L.T.P.D.

LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ
GRAPH THEORY

LÊ THỊ PHƯƠNG DUNG

NỘI DUNG

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. TOÁN RỜI RẠC – *NGUYỄN TÔ THÀNH, NGUYỄN ĐỨC NGHĨA*
2. LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG – *NGUYỄN TUẤN ANH*

… … … … … … … … … … … … … … … … … … … .....

CHƯƠNG 6

LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

NỘI DUNG:

1. MẠNG VÀ LUỒNG TRONG MẠNG
2. LÁT CẮT VÀ SỰ TĂNG LUỒNG
3. TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

L.T.D.D.

MẠNG VÀ LUỒNG TRONG MẠNG

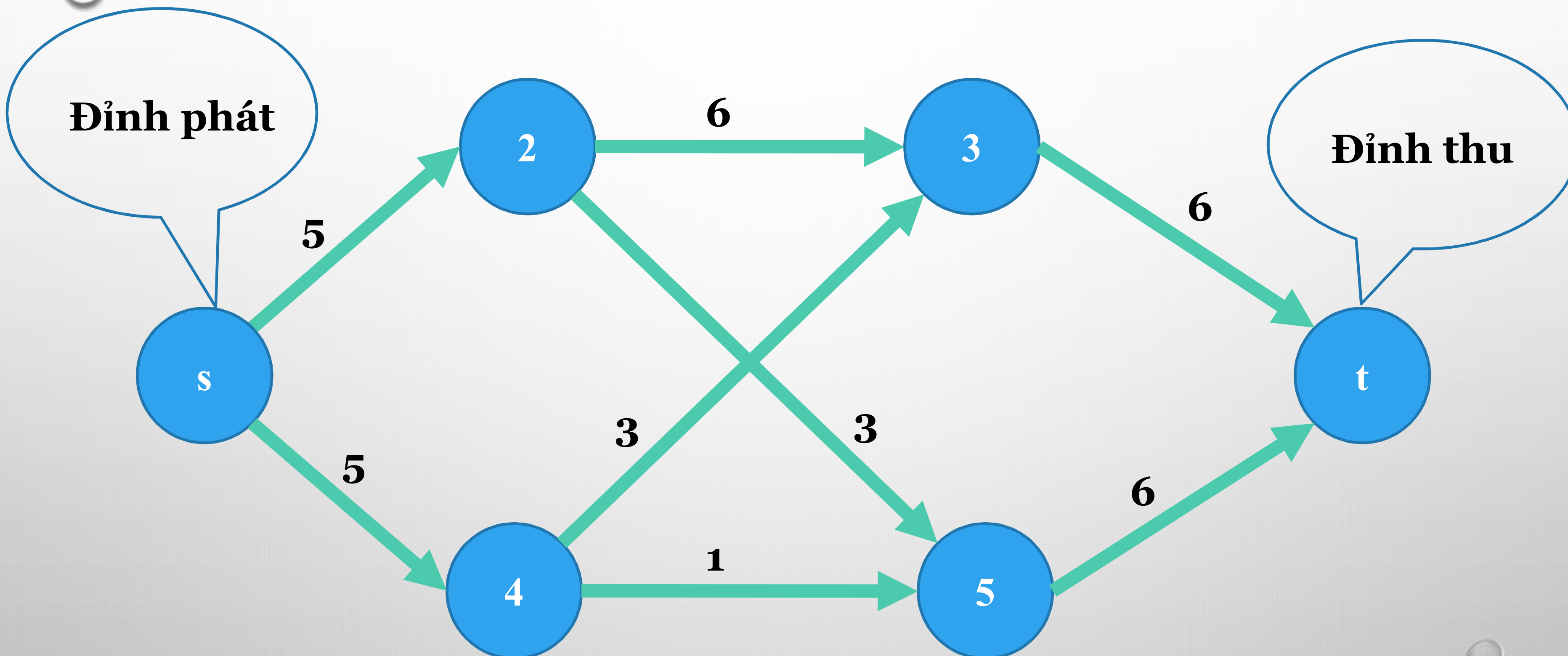
Đồ thị có hướng G=(X,U) được gọi là mạng nếu:

- Tồn tại duy nhất đỉnh phát s $\in X$ sao cho $d^{-}(s) = 0$
- Tồn tại duy nhất đỉnh thu t $\in X$ sao cho $d^{+}(t) = 0$
- $\forall$e = (i, j) $\in U: c(e) = c(i,j) \geq 0$. Với $c(e)$ được gọi là khả năng thông qua cung *e*

$\forall u, v \in X, (u, v) \notin U: c(u, v) = 0$
(Nếu không tồn tại cung u, v thì khả năng thông qua của cung u, v bằng 0)

MẠNG VÀ LUỒNG TRONG MẠNG

Ví dụ mạng G = (X, U)



MẠNG VÀ LUỒNG TRONG MẠNG

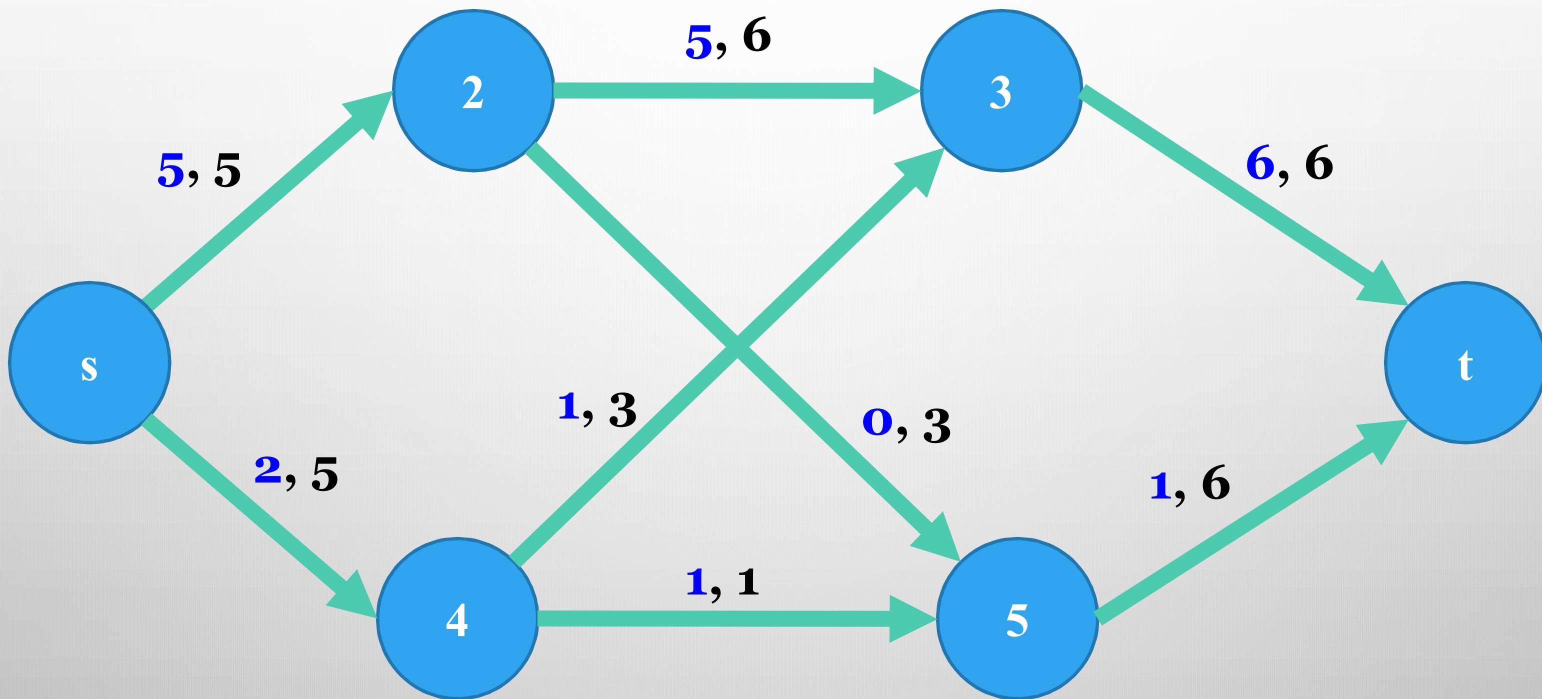
Định nghĩa luồng trong mạng:

Hàm $f: U \rightarrow N$ được gọi là luồng qua mạng (G,c) nếu:

- $\forall e \in U$: $f(e) \leq c(e)$: Luồng trên mỗi cạnh không vượt quá khả năng thông qua của cạnh đó
- $\forall x \neq s, t$: $f\left(W^{-}(x)\right) = f\left(W^{+}(x)\right)$: Luồng trên các đỉnh phải cân bằng, với $W^{-}(x)$ là tập đỉnh kề trước của x, $W^{+}(x)$ là tập đỉnh kề sau của x (tổng luồng vào phải bằng tổng luồng ra)
- $f(s) = f(t)$: Giá trị của luồng ra tại đỉnh phát bằng giá trị luồng vào tại đỉnh thu qua mạng, gọi là giá trị của luồng qua mạng

MẠNG VÀ LUỒNG TRONG MẠNG

Ví dụ luồng trong mạng:

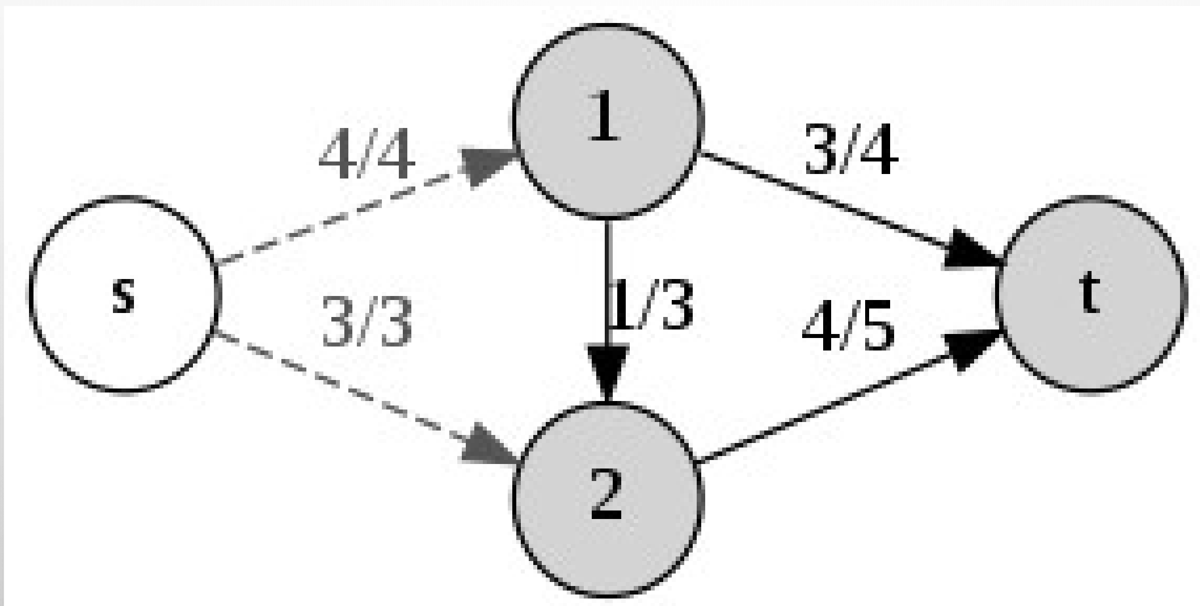


MẠNG VÀ LUỒNG TRONG MẠNG

Bài toán luồng cực đại:
Cho mạng (G, c) hãy tìm luồng f qua mạng G sao cho giá trị luồng $\mathrm{val}(f)$ đạt giá trị lớn nhất
⇒ Giải quyết: Thuật toán Ford-Fulkerson

LÁT CẮT VÀ SỰ TĂNG LUỒNG

Lát cắt: Ta gọi lát cắt (X_1, X_2) là một cách phân hoạch tập đỉnh X của mạng ra thành hai tập X_1 và $X_2 = X \backslash X_1$, trong đó $s \in X_1, t \in X_2$
Ví dụ lát cắt (X_1, X_2):



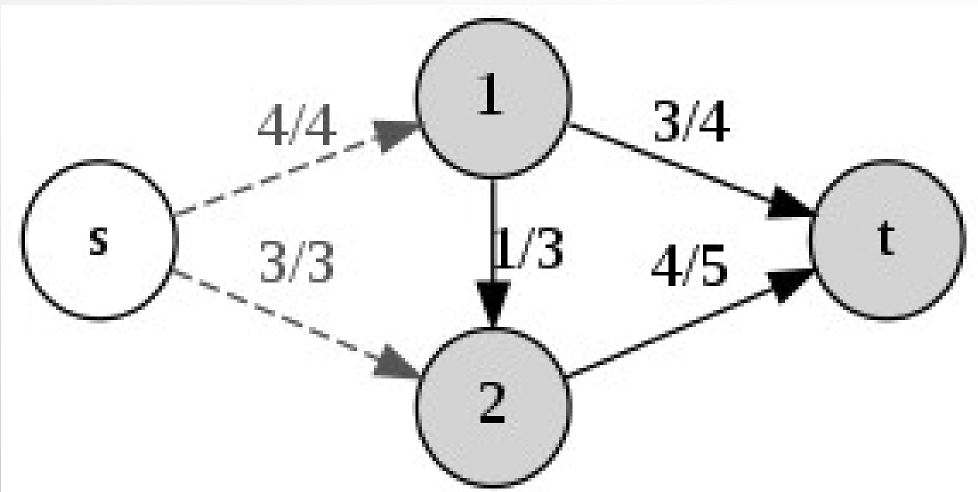
$$X_1 = \{s\}$$
$$X_2 = \{1, 2, t\}$$

LÁT CẮT VÀ SỰ TĂNG LUỒNG

Khả năng thông qua của lát cắt (X_1, X_2) là

$$c(X_1, X_2) = \Sigma c(u, v), \forall u, v \ in \ X \wedge u \in X_1 \wedge u \in X_2$$

Ví dụ khả năng thông qua của lát cắt (X_1, X_2):



$X_1 = \{s\};$

$X_2 = \{1, 2, t\}$

$$c(X_1, X_2) = c(s, 1) + c(s, 2)$$
$$= 4 + 3 = 7$$

Lát cắt với khả năng thông qua nhỏ nhất được gọi là lát cắt hẹp nhất

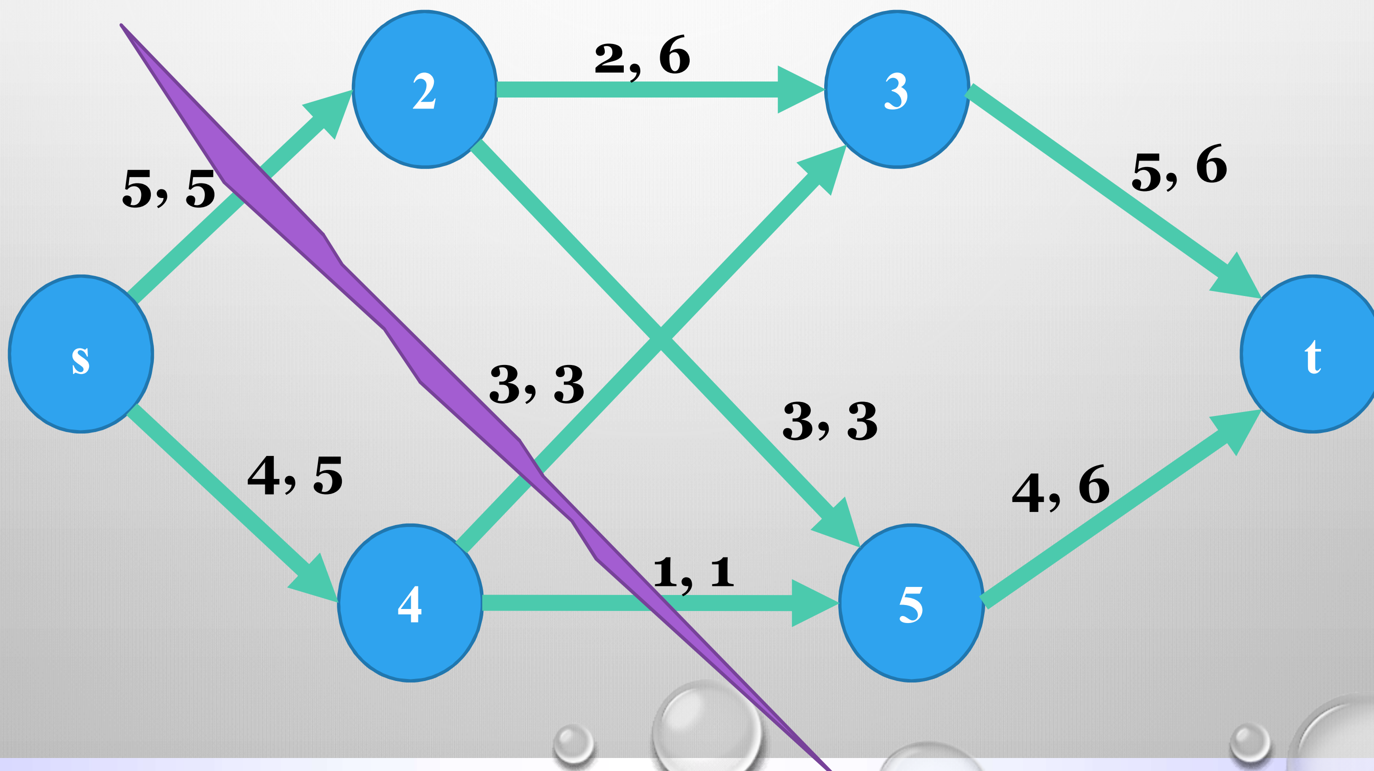
L.T.D.D.

LÁT CẮT VÀ SỰ TĂNG LUỒNG

Giá trị luồng trong mạng luôn nhỏ hơn hoặc bằng khả năng thông qua của lát cắt (X_1, X_2) bất kỳ: $\mathrm{val}(f) \leq c(X_1, X_2)$

Ford-Fulkerson đã chứng minh rằng giá trị luồng cực đại trong mạng bằng khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất

Ví dụ luồng cực đại và khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất



LÁT CẮT VÀ SỰ TĂNG LUỒNG

Đồ thị tăng luồng: Đồ thị tăng luồng $G_f = (X, U_f)$ của mạng $G = (X, U)$ với tập cạnh U_f được xác định như sau:

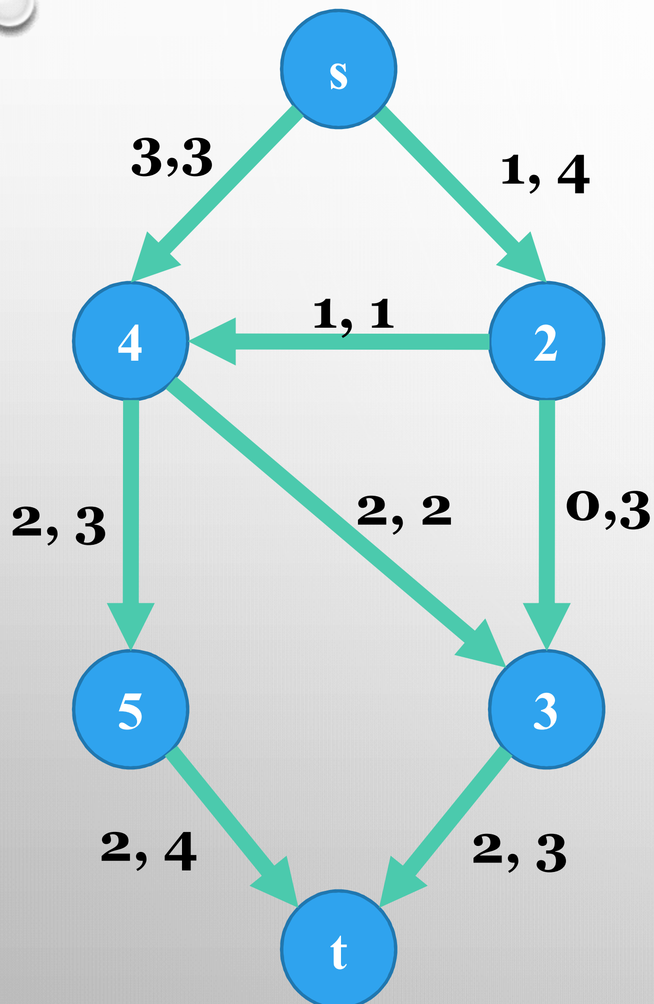
- Nếu $e = (u, v) \in U$ với $f(u, v) = 0$ thì $(u, v) \in U_f$ với trọng số $\mathrm{c}(u, v)$;
- Nếu $e = (u, v) \in U$ với $f(u, v) = c(u, v)$ thì $(v, u) \in U_f$ với trọng số $f(u, v)$;
- Nếu $e = (u, v) \in U$ với $0 < f(u, v) < c(u, v)$ thì :
  - $(u, v) \in U_f$ với trọng số $\mathrm{c(u, v)} - f(u, v)$;
  - $(v, u) \in U_f$ với trọng số $f(u, v)$.

