 - 2x^2 - 3x^3, p_2 = x + x^3, p_3 = 1 + 3x - 2x^3\}$

c. $B = \{p_1 = 1 + x^3, p_2 = 3 + x - 2x^2, p_3 = -x + 3x^2 - x^3\}$

d. $B = \{p_1 = (1-x)^3, p_2 = (2-3x)^2, p_3 = 3x^2 - 4x^3\}$

Bài tập 5.18 *Không gian triệt của ánh xạ tuyến tính f được hiểu là Kerf.* Hãy tìm cơ sở cho không gian triệt của ánh xạ tuyến tính $f : [\mathbb{R}]^n \to [\mathbb{R}]^m$ xác định bởi mỗi ma trận chính tắc sau đây, từ đó tìm hạng của f:

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, b. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.19 Xác định các ánh xạ tuyến tính cho sau đây, ánh xạ nào là đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu:

a. $T : [\mathbb{R}]^4 \to [\mathbb{R}]^3, T(x) = Ax, A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. $T : [\mathbb{R}]^4 \to [\mathbb{R}]^4,\ T(x) = Ax, A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 8 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

c. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(1;0;0) = (2;1), T(0;1;0) = (0;-2), T(0;0;1) = (-1;1)$

d. $T : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x], T(x^2) = x^2 + 3, T(x) = 2x^2 + 4x - 1, T(1) = 3x - 1.$

Bài tập 5.20 Bằng cách xét số chiều của không gian triệt hay không gian ảnh, hãy xác định số chiều của không gian triệt và hạng của mỗi ánh xạ tuyến tính sau đây:

a. $D : \mathbb{P}_n[x] \to \mathbb{P}_n - 1[x], D(p) = p^{'}, \forall p \in \mathbb{P}_n[x]$ (D là phép lấy đạo hàm).

b. $D : \mathbb{P}_n[x] \to \mathbb{P}_n[x], D(p) = p^{'}, \forall p \in \mathbb{P}_n[x]$

c. $f : \mathbb{M}(2,3) \to \mathbb{M}(2,3), f\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d. $T : \mathbb{M}(3,3) \to \mathbb{R}, T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

e. $S : \mathbb{M}(3,3) \to \mathbb{M}(3,3), S(A) = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$ ($S(A)$ được gọi là bộ phận đối xứng của ma trận A)

Bài tập 5.21 Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ được cho bởi $f(e_1) = 2e_1 - e_3$ và $f(e_2) = e_2 + e_3$. Hãy tìm ma trận biểu diễn f đối với cặp cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1 - e_2, e_1 + e_2\}$ và $\mathscr{C} = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$

Bài tập 5.22 Gọi $\mathscr{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ là cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{V}$ và $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_2)v_1 - (x_1 + x_3)v_2 + (x_1 - x_2)v_3$$

a. Tìm $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$

b. Tìm ma trận của f theo cơ sở $\mathscr{E}$ và $\mathscr{B}$.

Bài tập 5.23 Cho ánh xạ $f : \mathbb{P}_2[x] \to [\mathbb{R}]^3, f(p) = \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$.($f(p) \in \mathbb{R}^3$, viết dưới dạng vectơ cột).

a. Tìm ảnh qua f của $p(x) = 5 + 3x$.

b. Chúng tỏ rằng f là ánh xạ tuyến tính.

c. Tìm ma trận của f theo cơ sở $\mathscr{B} = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathbb{P}_2[x]$ và cơ sở chính tắc $\mathscr{E}$ của $[\mathbb{R}]^3$.

Bài tập 5.24 Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to [\mathbb{R}]^2$ như sau:

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + y + z \\ x - y - z + 2m \end{bmatrix}$$

a. Xác định m để f là một ánh xạ tuyến tính, sau đó tìm $Kerf$ và số chiều của $Kerf$.

b. Với $m = 0$ tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở $\mathscr{B} = \{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 1, 0)\}$ của $\mathbb{R}^3$ và $\mathscr{C} = \left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ của $[\mathbb{R}]^2$

Bài tập 5.25 Cho ánh xạ $f : [\mathbb{R}]^3 \to [\mathbb{R}]^3$ như sau:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x + ay + 2z \\ 2x + y + az \\ ax + 2y + z \end{bmatrix}$$

a. Chứng minh f là phép biến đổi tuyến tính

b. Tìm điều kiện của a để không tồn tại ánh xạ ngược

c. Tìm cơ sở và số chiều của $Kerf$ tùy thuộc vào a.

Bài tập 5.26 Cho ánh xạ $f : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x]$ xác định bởi qui tắc sau:

$$f(ax^2 + bx + c) = (a + b)x^2 + 2c$$

và $\mathscr{B} = \{(1 + x)^2, x + 1, 2\}$ là một cơ sở của $\mathbb{P}_2[x]$

1. Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

2. Tìm $Kerf$.

3. Tìm $\mathscr{B}$-ma trận của f.

Bài tập 5.27 Cho ánh xạ $f : \mathbb{M}(2,2) \to \mathbb{M}(2,2)$ xác định bởi qui tắc sau:

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & c+2d \\ c & d \end{bmatrix}$$

và $\mathscr{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ là một cơ sở của $\mathbb{M}(2,2)$

1. Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

2. Tìm $Kerf$.

3. Tìm $\mathscr{B}$-ma trận của f.

Chương 6

VÉC TƠ RIÊNG, CHÉO HÓA VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Bài tập 6.1 Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của mỗi ma trận sau đây:

a. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 4 \\ 8 & -4 & 9 \end{bmatrix}$, b. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, c. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, e. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 6.2 Xác định tính chéo hóa được của mỗi ma trận sau, cho biết β là tập các giá trị riêng:

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \beta = \{3\}$; b. $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \beta = \{1, 2, 3\}$

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \beta = \{5, 1\}$; d. $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}, \beta = \{-2, 4\}$

Bài tập 6.3 Tìm ma trận P chéo hóa được A và cho biết dạng chéo tương ứng của A trong mỗi trường hợp sau đây:

a. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, b. $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 16 & 8 & -7 \end{bmatrix}$, c. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -3 & 5 & -20 \\ 2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, e. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, f. $\begin{bmatrix} -4 & 6 & -12 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

Bài tập 6.4 Tìm tất cả các giá trị riêng và véc tơ riêng của các phép biến đổi tuyến tính sau:

a. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x - y + z; -x + 2y - z; z)$

b. $f : [\mathbb{R}]^3 \to [\mathbb{R}]^3, f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ y - z \\ 2y + 4z \end{bmatrix}$

c. $f : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x], f(ax^2 + bx + c) = (3a - c)x^2 + (-a + 2b + c)x + 2a$

Bài tập 6.5 Cho các phép biến đổi tuyến tính $f : [\mathbb{R}]^3 \to [\mathbb{R}]^3, f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 5y + 3z \\ 3y + 4z \\ -6z \end{bmatrix}$. Tìm cho $[\mathbb{R}]^3$ một cơ sở để ma trận của f đối với cơ sở đó là ma trận chéo

Bài tập 6.6 Cho các phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x; y; z) = (5x + 4y + 6z; 4x + 5y + 6z; -4x - 4y - 5z)$. Tìm cho $\mathbb{R}^3$ một cơ sở để ma trận của f đối với cơ sở đó là ma trận chéo

Bài tập 6.7 Cho ánh xạ $T : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x]$ xác định bởi qui tắc sau:

$$T(ax^2 + bx + c) = (5a - b + c)x^2 + 2bx - 12a + 4b - 2c$$

1. Chứng minh T là ánh xạ tuyến tính.
2. Tìm $KerT$. Từ đó suy ra $r(T)$.
3. Chứng minh $\mathscr{B} = \{x^2 + 3x + 2, x + 3, -1\}$ là một cơ sở của $\mathbb{P}_2[x]$.
4. Tìm $[T]_{\mathscr{B}}$

5 Tìm cho $\mathbb{P}_2[x]$ một cơ sở sao cho ma trận của T đối với cơ sở đó là ma trận chéo.

Bài tập 6.8 Cho ánh xạ $T : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x]$ xác định bởi qui tắc sau:

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + 3b - c)x^2 + (a - b + c)x + 3a - 9b + 5c$$

1. Chứng minh T là ánh xạ tuyến tính.
2. Tìm $KerT$. Từ đó suy ra $r(T)$.
3. Chứng minh $\mathscr{B} = \{x^2 + 2x + 3, x + 1, 1\}$ là một cơ sở của $\mathbb{P}_2[x]$.
4. Tìm $[T]_{\mathscr{B}}$

5 Tìm cho $\mathbb{P}_2[x]$ một cơ sở sao cho ma trận của T đối với cơ sở đó là ma trận chéo.

Bài tập 6.9 Tính A^k, biết:

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, c. $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

Chương 7

ĐƯỜNG BẬC HAI PHẲNG VÀ MẶT BẬC HAI

Bài tập 7.1 Quy các phương trình sau đây về dạng không còn hạng tử chéo:

a. $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 1$.

b. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 = 1$.

c. $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 8x + 8\sqrt{3}y = 0$.

d. $x^2 - 2xy + y^2 = 2$.

e. $\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}xy + \sqrt{2}y^2 - 8x + 8y = 0$.

