HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1.1.

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E \to \begin{bmatrix} 1 & -7 & 10 & 2 \\ 0 & 12 & -18 & -3 \\ 0 & 0 & 15 & 5 \end{bmatrix}$$

Bài tập 1.2.

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad B \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & \frac{-10}{11} & \frac{15}{11} & \frac{-5}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & \frac{17}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$D \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{6} \end{bmatrix} \quad F \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài tập 1.3.

$r(A) = 2 \quad r(B) = 2 \quad r(C) = 3 \quad r(D) = 1 \quad r(E) = 3 \quad r(F) = 3 \quad r(G) = 2 \quad r(H) = 3$

Bài tập 1.4.

a.Vì $r(A) = r(A^*) = 3 < n = 4$ nên hệ vô số nghiệm
b. Vì $r(A) = r(A^*) = 2 < n = 5$ nên hệ vô số nghiệm
c.Vì $r(A) = 3 < r(A^*) = 4$ nên hệ vô nghiệm
d. Vì $r(A) = r(A^*) = 4 < n = 5$ nên hệ vô số nghiệm

Bài tập 1.5.

a)

+ Nếu $a = 0$ và b tùy ý thì $r(A) = r(A^*) = 2 < n = 3$ nên hệ vô số nghiệm
+ Nếu $a \neq 0$
  - $b = 0$ thì $r(A) = 2 < r(A^*) = 3$ nên hệ vô nghiệm
  - $b \neq 0$ thì $r(A) = r(A^*) = 3 = n$ nên hệ có nghiệm duy nhất

b)

+ Nếu $c = 0$ và d tùy ý thì $r(A) = r(A^*) = 3 < n = 4$ nên hệ vô số nghiệm
+ Nếu $c \neq 0$
  - $d = 0$ thì $r(A) = 3 < r(A^*) = 4$ nên hệ vô nghiệm
  - $d \neq 0$ thì $r(A) = r(A^*) = 4 = n$ nên hệ có nghiệm duy nhất

Bài tập 1.6.

$$\text{a. } \begin{cases} x_1 = & -1 - x_5 \\ x_2 = & 1 + 3x_5 \\ x_3 \in & \mathbb{R} \\ x_4 = & -4 - 5x_5 \\ x_5 \in & \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} x_1 = & 3 + 5x_3 \\ x_2 = & 6 - 4x_3 + x_4 \\ x_3 \in & \mathbb{R} \\ x_4 \in & \mathbb{R} \\ x_5 = & 0 \end{cases} \quad \text{c. } \begin{cases} x_1 = & 2x_3 \\ x_2 = & -8 - 6x_3 \\ x_3 \in & \mathbb{R} \\ x_4 = & -5 \\ x_5 = & 0 \end{cases} \quad \text{d. } \begin{cases} x_1 = & -3 + 8x_4 \\ x_2 = & -6 - 4x_4 \\ x_3 = & 5 + 7x_4 \\ x_4 \in & \mathbb{R} \end{cases}$$

Bài tập 1.7.

a. Vô nghiệm b. $\begin{cases} x_1 = & \frac{-19}{16} - \frac{9}{8}x_3 \\ x_2 = & \frac{-5}{8} + \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \in & \mathbb{R} \\ x_4 = & \frac{5}{2} \end{cases}$ c. $\begin{cases} x_1 = & 0 \\ x_2 = & 2 + x_3 \\ x_3 \in & \mathbb{R} \\ x_4 = & -2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x_1 = & -2 \\ x_2 = & 2 \\ x_3 = & -3 \\ x_4 = & 3 \end{cases}$

e. Vô nghiệm f. $\begin{cases} x_1 = & -2 \\ x_2 = & 2 \\ x_3 = & -3 \\ x_4 = & 3 \end{cases}$ g. $\begin{cases} x_1 = & 1 \\ x_2 = & 2 \\ x_3 = & 3 \end{cases}$ h. $\begin{cases} x_1 = & 1 \\ x_2 = & 2 \\ x_3 = & -2 \end{cases}$

Bài tập 1.8.

a. $A^* = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 & b \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a & 1-ab+a-b \end{bmatrix}$

+ Nếu $2 - a - a^2 = 0 \Rightarrow a = 1$ hoặc $a = -2$

$\star$ $a = 1$

• $b = 1 \Rightarrow$ Hệ vô số nghiệm

• $b \neq 1 \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm

$\star$ $a = -2 \Rightarrow$ Hệ vô số nghiệm $\forall b$

+ Nếu $2 - a - a^2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq & 1 \\ a \neq & -2 \end{cases} \Rightarrow 1 - a \neq 0 \Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất.

b. $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & a \\ 2 & -1 & 1 & b \\ 3 & 1 & -1 & c \\ 1 & -3 & 5 & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & a \\ 0 & 5 & 3 & 2a-b \\ 0 & 0 & 4 & a+b-c \\ 0 & 0 & 0 & a+5b-3c-d \end{bmatrix}$

+ Nếu $a + 5b - 3c - d = 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất

+ Nếu $a + 5b - 3c - d \neq 0$ thì hệ vô nghiệm

Bài tập 1.9. Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m = -1$

Bài tập 1.10.

a. $\begin{cases} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x_1 & = & 9x_3 \\ x_2 & = & -4x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$ d. $\begin{cases} x_1 & = & -\frac{23}{16}x_4 \\ x_2 & = & -\frac{5}{16}x_4 \\ x_3 & = & \frac{15}{16}x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Bài tập 2.1. Tự giải

Bài tập 2.2. $x = 2, y = 4, z = 1, w = 3$

Bài tập 2.3. $B = \begin{bmatrix} -2d & -2e & -2f \\ d & e & f \end{bmatrix}$ với $d, e, f \in \mathbb{R}$

Bài tập 2.4. a. $d_{11} = -14$ b. $d_{21} = 67$ c. $d_{32} = 6$

Bài tập 2.5. Tự giải

Bài tập 2.6.

a. $Ax = \begin{bmatrix} 26 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$; $Ay = \begin{bmatrix} -38 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$; $Az = \begin{bmatrix} 9 \\ -12 \\ -78 \end{bmatrix}$ b. $A\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & -38 & 9 \\ 5 & -4 & -12 \\ 14 & -4 & -78 \end{bmatrix}$

Bài tập 2.7.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{29}{2} & \frac{-17}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 10 & -4 & -1 \end{bmatrix}; \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 5 & -1 \\ \frac{-9}{2} & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & -20 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & -1 & -2 \\ 5 & 8 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Bài tập 2.8. A khả nghịch khi và chỉ khi $ad-bc \neq 0$ và khi đó $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

Ứng dụng: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài tập 2.9. a. $c_3(A^{-1}) = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$ b. $[c_1(A^{-1}) \quad c_2(A^{-1})] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

c. $h_2(A-1) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = -9$

Bài tập 2.10. a. A khả nghịch $\Leftrightarrow r(A) = 3 \Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -2 \end{cases}$ và