Ghi nhớ: $e = (u, v) \in U$ với $0 \le f(u, v) \le c(u, v)$ thì :

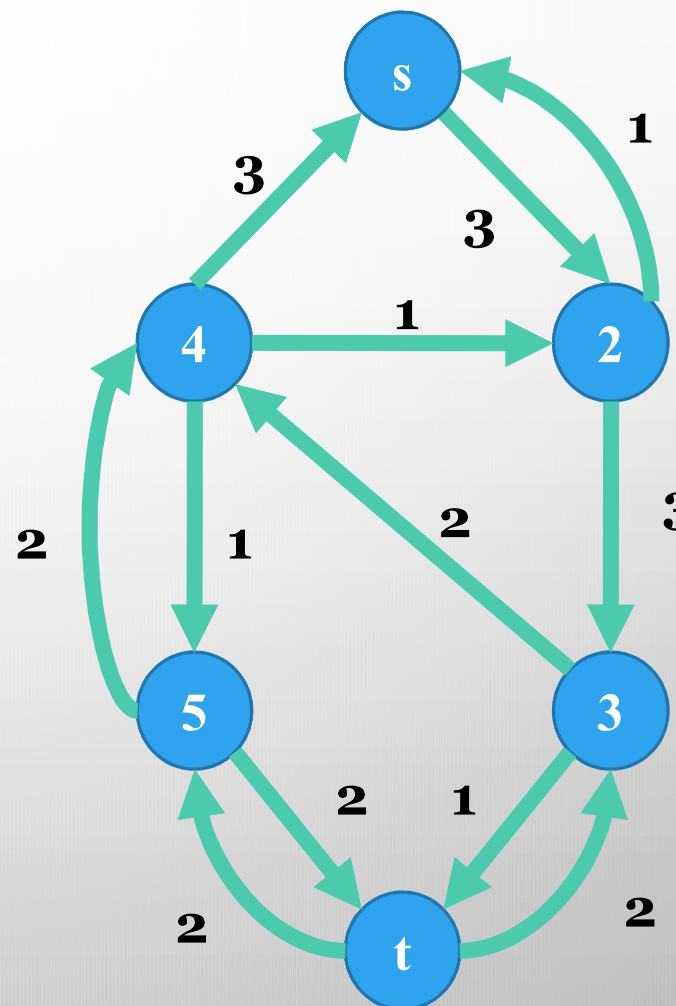
- $(u, v) \in U_f$ với trọng số $\mathrm{c(u, v)} - f(u, v)$;
- $(v, u) \in U_f$ với trọng số $f(u, v)$.
- Nếu cung có trọng số 0 thì không biểu diễn.

LÁT CẮT VÀ SỰ TĂNG LUỒNG

Ví dụ đồ thị tăng luồng $G_f = (X, U_f)$ của mạng $G = (X, U)$



G



G_f

LÁT CẮT VÀ SỰ TĂNG LUỒNG

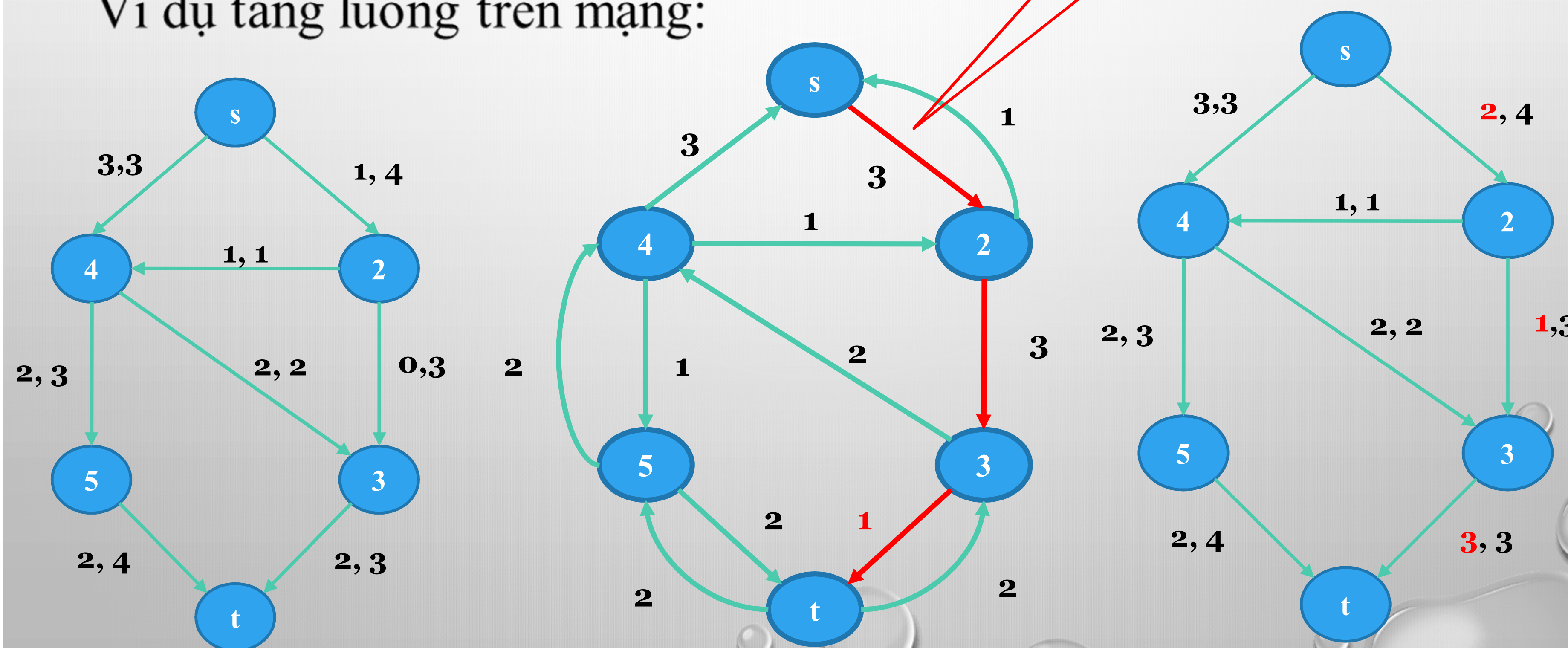
Đường tăng luồng: Là đường đi từ s đến t trên đồ thị tăng luồng G_f

Các mệnh đề dưới đây là tương đương:

- f là luồng cực đại trong mạng;
- Không tìm được đường tăng luồng;
- $val(f) = c(X_1, X_2)$ với (X_1, X_2) là lát cắt nào đó.

Ví dụ tăng luồng trên mạng:

Đường tăng luồng
s, 2, 3, t

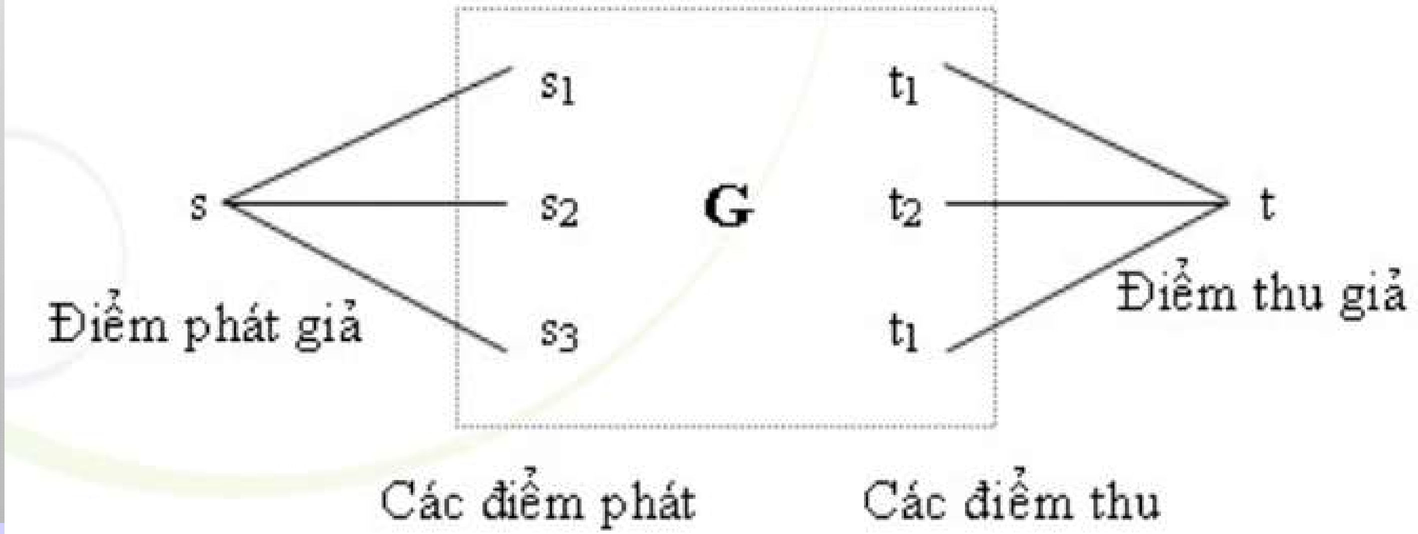


TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

- Khởi tạo luồng trên tất cả các cung bằng 0.
- Tìm đường tăng luồng P với luồng hiện tại và tăng luồng dọc theo đường P.
- Khi không thể tăng luồng được nữa ⇒ luồng đạt giá trị cực đại.
- Luồng cực đại trong mạng bằng khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất.

Chú ý: Nếu mạng có nhiều đỉnh phát/thu ⇒ thêm một đỉnh phát/ thu giả có cung nối đến/ từ tất cả đỉnh phát/ thu của mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

Inputs Given a Network $G = (X, U)$ with flow capacity c, a source node s, and a sink node t

Output Compute a flow f from s to t of maximum value

1. $f(u,v) \leftarrow 0$ for all edges (u,v)

2. While there is a path p from s to t in G_f, such that $c_f(u,v) > 0$ for all edges $(u,v) \in p$:

3. Find $c_f(p) = \min\{c_f(u,v): (u,v) \in p\}$

4. For each edge $(u,v) \in p$

5. $f(u,v) \leftarrow f(u,v) + c_f(p)$

   (*Send flow along the path*)

6. $f(u,v) \leftarrow f(u,v) - c_f(p)$

   (*The flow might be "returned" later*)

TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson: (Gán nhãn cho đỉnh)

<u>Ý tưởng của thuật toán:</u> Duyệt theo chiều sâu/rộng tìm đường tăng luồng từ s đến t ⇒ Tăng luồng

Mỗi đỉnh u được gán nhãn gồm 3 thành phần $(\mathrm{d}[u], p[u], \sigma[u])$ với:

- $\mathrm{d}[u]$: Hướng của cung: + (cung thuận) hoặc – (cung nghịch)
- $p[u]$: Đỉnh trước của u
- $\sigma[u]$: Giá trị luồng lớn nhất để tăng (cung thuận) hoặc giảm (cung nghịch).

L.T.D.D.

Thuật toán Ford-Fulkerson: (Gán nhãn cho đỉnh)

<u>Step 1:</u> Finding augmenting path (Tìm đường tăng luồng)

```
create stack Q
label s: (+, s, ∞)
push s into Q
while Q is not empty:
    u ← vertex in Q
    remove u from Q
    for each neighbor v of u:
        if (f(u,v)<c(u,v)):
            label v: (+, u, min{σ[u], c(u,v)-f(u,v)})
            push v into Q
    for each x with u is the neighbor of x:
        if (f(x,u)>0):
            label x: (−, u, min{σ[u], f(x,u)})
            push x into Q
    if t was labeled
        return
```

TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson: (Gán nhãn cho đỉnh)

<u>Step 2:</u> Sending flow along augmenting path (Tăng luồng)

1. let u =t
2. **while u is not equal s:**
3. if "+" in label of u:
4. f(p[u], u) = f(p[u], u)+$\sigma[t]$
5. else f(u, p[u]) = f(u, p[u])-$\sigma[t]$
6. $u = p[u]$

L.T.D.D.

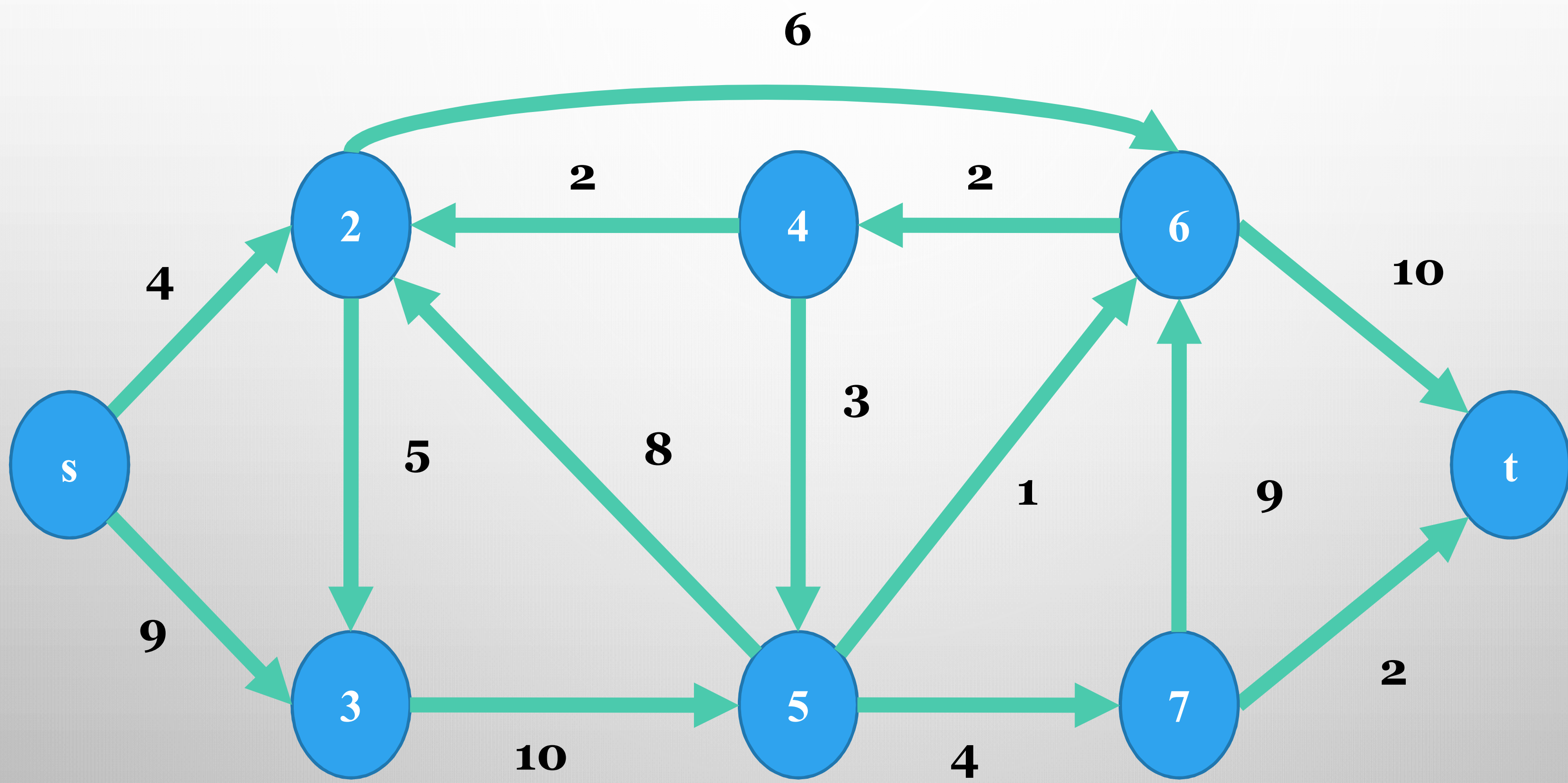
TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

f(u,v) = 0 for all edge (u,v)
create two sets X_1 *and* X_2
repeat until an augmenting path cannot be found:
    Step 1
    Step 2
for **each** vertex *u* in *Graph*:
    if u was labeled:
        add u in X_1
    else add u in X_2
mincut = (X_1, X_2)

TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng

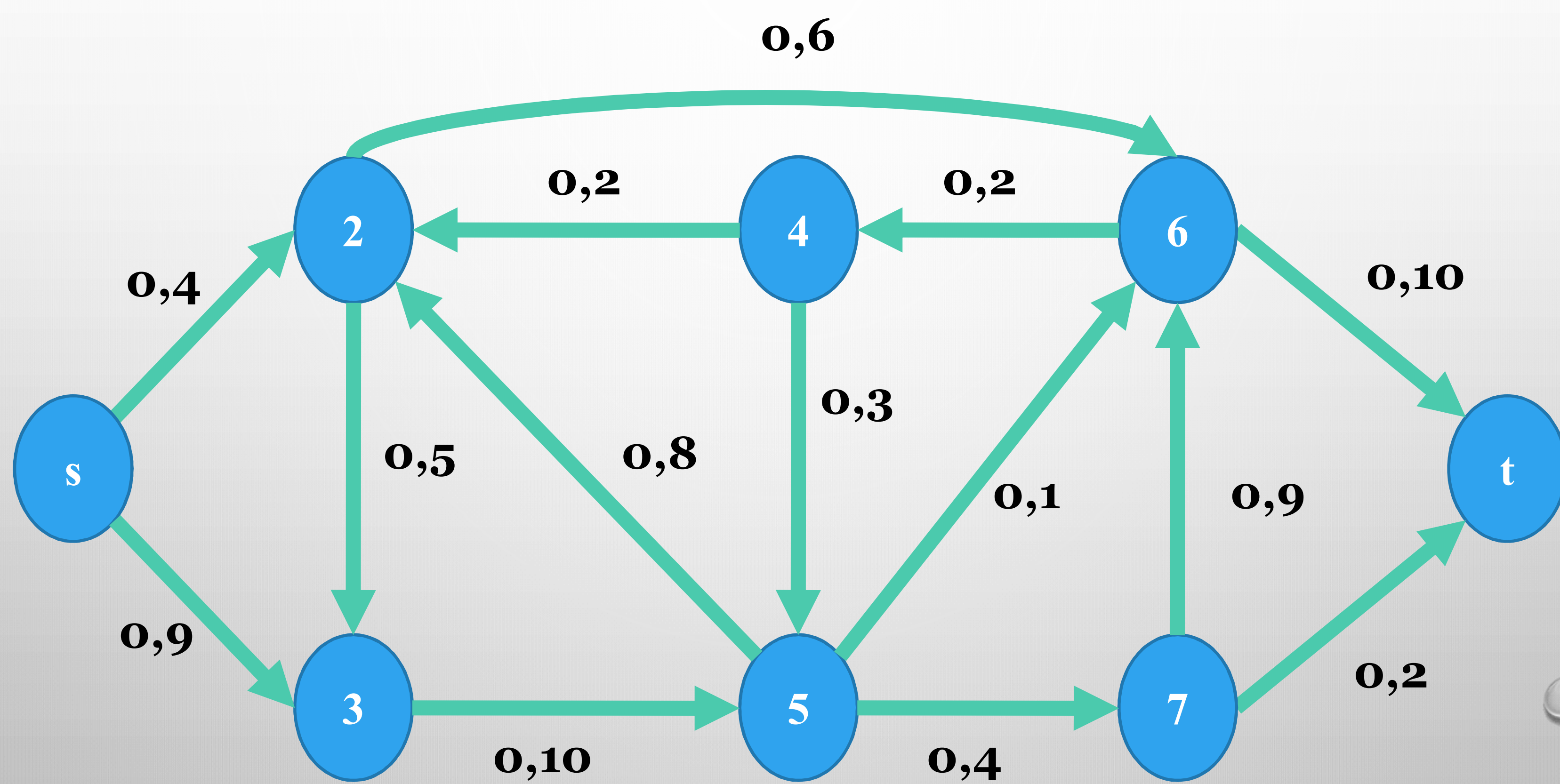


L.T.D.D.

TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

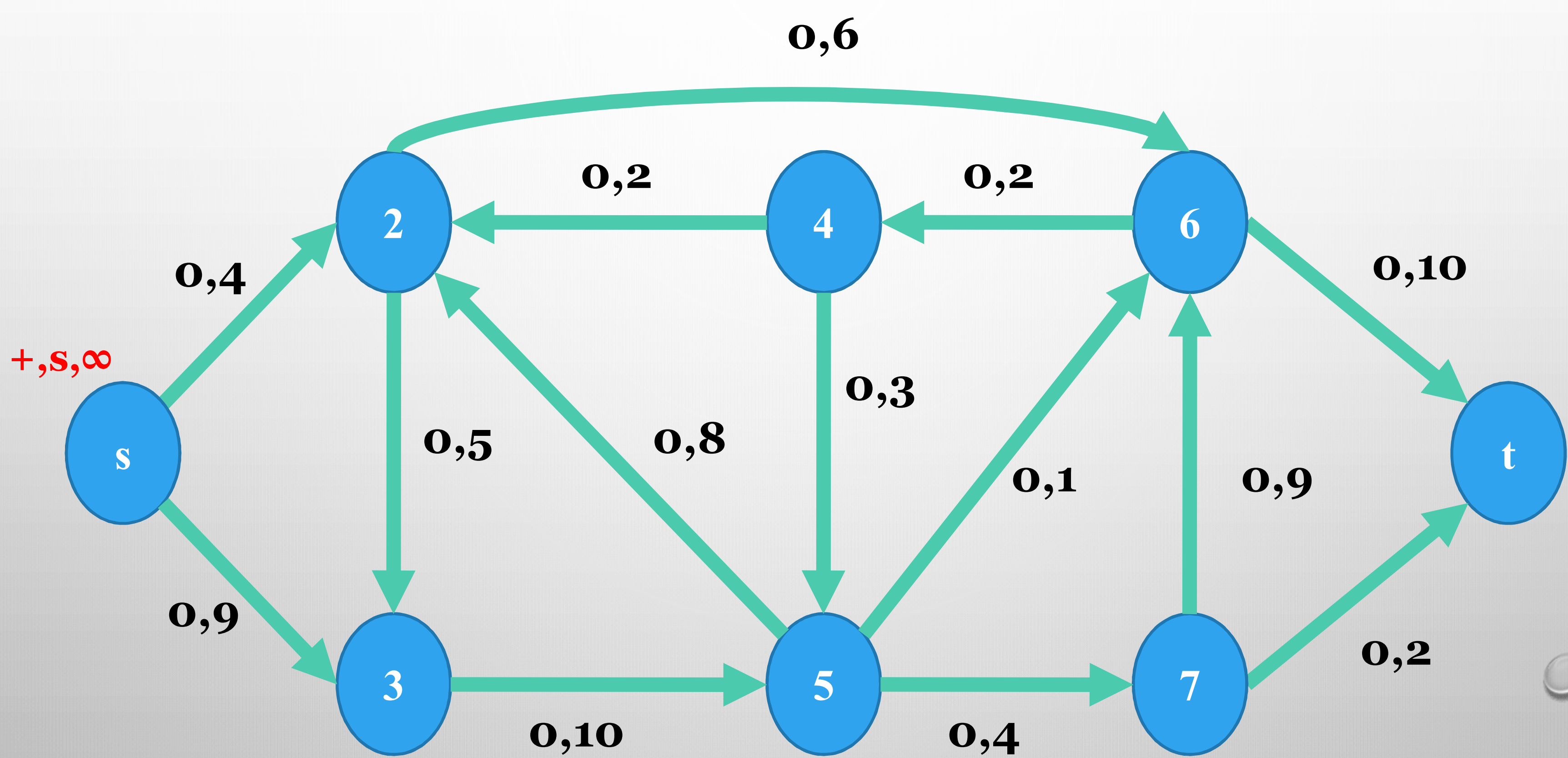
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng

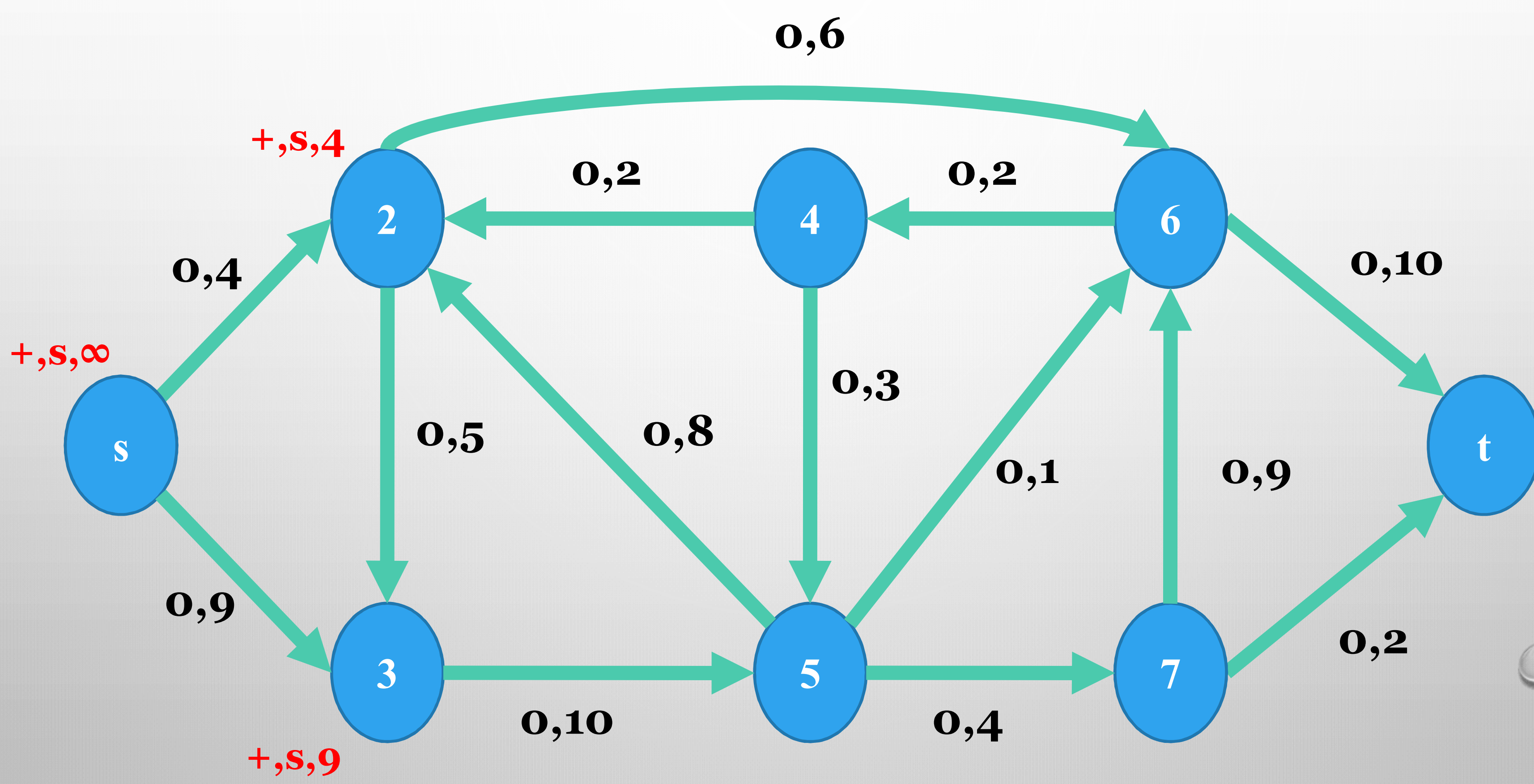


L.T.D.D.

TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng

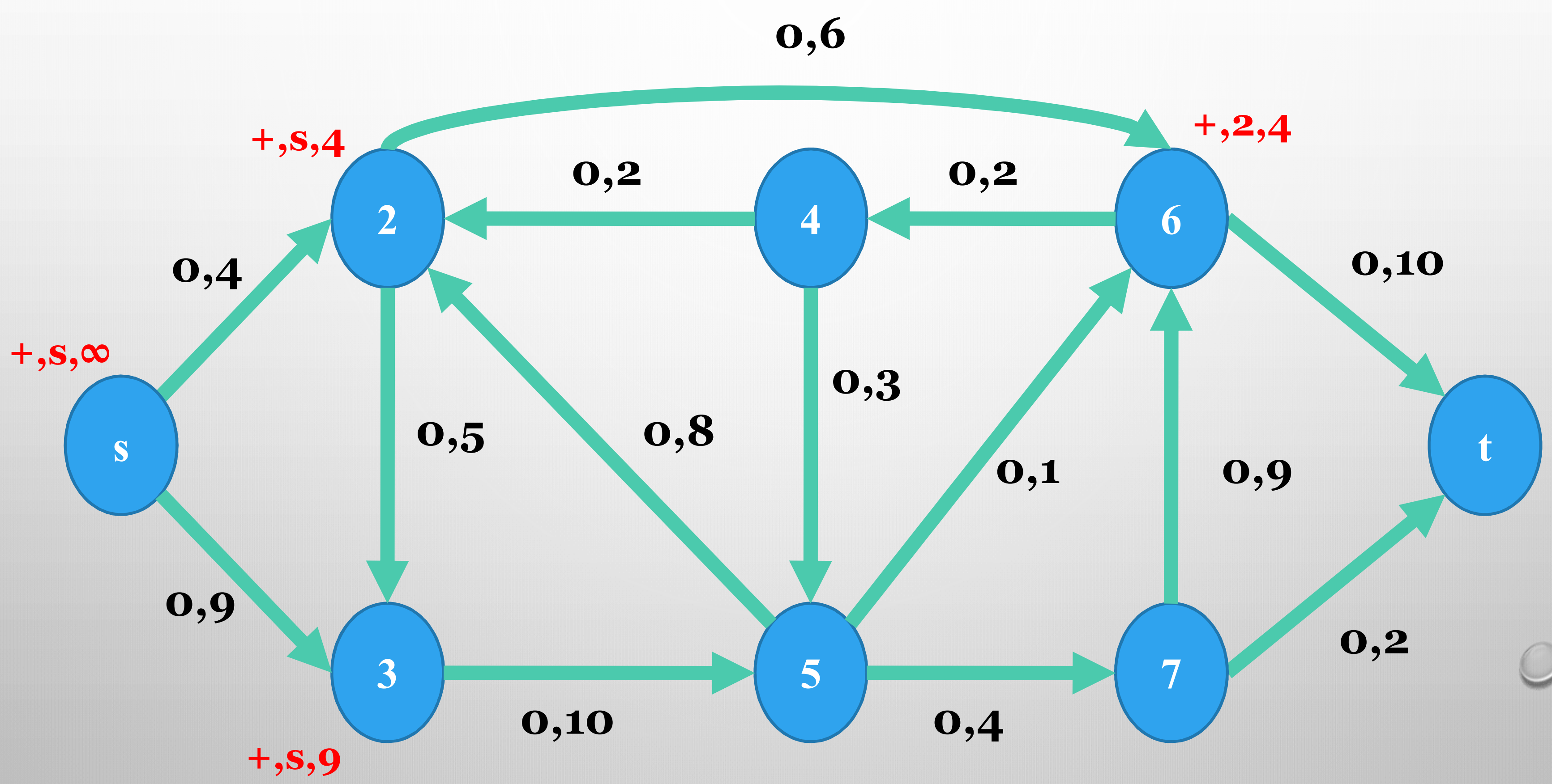


L.T.D.D.

TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

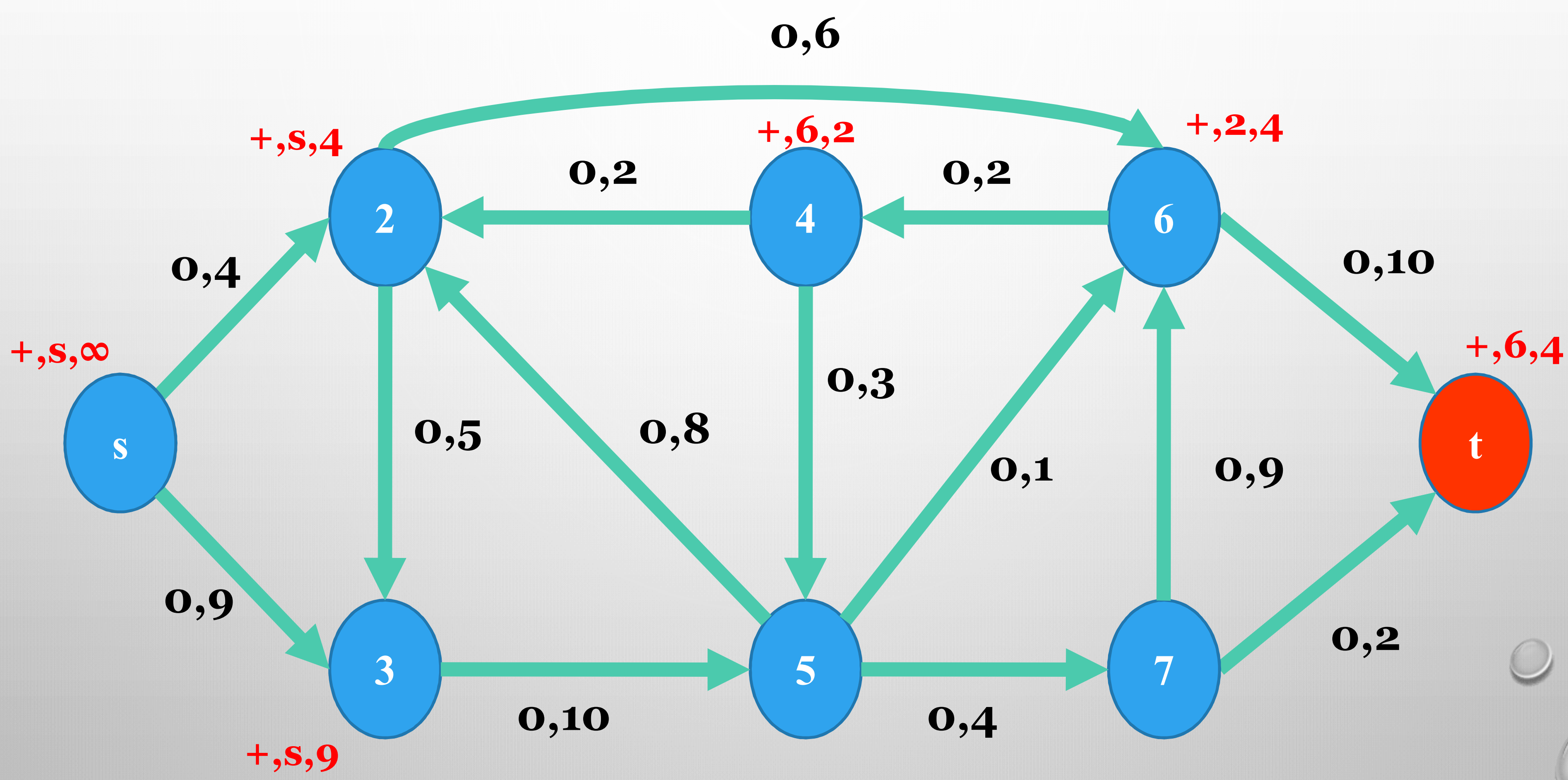
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

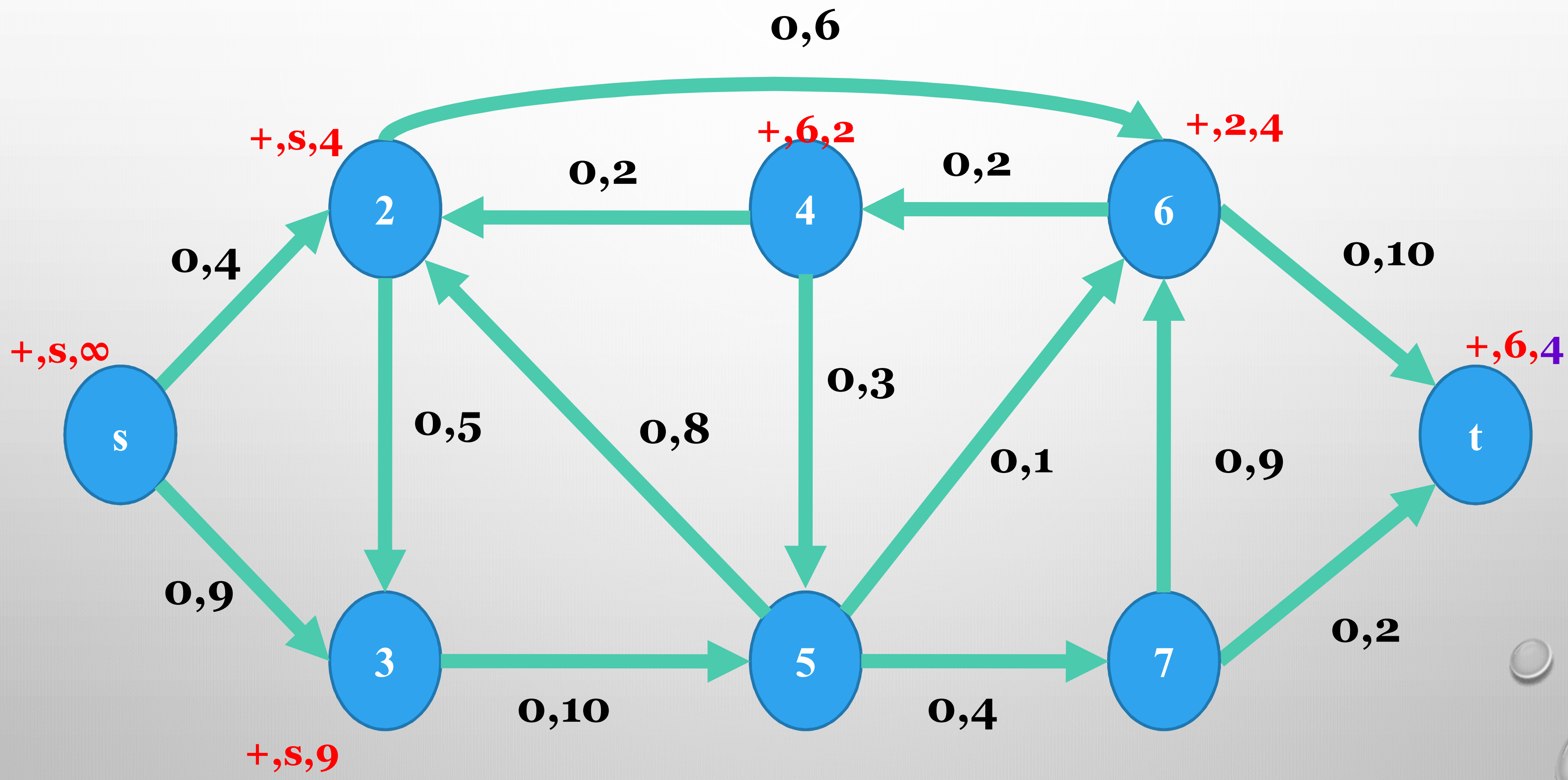
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng

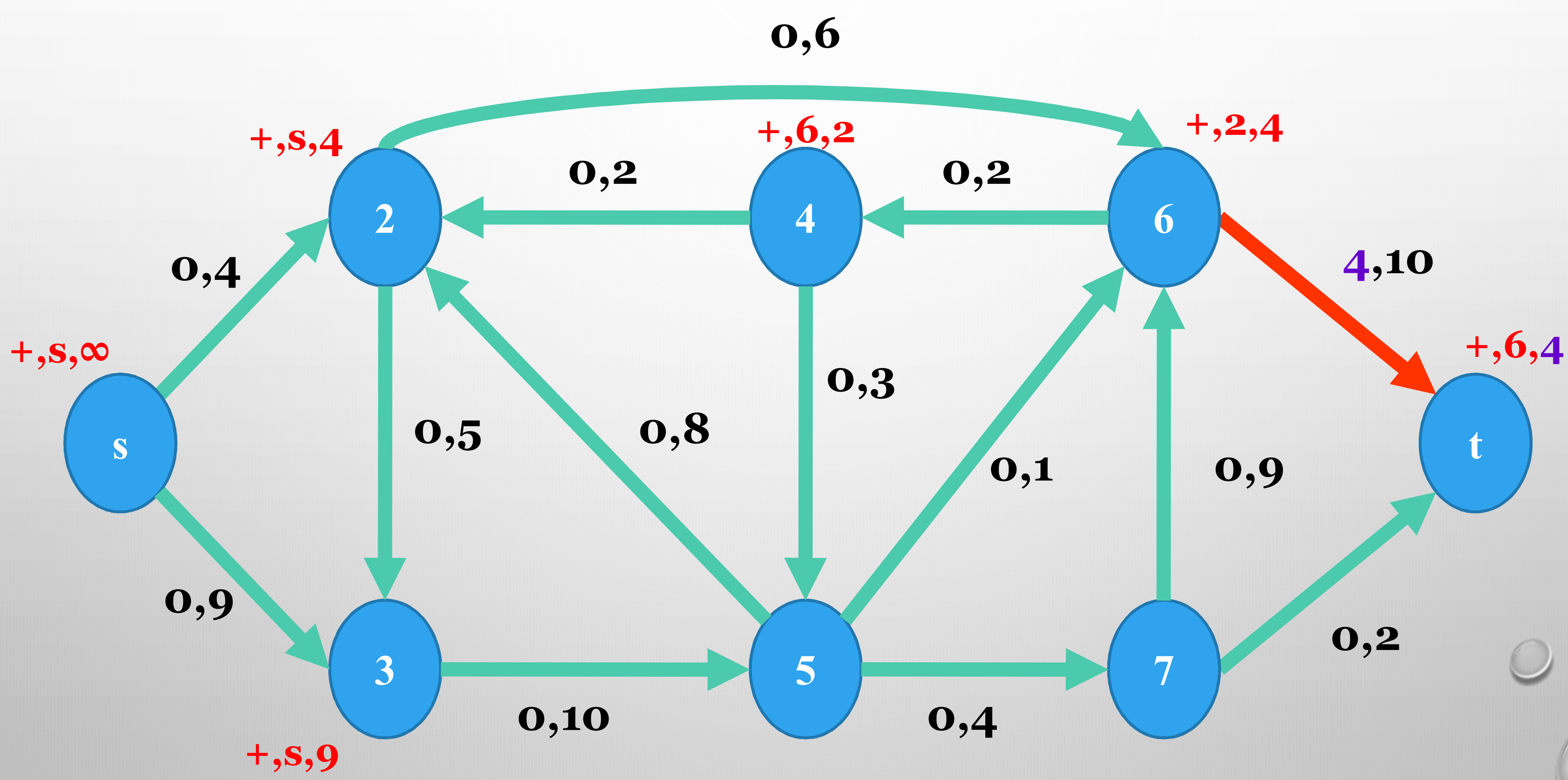


L.T.D.D.

TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

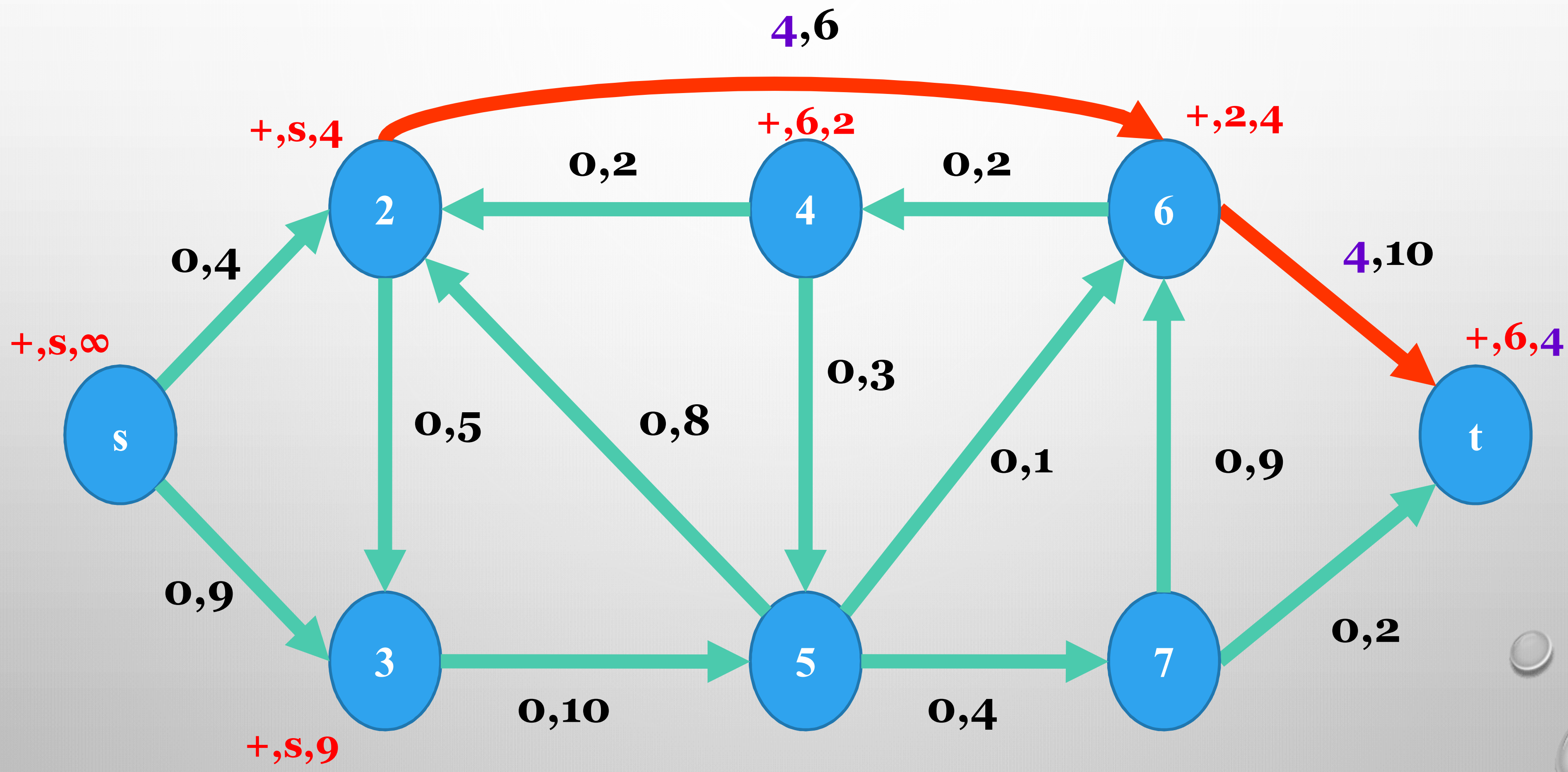
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

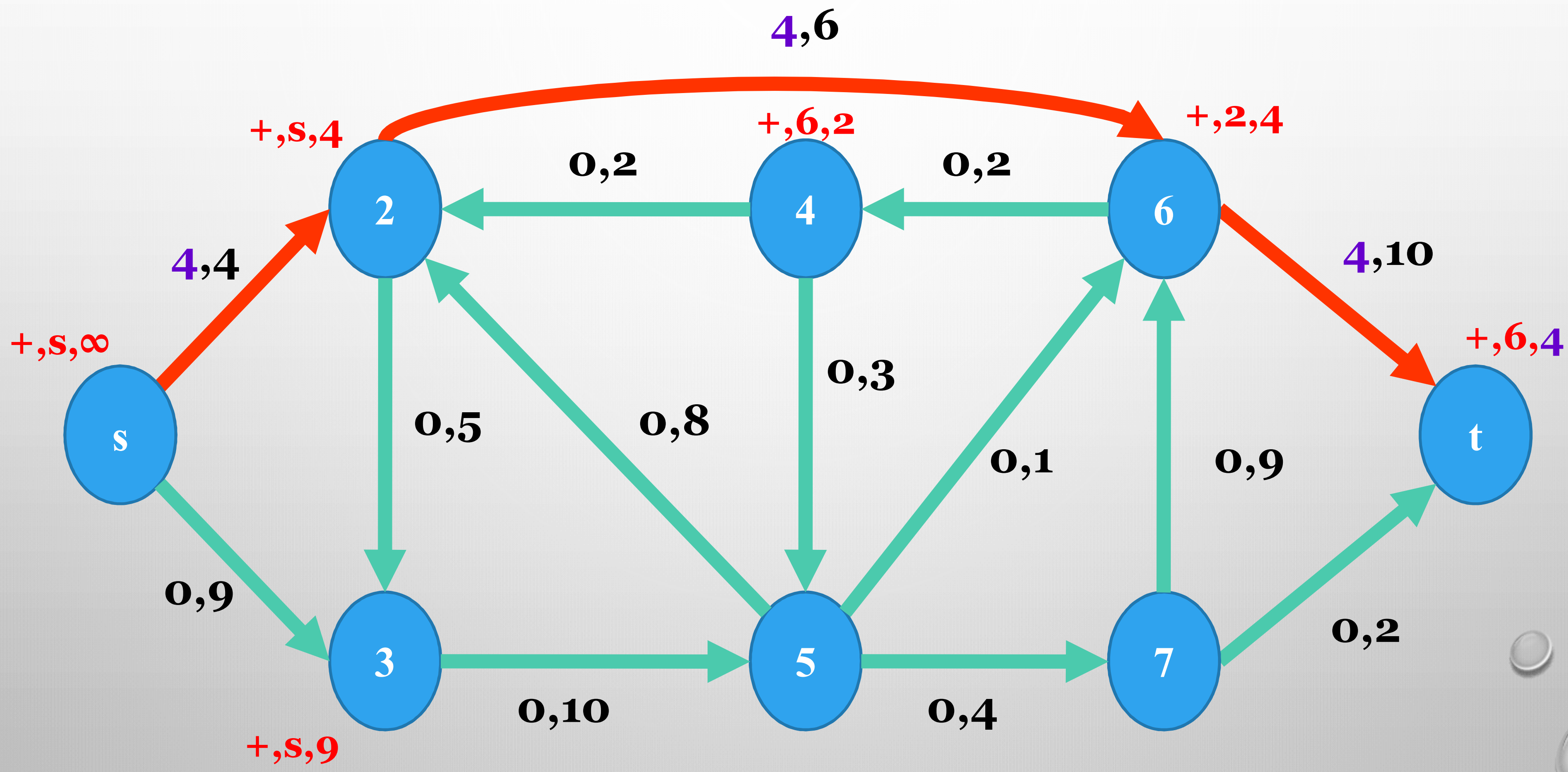
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

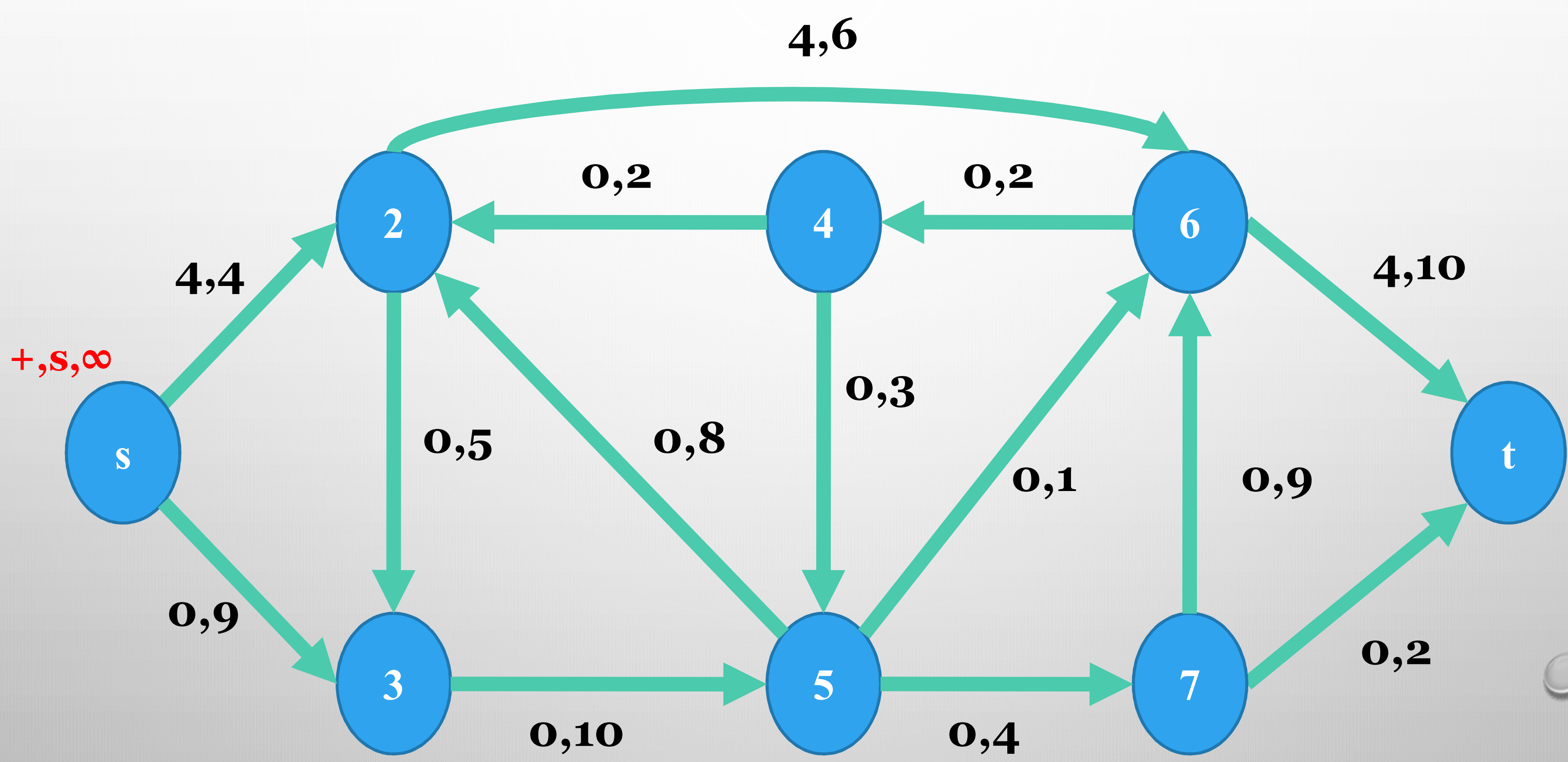
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

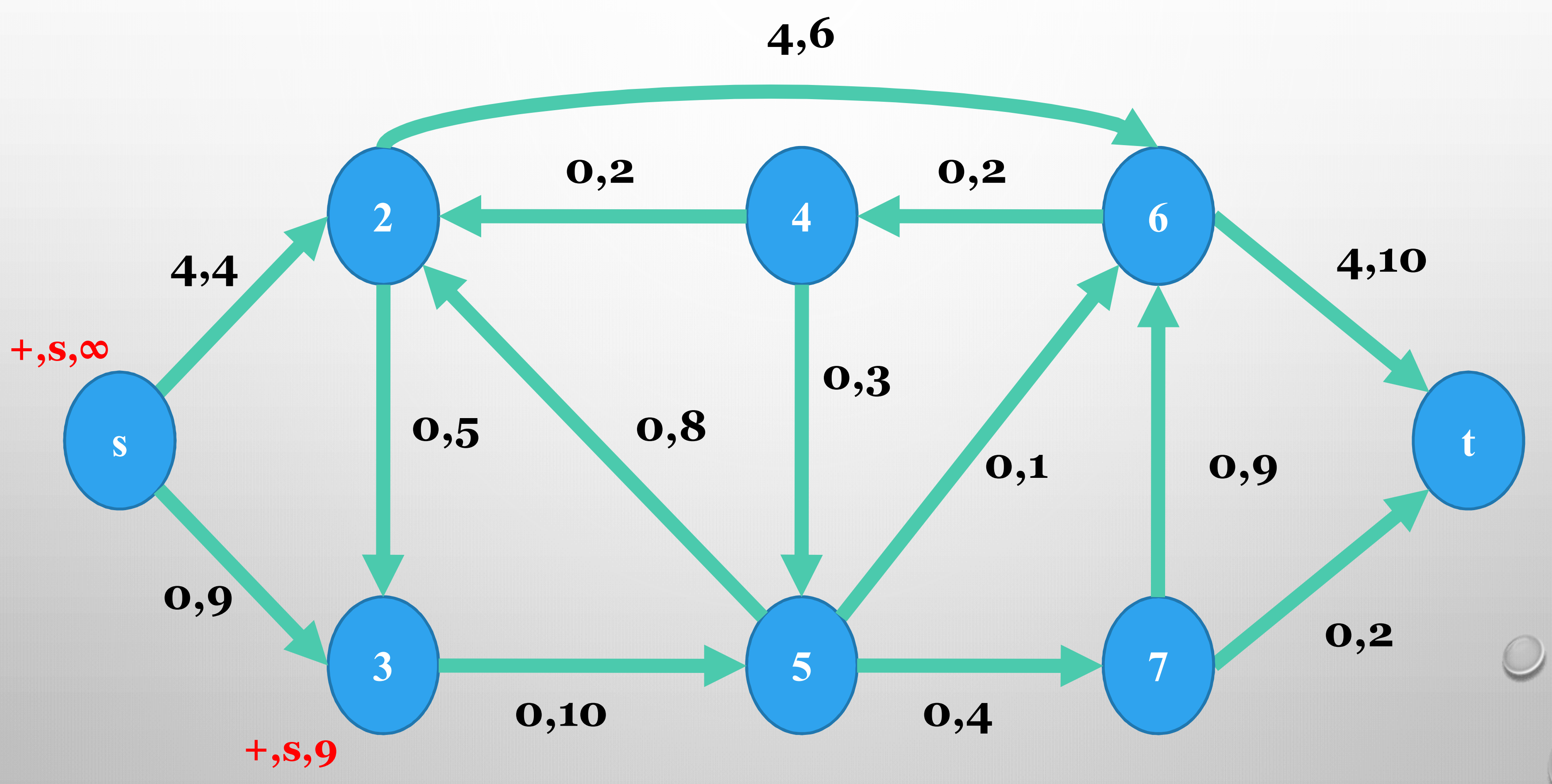
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

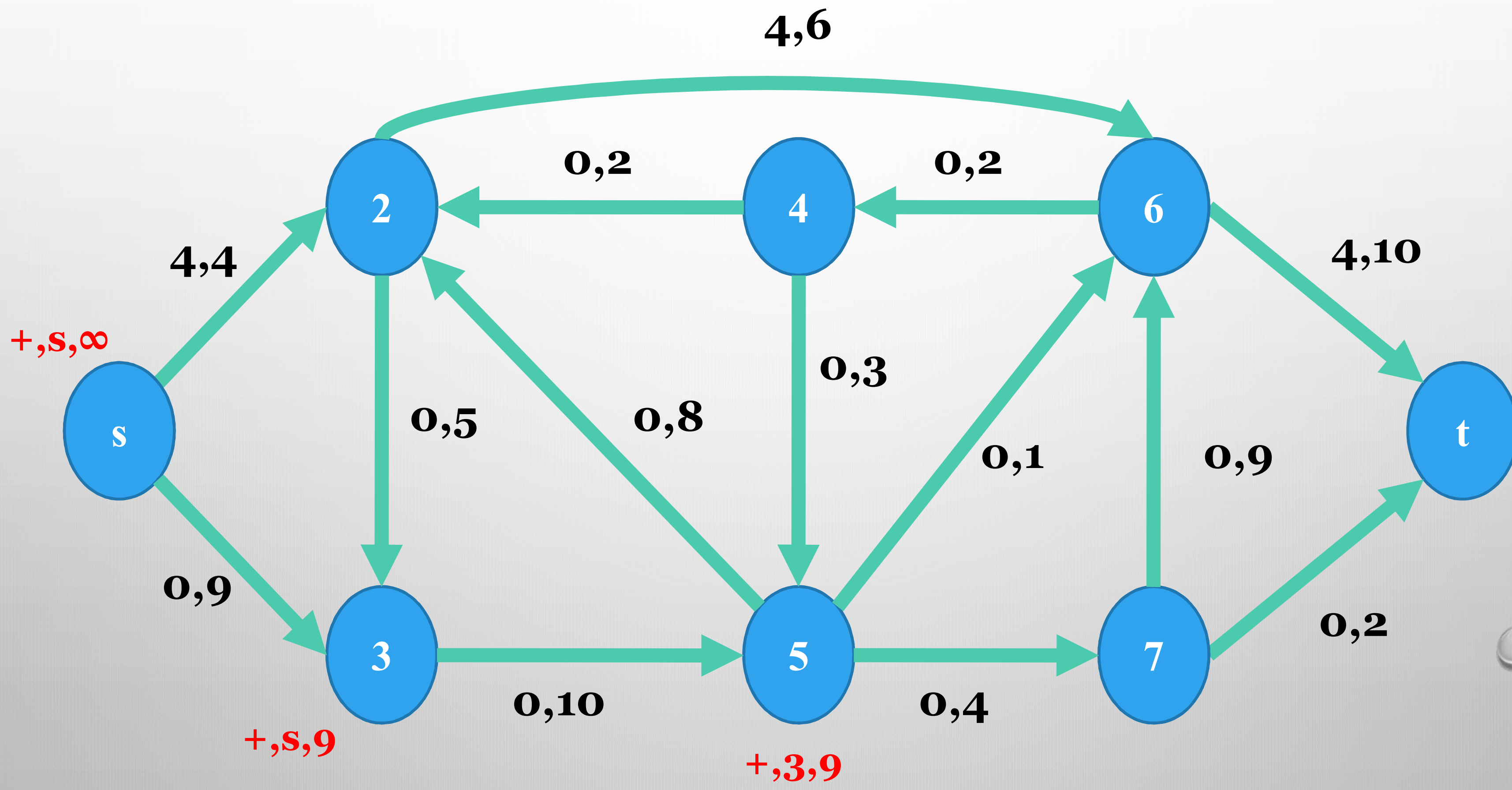
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

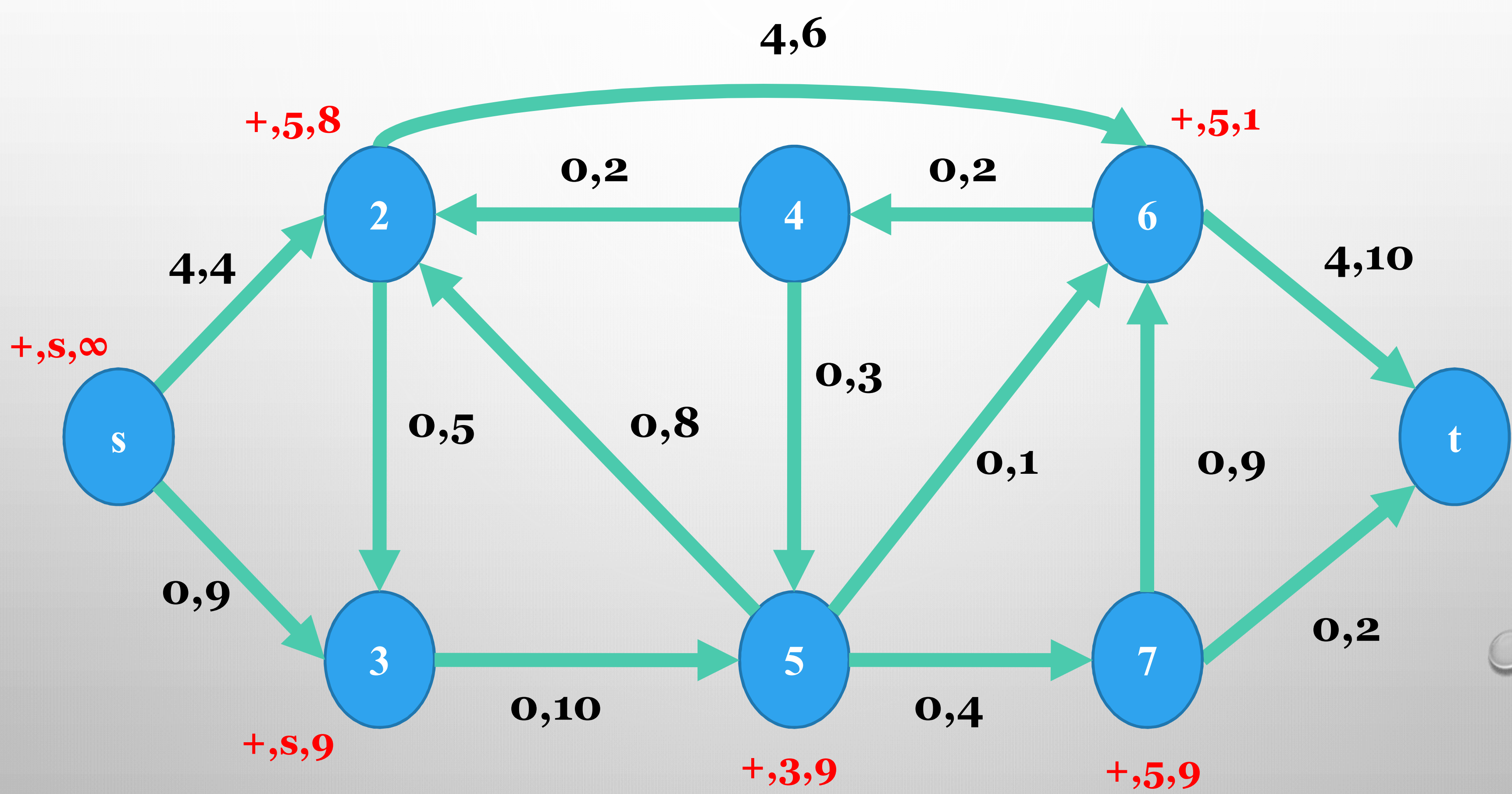
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng

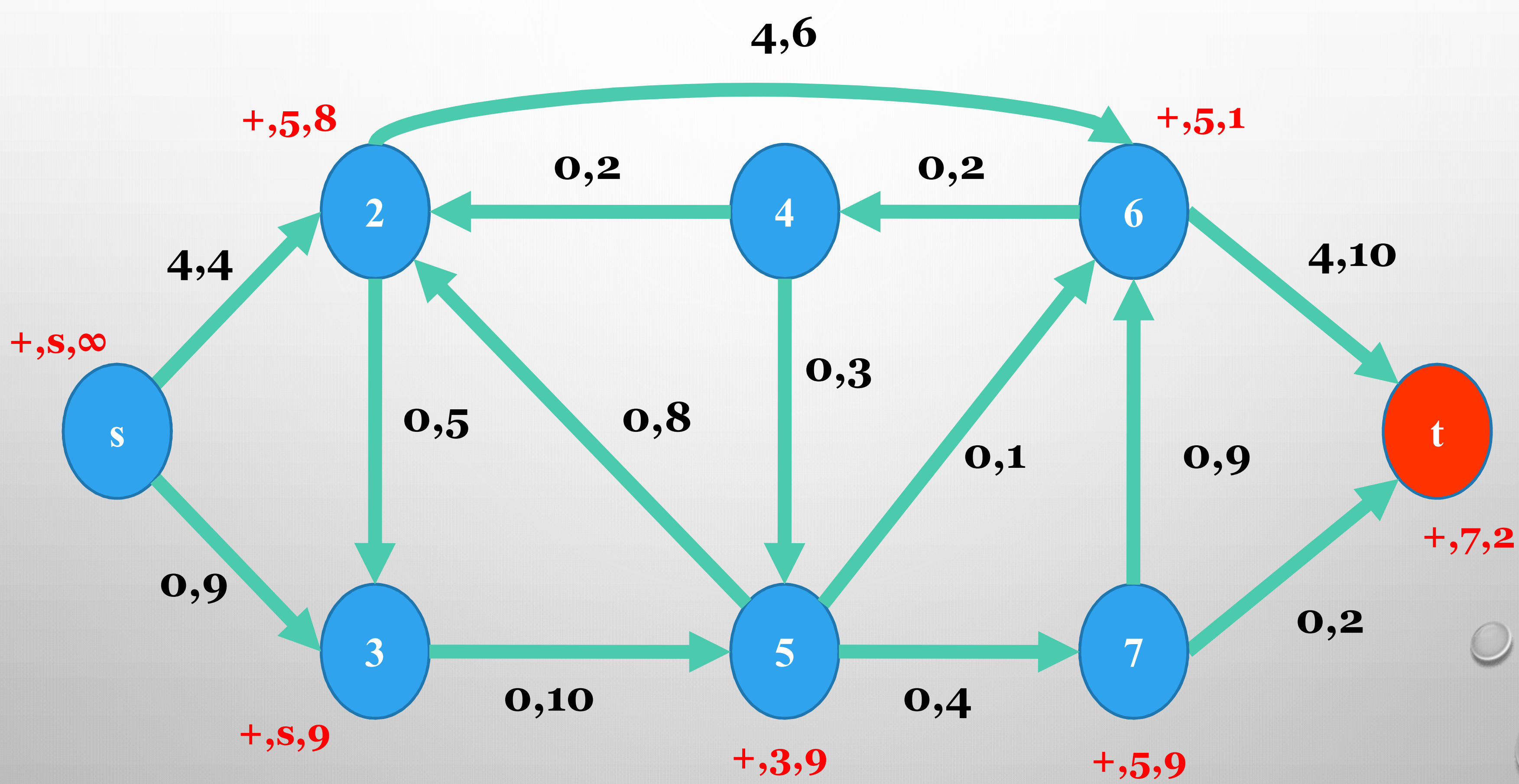


L.T.D.D.

TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

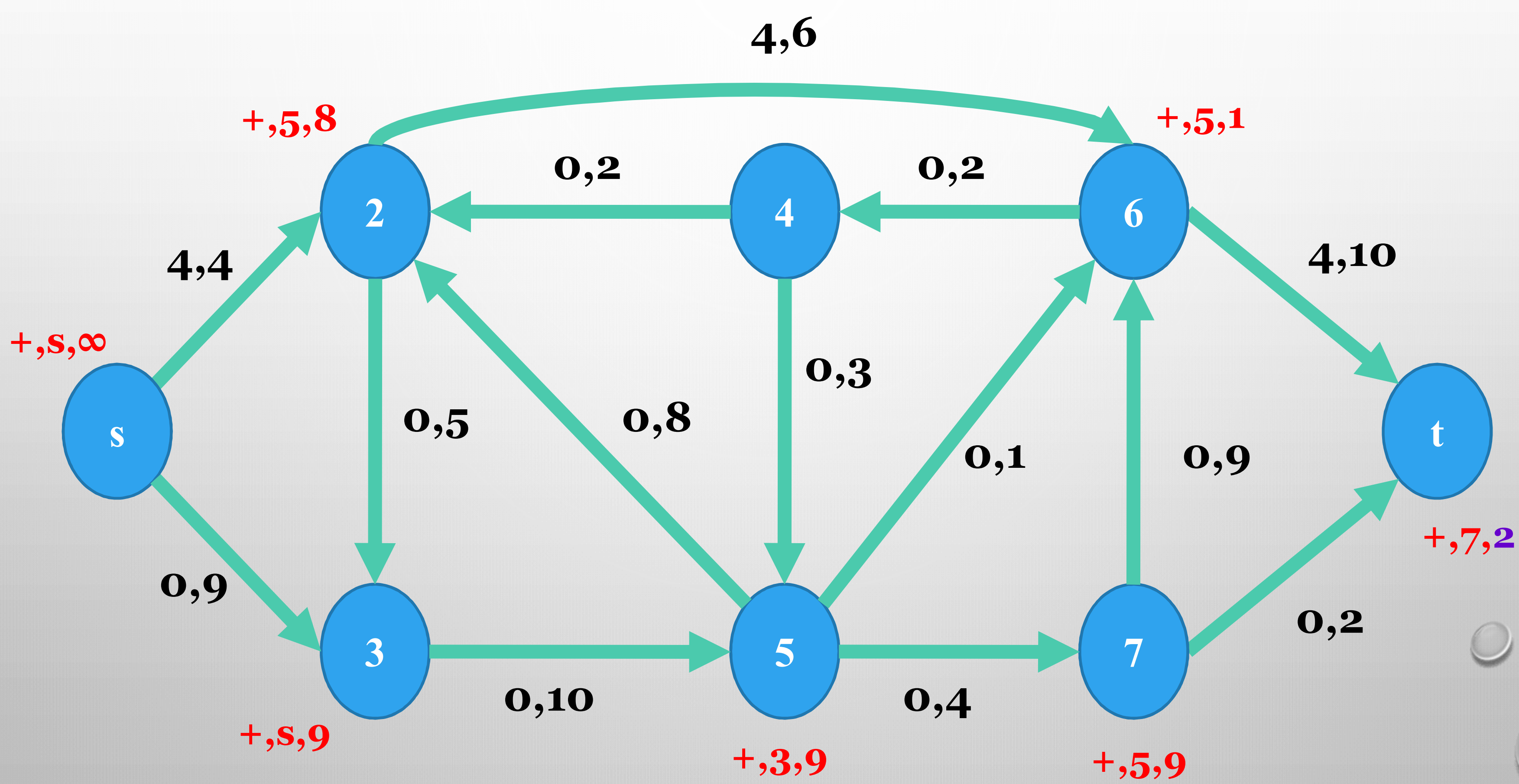
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng

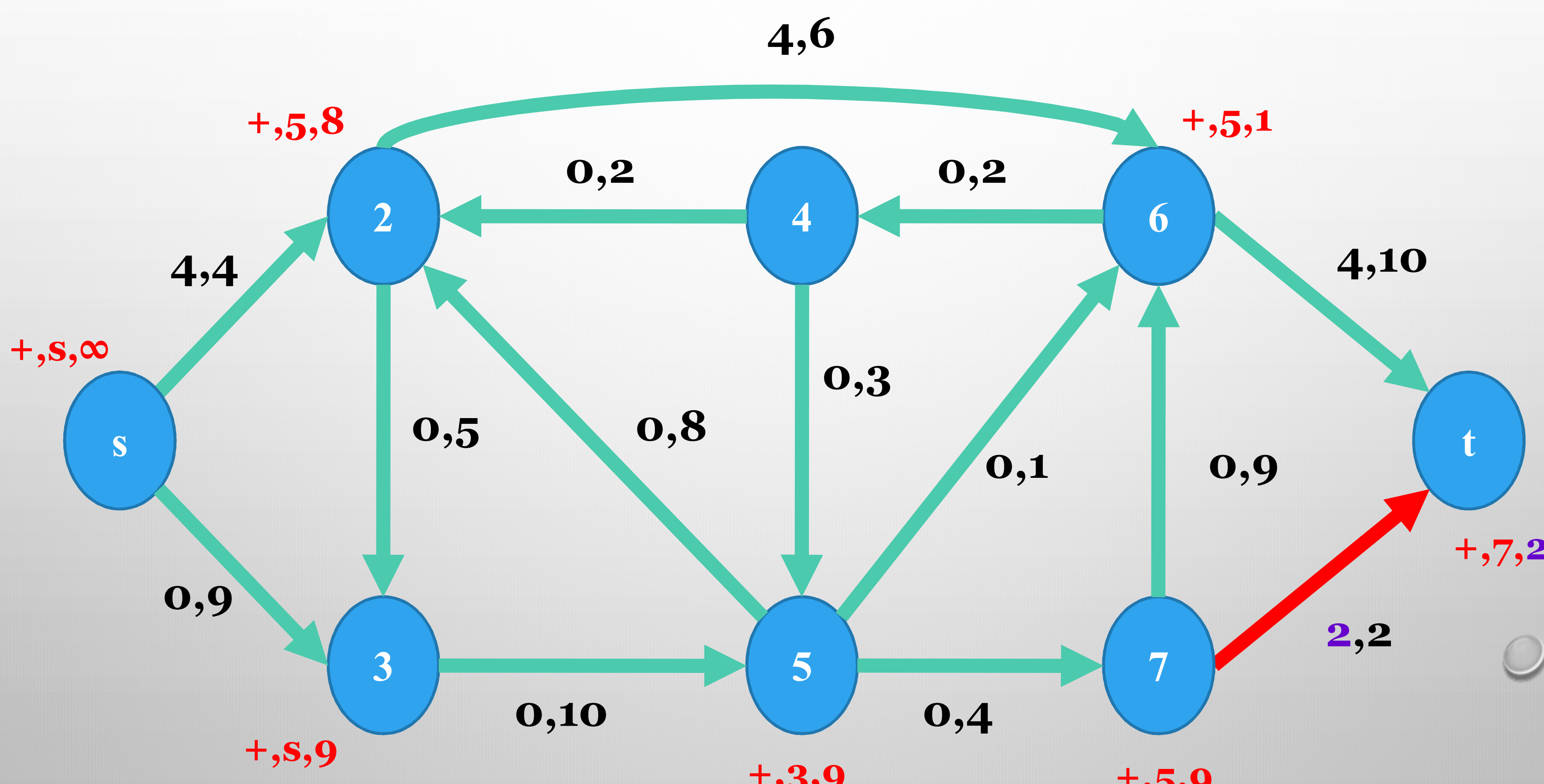


L.T.D.D.

TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

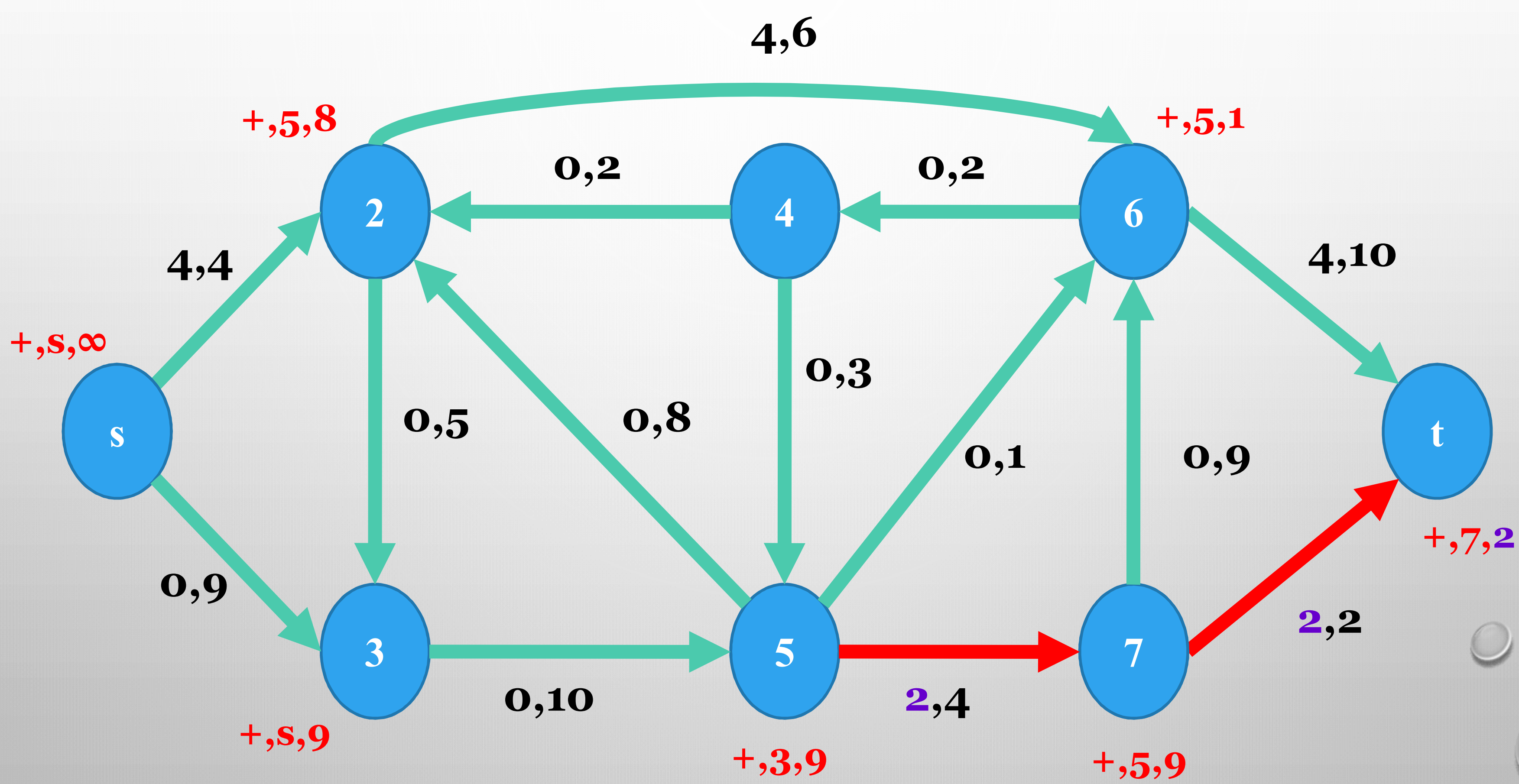
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

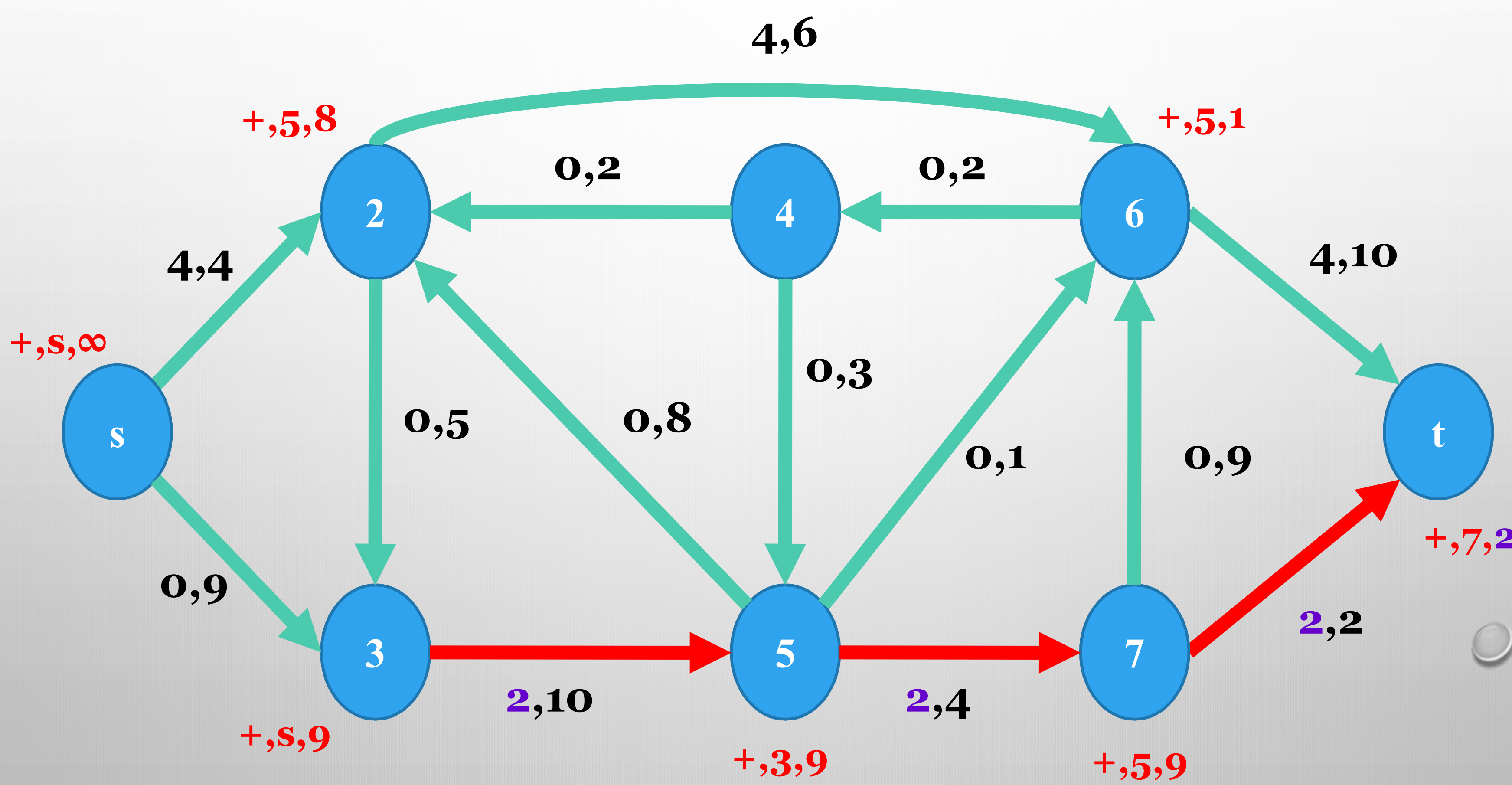
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

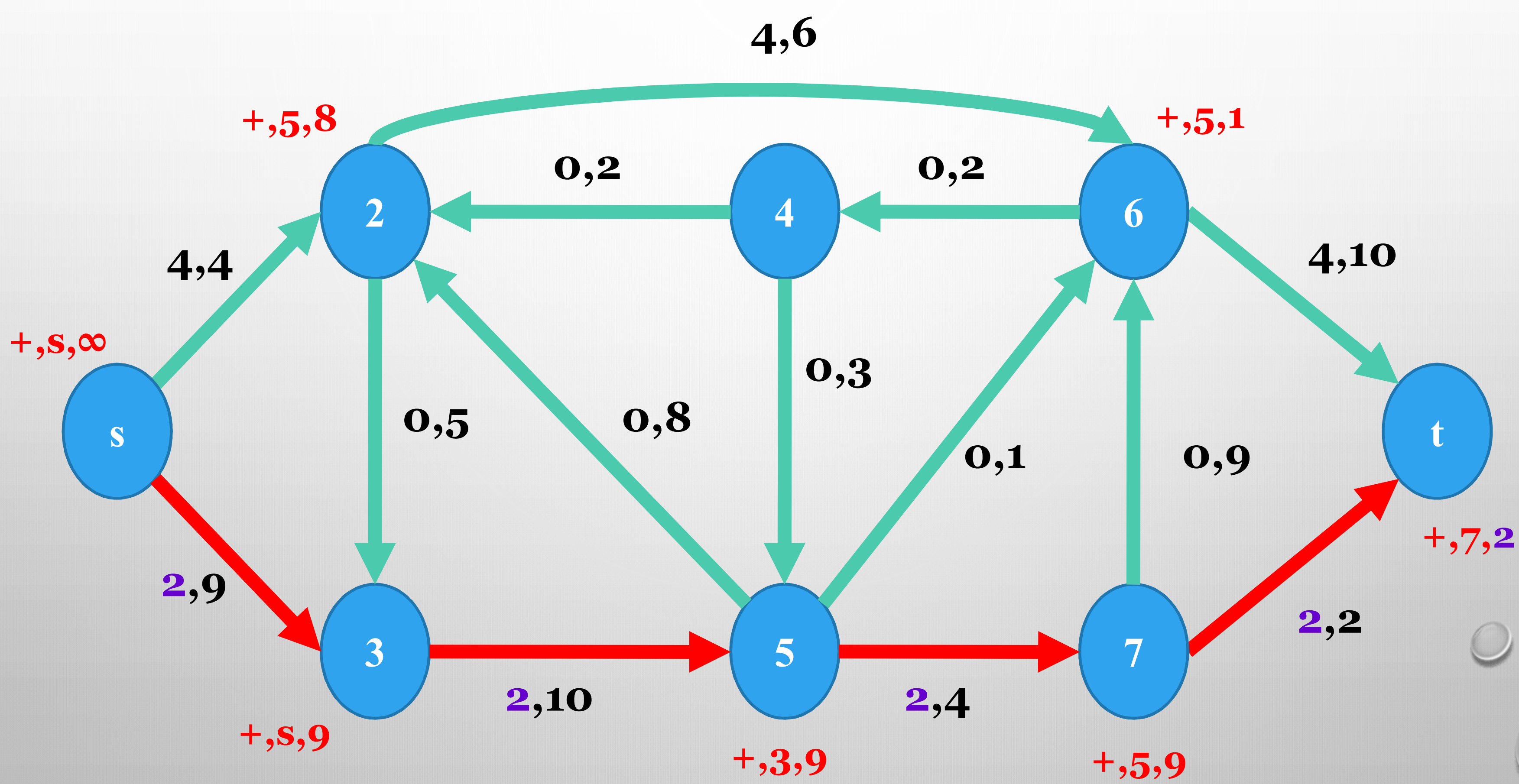
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