Bài tập 7.2 Nhận dạng các đường cong sau:

a. $17x^2 + y^2 - 34x + 6y + 280 = 0$.

b. $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 46x - 28y + 17 = 0$.

c. $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$.

d. $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$.

e. $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 19$.

f. $3x^2 + 4\sqrt{3}xy - y^2 = 7$.

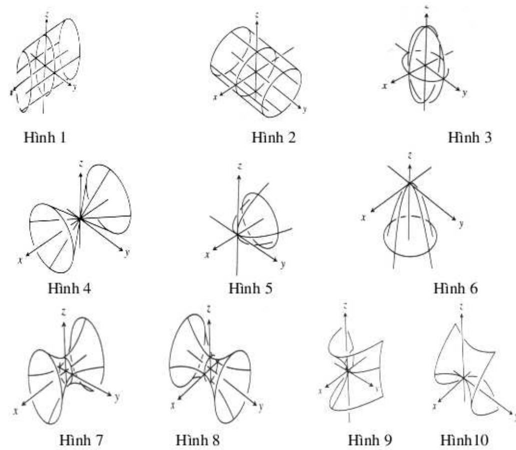
Bài tập 7.3 Dựng đồ thị của đường bậc hai cho bởi phương trình:

a. $7x^2 - 8xy + y^2 - 16x - 2y + 20 = 0$; b. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$;

c. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y = 0$; d. $9x^2 - 6xy + y^2 - 4x + 8y - 9 = 0$.

Bài tập 7.4 Ghép phương trình mặt sao cho đúng với đồ thị của nó, chú ý rằng số phương trình đã cho nhiều hơn số đồ thị:

a.	$x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$	b.	$x^2 + 2z^2 = 8$
c.	$z^2 + 4y^2 - 4x^2 = 4$	d.	$z^2 + x^2 - y^2 = 1$
e.	$9y^2 + z^2 = 16$	f.	$x = z^2 - y^2$
g.	$x = y^2 - z^2$	h.	$z = -4x^2 - y^2$
i.	$x = -y^2 - z^2$	j.	$y^2 + z^2 = x^2$



Bài tập 7.5 Trong mỗi trường hợp sau, hãy chỉ rõ giao tuyến giữa hai mặt bậc hai và mặt phẳng (bằng cách chỉ rõ phương trình, toạ độ tâm, các bán trục, toạ độ các đỉnh, toạ độ các tiêu điểm và phương trình các tiệm cận) (nếu có):

a. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$ và $z=0$.

b. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{6}-\dfrac{z^2}{4}=1$ và $z=1$; và $z=2$.

c. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{6}-\dfrac{z^2}{4}=-1$ và $z=0$; và $z=2$; và $z=4$.

d. $z=\dfrac{x^2}{4}-y^2$ và $z=h$ (h là hằng số).

Bài tập 7.6 Hãy gọi tên và vẽ sơ lược hình dạng các mặt cho bởi phương trình sau:

a. $x^2+y^2=4$ b.$z^2-x^2-y^2=1$ c. $z^2-y^2=1$.

d. $9x^2+y^2+z^2=9$ e.$z=x^2+4y^2$ f. $x^2-y^2-\dfrac{z^2}{4}=1$

g. $y^2-z^2=x-2$ h. $z=y^2-1$ i. $-x^2+2y^2+z^2=0$

j. $-9x^2+y^2+4z^2=1$

Bài tập 7.7 Vẽ phần không gian bao gồm các điểm mà toạ độ của chúng thoả mãn:

a. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4} & =1 \\ |z| & \geq 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4} & =1 \\ |x| & \leq 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 & \leq 4 \\ x^2+y^2 & \geq 1 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 & \leq 4 \\ x^2+y^2 & \leq 1 \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1.1.

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E \to \begin{bmatrix} 1 & -7 & 10 & 2 \\ 0 & 12 & -18 & -3 \\ 0 & 0 & 15 & 5 \end{bmatrix}$$

Bài tập 1.2.

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad B \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & \frac{-10}{11} & \frac{15}{11} & \frac{-5}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & \frac{17}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$D \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{6} \end{bmatrix} \quad F \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài tập 1.3.

$r(A) = 2 \quad r(B) = 2 \quad r(C) = 3 \quad r(D) = 1 \quad r(E) = 3 \quad r(F) = 3 \quad r(G) = 2 \quad r(H) = 3$

Bài tập 1.4.

a.Vì $r(A) = r(A^*) = 3 < n = 4$ nên hệ vô số nghiệm
b. Vì $r(A) = r(A^*) = 2 < n = 5$ nên hệ vô số nghiệm
c.Vì $r(A) = 3 < r(A^*) = 4$ nên hệ vô nghiệm
d. Vì $r(A) = r(A^*) = 4 < n = 5$ nên hệ vô số nghiệm

Bài tập 1.5.

a)

+ Nếu $a = 0$ và b tùy ý thì $r(A) = r(A^*) = 2 < n = 3$ nên hệ vô số nghiệm
+ Nếu $a \neq 0$
  - $b = 0$ thì $r(A) = 2 < r(A^*) = 3$ nên hệ vô nghiệm
  - $b \neq 0$ thì $r(A) = r(A^*) = 3 = n$ nên hệ có nghiệm duy nhất

b)

+ Nếu $c = 0$ và d tùy ý thì $r(A) = r(A^*) = 3 < n = 4$ nên hệ vô số nghiệm
+ Nếu $c \neq 0$
  - $d = 0$ thì $r(A) = 3 < r(A^*) = 4$ nên hệ vô nghiệm
  - $d \neq 0$ thì $r(A) = r(A^*) = 4 = n$ nên hệ có nghiệm duy nhất

Bài tập 1.6.

$$\text{a.} \begin{cases} x_1 = & -1 - x_5 \\ x_2 = & 1 + 3x_5 \\ x_3 \in & \mathbb{R} \\ x_4 = & -4 - 5x_5 \\ x_5 \in & \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{b.} \begin{cases} x_1 = & 3 + 5x_3 \\ x_2 = & 6 - 4x_3 + x_4 \\ x_3 \in & \mathbb{R} \\ x_4 \in & \mathbb{R} \\ x_5 = & 0 \end{cases} \quad \text{c.} \begin{cases} x_1 = & 2x_3 \\ x_2 = & -8 - 6x_3 \\ x_3 \in & \mathbb{R} \\ x_4 = & -5 \\ x_5 = & 0 \end{cases} \quad \text{d.} \begin{cases} x_1 = & -3 + 8x_4 \\ x_2 = & -6 - 4x_4 \\ x_3 = & 5 + 7x_4 \\ x_4 \in & \mathbb{R} \end{cases}$$

Bài tập 1.7.

a. Vô nghiệm b. $\begin{cases} x_1 = & \frac{-19}{16} - \frac{9}{8}x_3 \\ x_2 = & \frac{-5}{8} + \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \in & \mathbb{R} \\ x_4 = & \frac{5}{2} \end{cases}$ c. $\begin{cases} x_1 = & 0 \\ x_2 = & 2 + x_3 \\ x_3 \in & \mathbb{R} \\ x_4 = & -2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x_1 = & -2 \\ x_2 = & 2 \\ x_3 = & -3 \\ x_4 = & 3 \end{cases}$

e. Vô nghiệm f. $\begin{cases} x_1 = & -2 \\ x_2 = & 2 \\ x_3 = & -3 \\ x_4 = & 3 \end{cases}$ g. $\begin{cases} x_1 = & 1 \\ x_2 = & 2 \\ x_3 = & 3 \end{cases}$ h. $\begin{cases} x_1 = & 1 \\ x_2 = & 2 \\ x_3 = & -2 \end{cases}$