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7 + 2\,m^2 + 10\,m}{2 + m^2 + 3\,m} & \frac{4\,m + 3}{2 + m^2 + 3\,m} & -\frac{3\,m + 1}{2 + m^2 + 3\,m} \\ -\frac{5\,m + 3 + m^2}{2 + m^2 + 3\,m} & \frac{2\,m + 1}{2 + m^2 + 3\,m} & -\frac{m - 1}{2 + m^2 + 3\,m} \\ -\frac{m}{2 + m^2 + 3\,m} & \frac{m}{2 + m^2 + 3\,m} & \frac{2}{2 + m^2 + 3\,m} \end{bmatrix}$$

b. A khả nghịch $\Leftrightarrow r(A)=3 \Leftrightarrow p\neq 1$ và

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{-1}{-1+p} & \dfrac{-p}{-1+p} & \dfrac{p}{-1+p}\\ \dfrac{1}{-1+p} & \dfrac{2\,p-1}{-1+p} & \dfrac{-p}{-1+p}\\ \dfrac{1}{-1+p} & \dfrac{1}{-1+p} & \dfrac{-1}{-1+p}\end{bmatrix}$$

Bài tập 2.11.

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1\\ \dfrac{-1}{2} & \dfrac{3}{2} & 1\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{2} & -1\end{bmatrix}$$

Ta có $x=B^{-1}.d \Rightarrow i)\ x=\begin{bmatrix}2\\ \dfrac{3}{2}\\ \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}, ii)\ x=\begin{bmatrix}6\\ \dfrac{9}{2}\\ \dfrac{3}{2}\end{bmatrix}, iii)\ x=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

Bài tập 2.12. Ta có $Ax=B\Rightarrow x=A^{-1}.B$

a. $A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -7 & 3\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-64\\8\\-18\end{bmatrix}$

b. $A^{-1}=\begin{bmatrix}1/4 & 1/4 & 1/2 & 0\\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 0\\ 1/4 & -1/4 & 0 & 1/2\\ 1/4 & -1/4 & 0 & -1/2\end{bmatrix}\Rightarrow x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1/2\\1/2\end{bmatrix}$

c. $A^{-1}=\begin{bmatrix}1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4\\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4\end{bmatrix}\Rightarrow x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$

Bài tập 2.13.

a. $X=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

b. $X.=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5/2 & -3/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{bmatrix}$

c. $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7/2 & -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

d. $X = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

e. $X. = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -103 & -110 & -117 \\ -100 & -107 & -114 \\ -45 & -48 & -51 \end{bmatrix}$

Bài tập 3.1. Tự giải

Bài tập 3.2. $D_1 = 15$ $\quad D_2 = -30$ $\quad D_3 = 6$ $\quad D_4 = 9$

Bài tập 3.3. a. $\begin{bmatrix} 18 & -12 & -6 \\ -7 & 10 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$; b. $\begin{bmatrix} -57 & 51 & -3 \\ 33 & -30 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$; c. $\begin{bmatrix} 3 & 9 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \\ -3 & -8 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 3.4. Khai triển định thức theo hàng 1, sau đó tách ra thành 2 nhóm theo $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}$ và $a'_{11}, a'_{12}, ..., a'_{1n}$ ta sẽ được kết quả

Bài tập 3.5.

$$\begin{array}{llllll} a. & \det A = 160; & b. & \det B = 156; & c. & \det C = -5; \\ d. & \det D = -2(a^3 + b^3); & e. & \det E = 0; & f. & \det F = 0 \end{array}$$

Bài tập 3.6.

$a.(6 - \lambda)(\lambda^2 + 5\lambda + 7)$; $\quad b. -(\lambda + 3)(\lambda^2 - 6\lambda)$

$c.(2 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)$;

Bài tập 3.7. *Điều kiện để ma trận A khả nghịch là* $\det A \neq 0$

a. $\begin{cases} t \neq -2 \\ t \neq 3 \\ t \neq 4 \end{cases}$; $\quad$ b. $\begin{cases} t \neq -2 \\ t \neq 2 \\ t \neq 4 \end{cases}$; $\quad$ c. $\begin{cases} t \neq -3 \\ t \neq -1 \\ t \neq 4 \end{cases}$

Bài tập 3.8.

a. Thay $c_3 \to c_3 - xc_1 - yc_2$

b. Thay $c_1 \to c_1 + c_2$, tiếp theo $c_1 \to \frac{1}{2}c_1$, tiếp theo $c_2 \to c_2 - c_1$, cuối cùng $c_2 \to \frac{-1}{x}$

c. Thay $h_2 \to h_2 - h_1, h_3 \to h_3 - h_1$, tiếp theo $h_2 \to \dfrac{1}{b-a}h_2, h_3 \to \dfrac{1}{c-a}h_3$, cuối cùng thay $h_3 \to h_3 - h_2$

Bài tập 3.9.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1/3 & 2 & -4/3 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 7/2 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}; \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Bài tập 3.10. a. $x_2 = 2$ b. $x_2 = 2$ c. $x_2 = 0$ d. $x_2 = -3$

Bài tập 3.11. Áp dụng công thức $x_j = \dfrac{D_j}{D}$

a. $D = 8; D_1 = -48; D_2 = -103; D_3 = -11$ b. $D = 21; D_1 = 8; D_2 = 67; D_3 = 56$

c. $D = 7; D_1 = -7; D_2 = 14; D_3 = 0$ d. $D = -73; D_1 = -146; D_2 = -73; D_3 = 73$

Bài tập 3.12.

a. $D = (a+2)(4-a)$; $D_1 = -(a+2)^2$; $D_2 = 3(a+2)$; $D_3 = 0$

- Nếu $\begin{cases} a & \neq & -2 \\ a & \neq & 4 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 & = & \dfrac{-(a+2)}{4-a} \\ x_2 & = & \dfrac{3}{4-a} \\ x_3 & = & 0 \end{cases}$

- Nếu $a = 4$ thì $D = 0$ nhưng $D_1 = -36$. Khi đó, hệ vô nghiệm.

- Nếu $a = -2$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 & = & \dfrac{-1}{3}x_3 \\ x_2 & = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{6}x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$

b. $D = (a-1)(a-3)$; $D_1 = -4(a-3); D_2 = 0$; $D_3 = 2(a-3)$

- Nếu $\begin{cases} a & \neq & 1 \\ a & \neq & 3 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 & = & \dfrac{-4}{a-1} \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & \dfrac{2}{a-1} \end{cases}$

- Nếu $a = 1$ thì $D = 0$ nhưng $D_2 = 8$. Khi đó, hệ vô nghiệm.