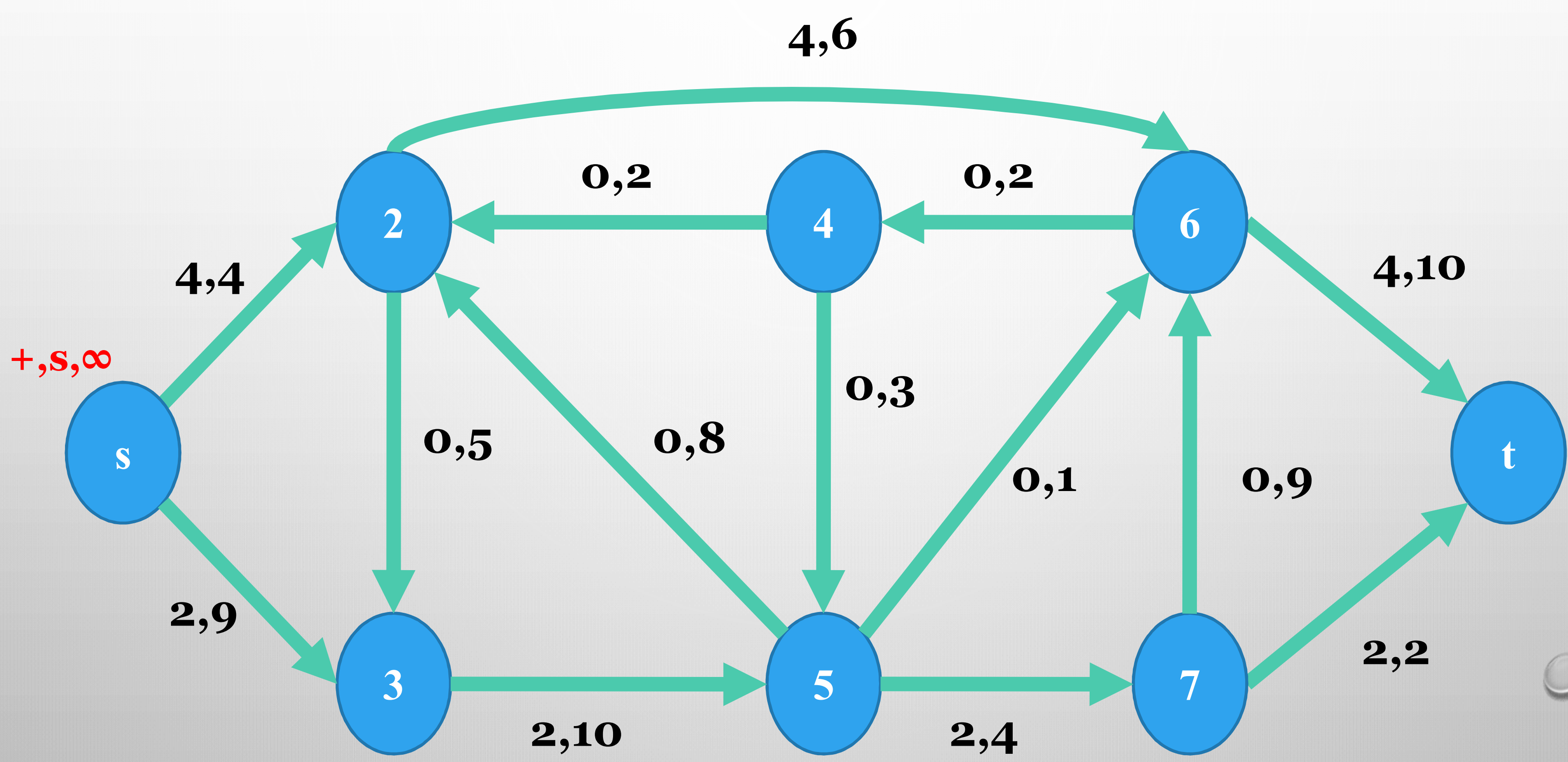
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

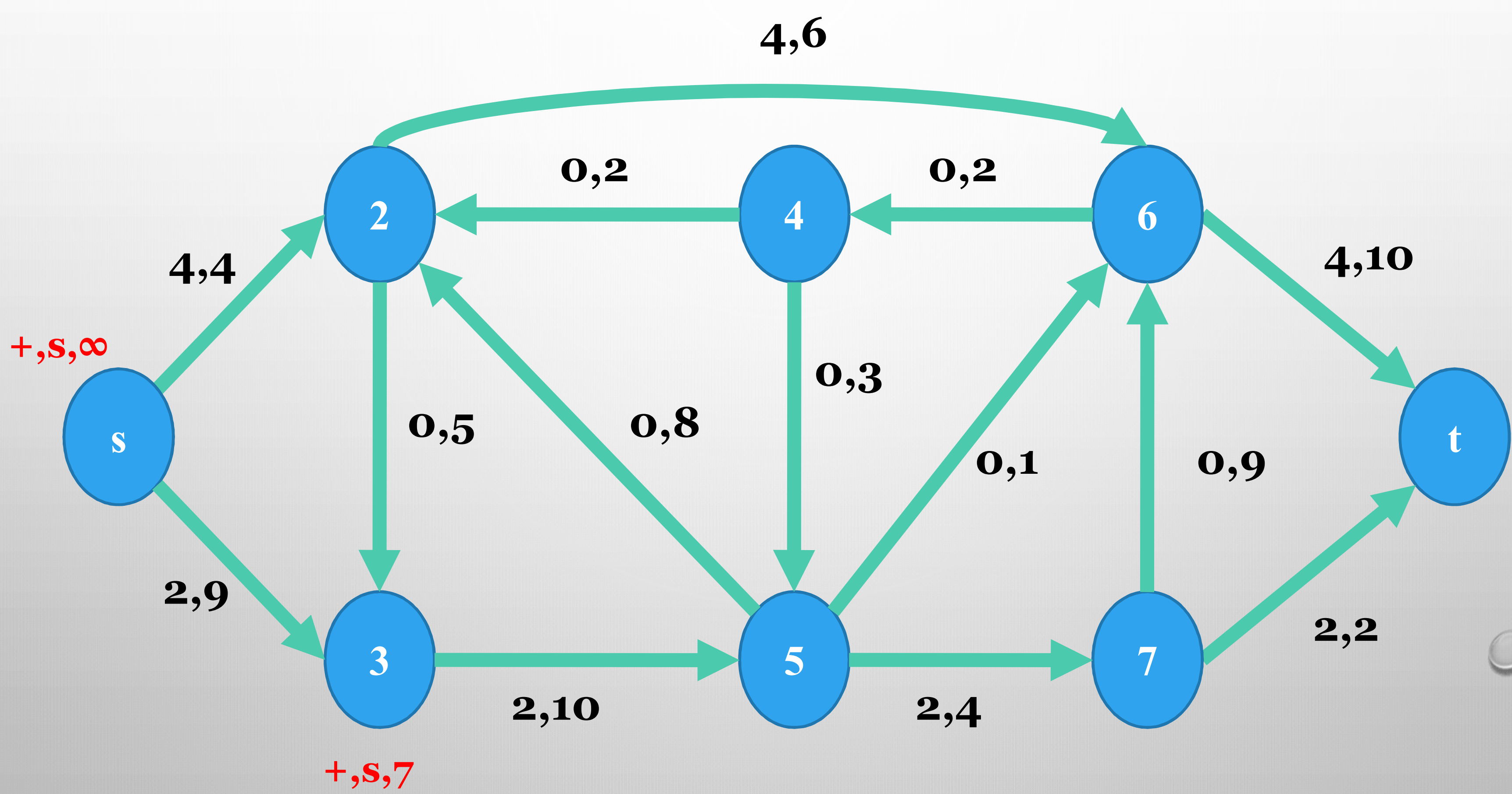
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

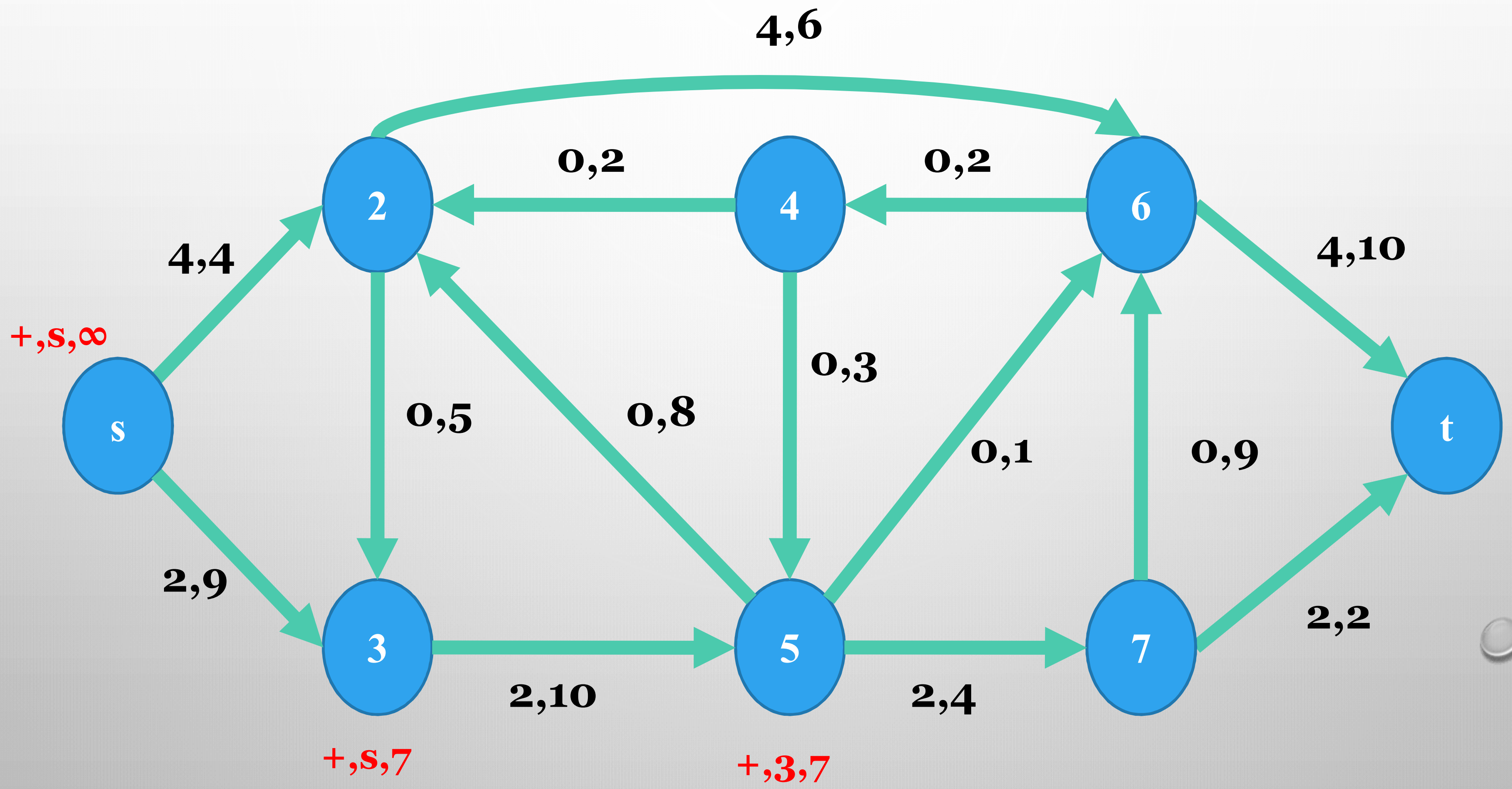
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng

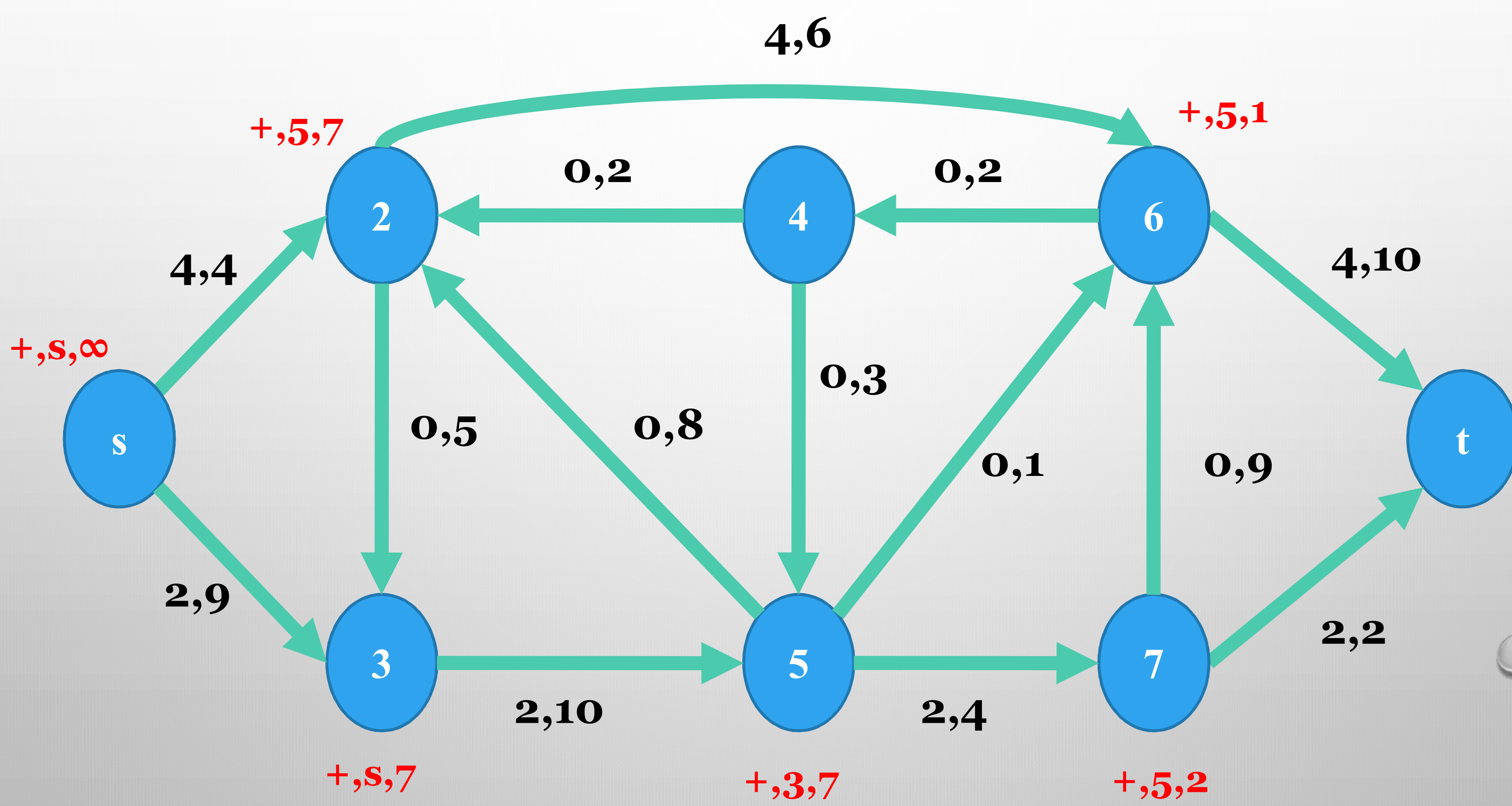


L.T.D.D.

TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

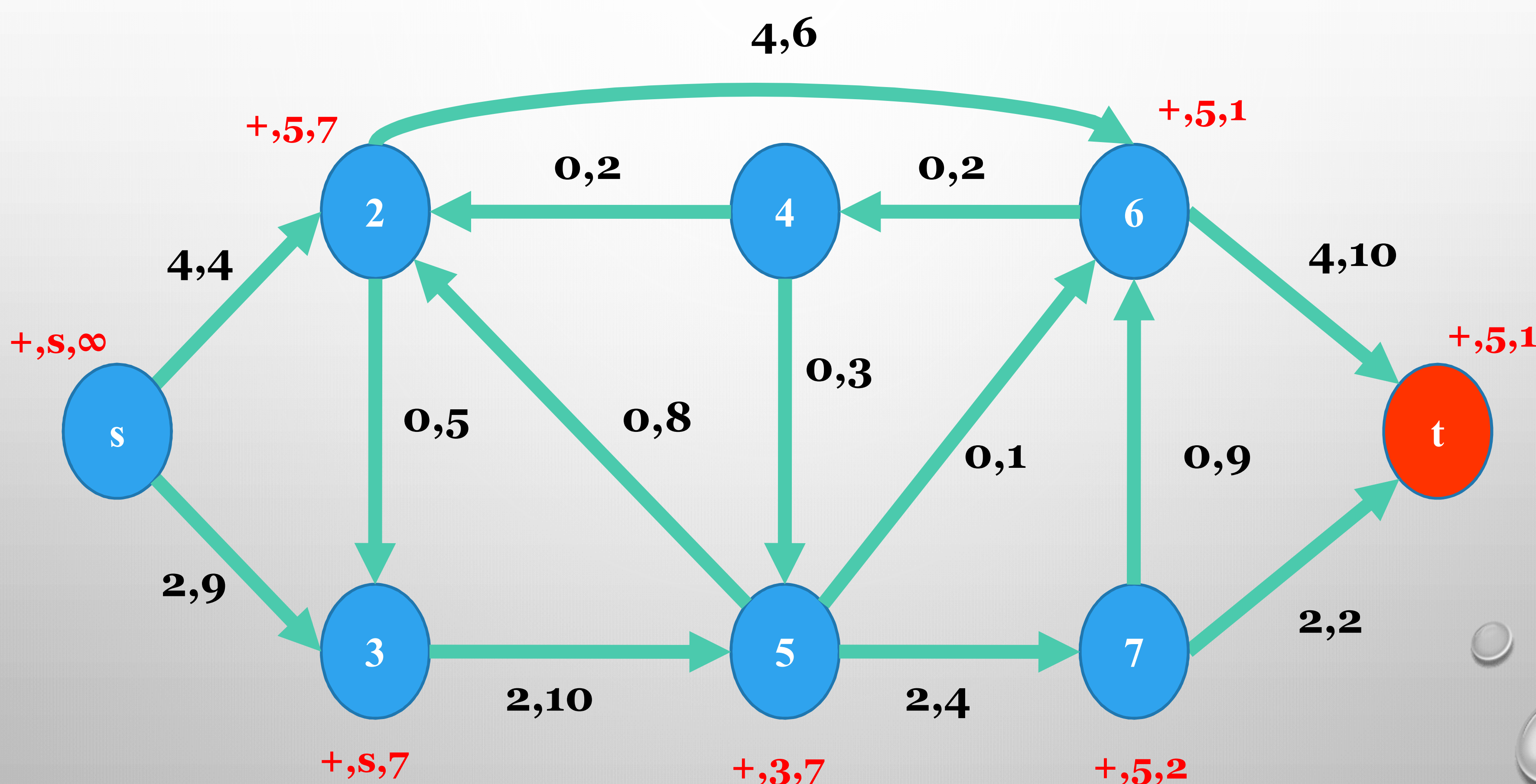
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng

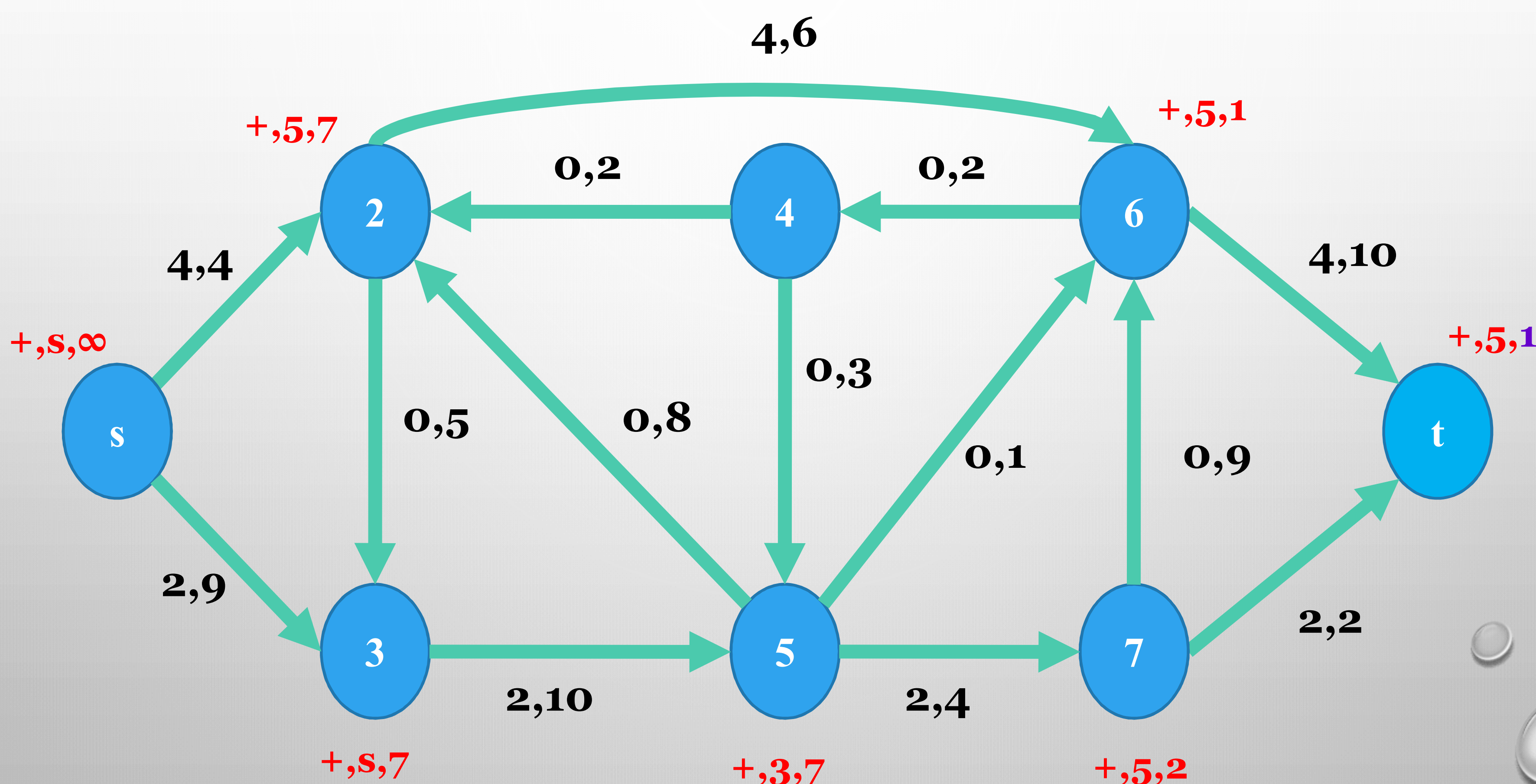


L.T.D.D.

TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

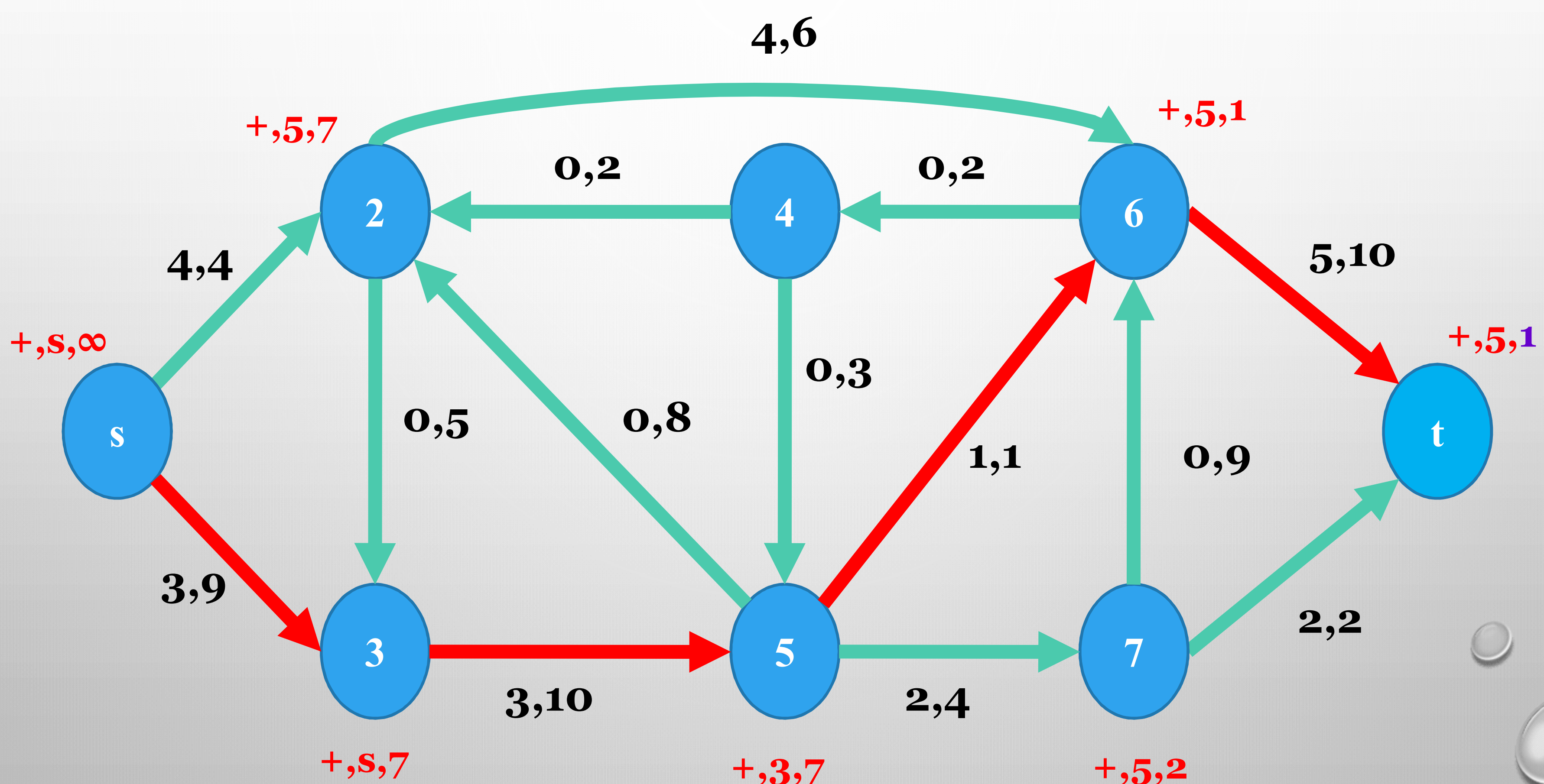
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

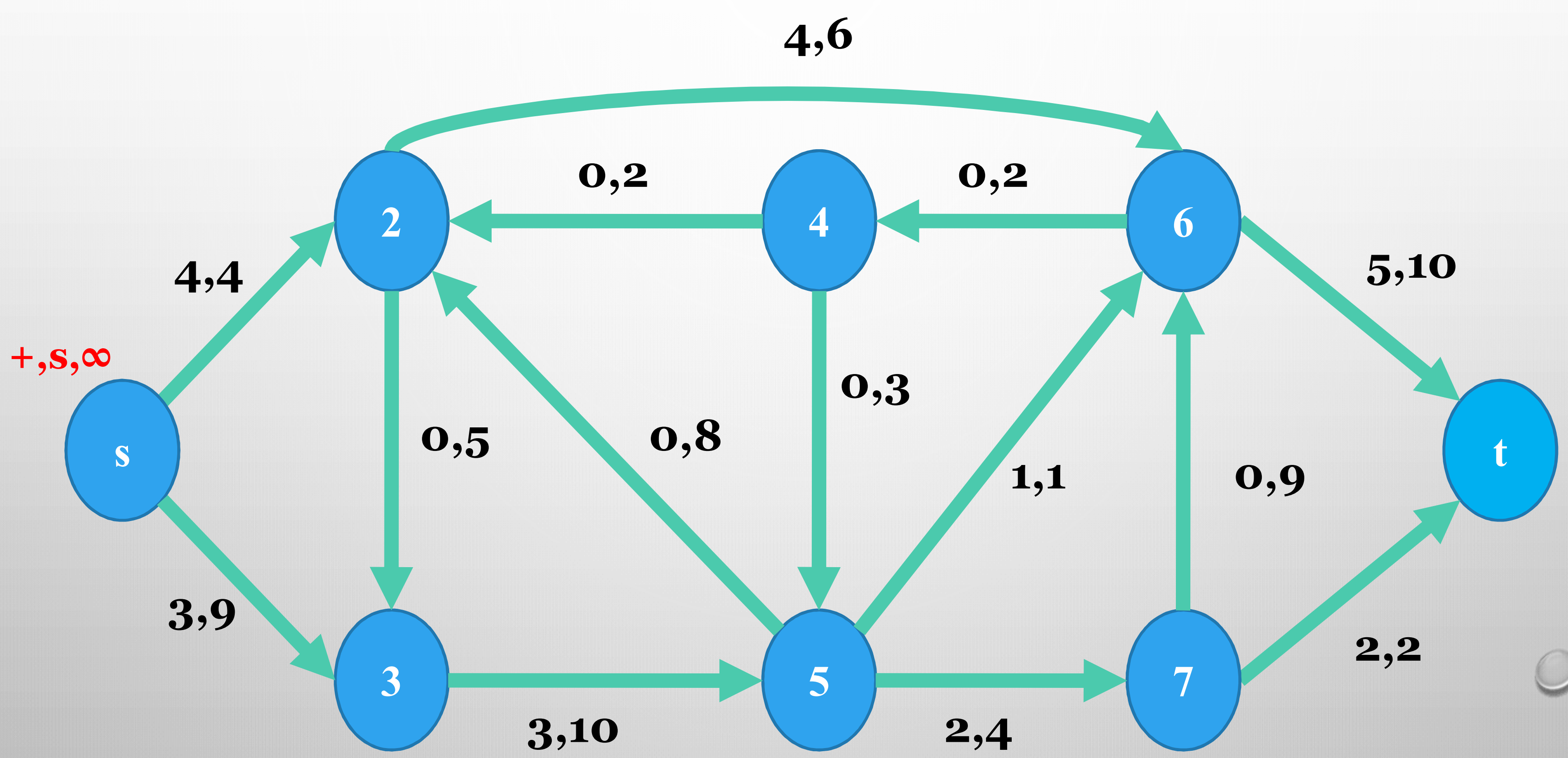
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng

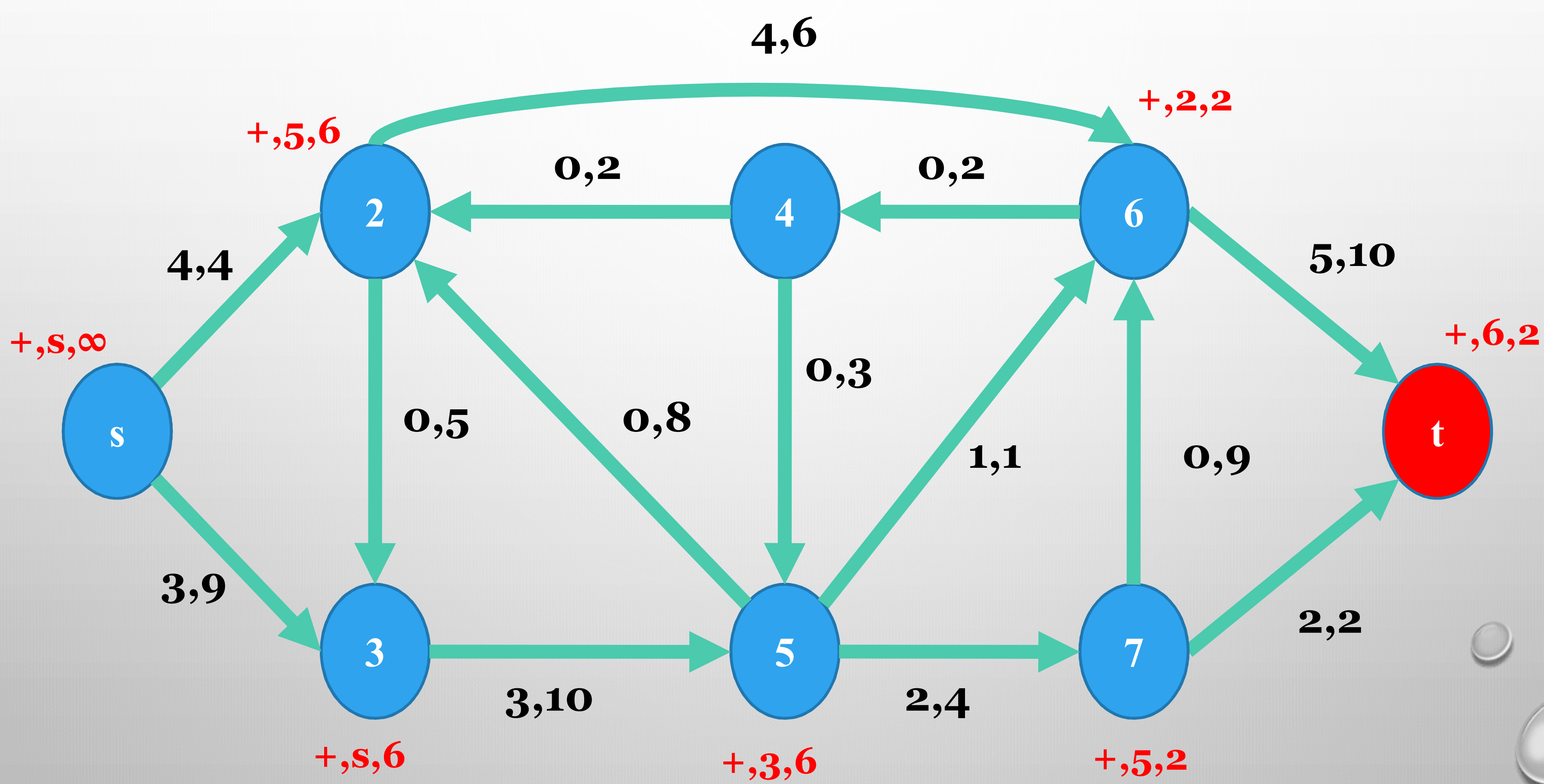


L.T.D.D.

TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng

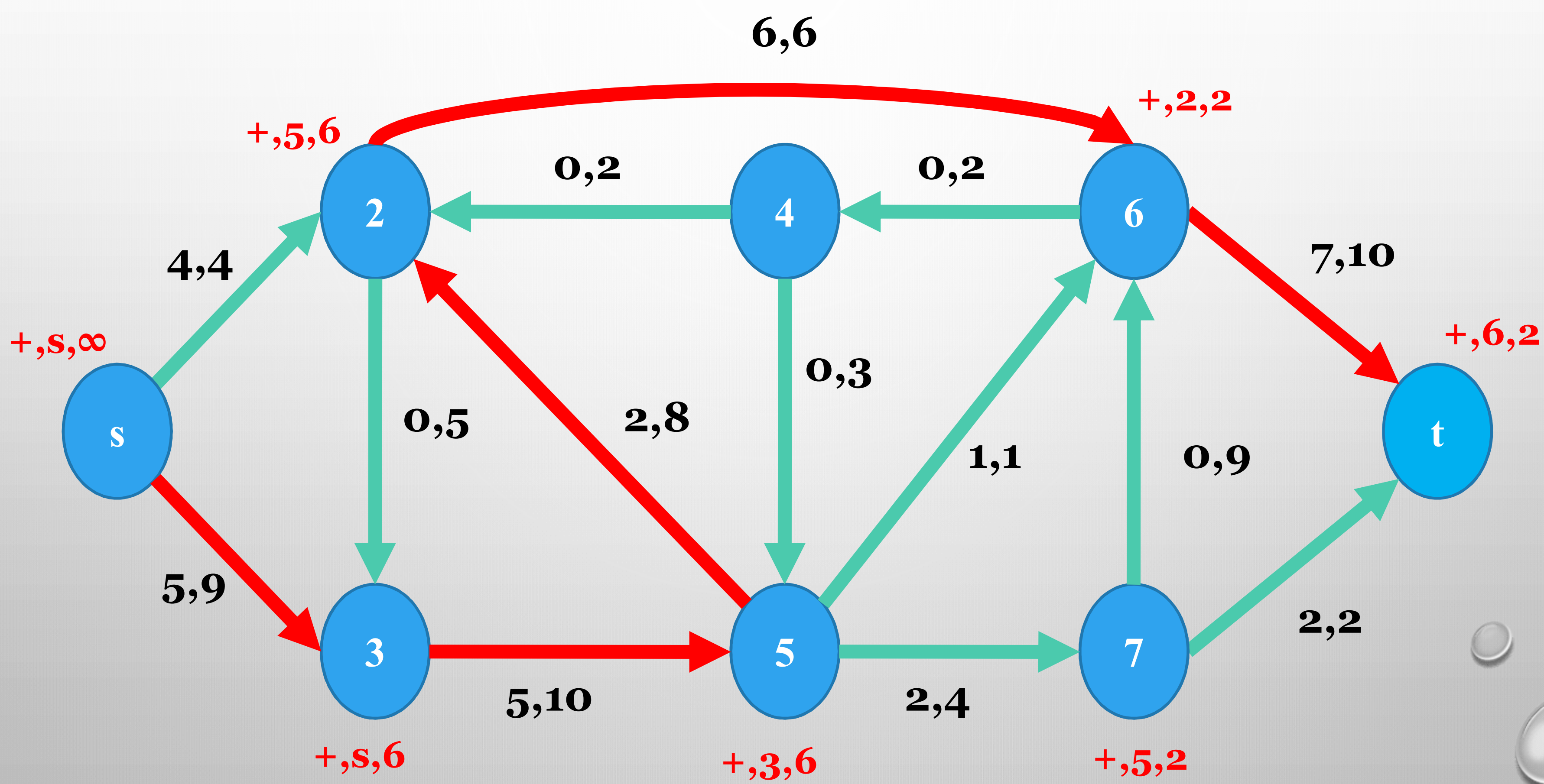


L.T.D.D.

TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

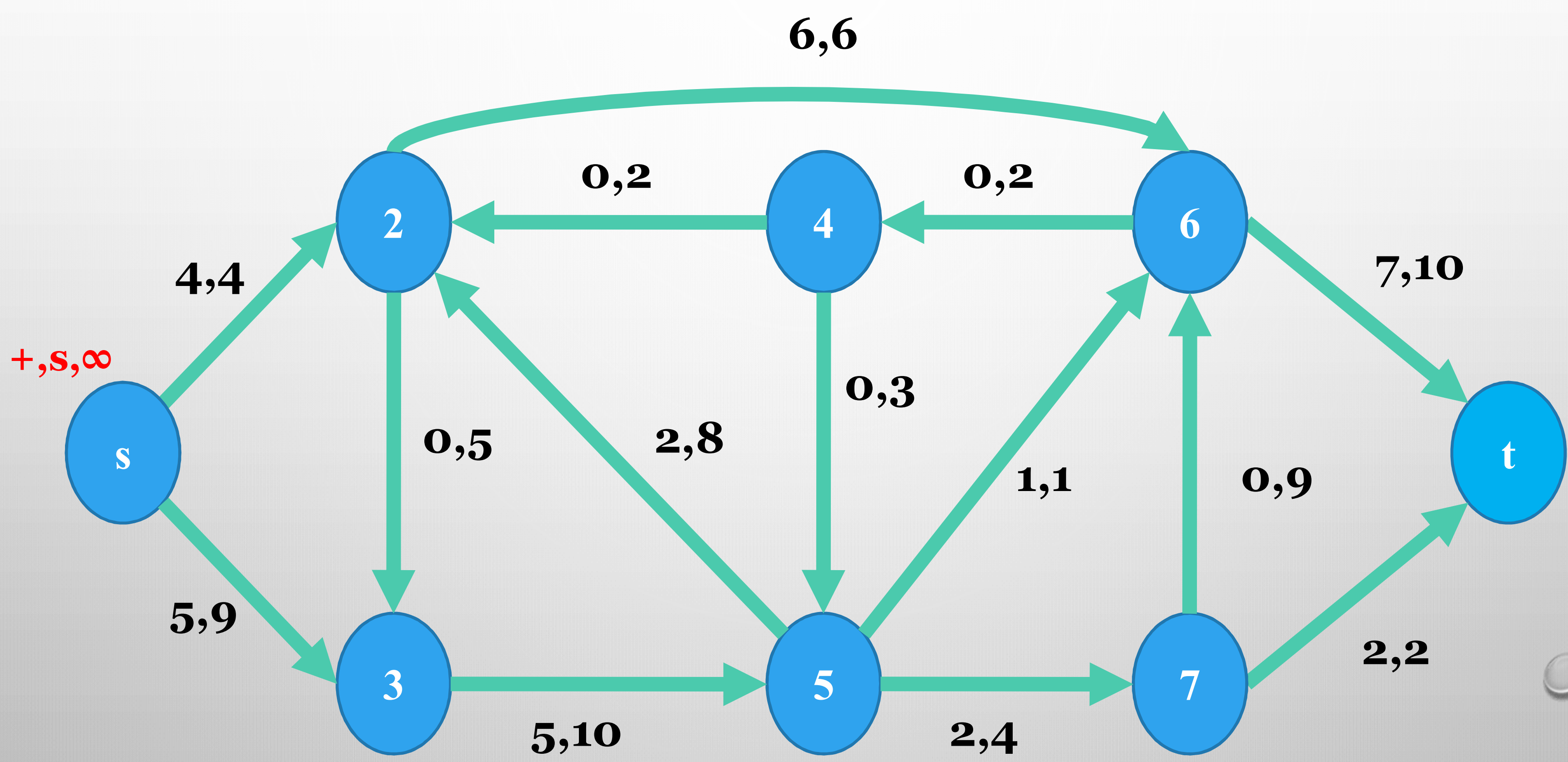
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