Bài tập 1.8.

a. $A^* = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 & b \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a & 1-ab+a-b \end{bmatrix}$

+ Nếu $2 - a - a^2 = 0 \Rightarrow a = 1$ hoặc $a = -2$

$\star$ $a = 1$

- $b = 1 \Rightarrow$ Hệ vô số nghiệm
- $b \neq 1 \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm

$\star$ $a = -2 \Rightarrow$ Hệ vô số nghiệm $\forall b$

+ Nếu $2 - a - a^2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq & 1 \\ a \neq & -2 \end{cases} \Rightarrow 1 - a \neq 0 \Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất.

b. $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & a \\ 2 & -1 & 1 & b \\ 3 & 1 & -1 & c \\ 1 & -3 & 5 & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & a \\ 0 & 5 & 3 & 2a-b \\ 0 & 0 & 4 & a+b-c \\ 0 & 0 & 0 & a+5b-3c-d \end{bmatrix}$

+ Nếu $a + 5b - 3c - d = 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất

+ Nếu $a + 5b - 3c - d \neq 0$ thì hệ vô nghiệm

Bài tập 1.9. Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m = -1$

Bài tập 1.10.

a. $\begin{cases} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x_1 & = & 9x_3 \\ x_2 & = & -4x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$ d. $\begin{cases} x_1 & = & -\frac{23}{16}x_4 \\ x_2 & = & -\frac{5}{16}x_4 \\ x_3 & = & \frac{15}{16}x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Bài tập 2.1. Tự giải

Bài tập 2.2. $x = 2, y = 4, z = 1, w = 3$

Bài tập 2.3. $B = \begin{bmatrix} -2d & -2e & -2f \\ d & e & f \end{bmatrix}$ với $d, e, f \in \mathbb{R}$

Bài tập 2.4. a. $d_{11} = -14$ b. $d_{21} = 67$ c. $d_{32} = 6$

Bài tập 2.5. Tự giải

Bài tập 2.6.

a. $Ax = \begin{bmatrix} 26 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$; $Ay = \begin{bmatrix} -38 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$; $Az = \begin{bmatrix} 9 \\ -12 \\ -78 \end{bmatrix}$ b. $A \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & -38 & 9 \\ 5 & -4 & -12 \\ 14 & -4 & -78 \end{bmatrix}$

Bài tập 2.7.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{29}{2} & \frac{-17}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 10 & -4 & -1 \end{bmatrix}; \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 5 & -1 \\ \frac{-9}{2} & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & -20 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & -1 & -2 \\ 5 & 8 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Bài tập 2.8. A khả nghịch khi và chỉ khi $ad-bc \neq 0$ và khi đó $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

Ứng dụng: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài tập 2.9. a. $c_3(A^{-1}) = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$ b. $[c_1(A^{-1}) \quad c_2(A^{-1})] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

c. $h_2(A{-}1) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = -9$

Bài tập 2.10. a. A khả nghịch $\Leftrightarrow r(A) = 3 \Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -2 \end{cases}$ và

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7+2m^2+10m}{2+m^2+3m} & \frac{4m+3}{2+m^2+3m} & -\frac{3m+1}{2+m^2+3m} \\ -\frac{5m+3+m^2}{2+m^2+3m} & \frac{2m+1}{2+m^2+3m} & -\frac{m-1}{2+m^2+3m} \\ -\frac{m}{2+m^2+3m} & \frac{m}{2+m^2+3m} & \frac{2}{2+m^2+3m} \end{bmatrix}$$

b. A khả nghịch $\Leftrightarrow r(A) = 3 \Leftrightarrow p \neq 1$ và

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{-1+p} & \dfrac{-p}{-1+p} & \dfrac{p}{-1+p} \\ \dfrac{1}{-1+p} & \dfrac{2p-1}{-1+p} & \dfrac{-p}{-1+p} \\ \dfrac{1}{-1+p} & \dfrac{1}{-1+p} & \dfrac{-1}{-1+p} \end{bmatrix}$$

Bài tập 2.11.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \dfrac{-1}{2} & \dfrac{3}{2} & 1 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Ta có $x = B^{-1}.d \Rightarrow i)\ x = \begin{bmatrix} 2 \\ \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}, ii)\ x = \begin{bmatrix} 6 \\ \dfrac{9}{2} \\ \dfrac{3}{2} \end{bmatrix}, iii)\ x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Bài tập 2.12. Ta có $Ax = B \Rightarrow x = A^{-1}.B$

a. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -64 \\ 8 \\ -18 \end{bmatrix}$

b. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

c. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Bài tập 2.13.

a. $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b. $X. = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

c. $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7/2 & -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

d. $X = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

e. $X. = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -103 & -110 & -117 \\ -100 & -107 & -114 \\ -45 & -48 & -51 \end{bmatrix}$

Bài tập 3.1. Tự giải

Bài tập 3.2. $D_1 = 15$ $D_2 = -30$ $D_3 = 6$ $D_4 = 9$

Bài tập 3.3. a. $\begin{bmatrix} 18 & -12 & -6 \\ -7 & 10 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$; b. $\begin{bmatrix} -57 & 51 & -3 \\ 33 & -30 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$; c. $\begin{bmatrix} 3 & 9 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \\ -3 & -8 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 3.4. Khai triển định thức theo hàng 1, sau đó tách ra thành 2 nhóm theo $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}$ và $a'_{11}, a'_{12}, ..., a'_{1n}$ ta sẽ được kết quả

Bài tập 3.5.

$$\begin{array}{llllll} a. & \det A = 160; & b. & \det B = 156; & c. & \det C = -5; \\ d. & \det D = -2(a^3 + b^3); & e. & \det E = 0; & f. & \det F = 0 \end{array}$$

Bài tập 3.6.
$a.(6 - \lambda)(\lambda^2 + 5\lambda + 7)$; $b. - (\lambda + 3)(\lambda^2 - 6\lambda)$

$c.(2 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)$;

Bài tập 3.7. *Điều kiện để ma trận A khả nghịch là* $\det A \neq 0$

a. $\begin{cases} t \neq -2 \\ t \neq 3 \\ t \neq 4 \end{cases}$; b. $\begin{cases} t \neq -2 \\ t \neq 2 \\ t \neq 4 \end{cases}$; c. $\begin{cases} t \neq -3 \\ t \neq -1 \\ t \neq 4 \end{cases}$

Bài tập 3.8.

a. Thay $c_3 \to c_3 - xc_1 - yc_2$

b. Thay $c_1 \to c_1 + c_2$, tiếp theo $c_1 \to \dfrac{1}{2}c_1$, tiếp theo $c_2 \to c_2 - c_1$, cuối cùng $c_2 \to \dfrac{-1}{x}$

c. Thay $h_2 \to h_2 - h_1, h_3 \to h_3 - h_1$, tiếp theo $h_2 \to \dfrac{1}{b-a}h_2, h_3 \to \dfrac{1}{c-a}h_3$, cuối cùng thay $h_3 \to h_3 - h_2$

Bài tập 3.9.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1/3 & 2 & -4/3 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 7/2 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}; \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Bài tập 3.10. a. $x_2 = 2$ b. $x_2 = 2$ c. $x_2 = 0$ d. $x_2 = -3$

Bài tập 3.11. Áp dụng công thức $x_j = \dfrac{D_j}{D}$

a. $D = 8; D_1 = -48; D_2 = -103; D_3 = -11$ b. $D = 21; D_1 = 8; D_2 = 67; D_3 = 56$

c. $D = 7; D_1 = -7; D_2 = 14; D_3 = 0$ d. $D = -73; D_1 = -146; D_2 = -73; D_3 = 73$

Bài tập 3.12.