- Nếu $a = -3$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 & = & \dfrac{-4}{5} - \dfrac{6}{5}x_3 \\ x_2 & = & \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5}x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$

c. $D = -a^2(a+3); D_1 = -a^2\,(a+3)\,(a^3 + 2\,a^2 - a - 1)\,;$

$D_2 = -a^2(a+3)(2a-1); D_3 = a^2(a+3)(a^2-2)$

• Nếu $\begin{cases} a & \neq & 0 \\ a & \neq & -3 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 & = & a^3 + 2\,a^2 - a - 1 \\ x_2 & = & 2a-1 \\ x_3 & = & 2-a^2 \end{cases}$

• Nếu $a = -3$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$

• Nếu $a = 0$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 & = & -x_2 - x_3 \\ x_2 & \in & \mathbb{R} \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$

d. $D = a(a+2)(a-2); D_1 = a(a+2); D_2 = -a(a+2)(a+3); D_3 = a^2(a+2)$

• Nếu $\begin{cases} a & \neq & 0 \\ a & \neq & \pm 2 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 & = & \dfrac{1)}{a-2} \\ x_2 & = & \dfrac{-(a+3)}{a-2} \\ x_3 & = & \dfrac{a}{a-2} \end{cases}$

• Nếu $a = 2$ thì $D = 0$ nhưng $D_1 = 8$. Khi đó, hệ vô nghiệm.

• Nếu $a = 0$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 & = & -x_2 \\ x_2 & \in & \mathbb{R} \\ x_3 & = & 0 \end{cases}$

• Nếu $a = -2$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 & = & 1 - \dfrac{3}{2}x_3 \\ x_2 & = & 1 + \dfrac{1}{2}x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$

Bài tập 3.13. a. $(x_1; x_2; x_3) = (1; 2; 3)$ b. $\lambda \neq \dfrac{-4}{5}$

Bài tập 3.14. 1. $(x_1; x_2; x_3; x_4) = (-2; 0; 1; -1)$ 2. $D = 6a + 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \dfrac{-1}{3}$

Bài tập 3.15.

a. $D \neq 0 \Longleftrightarrow 3 - m \neq 0 \Longleftrightarrow m \neq 3$

b. Khi $m = 3$ hệ có thể vô nghiệm hoặc vô số nghiệm. Do đó, ta cần thử lại

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & 4 \end{array}\right] \to .... \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Hệ vô số nghiệm.

Vậy không tìm được m để hệ vô nghiệm

Bài tập 3.16. 1. $(x_1; x_2; x_3; x_4) = (-2; 0; 1; -1)$ 2. $D = a^2 + 2a + 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$

Bài tập 3.17. $D = (k+3)(2-k)$

a. $k \neq 2 \wedge k \neq -3$ b. $k = -3$ c. $k = 2$.

Bài tập 3.18. $D = (k+2)(k-1)^2$

a. $k \neq -2 \wedge k \neq 1$ b. $k = -2$ c. $k = 1$.

Bài tập 3.19. a. $X = \begin{bmatrix} \frac{-11}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ b. $\lambda = 1$

Bài tập 4.1.

a. Không, sai ở tiên đề 5 b. Không, sai ở tiên đề 8

c. Không, sai ở tiên đề 8 d. Không, sai ở tiên đề 8 e. Phải

Bài tập 4.2. a. Phải b. Phải c. Không d. Phải e. Phải

Bài tập 4.3.

a. $\mathbf{W} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b\} \subset \mathbb{R}^3$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Thật vậy,

+ Ta có $\theta = (0, 0, 0) \in \mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{W} \neq \emptyset$.

+ Mặt khác, $\forall u(a_1, b_1, c_1), v(a_2, b_2, c_2) \in \mathbf{W}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có $\begin{cases} a_1 &= 2b_1 \\ a_2 &= 2b_2 \end{cases}$

Có $\alpha u + \beta v = (\alpha a_1 + \beta a_2, \alpha b_1 + \beta b_2, \alpha c_1 + \beta c_2)$

Mà $\alpha a_1 + \beta a_2 = \alpha 2b_1 + \beta 2b_2 = 2(\alpha b_1 + \beta b_2)$ nên suy ra $\alpha u + \beta v \in \mathbf{W}$

b. Không, vì khi chọn $\alpha < 0$ và $u = (a; b; c) \in \mathbf{W}$ thì $\alpha u \notin \mathbf{W}$

c. Không, vì $\mathbf{W}$ không khép kín đối với phép cộng.

d. Không, vì $\mathbf{W}$ không khép kín đối với phép cộng.

e. Phải, tự chứng minh

f. Không, vì $(0, 0, 0, 0) \notin \mathbf{W}$

g. Phải, tự chứng minh

Bài tập 4.4.

a. Không, vì $\mathbf{W}$ không khép kín đối với phép cộng.

b. Phải, tự chứng minh

Bài tập 4.5.

a. $Sp\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}\right\}$; b. $Sp\left\{\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix},\right\}$; c. $Sp\{(1;2;1),(0;1;-1)\}$; d. $Sp\{1,x^2\}$

Bài tập 4.6.

a. Không phải vì $\theta = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \notin W$ b. Không phải vì $\theta = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \notin W$

c. $W = Sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ d. $W = Sp\left\{\begin{bmatrix}4\\0\\1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

Bài tập 4.7. Ta có:

$+\theta \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$.

$+\forall f_1, f_2 \in E \Rightarrow \begin{cases} f_1(a) & = f_1(b)\\ f_2(a) & = f_2(b)\end{cases}$

Khi đó:

$$f_1(a) + f_2(a) = f_1(b) + f_2(b) \Rightarrow (f_1 + f_2)(a) = (f_1 + f_2)(b)$$

$\Rightarrow f_1 + f_2 \in E$.

$+\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in E \Rightarrow f(a) = f(b)$, ta có:

$$(\alpha f)(a) = \alpha f(a) = \alpha f(b) = (\alpha f)(b) \Rightarrow \alpha f \in E$$

Vậy E là một không gian con.

Bài tập 4.8.

a. $E = Sp\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$

b. Không phải là không gian con của $\mathbb{M}(2,2)$ vì nó không khép kín đối với cả 2 phép toán

c. Không phải là không gian con của $\mathbb{M}(2,2)$ vì $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \notin \mathbb{M}(2,2)$

d. $E = Sp\left\{\begin{bmatrix}-2 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$

Bài tập 4.9. H là không gian con của $\mathbb{M}(2,4)$.

