



# TOÁN RỜI RẠC

# DISCRETE MATHEMATICS

LÊ THỊ PHƯƠNG DUNG

## Nội dung

1. Mệnh đề và vị từ
2. Suy luận toán học
3. Phép đếm
4. Quan hệ
5. Đại số Bool
6. Lý thuyết chia và đồng dư



# Chương 1: Mệnh đề và vị từ

- Mệnh đề
  - Định nghĩa mệnh đề
  - Các phép toán mệnh đề
  - Tương đương logic
- Vị từ
  - Định nghĩa vị từ
  - Các phép toán vị từ
  - Lượng từ



# Mệnh đề

- Định nghĩa: Một **mệnh đề** (ký hiệu bởi  $p, q, r, \dots$ ) là một **khẳng định** mà nội dung của nó là đúng hoặc sai, chứ không thể vừa đúng vừa sai
- Ví dụ:
  - $P = \text{“6 là số nguyên tố”} \rightarrow$  Mệnh đề
  - $Q = \text{“một với một là hai”} \rightarrow$  Mệnh đề
  - $R = \text{“hai thêm hai là bốn”} \rightarrow$  Mệnh đề
  - $S = \text{“bốn với một là năm”} \rightarrow$  Mệnh đề
  - $G = \text{“năm ngón tay sạch đều”} \rightarrow$  Không phải mệnh đề

# Mệnh đề

- **Chân trị** của mệnh đề: Một mệnh đề được gán giá trị **T** (True) nếu nội dung của nó đúng hoặc **F** (False) nếu nội dung của nó sai. Các giá trị T và F được gọi là chân trị/giá trị chân lý của mệnh đề
- VD: Cho hai mệnh đề
  - P = “Berlin là thủ đô của nước Đức” → Chân trị T
  - Q = “Một tứ giác có hai cạnh bằng nhau được gọi là hình vuông” → Chân trị F
- Bảng chân trị của mệnh đề:

P	Q
T	F

# Phép toán mệnh đề

- Mệnh đề phức hợp: Được xây dựng từ nhiều mệnh đề đơn bằng các phép toán mệnh đề/toán tử logic
- Các toán tử logic thường gặp

Định nghĩa	Phép toán	Ký hiệu	Thực hiện	Ý nghĩa
Phủ định	$\neg$ hoặc $-$	$\bar{P}$	1 mệnh đề P	Không là P
Hội	$\wedge$	$P \wedge Q$	2 mệnh đề P, Q	P và Q
Tuyển	$\vee$	$P \vee Q$	2 mệnh đề P, Q	P hoặc Q
Tuyển loại trừ	$\oplus$	$P \oplus Q$	2 mệnh đề P, Q	Hoặc P hoặc Q
Kéo theo	$\rightarrow$	$P \rightarrow Q$	2 mệnh đề P, Q	Nếu P thì Q
Tương đương	$\leftrightarrow$	$P \leftrightarrow Q$	2 mệnh đề P, Q	P khi và chỉ khi Q

- Cho các mệnh đề: P = “5 là số nguyên tố” và Q = “5 chia hết cho 2”
- Phát biểu các mệnh đề phức hợp  $\bar{P}$ ,  $P \wedge Q$ ,  $P \vee Q$ ,  $P \oplus Q$ ,  $P \rightarrow Q$ ,  $P \leftrightarrow Q$

# Phép toán mệnh đề

- Cho các mệnh đề:  $P = \text{"5 là số nguyên tố"}$  và  $Q = \text{"5 chia hết cho 2"}$
- Phát biểu các mệnh đề phức hợp  $\bar{P}$ ,  $P \wedge Q$ ,  $P \vee Q$ ,  $P \oplus Q$ ,  $P \rightarrow Q$ ,  $P \leftrightarrow Q$

Ký hiệu	Thực hiện	$P=T, Q=F$
$\bar{P}$	5 không là số nguyên tố	F
$P \wedge Q$	5 là số nguyên tố và nó chia hết cho 2	F
$P \vee Q$	5 là số nguyên tố hoặc nó chia hết cho 2	T
$P \oplus Q$	Hoặc 5 là số nguyên tố hoặc nó chia hết cho 2	T
$P \rightarrow Q$	Nếu 5 là số nguyên tố thì nó chia hết cho 2	F
$P \leftrightarrow Q$	5 là số nguyên tố khi và chỉ khi nó chia hết cho 2	F

# Phép toán mệnh đề

➤ Hãy biểu diễn thành biểu thức các mệnh đề sau đây:

1. Tôi vừa học Toán rồi rạc vừa học Xác suất thống kê.
2. Để đạt được kết quả cao trong kỳ thi thì bạn phải chăm chỉ học hành.
3. Nếu bạn học giỏi thì bạn sẽ được nhận phần thưởng và bằng khen.