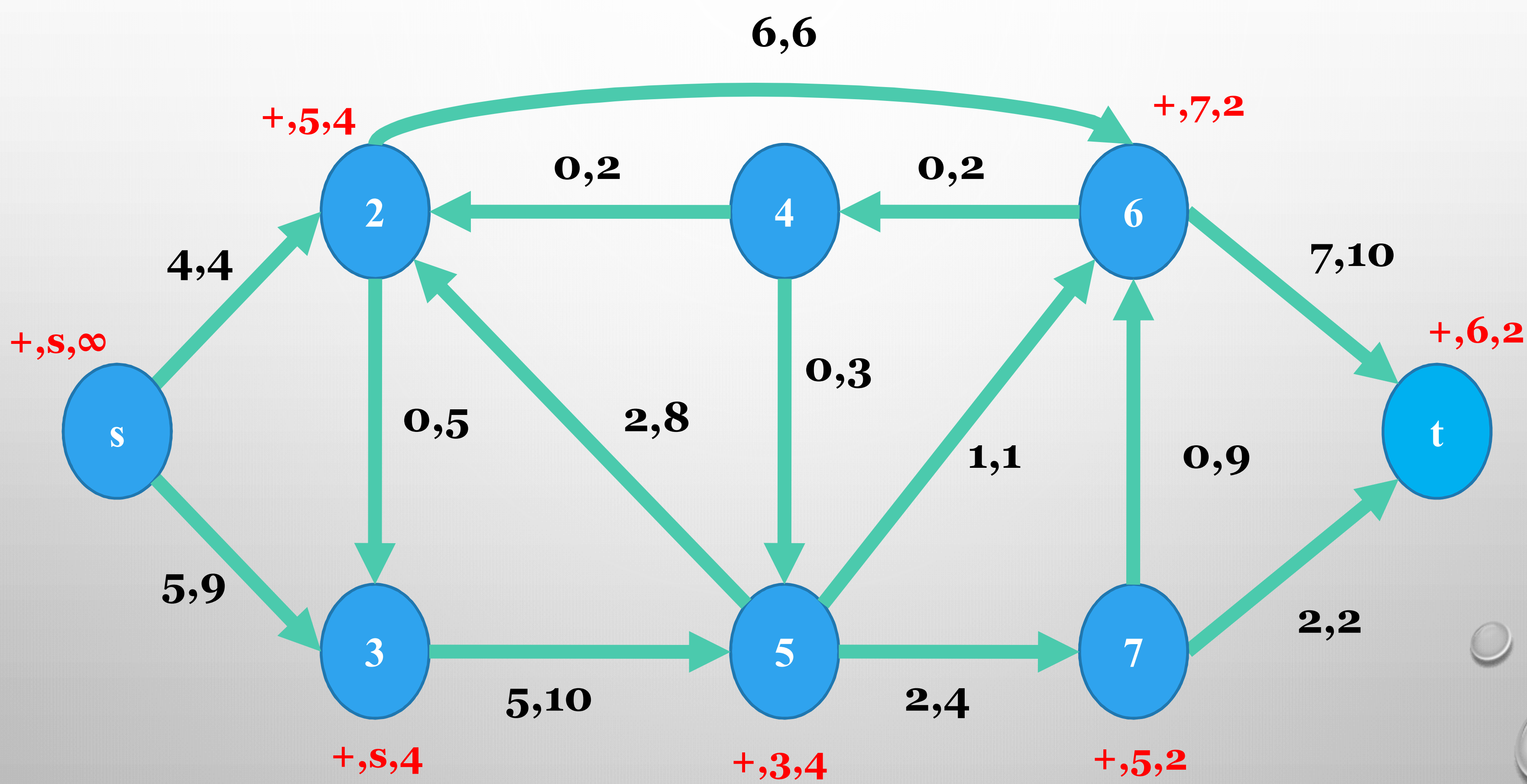
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng

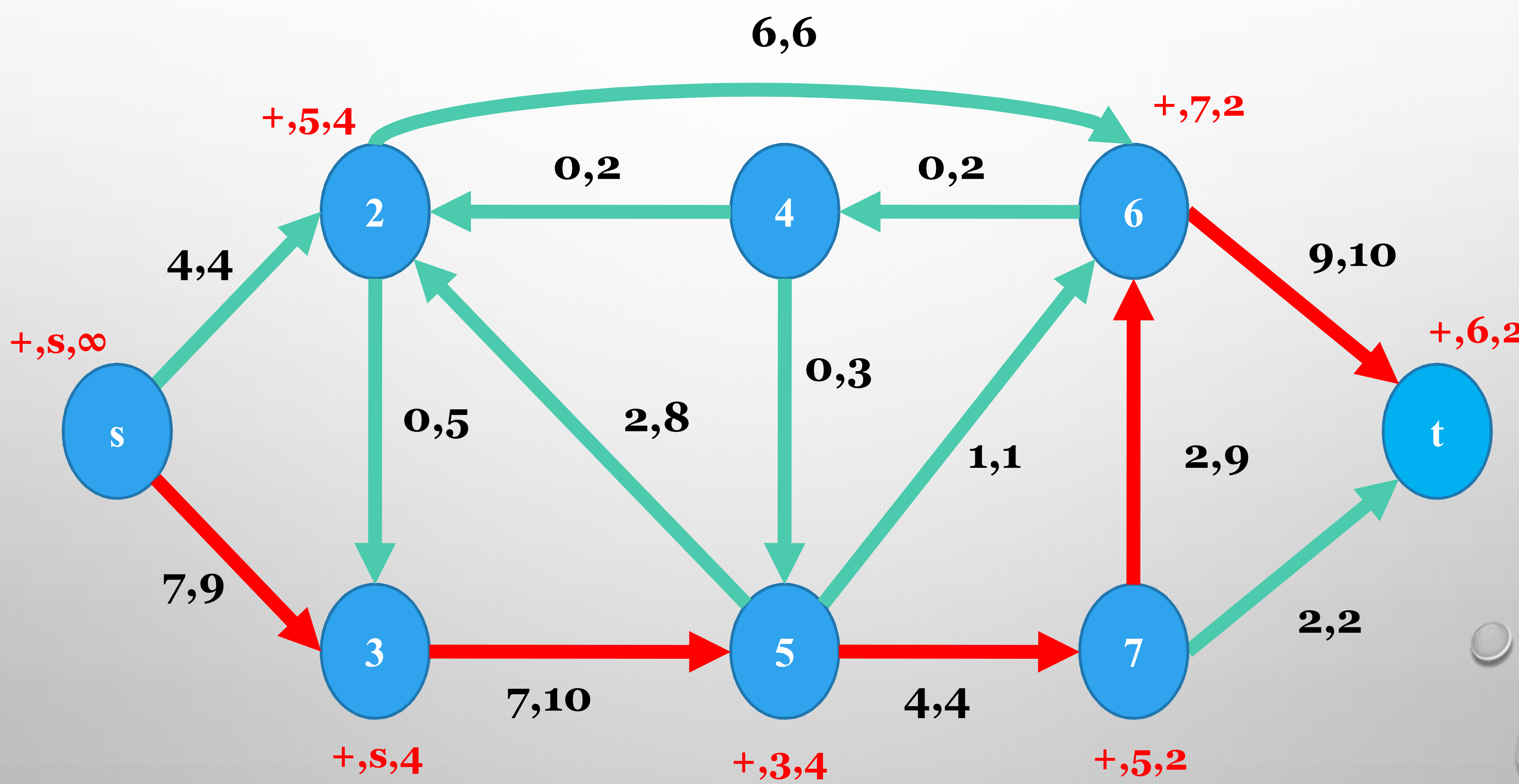


L.T.D.D.

TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

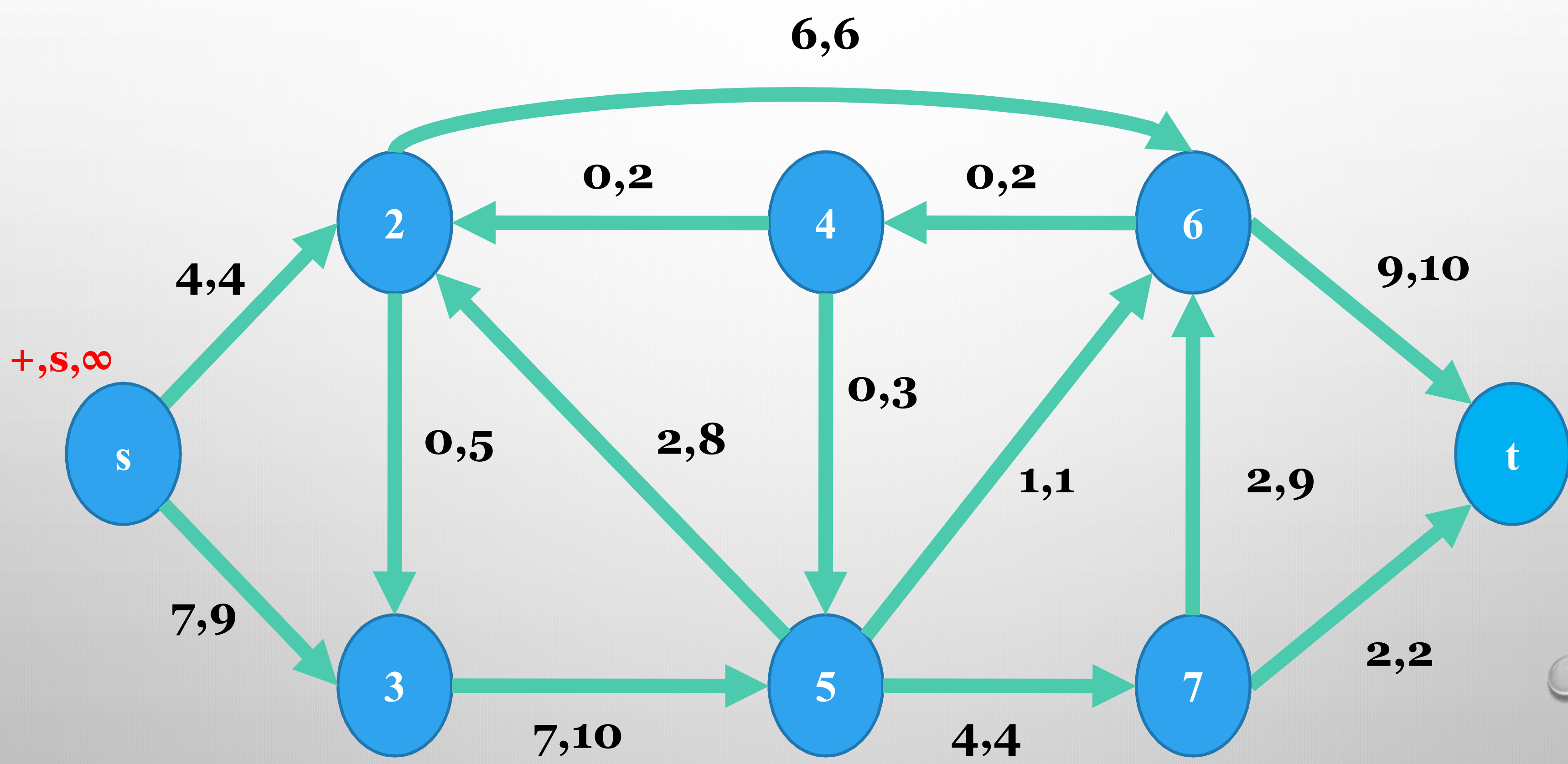
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

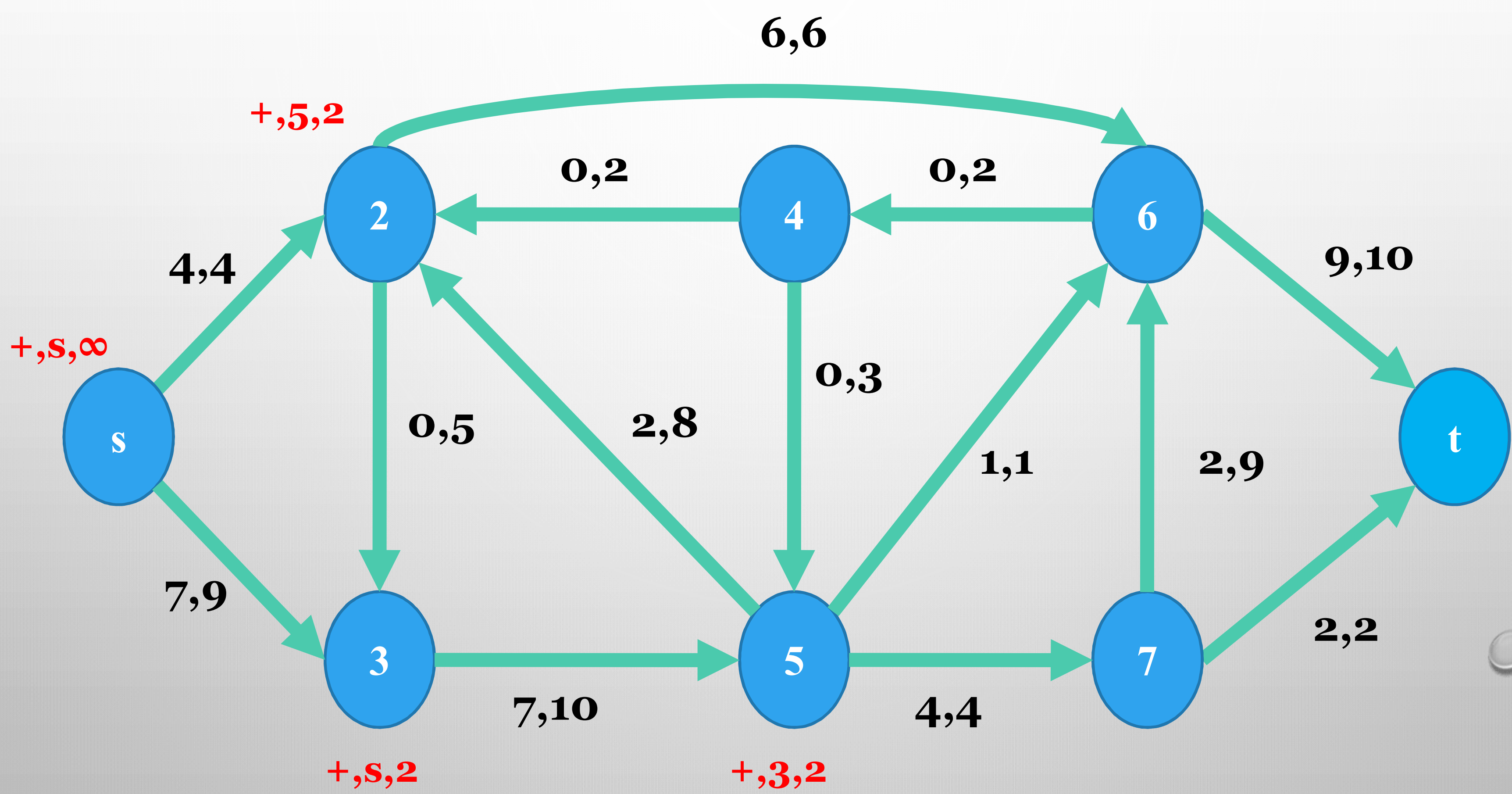
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

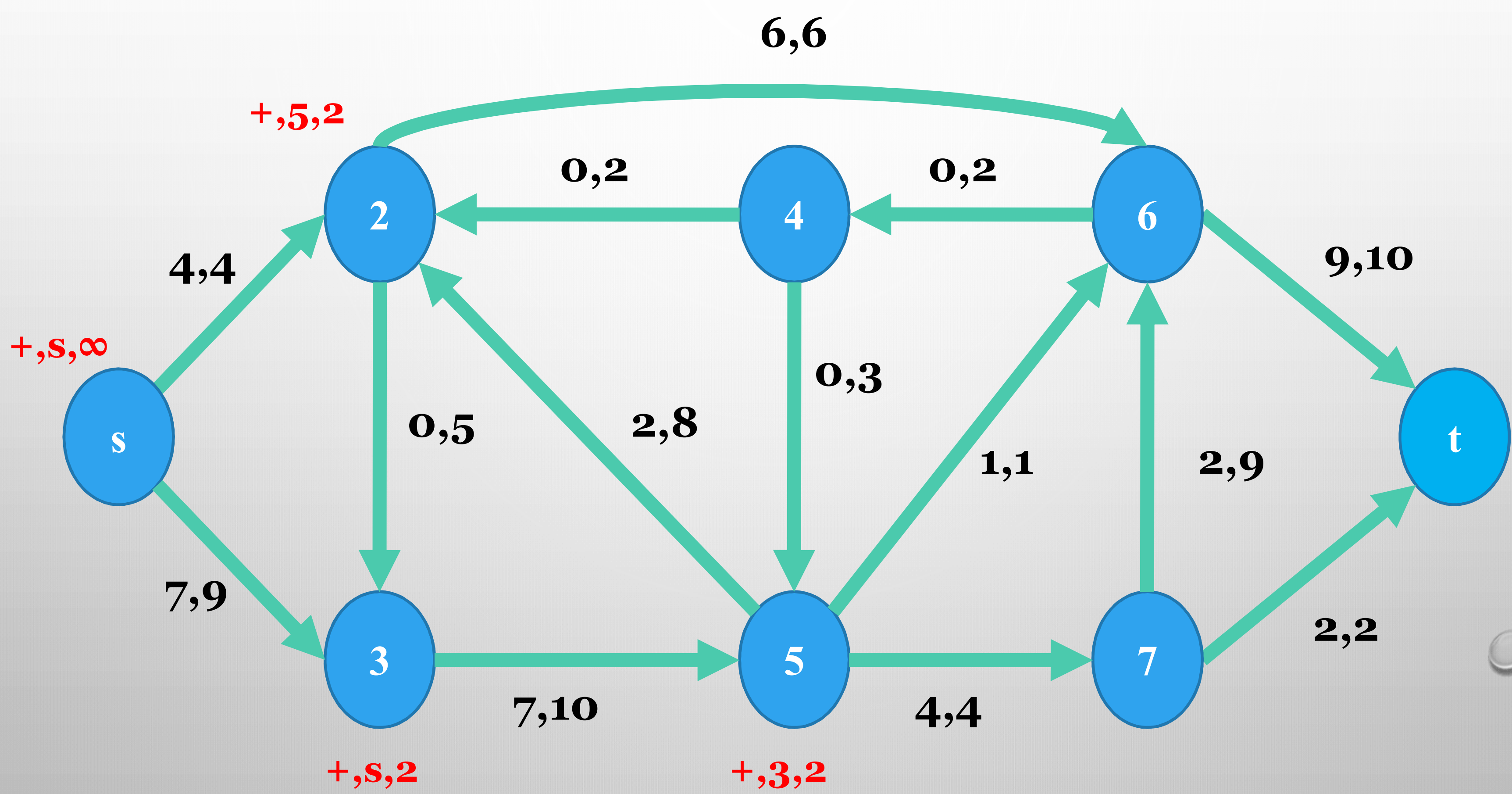
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng



Không thể gán nhãn tiếp và đỉnh thu chưa có nhãn => Giải thuật dừng

L.T.D.D.

TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

Thuật toán Ford-Fulkerson:

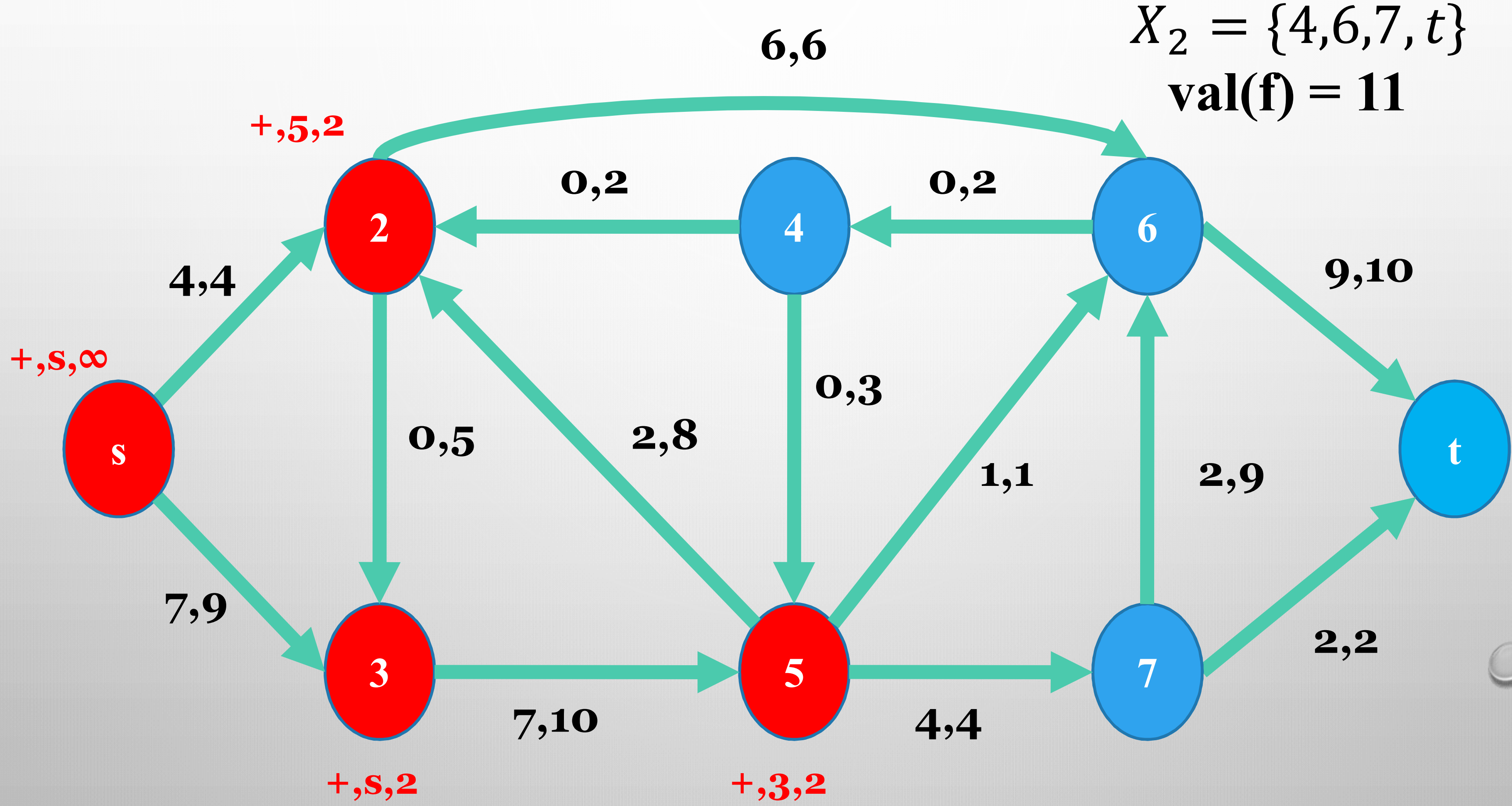
Ví dụ: Tìm luồng cực đại trong mạng

Lát cắt hẹp nhất:

$X_1 = \{s, 2,3,5\}$

$X_2 = \{4,6,7, t\}$

val(f) = 11



Không thể gán nhãn tiếp và đỉnh thu chưa có nhãn => Giải thuật dừng