Thật vậy:

$+\ \theta = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \in H$ vì $F\theta = 0$ nên $H \neq \emptyset$

$+ \ \forall A, B \in H \Rightarrow \begin{cases} FA & = 0 \\ FB & = 0 \end{cases} ; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có
$F(\alpha A + \beta B) = \alpha FA + \beta FB = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha A + \beta B \in H$

Bài tập 4.10. Giả sử $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, nếu $\exists \alpha_i$ thì $v \in Sp\{v_i\}$, ngược lại $\nexists \alpha_i$ thì $v \notin Sp\{v_i\}$

a. $v \in Sp\{v_1, v_2, v_3\}$ b. $v \notin Sp\{v_1, v_2, v_3\}$ c. $v \in Sp\{v_1, v_2\}$ d. $v \notin Sp\{v_1, v_2\}$

Bài tập 4.11. $w \in ColA$ vì hệ $Ax = w$ có nghiệm $w \notin NulA$ vì $Aw \neq \theta$

Bài tập 4.12.

a. $\mathbf{W}$ không phải là không gian con của không gian vectơ $[\mathbb{R}]^3$ vì $\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathbf{W}$.

b. $\mathbf{W} = NulA$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

c. $\mathbf{W}$ không phải là không gian con của không gian vectơ $[\mathbb{R}]^4$ vì $\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathbf{W}$.

d. $\mathbf{W} = NulA$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

e. $\mathbf{W} = NulA$ với $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

Bài tập 4.13. a. $\mathbf{W} = ColA$ với $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\mathbf{W} = ColA$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 4.14.

a. $\forall v_1, v_2 \in H \cap K, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} v_1, v_2 & \in H \\ v_1, v_2 & \in K \end{cases}$

Vì H và K là hai không gian con $\Rightarrow \begin{cases} \alpha v_1 + \beta v_2 & \in H \\ \alpha v_1 + \beta v_2 & \in K \end{cases} \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in H \cap K$

$\Rightarrow H \cap K$ là không gian con.

b. Ví dụ: Hai đường thẳng $(d_1): x_1 + x_2 = 0$ và $(d_2): x_1 - x_2 = 0$ là hai không gian con của $\mathbb{R}^2$ nhưng hợp của hai đường thẳng này không phải là không gian con của $\mathbb{R}^2$.

Thật vậy:

Lấy $u = (1;-1) \in d_1; v = (1;1) \in d_2$ thì $u + v = (1;-1) + (1;1) = (2;0) \notin d_1$ và $\notin d_2$

Bài tập 4.15.

a. phụ thuộc tuyến tính	b. độc lập tuyến tính	c. độc lập tuyến tính
d. độc lập tuyến tính	e. phụ thuộc tuyến tính	f. độc lập tuyến tính
g. phụ thuộc tuyến tính	h. độc lập tuyến tính	i. phụ thuộc tuyến tính

Bài tập 4.16.

a. $\{v_1 = (1;0;0), v_2 = (0;1;-1), v_3 = (0;4;-3)\}$

b. $\{p_0 = 2, p_1 = -4x, p_2 = x^2 + x + 1\}$

Bài tập 4.17.

a. Ta biết cơ sở của $\mathbb{R}^4$ gồm 4 vectơ độc lập tuyến tính. Ta có $\{v_1, v_2, v_3\}$ là 3 vectơ độc lập tuyến tính nên ta chỉ cần chọn thêm vectơ v_4 sao cho v_4 không là tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2, v_3. Ta chọn $v_4 = (1;1;1;1)$. Khi đó cơ sở của $\mathbb{R}^4$ là $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

b. Ta biết cơ sở của $\mathbb{M}(2,2)$ gồm 4 vectơ độc lập tuyến tính. Ta có $\{v_1, v_2\}$ là 2 vectơ độc lập tuyến tính nên ta chỉ cần chọn thêm vectơ v_3, v_4 sao cho v_3, v_4 sao cho $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ độc lập tuyến tính. Ta chọn $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Khi đó cơ sở của $\mathbb{R}^4$ là $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Bài tập 4.18.

a. $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix} \to ... \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

+ Cơ sở của $ColA$ là $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$ và $NulA$ là $\left\{ \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

+ Cơ sở của $RowA$ là $\{(1;0;6;5), (0;2;5;3)\}$

$\dim ColA = \dim RowA = 2$ và $\dim NulA = 2$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 11 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 15 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 19 & -2 \end{bmatrix} \to ... \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-7}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

+ Cơ sở của $ColA$ là $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$ và $NulA$ là $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

+ Cơ sở của $RowA$ là $\{(1;2;0;4;0), (0;0;5;-7;0), (0;0;0;0;1)\}$

$\dim ColA = \dim RowA = 3$ và $\dim NulA = 2$

Bài tập 4.19.

a. Lập ma trận cột

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cột chốt là cột 1, 2, 4.

Cơ sở của $Sp(S)$ là $\{(1;1;1;2;3), (1:2;-1;-2;1), (1;2;1;-1;4)\}$ và $\dim Sp(S) = 3$

b. Cơ sở của $Sp(S)$ là S và $\dim Sp(S) = 4$

c. Cơ sở của $Sp(S)$ là $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \right\}$ và $\dim Sp(S) = 3$

d. Cơ sở của $Sp(S)$ là $S' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ và $\dim Sp(S) = 3$

e. Vậy cơ sở của $Sp(S)$ là S và $\dim Sp(S) = 3$

Bài tập 4.20. a. $u \in Sp(S)$ b. S là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Bài tập 4.21. a. $p(x) = 4 + x - 3x^2 \in Sp(S)$ b. S không phải là tập sinh của $P_2[x]$

Bài tập 4.22.

a. Cơ sở của P là $\{(1;-3;0), (0;-5;1)\}$

b. Cơ sở của mặt phẳng là $\{(1;1;0), (-8;0;1)\}$..

Bài tập 4.23.
a. $\dim W = 3$ b. $\dim W = 2$ c. $\dim W = 0$ d. $\dim W = 2$ e. $\dim W = 2$ f. $\dim W = 3$

Bài tập 4.24. Giả sử E là các không gian con của $\mathbb{M}(3,3)$ cần tìm số chiều
a. $\dim E = 3$ b. $\dim E = 6$ c. $\dim E = 6$

Bài tập 4.25. a. $\dim U = 4$ b. $\dim U = 2$

Bài tập 4.26.

a. + Ta có $U = Sp\{(1;0;0;0),(0;2;1;0);(0;-1;0;1)\}$ nên U là không gian con của $\mathbb{R}^4$
+ Ta có $W = Sp\{(1;0;0;1),(0;2;1;0)\}$ nên W là không gian con của $\mathbb{R}^4$

b. + Cơ sở của U là $(1;0;0;0),(0;2;1;0),(0;-1;0;1)$ và $\dim U = 3$
+ Cơ sở của W là $(1;0;0;1),(0;2;1;0)$ và $\dim W = 2$
+ Cơ sở của $U \cap W$
Ta có $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Vậy cơ sở của $U \cap W$ là $\{(0;2;1;0)\}$

Bài tập 4.27.