a. $D = (a+2)(4-a);$ $D_1 = -(a+2)^2;$ $D_2 = 3(a+2);$ $D_3 = 0$

- Nếu $\begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 4 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-(a+2)}{4-a} \\ x_2 = \dfrac{3}{4-a} \\ x_3 = 0 \end{cases}$
- Nếu $a = 4$ thì $D = 0$ nhưng $D_1 = -36$. Khi đó, hệ vô nghiệm.
- Nếu $a = -2$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1}{3}x_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{6}x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

b. $D = (a-1)(a-3);$ $D_1 = -4(a-3); D_2 = 0;$ $D_3 = 2(a-3)$

- Nếu $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 3 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4}{a-1} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \dfrac{2}{a-1} \end{cases}$
- Nếu $a = 1$ thì $D = 0$ nhưng $D_2 = 8$. Khi đó, hệ vô nghiệm.
- Nếu $a = -3$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4}{5} - \dfrac{6}{5}x_3 \\ x_2 = \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5}x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

c. $D=-a^2(a+3); D_1=-a^2\,(a+3)\,(a^3+2\,a^2-a-1)\,;$

$D_2=-a^2(a+3)(2a-1); D_3=a^2(a+3)(a^2-2)$

• Nếu $\begin{cases} a & \neq & 0 \\ a & \neq & -3 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 & = & a^3+2\,a^2-a-1 \\ x_2 & = & 2a-1 \\ x_3 & = & 2-a^2 \end{cases}$

• Nếu $a=-3$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$

• Nếu $a=0$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 & = & -x_2-x_3 \\ x_2 & \in & \mathbb{R} \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$

d. $D=a(a+2)(a-2); D_1=a(a+2); D_2=-a(a+2)(a+3); D_3=a^2(a+2)$

• Nếu $\begin{cases} a & \neq & 0 \\ a & \neq & \pm 2 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 & = & \dfrac{1)}{a-2} \\ x_2 & = & \dfrac{-(a+3)}{a-2} \\ x_3 & = & \dfrac{a}{a-2} \end{cases}$

• Nếu $a=2$ thì $D=0$ nhưng $D_1=8$. Khi đó, hệ vô nghiệm.

• Nếu $a=0$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 & = & -x_2 \\ x_2 & \in & \mathbb{R} \\ x_3 & = & 0 \end{cases}$

• Nếu $a=-2$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 & = & 1-\dfrac{3}{2}x_3 \\ x_2 & = & 1+\dfrac{1}{2}x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$

Bài tập 3.13. a. $(x_1;x_2;x_3)=(1;2;3)$ b. $\lambda \neq \dfrac{-4}{5}$

Bài tập 3.14. 1. $(x_1;x_2;x_3;x_4)=(-2;0;1;-1)$ 2. $D=6a+2\neq 0 \Leftrightarrow a\neq \dfrac{-1}{3}$

Bài tập 3.15.

a. $D\neq 0 \Longleftrightarrow 3-m\neq 0 \Longleftrightarrow m\neq 3$

b. Khi $m=3$ hệ có thể vô nghiệm hoặc vô số nghiệm. Do đó, ta cần thử lại

$$A^*=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & 4 \end{array}\right] \to .... \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Hệ vô số nghiệm.

Vậy không tìm được m để hệ vô nghiệm

Bài tập 3.16. 1. $(x_1; x_2; x_3; x_4) = (-2; 0; 1; -1)$ 2. $D = a^2 + 2a + 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$

Bài tập 3.17. $D = (k+3)(2-k)$

a. $k \neq 2 \wedge k \neq -3$ b. $k = -3$ c. $k = 2$.

Bài tập 3.18. $D = (k+2)(k-1)^2$

a. $k \neq -2 \wedge k \neq 1$ b. $k = -2$ c. $k = 1$.

Bài tập 3.19. a. $X = \begin{bmatrix} \frac{-11}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ b. $\lambda = 1$

Bài tập 4.1.

a. Không, sai ở tiên đề 5 b. Không, sai ở tiên đề 8

c. Không, sai ở tiên đề 8 d. Không, sai ở tiên đề 8 e. Phải

Bài tập 4.2. a. Phải b. Phải c. Không d. Phải e. Phải

Bài tập 4.3.

a. $\mathbf{W} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b\} \subset \mathbb{R}^3$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Thật vậy,

+ Ta có $\theta = (0, 0, 0) \in \mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{W} \neq \emptyset$.

+ Mặt khác, $\forall u(a_1, b_1, c_1), v(a_2, b_2, c_2) \in \mathbf{W}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có $\begin{cases} a_1 & = 2b_1 \\ a_2 & = 2b_2 \end{cases}$

Có $\alpha u + \beta v = (\alpha a_1 + \beta a_2, \alpha b_1 + \beta b_2, \alpha c_1 + \beta c_2)$

Mà $\alpha a_1 + \beta a_2 = \alpha 2b_1 + \beta 2b_2 = 2(\alpha b_1 + \beta b_2)$ nên suy ra $\alpha u + \beta v \in \mathbf{W}$

b. Không, vì khi chọn $\alpha < 0$ và $u = (a; b; c) \in \mathbf{W}$ thì $\alpha u \notin \mathbf{W}$

c. Không, vì $\mathbf{W}$ không khép kín đối với phép cộng.

d. Không, vì $\mathbf{W}$ không khép kín đối với phép cộng.

e. Phải, tự chứng minh

f. Không, vì $(0, 0, 0, 0) \notin \mathbf{W}$

g. Phải, tự chứng minh

Bài tập 4.4.

a. Không, vì $\mathbf{W}$ không khép kín đối với phép cộng.

b. Phải, tự chứng minh

Bài tập 4.5.

a. $Sp\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}\right\}$; b. $Sp\left\{\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix},\right\}$; c. $Sp\{(1;2;1),(0;1;-1)\}$; d. $Sp\{1,x^2\}$

Bài tập 4.6.

a. Không phải vì $\theta = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \notin W$ b. Không phải vì $\theta = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \notin W$

c. $W = Sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ d. $W = Sp\left\{\begin{bmatrix}4\\0\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

Bài tập 4.7. Ta có:

$+\theta \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$.

$+\forall f_1, f_2 \in E \Rightarrow \begin{cases} f_1(a) & = f_1(b) \\ f_2(a) & = f_2(b) \end{cases}$

Khi đó:

$$f_1(a) + f_2(a) = f_1(b) + f_2(b) \Rightarrow (f_1 + f_2)(a) = (f_1 + f_2)(b)$$

$\Rightarrow f_1 + f_2 \in E$.

$+\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in E \Rightarrow f(a) = f(b)$, ta có:

$$(\alpha f)(a) = \alpha f(a) = \alpha f(b) = (\alpha f)(b) \Rightarrow \alpha f \in E$$

Vậy E là một không gian con.

Bài tập 4.8.

a. $E = Sp\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$

b. Không phải là không gian con của $\mathbb{M}(2,2)$ vì nó không khép kín đối với cả 2 phép toán

c. Không phải là không gian con của $\mathbb{M}(2,2)$ vì $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \notin \mathbb{M}(2,2)$

d. $E = Sp\left\{\begin{bmatrix}-2 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$

Bài tập 4.9. H là không gian con của $\mathbb{M}(2,4)$.

Thật vậy:

$+\ \theta = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \in H$ vì $F\theta = 0$ nên $H \neq \emptyset$

$+\ \forall A, B \in H \Rightarrow \begin{cases} FA &= 0 \\ FB &= 0 \end{cases}$; $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có
$F(\alpha A + \beta B) = \alpha FA + \beta FB = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha A + \beta B \in H$

Bài tập 4.10. Giả sử $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, nếu $\exists \alpha_i$ thì $v \in Sp\{v_i\}$, ngược lại $\nexists \alpha_i$ thì $v \notin Sp\{v_i\}$

a. $v \in Sp\{v_1, v_2, v_3\}$ b. $v \notin Sp\{v_1, v_2, v_3\}$ c. $v \in Sp\{v_1, v_2\}$ d. $v \notin Sp\{v_1, v_2\}$

Bài tập 4.11. $w \in ColA$ vì hệ $Ax = w$ có nghiệm $w \notin NulA$ vì $Aw \neq \theta$

Bài tập 4.12.

a. $\mathbf{W}$ không phải là không gian con của không gian vectơ $[\mathbb{R}]^3$ vì $\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathbf{W}$.

b. $\mathbf{W} = NulA$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

c. $\mathbf{W}$ không phải là không gian con của không gian vectơ $[\mathbb{R}]^4$ vì $\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathbf{W}$.

d. $\mathbf{W} = NulA$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

e. $\mathbf{W} = NulA$ với $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

Bài tập 4.13. a. $\mathbf{W} = ColA$ với $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\mathbf{W} = ColA$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 4.14.

a. $\forall v_1, v_2 \in H \cap K, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} v_1, v_2 & \in H \\ v_1, v_2 & \in K \end{cases}$

Vì H và K là hai không gian con $\Rightarrow \begin{cases} \alpha v_1 + \beta v_2 & \in H \\ \alpha v_1 + \beta v_2 & \in K \end{cases} \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in H \cap K$

$\Rightarrow H \cap K$ là không gian con.

b. Ví dụ: Hai đường thẳng $(d_1) : x_1 + x_2 = 0$ và $(d_2) : x_1 - x_2 = 0$ là hai không gian con của $\mathbb{R}^2$ nhưng hợp của hai đường thẳng này không phải là không gian con của $\mathbb{R}^2$.