1. Đặt  $P$  = “Tôi học Toán rồi rạc”,  $Q$  = “Tôi học xác suất thống kê”:  $P \wedge Q$
2. Đặt  $P$  = “Bạn phải chăm chỉ học hành”,  $Q$  = “Bạn đạt được kết quả cao trong kỳ thi”:  $P \rightarrow Q$
3. Đặt  $P$  = “Bạn học giỏi”,  $Q$  = “Bạn sẽ được nhận phần thưởng”,  $R$  = “Bạn sẽ nhận được bằng khen”:  $P \rightarrow (Q \wedge R)$

# Phép toán mệnh đề

➤ Bảng chân trị của phép toán mệnh đề

P	Q	$\bar{P}$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \oplus Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T	F	T	F
T	T	F	T	T	F	T	T	T

➤ Quy tắc ưu tiên:

➤  $\neg \wedge \vee \oplus \rightarrow \leftrightarrow$

➤ Nếu trong biểu thức có dấu ngoặc thì thực hiện biểu thức trong ngoặc trước





# Phép toán mệnh đề

- Biểu diễn câu phát biểu sau đây thành biểu thức mệnh đề:
  - Nếu Michelle thắng trong kỳ thi Olympic, mọi người sẽ khâm phục cô ấy và cô ấy sẽ trở nên giàu có. Nhưng nếu cô ấy không thắng thì cô ấy sẽ mất tất cả.
- Đặt các mệnh đề:
  - $P$  = “Michelle thắng trong kỳ thi Olympic”
  - $Q$  = “Mọi người sẽ khâm phục cô ấy”
  - $R$  = “Cô ấy sẽ trở nên giàu có”
  - $S$  = “Cô ấy sẽ mất tất cả”
- Biểu thức mệnh đề:
  - $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\bar{P} \rightarrow S)$



## Tương đương logic

- Một biểu thức mệnh đề luôn có chân trị đúng được gọi là **hằng đúng**
- Một biểu thức mệnh đề luôn có chân trị sai được gọi là **hằng sai**
- Một biểu thức mệnh đề không phải hằng đúng hoặc hằng sai gọi là tiếp liên
- Các mệnh đề  $p$  và  $q$  được gọi là **tương đương logic** nếu  $p \leftrightarrow q$  là hằng đúng, khi đó ta ký hiệu  $p = q$
- Mệnh đề  $q$  được gọi là **hệ quả** của mệnh đề  $p$  nếu  $p \rightarrow q$  là hằng đúng

# Các quy tắc tương đương logic

Tên luật	Tương đương
Thông trị	$P \vee T = T$ $P \wedge F = F$
Đồng nhất	$P \wedge T = P$ $P \vee F = P$
Lủy đẳng	$P \wedge P = P$ $P \vee P = P$
Phủ định kép	$\overline{\overline{P}} = P$
Bù	$P \vee \overline{P} = T$ $P \wedge \overline{P} = F$
Giao hoán	$P \wedge Q = Q \wedge P$ $P \vee Q = Q \vee P$

Tên	Tương đương
Kết hợp	$P \wedge Q \wedge R = (P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$ $P \vee Q \vee R = (P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$
Phân phối	$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
De Morgan	$\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$
Hấp thụ	$P \wedge (P \vee Q) = P$ $P \vee (P \wedge Q) = P$
Kéo theo	$P \rightarrow Q = \overline{P} \vee Q$



# Tương đương logic

- Phép tuyển loại trừ tương đương với các biểu thức

$$\begin{aligned}P \oplus Q &= (P \vee Q) \wedge (\overline{P \wedge Q}) \\&= (P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \wedge Q)\end{aligned}$$



## Tương đương logic

1. Nếu biết mệnh đề  $P \rightarrow Q$  là sai, hãy cho biết chân trị của các mệnh đề sau:

$$1. P \wedge Q \quad 2. \neg P \vee Q \quad 3. Q \rightarrow P$$

2. Cho các biểu thức mệnh đề sau:

$$1. ((P \wedge Q) \wedge R) \rightarrow (S \vee M)$$

$$2. (P \wedge (Q \wedge R)) \rightarrow (S \oplus M)$$

Xác định chân trị của các biến mệnh đề  $P, Q, R, S, M$  nếu các biểu thức mệnh đề trên là sai.