a. Đặt $P = \{(x_1;x_2;x_3) : x_1+3x_2+4x_3 = 0\} \Rightarrow$ Cơ sở của P là $S = \{(-3;1;0);(-4;0;1)\}$
+ Chọn $(1;0;0) \in \mathbb{R}^3$ nhưng $\notin P$. Khi đó, $\{(-3;1;0);(-4;0;1),(1;0;0)\}$ sẽ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

b. Đặt $P = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) : x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}$
$\Rightarrow$ Cơ sở của P là $S = \{(-1;1;0;0);(-2;0;1;0),(-1;0;0;1)\}$
+ Chọn $(1;0;0;0) \in \mathbb{R}^4$ nhưng $\notin P$. Khi đó, $\{(-1;1;0;0);(-2;0;1;0),(-1;0;0;1),(1;0;0;0)\}$ sẽ là cơ sở của $\mathbb{R}^4$

Bài tập 4.28.

a. $\mathbb{E} = Sp\{(x^2-4)(x^2+1);(x^2-4)x\}$ nên $\mathbb{E}$ là không gian con của $\mathbb{P}_4[x]$.

b. Tìm $\dim \mathbb{E} = 2$

Bài tập 4.29.

a. $\mathbb{E}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} (0;0;0) & \in \quad \mathbb{E} \\ \forall u,v \in \mathbb{E} & \Rightarrow \quad u+v \in \mathbb{E} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{E} & \Rightarrow \quad \alpha u \in \mathbb{E} \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$

b. Tìm $\dim \mathbb{E} = 2$

Bài tập 4.30.

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0 = 0 \right\} \\ &= Sp\{(1;0;1), (0;1;0)\}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$
Cơ sở của $\mathbb{E}$ là $\{(1;0;1),(0;1;0)\}$ và $\dim \mathbb{E} = 2$

Bài tập 4.31. a. $\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$; b. $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$; c. $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$; d. $\begin{bmatrix} \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{a-b}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$; e. $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 4.32. a. $x = (-1; -5; 9)$ b. $x = (0; 1; -5)$ c.$p(x) = 2 + 6x + 2x^2$

Bài tập 4.33.

a. Vì $\dim \mathbb{P}_2[x] = 3$ nên để $\{p_1, p_2, p_3\}$ trở thành cơ sở của $\mathbb{P}_2[x]$ ta chỉ cần điều kiện để $\{p_1, p_2.p_3\}$ độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (1)

Ta có $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -m \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & -2+2\,m \end{bmatrix}$

(1) xảy ra $\Leftrightarrow r(A) = 3 \Leftrightarrow -2 + 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

b. $p(x) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$

$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow p(x) = -p_1 + 3p_2 + p_3$

Bài tập 4.34.

1. $E = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

2. Cơ sở của E là $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$ và $\dim E = 2$

Bài tập 4.35.

a. Vì $\dim \mathbb{P}_3[x] = 4$ mà $\mathscr{B}$ có 4 véc tơ nên ta chỉ cần chứng minh $\mathscr{B}$ độc lập tuyến tính hoặc $\mathscr{B}$ là tập sinh

Ta chứng minh $\mathscr{B} = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$ là tập sinh của $\mathbb{P}_3[x]$.

Lấy $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{P}_3[x]$, giả sử có

$\alpha_1.1 + \alpha_2(1-x) + \alpha_3(1-x)^2 + \alpha_4(1-x)^3 = a + bx + cx^2 + dx^3$

$\Leftrightarrow (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)+(-\alpha_2-2\alpha_3-3\alpha_4)x+(\alpha_3+3\alpha_4)x^2-\alpha_4x^3 = a+bx+cx^2+dx^3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = a \\ -\alpha_2 - 2\alpha_3 - 3\alpha_4 = b \\ \alpha_3 + 3\alpha_4 = c \\ -\alpha_4 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a+b+c+d \\ \alpha_2 = -b-2c-3d \\ \alpha_3 = c+3d \\ \alpha_4 = -d \end{cases}$$

$\Rightarrow a+bx+cx^2+dx^3 = (a+b+c+d).1+(-b-2c-3d)(1-x)+(c+3d)(1-x)^2-d(1-x)^3$

$\Rightarrow \mathscr{B} = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$ là tập sinh của $\mathbb{P}_3[x]$.

Vậy $\mathscr{B} = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$ là cơ sở của $\mathbb{P}_3[x]$.

b. Áp dụng kết quả câu a ta suy ra $(u)_{\mathscr{B}} = (-4; 11; -7; 2)$

Bài tập 4.36. 1. Tự chứng minh 2. Tương tự bài 4.38

Bài tập 4.37.

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow [x]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bài tập 4.38. a. $P_{\mathscr{E},\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ b. $P_{\mathscr{B},\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Bài tập 4.39. a. $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.1.

a. f là ánh xạ tuyến tính. Tự chứng minh

b. f không là ánh xạ tuyến tính. Tự giải thích

c. f là ánh xạ tuyến tính. Tự chứng minh

d. f là ánh xạ tuyến tính. Tự chứng minh

e. f không là ánh xạ tuyến tính. Tự giải thích

f. f là ánh xạ tuyến tính. Tự chứng minh

g. f là ánh xạ tuyến tính. Tự chứng minh

h. f không là ánh xạ tuyến tính. Tự giải thích

Bài tập 5.2.

a. Tự chứng minh, $Kerf = \{0\}$ và $Imf = Sp\{x^2, x^2+x, 2\}$

b. Tự chứng minh, $Kerf = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -2a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}\right\}$ và $Imf = Sp\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

c. Tự chứng minh, $Kerf = \{p(x) \in \mathbb{P}_n[x] | \dfrac{a_n}{n+1} + \cdots + \dfrac{a_2}{3} + \dfrac{a_1}{2} + a_0 = 0\}$ và $Imf = \mathbb{R}$

d. Tự chứng minh, $Kerf = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R}\right\}$ và $Imf = Sp\left\{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}$

e. Tự chứng minh, $KerT = \{0\}$ và $Imf = \mathbb{F}$

Bài tập 5.3.

a. Tự chứng minh

b. Giả sử:

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{2} & y \\ b-y & \dfrac{c}{2} \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R}$$

c. Tự chứng minh

d. $KerT = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R}\right\}$

Bài tập 5.4. $f(p) = \begin{bmatrix} a & - & b & + & c \\ a & + & b & + & c \end{bmatrix}$

Bài tập 5.5. a. Tự chứng minh b. Cơ sở của $Kerf$ là $\{(3; -1; 1)\}$ và $\dim Kerf = 1$

Bài tập 5.6.

a. Cơ sở của $KerT$ là $\{(1; -2; 1; 0)^T, (-7; 3; 0; 1)^T\}$ và $\dim KerT = 2$

b. Cơ sở của ImT là $\{(1; 1; 3)^T, (2; 3; 8)^T\}$ và $\dim ImT = 2$.