Thật vậy:

Lấy $u = (1; -1) \in d_1; v = (1; 1) \in d_2$ thì $u + v = (1; -1) + (1; 1) = (2; 0) \notin d_1$ và $\notin d_2$

Bài tập 4.15.

a. phụ thuộc tuyến tính	b. độc lập tuyến tính	c. độc lập tuyến tính
d. độc lập tuyến tính	e. phụ thuộc tuyến tính	f. độc lập tuyến tính
g. phụ thuộc tuyến tính	h. độc lập tuyến tính	i. phụ thuộc tuyến tính

Bài tập 4.16.

a. $\{v_1 = (1; 0; 0), v_2 = (0; 1; -1), v_3 = (0; 4; -3)\}$

b. $\{p_0 = 2, p_1 = -4x, p_2 = x^2 + x + 1\}$

Bài tập 4.17.

a. Ta biết cơ sở của $\mathbb{R}^4$ gồm 4 vectơ độc lập tuyến tính. Ta có $\{v_1, v_2, v_3\}$ là 3 vectơ độc lập tuyến tính nên ta chỉ cần chọn thêm vectơ v_4 sao cho v_4 không là tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2, v_3. Ta chọn $v_4 = (1; 1; 1; 1)$. Khi đó cơ sở của $\mathbb{R}^4$ là $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

b. Ta biết cơ sở của $\mathbb{M}(2, 2)$ gồm 4 vectơ độc lập tuyến tính. Ta có $\{v_1, v_2\}$ là 2 vectơ độc lập tuyến tính nên ta chỉ cần chọn thêm vectơ v_3, v_4 sao cho v_3, v_4 sao cho $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ độc lập tuyến tính. Ta chọn $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Khi đó cơ sở của $\mathbb{R}^4$ là $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Bài tập 4.18.

a. $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix} \to ... \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

+ Cơ sở của $ColA$ là $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$ và $NulA$ là $\left\{ \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

+ Cơ sở của $RowA$ là $\{(1; 0; 6; 5), (0; 2; 5; 3)\}$

$\dim ColA = \dim RowA = 2$ và $\dim NulA = 2$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 11 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 15 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 19 & -2 \end{bmatrix} \to ... \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-7}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

+ Cơ sở của $ColA$ là $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$ và $NulA$ là $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

+ Cơ sở của $RowA$ là $\{(1;2;0;4;0),(0;0;5;-7;0),(0;0;0;0;1)\}$

$\dim ColA = \dim RowA = 3$ và $\dim NulA = 2$

Bài tập 4.19.

a. Lập ma trận cột

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cột chốt là cột 1, 2, 4.

Cơ sở của $Sp(S)$ là $\{(1;1;1;2;3),(1:2;-1;-2;1),(1;2;1;-1;4)\}$ và $\dim Sp(S) = 3$

b. Cơ sở của $Sp(S)$ là S và $\dim Sp(S) = 4$

c. Cơ sở của $Sp(S)$ là $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \right\}$ và $\dim Sp(S) = 3$

d. Cơ sở của $Sp(S)$ là $S' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ và $\dim Sp(S) = 3$

e. Vậy cơ sở của $Sp(S)$ là S và $\dim Sp(S) = 3$

Bài tập 4.20. a. $u \in Sp(S)$ b. S là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Bài tập 4.21. a. $p(x) = 4 + x - 3x^2 \in Sp(S)$ b. S không phải là tập sinh của $P_2[x]$

Bài tập 4.22.

a. Cơ sở của P là $\{(1;-3;0),(0;-5;1)\}$

b. Cơ sở của mặt phẳng là $\{(1;1;0),(-8;0;1)\}$..

Bài tập 4.23.
a. $\dim W = 3$ b. $\dim W = 2$ c. $\dim W = 0$ d. $\dim W = 2$ e. $\dim W = 2$ f. $\dim W = 3$

Bài tập 4.24. Giả sử E là các không gian con của $\mathbb{M}(3,3)$ cần tìm số chiều
a. $\dim E = 3$ b. $\dim E = 6$ c. $\dim E = 6$

Bài tập 4.25. a. $\dim U = 4$ b. $\dim U = 2$

Bài tập 4.26.

a. + Ta có $U = Sp\{(1;0;0;0),(0;2;1;0);(0;-1;0;1)\}$ nên U là không gian con của $\mathbb{R}^4$
+ Ta có $W = Sp\{(1;0;0;1),(0;2;1;0)\}$ nên W là không gian con của $\mathbb{R}^4$

b. + Cơ sở của U là $(1;0;0;0),(0;2;1;0),(0;-1;0;1)$ và $\dim U = 3$
+ Cơ sở của W là $(1;0;0;1),(0;2;1;0)$ và $\dim W = 2$
+ Cơ sở của $U \cap W$
Ta có $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Vậy cơ sở của $U \cap W$ là $\{(0;2;1;0)\}$

Bài tập 4.27.

a. Đặt $P = \{(x_1;x_2;x_3) : x_1+3x_2+4x_3 = 0\} \Rightarrow$ Cơ sở của P là $S = \{(-3;1;0);(-4;0;1)\}$
+ Chọn $(1;0;0) \in \mathbb{R}^3$ nhưng $\notin P$. Khi đó, $\{(-3;1;0);(-4;0;1),(1;0;0)\}$ sẽ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

b. Đặt $P = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) : x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}$
$\Rightarrow$ Cơ sở của P là $S = \{(-1;1;0;0);(-2;0;1;0),(-1;0;0;1)\}$
+ Chọn $(1;0;0;0) \in \mathbb{R}^4$ nhưng $\notin P$. Khi đó, $\{(-1;1;0;0);(-2;0;1;0),(-1;0;0;1),(1;0;0;0)\}$ sẽ là cơ sở của $\mathbb{R}^4$

Bài tập 4.28.

a. $\mathbb{E} = Sp\{(x^2-4)(x^2+1);(x^2-4)x\}$ nên $\mathbb{E}$ là không gian con của $\mathbb{P}_4[x]$.

b. Tìm $\dim \mathbb{E} = 2$

Bài tập 4.29.

a. $\mathbb{E}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} (0;0;0) & \in & \mathbb{E} \\ \forall u,v \in \mathbb{E} & \Rightarrow & u+v \in \mathbb{E} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{E} & \Rightarrow & \alpha u \in \mathbb{E} \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$

b. Tìm $\dim \mathbb{E} = 2$

Bài tập 4.30.

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0 = 0 \right\} \\ &= Sp\{(1;0;1), (0;1;0)\}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$
Cơ sở của $\mathbb{E}$ là $\{(1;0;1),(0;1;0)\}$ và $\dim \mathbb{E} = 2$

Bài tập 4.31. a. $\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$; b. $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$; c. $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$; d. $\begin{bmatrix} \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{a-b}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$; e. $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 4.32. a. $x = (-1; -5; 9)$ b. $x = (0; 1; -5)$ c.$p(x) = 2 + 6x + 2x^2$

Bài tập 4.33.

a. Vì $\dim \mathbb{P}_2[x] = 3$ nên để $\{p_1, p_2, p_3\}$ trở thành cơ sở của $\mathbb{P}_2[x]$ ta chỉ cần điều kiện để $\{p_1, p_2.p_3\}$ độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (1)

Ta có $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -m \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & -2+2m \end{bmatrix}$

(1) xảy ra $\Leftrightarrow r(A) = 3 \Leftrightarrow -2 + 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

b. $p(x) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$

$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow p(x) = -p_1 + 3p_2 + p_3$

Bài tập 4.34.