3. Nếu  $Q$  có chân trị là T, hãy xác định chân trị của các biến mệnh đề  $P, R, S$  nếu biểu thức mệnh đề sau cũng là đúng

$$(Q \rightarrow ((\neg P \vee R) \wedge \neg S)) \wedge (\neg S \rightarrow (\neg R \wedge Q))$$

## Tương đương logic

4. Chứng minh các tương đương logic sau đây:

a)  $((\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R)) \Leftrightarrow P \wedge Q$

b)  $P \wedge ((\neg Q \rightarrow (R \wedge R)) \vee \neg (Q \vee (R \wedge S) \vee (R \wedge \neg S))) \Leftrightarrow P$

c)  $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee S \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg S \vee R) \Leftrightarrow P \vee (R \wedge (S \vee \neg Q))$

5. Trong một phiên tòa xử án 3 bị can có liên quan đến vấn đề tài chánh, trước tòa cả 3 bị cáo đều tuyên thệ khai đúng sự thật và lời khai như sau :

Anh A: Chị B có tội và anh C vô tội

Chị B : Nếu anh A có tội thì anh C cũng có tội

Anh C: Tôi vô tội nhưng một trong hai người kia là có tội

Hãy xét xem ai là người có tội ?

# Vị từ

**Định nghĩa:** **Vị từ** là một **khẳng định**  $P(x, y, \dots)$ , với  $x, y, \dots$  lần lượt thuộc các tập hợp  $A, B, \dots$ , thỏa mãn các điều kiện:

- Bản thân  $P(x, y, \dots)$  không là mệnh đề
- Khi thay các giá trị  $x, y, \dots$  trong  $P$  bằng các giá trị thuộc  $A, B, \dots$  thì  $P$  trở thành mệnh đề

Ta gọi  $x, y, \dots$  là các **biến vị từ**,  $A \times B \times \dots$  là **không gian vị từ**, số biến của vị từ được gọi là **trọng lượng vị từ**

**Ví dụ:**

- $P(n) = \text{“}n \text{ là số nguyên tố”}$  là một vị từ theo biến  $n \in \mathbb{N}$ 
  - Với  $n=3$  ta được  $P(3) = \text{“}3 \text{ là số nguyên tố”}$  là mệnh đề có chân trị T
  - Với  $n=4$  ta được  $P(4) = \text{“}4 \text{ là số nguyên tố”}$  là mệnh đề có chân trị F

# Các phép toán vị từ

Tương tự với phép toán mệnh đề

Định nghĩa	Phép toán	Ký hiệu	Thực hiện	Ý nghĩa
Phủ định	$\neg$ hoặc $-$	$\overline{P(x)}$	1 vị từ $P(x)$	Với $x=a$ , không là $P(a)$
Hội	$\wedge$	$P(x) \wedge Q(x)$	2 vị từ $P(x), Q(x)$	Với $x=a$ , $P(a)$ và $Q(a)$
Tuyển	$\vee$	$P(x) \vee Q(x)$	2 vị từ $P(x), Q(x)$	Với $x=a$ , $P(a)$ hoặc $Q(a)$
Tuyển loại trừ	$\oplus$	$P(x) \oplus Q(x)$	2 vị từ $P(x), Q(x)$	Với $x=a$ , hoặc $P(a)$ hoặc $Q(a)$
Kéo theo	$\rightarrow$	$P(x) \rightarrow Q(x)$	2 vị từ $P(x), Q(x)$	Với $x=a$ , nếu $P(a)$ thì $Q(a)$
Tương đương	$\leftrightarrow$	$P(x) \leftrightarrow Q(x)$	2 vị từ $P(x), Q(x)$	Với $x=a$ , $P(a)$ khi và chỉ khi $Q(a)$



# Lượng từ

Cho  $P(x)$  là vị từ theo biến  $x \in A$ . Khi đó, có ba trường hợp có thể xảy ra:

- TH1: Khi thay  $x$  bởi  $a$  bất kỳ trong  $A$ , ta được  $P(a)$  luôn có chân trị T
- TH2: Khi thay  $x = a \in A$ , ta được  $P(a)$  có chân trị T và khi thay  $x = b \in A$ , ta được  $P(b)$  có chân trị F
- TH3: Khi thay  $x$  bởi  $a$  bất kỳ trong  $A$ , ta được  $P(a)$  luôn có chân trị F