Bài tập 5.7.

a. Cơ sở của $KerT$ là $\{(1; 2; -1)\}$ và $\dim KerT = 1$

b. Cơ sở của ImT là $\{(1; 3; -2), (2; 5; -1)\}$ và $\dim ImT = 2$

Bài tập 5.8.

a. Tự chứng minh, $Kerf = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

b. Tự chứng minh, $Kerf = \{A \in \mathbb{M}(3,3) | a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}$

c. Tự chứng minh,$Kerf = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Bài tập 5.9. Tự chứng minh

Bài tập 5.10. a. $\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Bài tập 5.11. a. $(24; -26)$ b. $(-19; 4)$ c. $(-15; -5)$ d. $(802; -477; 398; 57)$

Bài tập 5.12. a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.13. a. $A = \begin{bmatrix} 2t & -4t \\ 1t & 2t \end{bmatrix}$ với $t \in \mathbb{R}$ b. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3t & 3t \\ 5t & 5t \end{bmatrix}$ với $t \in \mathbb{R}$

Bài tập 5.14.

a. Tự chứng minh. Cơ sở của $f(\mathbb{E})$ là $\{(-1; 3; 2), (-1; 1; 1)\}, \dim f(\mathbb{E}) = 2$

b. Tự chứng minh. Cơ sở của $f(\mathbb{E})$ là $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \dim f(\mathbb{E}) = 1$

c. Tự chứng minh. Cơ sở của $f(\mathbb{E})$ là $\{2x + 1, x^2 + x + 2\}, \dim f(\mathbb{E}) = 2$

Bài tập 5.15.

a. f không phải là đơn ánh, nhưng f là toàn ánh.

b. f là song ánh

c. f không phải là đơn ánh, cũng không phải là toàn ánh.

d. f là đơn ánh, nhưng f không phải là toàn ánh.

e. f không phải là đơn ánh, nhưng f là toàn ánh.

Bài tập 5.16.

a. Cơ sở của $Kerf$ là $\{(-1; 1; 0)\}$ và cơ sở của Imf là $\{(1; 0), (0; 1)\}$

b. $Kerf = \{(0; 0; 0)\}$ nên $Kerf$ không có cơ sở và cơ sở của Imf là $\{(0; 1; 1), (1; 0; 1), (1; 1; 0\}$

c. Cơ sở của $Kerf$ là $\left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ và cơ sở của Imf là $\{1\}$

d. $Kerf = \{0\}$ nên $Kerf$ không có cơ sở và cơ sở của Imf là $\{x, x^2\}$

e. Cơ sở của $Kerf$ là $\{(1;0;0),(0;0;1\}$ và cơ sở của Imf là $\{(1;1;1)\}$

Bài tập 5.17.

a. $B = \{p_1 = 1 + 2x, p_2 = 3 - x, p_3 = -1 + 3x^2\}$
Gọi $\mathscr{E} = \{1, x, x^2\}$ là cơ sở chính tắc của $P_2[x]$.
Ta xét ánh xạ tọa độ: $f : \mathbb{P}_2[x] \to [\mathbb{R}]^3$ được xác định như sau $p_i \mapsto [p_i]_{\mathscr{E}}$
Để xét tính độc lập tuyến tính của $\{p_1, p_2, p_3\}$ ta sẽ xét tính độc lập của $\{[p_1]_{\mathscr{E}}, [p_2]_{\mathscr{E}}, [p_3]_{\mathscr{E}}\}$
Ta có

$$[p_1]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, [p_2]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, [p_3]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Lập ma trận có các cột là các vectơ $\mathscr{E}$-tọa độ của p_1, p_2, p_3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ta có $r(A) = 3$ nên ta suy ra $\{[p_1]_{\mathscr{E}}, [p_2]_{\mathscr{E}}, [p_3]_{\mathscr{E}}\}$ độc lập tuyến tính.
Vậy B độc lập tuyến tính.

b. Tương tự, B độc lập tuyến tính.

c. Tương tự, B độc lập tuyến tính.

d. Tương tự, B phụ thuộc tuyến tính.

Bài tập 5.18.

a. Cơ sở của $Kerf$ là $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ và $r(f) = r(A) = 2$

b. Cơ sở của $Kerf$ là $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ và $r(f) = r(A) = 3$

c. Cơ sở của $Kerf$ là $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ và $r(f) = r(A) = 4$

Bài tập 5.19.

a. T không phải là đơn cấu và toàn cấu b. T là đẳng cấu

c. T là toàn cấu, không phải là đơn cấu d. T là đẳng cấu

Bài tập 5.20.

a. $\dim KerD = 1$ và $r(D) = n$ b. $\dim KerD = 1$ và $r(D) = n$ c. $\dim Kerf = 3$ và $r(f) = 3$

d. $\dim KerT = 8$ và $r(T) = 1$ e. $\dim KerS = 3$ và $r(S) = 6$

Bài tập 5.21. $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.22. $[f]_{\mathscr{E},\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.23. a. Tự tìm b. Tự chứng minh c. $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.24.

a. $m = 0$ và $Kerf = \{(0; y; -y), y \in \mathbb{R}\}$ và $\dim Kerf = 1$ b. $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.25.

a. Tự chứng minh b. $a = -3$

c. + Nếu $a \neq -3$ thì f là đơn cấu nên $Kerf = \{(0; 0; 0)\}$ và $\dim Kerf = 0$

+ Nếu $a = -3$ thì $Kerf = \{(a; a; a), a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim Kerf = 1$

Bài tập 5.26.

1. Tự chứng minh 2. $Kerf = \{ax^2 - ax, a \in \mathbb{R}\}$ 3. $[f]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 5.27.

1. Tự chứng minh 2. $Kerf = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$ 3. $[f]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 6.1.

a. Tập các véc tơ riêng của A ứng với $\lambda = 1$ (kép) là $\left\{ \begin{bmatrix} s \\ 2s+2t \\ t \end{bmatrix}, s^2+t^2 \neq 0 \right\}$ và $\lambda = 3$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ -t \\ -2t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

b. Tập các véc tơ riêng của A ứng với $\lambda = 1$ (kép) là $\left\{ \begin{bmatrix} -s+t \\ t \\ s \end{bmatrix}, s^2+t^2 \neq 0 \right\}$ và $\lambda = 2$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

c. Tập các véc tơ riêng của A ứng với $\lambda = 2$ (kép) là $\left\{ \begin{bmatrix} s \\ t \\ 2s+2t \end{bmatrix}, s^2+t^2 \neq 0 \right\}$ và $\lambda = 1$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ -3t \\ -3t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

d. Tập các véc tơ riêng của A ứng với $\lambda = -1$ (bội 3) là $\left\{ \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

e. Tập các véc tơ riêng của A ứng với $\lambda = 2$ (kép) là $\left\{ \begin{bmatrix} s \\ t \\ -3s+3t \end{bmatrix}, s^2+t^2 \neq 0 \right\}$ và $\lambda = 1$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

Bài tập 6.2. a,d không chéo hóa được b,c chéo hóa được

Bài tập 6.3.