1. $E = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

2. Cơ sở của E là $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$ và $\dim E = 2$

Bài tập 4.35.

a. Vì $\dim \mathbb{P}_3[x] = 4$ mà $\mathscr{B}$ có 4 véc tơ nên ta chỉ cần chứng minh $\mathscr{B}$ độc lập tuyến tính hoặc $\mathscr{B}$ là tập sinh

Ta chứng minh $\mathscr{B} = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$ là tập sinh của $\mathbb{P}_3[x]$.

Lấy $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{P}_3[x]$, giả sử có

$\alpha_1.1 + \alpha_2(1-x) + \alpha_3(1-x)^2 + \alpha_4(1-x)^3 = a + bx + cx^2 + dx^3$

$\Leftrightarrow (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)+(-\alpha_2-2\alpha_3-3\alpha_4)x+(\alpha_3+3\alpha_4)x^2-\alpha_4 x^3 = a+bx+cx^2+dx^3$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & +\alpha_4 & = a \\ & -\alpha_2 & -2\alpha_3 & -3\alpha_4 & = b \\ & & \alpha_3 & +3\alpha_4 & = c \\ & & & -\alpha_4 & = d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \alpha_1 & = & a+b+c+d \\ \alpha_2 & = & -b-2c-3d \\ \alpha_3 & = & c+3d \\ \alpha_4 & = & -d \end{array}\right.$$

$\Rightarrow a+bx+cx^2+dx^3 = (a+b+c+d).1+(-b-2c-3d)(1-x)+(c+3d)(1-x)^2-d(1-x)^3$

$\Rightarrow \mathscr{B} = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$ là tập sinh của $\mathbb{P}_3[x]$.

Vậy $\mathscr{B} = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$ là cơ sở của $\mathbb{P}_3[x]$.

b. Áp dụng kết quả câu a ta suy ra $(u)_{\mathscr{B}} = (-4; 11; -7; 2)$

Bài tập 4.36. 1. Tự chứng minh 2. Tương tự bài 4.38

Bài tập 4.37.

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow [x]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bài tập 4.38. a. $P_{\mathscr{E},\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ b. $P_{\mathscr{B},\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Bài tập 4.39. a. $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.1.

a. f là ánh xạ tuyến tính. Tự chứng minh

b. f không là ánh xạ tuyến tính. Tự giải thích

c. f là ánh xạ tuyến tính. Tự chứng minh

d. f là ánh xạ tuyến tính. Tự chứng minh

e. f không là ánh xạ tuyến tính. Tự giải thích

f. f là ánh xạ tuyến tính. Tự chứng minh

g. f là ánh xạ tuyến tính. Tự chứng minh

h. f không là ánh xạ tuyến tính. Tự giải thích

Bài tập 5.2.

a. Tự chứng minh, $Kerf = \{0\}$ và $Imf = Sp\{x^2, x^2 + x, 2\}$

b. Tự chứng minh, $Kerf = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -2a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ và $Imf = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

c. Tự chứng minh, $Kerf = \{p(x) \in \mathbb{P}_n[x] | \frac{a_n}{n+1} + \cdots + \frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0\}$ và $Imf = \mathbb{R}$

d. Tự chứng minh, $Kerf = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$ và $Imf = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

e. Tự chứng minh, $KerT = \{0\}$ và $Imf = \mathbb{F}$

Bài tập 5.3.

a. Tự chứng minh

b. Giả sử:

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & y \\ b - y & \frac{c}{2} \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R}$$

c. Tự chứng minh

d. $KerT = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$

Bài tập 5.4. $f(p) = \begin{bmatrix} a & - & b & + & c \\ a & + & b & + & c \end{bmatrix}$

Bài tập 5.5. a. Tự chứng minh   b. Cơ sở của $Kerf$ là $\{(3; -1; 1)\}$ và $\dim Kerf = 1$

Bài tập 5.6.

a. Cơ sở của $KerT$ là $\{(1; -2; 1; 0)^T, (-7; 3; 0; 1)^T\}$ và $\dim KerT = 2$

b. Cơ sở của ImT là $\{(1; 1; 3)^T, (2; 3; 8)^T\}$ và $\dim ImT = 2$.

Bài tập 5.7.

a. Cơ sở của $KerT$ là $\{(1; 2; -1)\}$ và $\dim KerT = 1$

b. Cơ sở của ImT là $\{(1; 3; -2), (2; 5; -1)\}$ và $\dim ImT = 2$

Bài tập 5.8.

a. Tự chứng minh, $Kerf = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

b. Tự chứng minh, $Kerf = \{A \in \mathbb{M}(3,3) | a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}$

c. Tự chứng minh,$Kerf = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Bài tập 5.9. Tự chứng minh

Bài tập 5.10. a. $\begin{cases} x_1 & = & -3 \\ x_2 & = & 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x_1 & = & -2 \\ x_2 & = & 3 \end{cases}$

Bài tập 5.11. a. $(24; -26)$ b. $(-19; 4)$ c. $(-15; -5)$ d. $(802; -477; 398; 57)$

Bài tập 5.12. a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.13. a. $A = \begin{bmatrix} 2t & -4t \\ 1t & 2t \end{bmatrix}$ với $t \in \mathbb{R}$ b. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3t & 3t \\ 5t & 5t \end{bmatrix}$ với $t \in \mathbb{R}$

Bài tập 5.14.

a. Tự chứng minh. Cơ sở của $f(\mathbb{E})$ là $\{(-1; 3; 2), (-1; 1; 1)\}, \dim f(\mathbb{E}) = 2$

b. Tự chứng minh. Cơ sở của $f(\mathbb{E})$ là $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \dim f(\mathbb{E}) = 1$

c. Tự chứng minh. Cơ sở của $f(\mathbb{E})$ là $\{2x + 1, x^2 + x + 2\}, \dim f(\mathbb{E}) = 2$

Bài tập 5.15.

a. f không phải là đơn ánh, nhưng f là toàn ánh.

b. f là song ánh

c. f không phải là đơn ánh, cũng không phải là toàn ánh.

d. f là đơn ánh, nhưng f không phải là toàn ánh.

e. f không phải là đơn ánh, nhưng f là toàn ánh.

Bài tập 5.16.

a. Cơ sở của $Kerf$ là $\{(-1; 1; 0)\}$ và cơ sở của Imf là $\{(1; 0), (0; 1)\}$

b. $Kerf = \{(0; 0; 0)\}$ nên $Kerf$ không có cơ sở và cơ sở của Imf là $\{(0; 1; 1), (1; 0; 1), (1; 1; 0\}$

c. Cơ sở của $Kerf$ là $\left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ và cơ sở của Imf là $\{1\}$

d. $Kerf = \{0\}$ nên $Kerf$ không có cơ sở và cơ sở của Imf là $\{x, x^2\}$

e. Cơ sở của $Kerf$ là $\{(1;0;0), (0;0;1\}$ và cơ sở của Imf là $\{(1;1;1)\}$

Bài tập 5.17.

a. $B = \{p_1 = 1 + 2x, p_2 = 3 - x, p_3 = -1 + 3x^2\}$
Gọi $\mathscr{E} = \{1, x, x^2\}$ là cơ sở chính tắc của $P_2[x]$.
Ta xét ánh xạ tọa độ: $f : \mathbb{P}_2[x] \to [\mathbb{R}]^3$ được xác định như sau $p_i \mapsto [p_i]_{\mathscr{E}}$
Để xét tính độc lập tuyến tính của $\{p_1, p_2, p_3\}$ ta sẽ xét tính độc lập của $\{[p_1]_{\mathscr{E}}, [p_2]_{\mathscr{E}}, [p_3]_{\mathscr{E}}\}$
Ta có
$$[p_1]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, [p_2]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, [p_3]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$
Lập ma trận có các cột là các vectơ $\mathscr{E}$-tọa độ của p_1, p_2, p_3
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
Ta có $r(A) = 3$ nên ta suy ra $\{[p_1]_{\mathscr{E}}, [p_2]_{\mathscr{E}}, [p_3]_{\mathscr{E}}\}$ độc lập tuyến tính.
Vậy B độc lập tuyến tính.

b. Tương tự, B độc lập tuyến tính.

c. Tương tự, B độc lập tuyến tính.

d. Tương tự, B phụ thuộc tuyến tính.