a. $\begin{cases} \lambda_1 & = 1 \\ \lambda_2 & = 5 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_2 & = 1 \\ \lambda_3 & = -3 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{cases} \lambda_1 & = 2 \\ \lambda_2 & = 3 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{cases} \lambda_1 & = -1 \\ \lambda_2 & = 2 \\ \lambda_3 & = 3 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e. $\begin{cases} \lambda_1 & = 1 \\ \lambda_2 & = 3 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

f. $\begin{cases} \lambda_1 & = 2 \\ \lambda_2 & = -1 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Bài tập 6.4.

a. Tập các véc tơ riêng của f ứng với $\lambda_1 = 1$ là $\{(s-t, s, t), s^2+t^2 \neq 0\}$ và $\lambda_2 = 3$ là $\{(t;t;0), t \neq 0\}$

b. Tập các véc tơ riêng của f ứng với $\lambda_1 = 1$ là $\left\{ \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, s \neq 0 \right\}$ và $\lambda_2 = 3$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ -2t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

c. Tập các véc tơ riêng của f ứng với $\lambda_1 = 2$ là $\{ax^2+bx+a, a^2+b^2 \neq 0\}$ và $\lambda_2 = 1$ là $\{ax^2 - ax + 2a, a \neq 0\}$

Bài tập 6.5. $\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 32 \\ -72 \end{bmatrix} \right\}$

Bài tập 6.6. $\mathscr{B} = \{(1;-1;0), (-3;0;2); (1;1;-1)\}$

Bài tập 6.7.

1. Tự chứng minh 2. $KerT = \{0\} \Rightarrow r(T) = 3$ 3. Tự chứng minh

4. $[T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ 5. $\mathscr{C} = \{x^2 + 3x, x + 1, x^2 - 4\}$

Bài tập 6.8.

1. Tự chứng minh 2. $KerT = \{0\} \Rightarrow r(T) = 3$ 3. Tự chứng minh

4. $[T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ 5. $\left[\begin{array}{ll} \mathscr{C} & = \{-x^2 + x + 3, -x^2 + 1, 3x^2 + x\} \\ \mathscr{C} & = \{x^2 - x - 3, x + 3, x^2 + 2x + 5\} \end{array} \right.$

Bài tập 6.9. Ta có $A^k = PD^kP^{-1}$ với P là ma trận chéo hóa được A và D là dạng chéo của A

a.

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \\ -1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3/4 + 1/4\,.5^k & -1/2 + 1/2\,.5^k & 1/4 - 1/4\,.5^k \\ -1/4 + 1/4\,.5^k & 1/2 + 1/2\,.5^k & 1/4 - 1/4\,.5^k \\ 1/4 - 1/4\,.5^k & 1/2 - 1/2\,.5^k & 3/4 + 1/4\,.5^k \end{bmatrix}$$

b.

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k \\ -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & 2/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k \\ -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & 2/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k \end{bmatrix}$$

c.

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3\,.3^k - 2 & 2\,.3^k - 2 & 8\,.3^k - 8 \\ -1 + 3^k & -1 + 2\,.3^k & -4 + 4\,.3^k \\ -3^k + 1 & -3^k + 1 & -3\,.3^k + 4 \end{bmatrix}$$

Bài tập 7.1.

a. $5x'^2 + 2y'^2 - 2 = 0$ b. $4x'^2 - 1 = 0$ c. $4x'^2 - 8\sqrt{3}x' + 8y' = 0$

d. $y'^2 = 1$ e. $2\sqrt{2}x'^2 - y' = 0$.

Bài tập 7.2.

a. Dạng Ellip b. Dạng Ellip c.Dạng Hyperbol

d. Dạng Parabol e. Dạng Ellip f. Dạng Hyperbol

Bài tập 7.3.

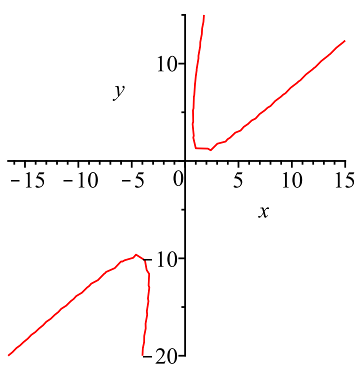
a. Ta có $\begin{cases} x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$

$\Rightarrow 9x'^2 - y'^2 + 6\sqrt{5}x' - 4\sqrt{5}y' + 20 = 0$

Đặt $\begin{cases} X = x' + \dfrac{\sqrt{5}}{3} \\ Y = y' + 2\sqrt{5} \end{cases}$

$\Rightarrow 9X^2 - Y^2 = -5$

Đồ thị



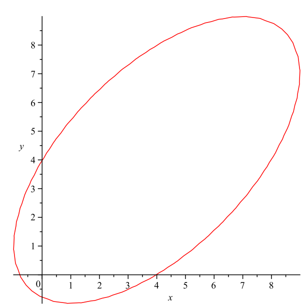
b. Ta có $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}x' - \dfrac{1}{2}y' \\ y = \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{1}{2}y' \end{cases}$

$\Rightarrow 2x'^2 + 8y'^2 - 16x' - 16 = 0$

Đặt $\begin{cases} X = x' - 4 \\ Y = y' \end{cases}$

$\Rightarrow X^2 + 4Y^2 = 24$

Đồ thị



c. Ta có $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}x' + \dfrac{1}{2}y' \\ y = \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{1}{2}y' \end{cases}$

$\Rightarrow x'^2 + 9y'^2 - 18y' = 0$

Đặt $\begin{cases} X = x' \\ Y = y' - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow X^2 + 9Y^2 = 9$

Đồ thị

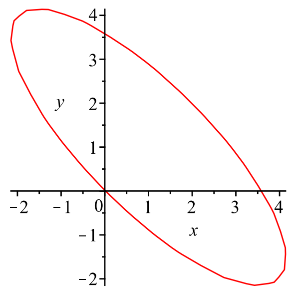
d. Ta có $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{10}}y' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}x' + \dfrac{3}{\sqrt{10}}y' \end{cases}$

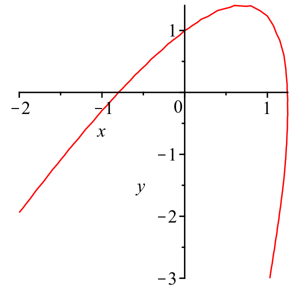
$\Rightarrow 10x'^2 + 2\sqrt{10}x' + 2\sqrt{10}y' - 9 = 0$

Đặt $\begin{cases} X = x' + \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ Y = \sqrt{10}y' - 5 \end{cases}$

$\Rightarrow X^2 = -\dfrac{1}{5}Y$

Đồ thị





Bài tập 7.4.

a - hình 3 b - hình 2 c - hình 7 d - hình 8 e - hình 1
f - hình 9 g - hình 10 h - hình 6 i - hình 5 j - hình 4

Bài tập 7.5.

a. Ellip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục lớn 5, bán trục nhỏ 3, đỉnh $A_1(-5;0), A_2(5;0), B_1(0;-3), B_2(0;3)$, tiêu điểm $F_1(-4;0), F_2(4;0)$.

b. $+\ z=1$: Ellip có phương trình $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{\frac{15}{2}}=1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục lớn $3\sqrt{5}$, bán trục nhỏ $\sqrt{\frac{15}{2}}$, đỉnh $A_1(-3\sqrt{5};0), A_2(3\sqrt{5};0), B_1(0;-\sqrt{\frac{15}{2}}), B_2(0;\sqrt{\frac{15}{2}})$, tiêu điểm $F_1(-\sqrt{\frac{75}{2}};0), F_2(\sqrt{\frac{75}{2}};0)$.

$+z=2$: Ellip có phương trình $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{3}=1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục lớn $3\sqrt{2}$, bán trục nhỏ $\sqrt{3}$, đỉnh $A_1(-3\sqrt{2};0), A_2(3\sqrt{2};0), B_1(0;-\sqrt{3}), B_2(0;\sqrt{3})$, tiêu điểm $F_1(-\sqrt{15};0), F_2(\sqrt{15};0)$.

c. $+\ z=0$: Tập rỗng

$+\ z=2$: Phương trình $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{6}=0 \Rightarrow O(0;0)$

$+\ z=4$ Ellip có phương trình $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{2}=1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục lớn $2\sqrt{3}$, bán trục nhỏ $\sqrt{2}$, đỉnh $A_1(-2\sqrt{3};0), A_2(2\sqrt{3};0), B_1(0;-\sqrt{2}), B_2(0;\sqrt{2})$, tiêu điểm $F_1(-\sqrt{10};0), F_2(\sqrt{10};0)$.

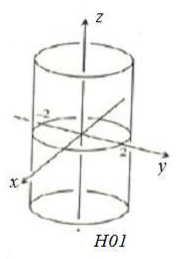
d. $+\ h<0$: Hyperbol có phương trình $\frac{x^2}{4h}-\frac{y^2}{h}=1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục thực $\sqrt{|h|}$, bán trục ảo $2\sqrt{|h|}$, đỉnh $A_1(0;-\sqrt{|h|}), A_2(0;\sqrt{|h|})$, tiêu điểm $F_1(0;-\sqrt{|5h|})$, $F_2(0;\sqrt{|5h|})$, tiệm cận $y=\pm 2x$

$+\ h=0$: Hai đường thẳng cắtt nhau có phương trình là $y=\pm\frac{x}{2}$

$+h > 0$: Hyperbol có phương trình $\frac{x^2}{4h} - \frac{y^2}{h} = 1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục thực $2\sqrt{h}$, bán trục ảo $\sqrt{h}$, đỉnh $A_1(-2\sqrt{h};0)$, $A_2(2\sqrt{h};0)$, tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5h};0)$, $F_2(\sqrt{5h};0)$, tiệm cận $y = \pm\frac{x}{2}$

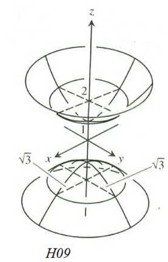
Bài tập 7.6.

a



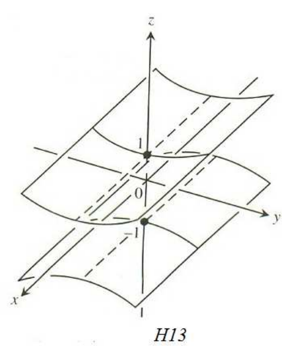
Hình 7.1: Mặt trụ tròn

b



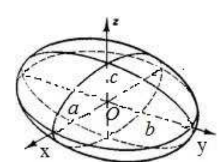
Hình 7.2: Mặt Hypeboloid 2 tầng

c



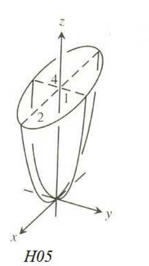
Hình 7.3: Mặt trụ hyperbol

d



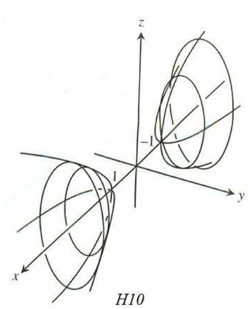
Hình 7.4: Mặt Ellipxoit

e



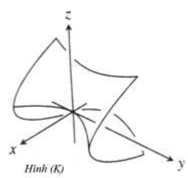
Hình 7.5: Mặt Paraboloit elliptic

f



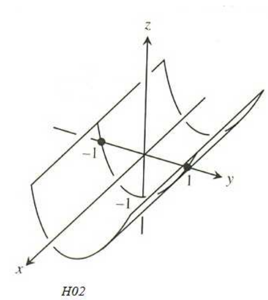
Hình 7.6: Mặt Hyperboloit 2 tầng

g



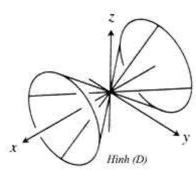
Hình 7.7: Mặt Paraboloit Hyperbolic

h



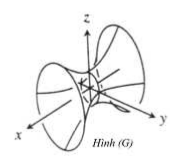
Hình 7.8: Mặt Trụ Parabol

i



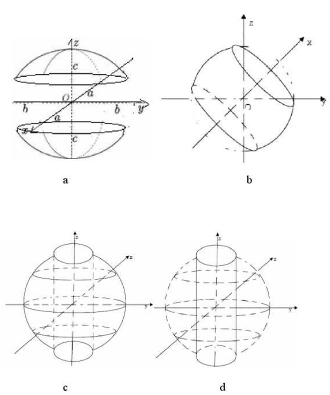
Hình 7.9: Mặt Nón Ellip

j



Hình 7.10: Mặt Hyperboloid 1 tầng

Bài tập 7.7.



Tài liệu tham khảo

[1] Bùi Xuân Hải - Trần Nam Dũng - Trịnh Thanh Đèo - Thái Minh Đường - Trần Ngọc Hội , *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc Gia TPHCM, (2001).

[2] Hồ Hữu Lộc, *Bài tập Đại số tuyến tính*, Đại học Cần Thơ, (2005).

[3] Ngô Thu Lương - Nguyễn Minh Hằng, *Bài tập Toán cao cấp tập 2*, NXB Đại học Quốc Gia TPHCM, (2000).

[4] Nguyễn Viết Đông - Lê Thị Thiên Hương - Nguyễn Anh Tuấn - Lê Anh Vũ, *Bài tập Toán cao cấp tập 2*, NXB Giáo Dục, (2000).

[5] Tống Đình Quỳ - Nguyễn Cảnh Lương, *Giúp ôn tập tốt TOÁN CAO CẤP tập 4*, NXB Đại học Quốc Gia HÀ NỘI, (2000).

[6] *http://tutorial.math.lamar.edu/AllBrowsers/2318*