Bài tập 5.18.

a. Cơ sở của $Kerf$ là $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ và $r(f) = r(A) = 2$

b. Cơ sở của $Kerf$ là $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ và $r(f) = r(A) = 3$

c. Cơ sở của $Kerf$ là $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ và $r(f) = r(A) = 4$

Bài tập 5.19.

a. T không phải là đơn cấu và toàn cấu   b. T là đẳng cấu

c. T là toàn cấu, không phải là đơn cấu   d. T là đẳng cấu

Bài tập 5.20.

a. $\dim KerD = 1$ và $r(D) = n$ b. $\dim KerD = 1$ và $r(D) = n$ c. $\dim Kerf = 3$ và $r(f) = 3$

d. $\dim KerT = 8$ và $r(T) = 1$ e. $\dim KerS = 3$ và $r(S) = 6$

Bài tập 5.21. $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.22. $[f]_{\mathscr{E},\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.23. a. Tự tìm   b. Tự chứng minh   c. $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.24.

a. $m = 0$ và $Kerf = \{(0; y; -y), y \in \mathbb{R}\}$ và $\dim Kerf = 1$ b. $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.25.

a. Tự chứng minh   b. $a = -3$

c. + Nếu $a \neq -3$ thì f là đơn cấu nên $Kerf = \{(0; 0; 0)\}$ và $\dim Kerf = 0$

+ Nếu $a = -3$ thì $Kerf = \{(a; a; a), a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim Kerf = 1$

Bài tập 5.26.

1. Tự chứng minh   2. $Kerf = \{ax^2 - ax, a \in \mathbb{R}\}$ 3. $[f]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.27.

1. Tự chứng minh 2. $Kerf = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$ 3. $[f]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 6.1.

a. Tập các véc tơ riêng của A ứng với $\lambda = 1$ (kép) là $\left\{ \begin{bmatrix} s \\ 2s+2t \\ t \end{bmatrix}, s^2+t^2 \neq 0 \right\}$ và

$\lambda = 3$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ -t \\ -2t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

b. Tập các véc tơ riêng của A ứng với $\lambda = 1$ (kép) là $\left\{ \begin{bmatrix} -s+t \\ t \\ s \end{bmatrix}, s^2+t^2 \neq 0 \right\}$ và

$\lambda = 2$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

c. Tập các véc tơ riêng của A ứng với $\lambda = 2$ (kép) là $\left\{ \begin{bmatrix} s \\ t \\ 2s+2t \end{bmatrix}, s^2+t^2 \neq 0 \right\}$ và

$\lambda = 1$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ -3t \\ -3t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

d. Tập các véc tơ riêng của A ứng với $\lambda = -1$ (bội 3) là $\left\{ \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

e. Tập các véc tơ riêng của A ứng với $\lambda = 2$ (kép) là $\left\{ \begin{bmatrix} s \\ t \\ -3s+3t \end{bmatrix}, s^2+t^2 \neq 0 \right\}$ và

$\lambda = 1$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

Bài tập 6.2. a,d không chéo hóa được b,c chéo hóa được

Bài tập 6.3.

a. $\begin{cases} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 5 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= -3 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{cases} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= 3 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{cases} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 3 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e. $\begin{cases} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 3 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

f. $\begin{cases} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= -1 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Bài tập 6.4.

a. Tập các véc tơ riêng của f ứng với $\lambda_1 = 1$ là $\{(s-t, s, t), s^2 + t^2 \neq 0\}$ và $\lambda_2 = 3$ là $\{(t; t; 0), t \neq 0\}$

b. Tập các véc tơ riêng của f ứng với $\lambda_1 = 1$ là $\left\{ \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, s \neq 0 \right\}$ và $\lambda_2 = 3$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ -2t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

c. Tập các véc tơ riêng của f ứng với $\lambda_1 = 2$ là $\{ax^2 + bx + a, a^2 + b^2 \neq 0\}$ và $\lambda_2 = 1$ là $\{ax^2 - ax + 2a, a \neq 0\}$

Bài tập 6.5. $\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 32 \\ -72 \end{bmatrix} \right\}$

Bài tập 6.6. $\mathscr{B} = \{(1; -1; 0), (-3; 0; 2); (1; 1; -1)\}$

Bài tập 6.7.

1. Tự chứng minh 2. $KerT = \{0\} \Rightarrow r(T) = 3$ 3. Tự chứng minh

4. $[T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ 5. $\mathscr{C} = \{x^2 + 3x, x + 1, x^2 - 4\}$

Bài tập 6.8.

1. Tự chứng minh 2. $KerT = \{0\} \Rightarrow r(T) = 3$ 3. Tự chứng minh

4. $[T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ 5. $\left[\begin{array}{ll} \mathscr{C} & = \{-x^2 + x + 3, -x^2 + 1, 3x^2 + x\} \\ \mathscr{C} & = \{x^2 - x - 3, x + 3, x^2 + 2x + 5\} \end{array}\right.$

Bài tập 6.9. Ta có $A^k = PD^kP^{-1}$ với P là ma trận chéo hóa được A và D là dạng chéo của A

a.

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \\ -1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3/4 + 1/4\,.5^k & -1/2 + 1/2\,.5^k & 1/4 - 1/4\,.5^k \\ -1/4 + 1/4\,.5^k & 1/2 + 1/2\,.5^k & 1/4 - 1/4\,.5^k \\ 1/4 - 1/4\,.5^k & 1/2 - 1/2\,.5^k & 3/4 + 1/4\,.5^k \end{bmatrix}$$

b.

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k \\ -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & 2/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k \\ -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & 2/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k \end{bmatrix}$$

c.

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3\,.3^k - 2 & 2\,.3^k - 2 & 8\,.3^k - 8 \\ -1 + 3^k & -1 + 2\,.3^k & -4 + 4\,.3^k \\ -3^k + 1 & -3^k + 1 & -3\,.3^k + 4 \end{bmatrix}$$

Bài tập 7.1.

a. $5x'^2 + 2y'^2 - 2 = 0$ b. $4x'^2 - 1 = 0$ c. $4x'^2 - 8\sqrt{3}x' + 8y' = 0$

d. $y'^2 = 1$ e. $2\sqrt{2}x'^2 - y' = 0$.

Bài tập 7.2.

a. Dạng Ellip b. Dạng Ellip c.Dạng Hyperbol

d. Dạng Parabol e. Dạng Ellip f. Dạng Hyperbol

Bài tập 7.3.

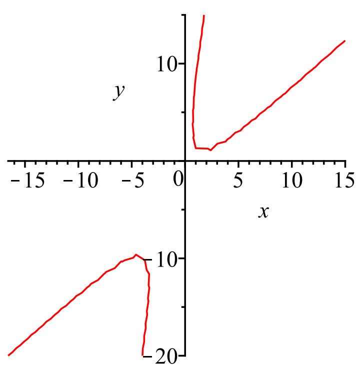
a. Ta có $\begin{cases} x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$

$\Rightarrow 9x'^2 - y'^2 + 6\sqrt{5}x' - 4\sqrt{5}y' + 20 = 0$

Đặt $\begin{cases} X = x' + \dfrac{\sqrt{5}}{3} \\ Y = y' + 2\sqrt{5} \end{cases}$

$\Rightarrow 9X^2 - Y^2 = -5$

Đồ thị



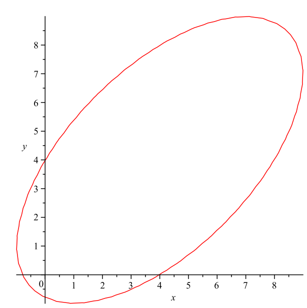
b. Ta có $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}x' - \dfrac{1}{2}y' \\ y = \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{1}{2}y' \end{cases}$

$\Rightarrow 2x'^2 + 8y'^2 - 16x' - 16 = 0$

Đặt $\begin{cases} X = x' - 4 \\ Y = y' \end{cases}$

$\Rightarrow X^2 + 4Y^2 = 24$

Đồ thị



c. Ta có $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}x' + \dfrac{1}{2}y' \\ y = \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{1}{2}y' \end{cases}$

$\Rightarrow x'^2 + 9y'^2 - 18y' = 0$

Đặt $\begin{cases} X = x' \\ Y = y' - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow X^2 + 9Y^2 = 9$

Đồ thị

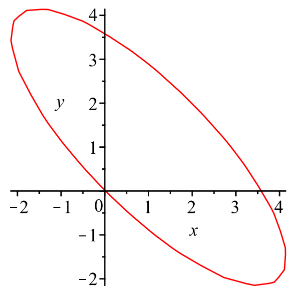
d. Ta có $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{10}}y' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}x' + \dfrac{3}{\sqrt{10}}y' \end{cases}$

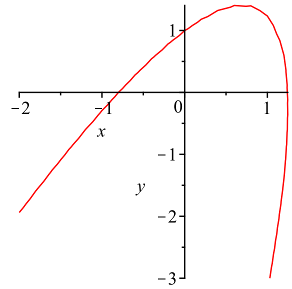
$\Rightarrow 10x'^2 + 2\sqrt{10}x' + 2\sqrt{10}y' - 9 = 0$

Đặt $\begin{cases} X = x' + \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ Y = \sqrt{10}y' - 5 \end{cases}$

$\Rightarrow X^2 = -\dfrac{1}{5}Y$

Đồ thị





Bài tập 7.4.

a - hình 3 b - hình 2 c - hình 7 d - hình 8 e - hình 1

f - hình 9 g - hình 10 h - hình 6 i - hình 5 j - hình 4

Bài tập 7.5.

a. Ellip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục lớn 5, bán trục nhỏ 3, đỉnh $A_1(-5;0), A_2(5;0), B_1(0;-3), B_2(0;3)$, tiêu điểm $F_1(-4;0), F_2(4;0)$.

b. + $z=1$: Ellip có phương trình $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{\frac{15}{2}}=1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục lớn $3\sqrt{5}$, bán trục nhỏ $\sqrt{\frac{15}{2}}$, đỉnh $A_1(-3\sqrt{5};0), A_2(3\sqrt{5};0), B_1(0;-\sqrt{\frac{15}{2}}), B_2(0;\sqrt{\frac{15}{2}})$, tiêu điểm $F_1(-\sqrt{\frac{75}{2}};0), F_2(\sqrt{\frac{75}{2}};0)$.

+$z=2$: Ellip có phương trình $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{3}=1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục lớn $3\sqrt{2}$, bán trục nhỏ $\sqrt{3}$, đỉnh $A_1(-3\sqrt{2};0), A_2(3\sqrt{2};0), B_1(0;-\sqrt{3}), B_2(0;\sqrt{3})$, tiêu điểm $F_1(-\sqrt{15};0), F_2(\sqrt{15};0)$.

c. + $z=0$: Tập rỗng

+ $z=2$: Phương trình $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{6}=0 \Rightarrow O(0;0)$

+ $z=4$ Ellip có phương trình $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{2}=1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục lớn $2\sqrt{3}$, bán trục nhỏ $\sqrt{2}$, đỉnh $A_1(-2\sqrt{3};0), A_2(2\sqrt{3};0), B_1(0;-\sqrt{2}), B_2(0;\sqrt{2})$, tiêu điểm $F_1(-\sqrt{10};0), F_2(\sqrt{10};0)$.

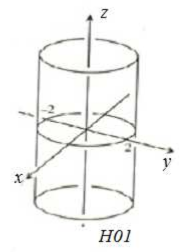
d. + $h<0$: Hyperbol có phương trình $\frac{x^2}{4h}-\frac{y^2}{h}=1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục thực $\sqrt{|h|}$, bán trục ảo $2\sqrt{|h|}$, đỉnh $A_1(0;-\sqrt{|h|}), A_2(0;\sqrt{|h|})$, tiêu điểm $F_1(0;-\sqrt{|5h|})$, $F_2(0;\sqrt{|5h|})$, tiệm cận $y=\pm 2x$

+ $h=0$: Hai đường thẳng cắtt nhau có phương trình là $y=\pm\frac{x}{2}$

$+h > 0$: Hyperbol có phương trình $\frac{x^2}{4h} - \frac{y^2}{h} = 1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục thực $2\sqrt{h}$, bán trục ảo $\sqrt{h}$, đỉnh $A_1(-2\sqrt{h};0)$, $A_2(2\sqrt{h};0)$, tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5h};0)$, $F_2(\sqrt{5h};0)$, tiệm cận $y = \pm\frac{x}{2}$

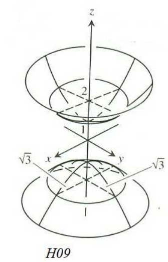
Bài tập 7.6.

a



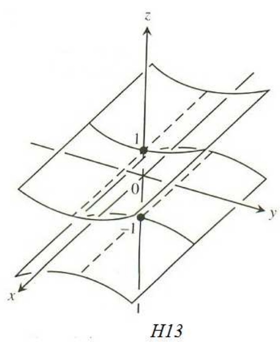
Hình 7.1: Mặt trụ tròn

b



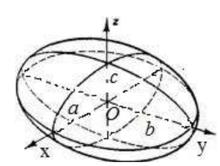
Hình 7.2: Mặt Hypeboloid 2 tầng

c



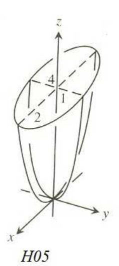
Hình 7.3: Mặt trụ hyperbol

d



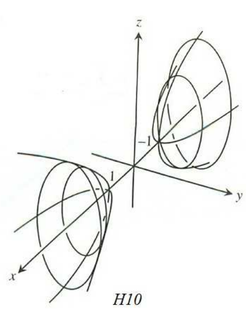
Hình 7.4: Mặt Ellipxoit

e



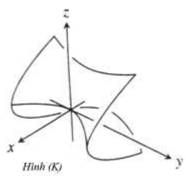
Hình 7.5: Mặt Paraboloit elliptic

f



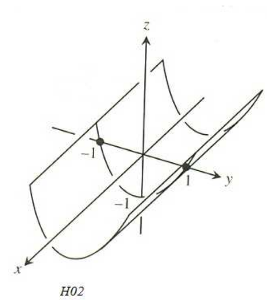
Hình 7.6: Mặt Hyperboloit 2 tầng

g



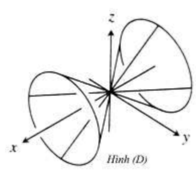
Hình 7.7: Mặt Paraboloit Hyperbolic

h



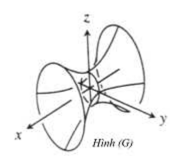
Hình 7.8: Mặt Trụ Parabol

i



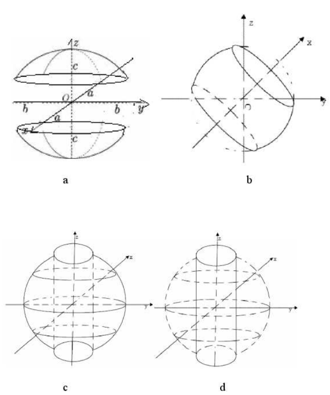
Hình 7.9: Mặt Nón Ellip

j



Hình 7.10: Mặt Hyperboloid 1 tầng

Bài tập 7.7.



Tài liệu tham khảo

[1] Bùi Xuân Hải - Trần Nam Dũng - Trịnh Thanh Đèo - Thái Minh Đường - Trần Ngọc Hội , *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc Gia TPHCM, (2001).

[2] Hồ Hữu Lộc, *Bài tập Đại số tuyến tính*, Đại học Cần Thơ, (2005).

[3] Ngô Thu Lương - Nguyễn Minh Hằng, *Bài tập Toán cao cấp tập 2*, NXB Đại học Quốc Gia TPHCM, (2000).

[4] Nguyễn Viết Đông - Lê Thị Thiên Hương - Nguyễn Anh Tuấn - Lê Anh Vũ, *Bài tập Toán cao cấp tập 2*, NXB Giáo Dục, (2000).

[5] Tống Đình Quỳ - Nguyễn Cảnh Lương, *Giúp ôn tập tốt TOÁN CAO CẤP tập 4*, NXB Đại học Quốc Gia HÀ NỘI, (2000).

[6] *http://tutorial.math.lamar.edu/AllBrowsers/2318*