**Ví dụ:**

- $P(x) = "x \geq 0"$  với không gian vị từ là tập số tự nhiên  $\mathbb{N}$ . Khi ta thay  $x$  bởi bất kỳ phần tử  $a \in \mathbb{N}$ , ta luôn có  $P(a)$  là đúng
- $P(x) = "x \geq 0"$  với không gian vị từ là tập số nguyên  $\mathbb{Z}$ . Khi thay  $x=1$ , ta có  $P(1)$  đúng, nhưng khi thay  $x=-1$ , ta có  $P(-1)$  sai
- $P(x) = "x < 0"$  với không gian vị từ là tập số tự nhiên  $\mathbb{N}$ . Khi ta thay  $x$  bởi bất kỳ phần tử  $a \in \mathbb{N}$ , ta luôn có  $P(a)$  sai

# Lượng từ

**Nhận xét:** Có một và chỉ một trong ba trường hợp trên có thể xảy ra

- Nếu TH1 xảy ra thì mệnh đề “với mọi  $x \in A$ ,  $P(x)$ ”, ký hiệu “ $\forall x \in A, P(x)$ ” là mệnh đề đúng. Mệnh đề này sai khi TH2 hoặc TH3 xảy ra
- Nếu TH2 xảy ra thì mệnh đề “tồn tại  $x \in A$ ,  $P(x)$ ”, ký hiệu “ $\exists x \in A, P(x)$ ” là mệnh đề đúng. Mệnh đề này sai khi TH 3 xảy ra

Ta gọi  $\forall$  là lượng từ **với mọi/phổ dụng** và  $\exists$  là lượng từ **tồn tại**

# Lượng từ

Quy tắc đối với lượng từ phổ dụng/với mọi:

- Quy tắc **đặc biệt hóa phổ dụng**: Nếu một mệnh đề đúng có dạng lượng từ hóa phổ dụng “ $\forall x \in A, P(x)$ ” thì khi thay  $x$  bởi bất kỳ  $a \in A$  ta được mệnh đề đúng  $P(a)$
- Quy tắc **tổng quát hóa phổ dụng**: Nếu trong mệnh đề lượng từ hóa phổ dụng “ $\forall x \in A, P(x)$ ” khi thay  $x$  bởi  $a \in A$  tùy ý mà mệnh đề  $P(a)$  là đúng thì mệnh đề “ $\forall x \in A, P(x)$ ” là đúng



# Lượng từ

VD: Biểu diễn câu: “Nếu một người phụ nữ đã sinh con thì người phụ nữ đó sẽ là mẹ của một người nào khác” thành biểu thức logic

Đặt:

➤  $P(x) = \text{“}x \text{ là phụ nữ”}$

➤  $Q(x) = \text{“}x \text{ đã sinh con”}$

➤  $R(x,y) = \text{“}x \text{ là mẹ của } y\text{”}$

Biểu thức:  $\forall x, \exists y [P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow R(x, y)$



# Lượng từ

VD: Biểu diễn câu “ Nếu hai người thích cùng một người thì họ không thích nhau” dưới dạng logic vị từ

Đặt  $P(x,y)$  = “x thích y”, ta có thể biểu diễn

$$\forall x, \forall y, \exists z [P(x, z) \wedge P(y, z)] \rightarrow [\overline{P(x, y)} \wedge \overline{P(y, x)}]$$

# Lượng từ

VD: Ba phát biểu sau đây được gọi là một suy lý, hai câu đầu là tiền đề và câu thứ ba là kết luận. Hãy biểu diễn các câu sau bằng logic vị từ:

“Tất cả sư tử Hà Đông đều hung dữ”

“Một số sư tử Hà Đông không uống cà phê”

“Một số sinh vật hung dữ không uống cà phê”

Đặt:

➤  $P(x)$  = “x là sư tử Hà Đông”

➤  $Q(x)$  = “x hung dữ”

➤  $R(x)$  = “x uống cà phê”

Không gian vị từ là tập hợp toàn bộ sinh vật

Biểu thức:

➤  $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$

➤  $\exists x[P(x) \wedge \overline{R(x)}]$

➤  $\exists x[Q(x) \wedge \overline{R(x)}]$

# Lượng từ

VD: Tìm mệnh đề phủ định của phát biểu sau:

“Tất cả sinh viên đều đã học Toán rời rạc”

Phát biểu của mệnh đề phủ định:

- “Không phải tất cả sinh viên đều đã học Toán rời rạc”
- “Có ít nhất một sinh viên chưa học Toán rời rạc”

Đặt:  $P(x)$  = “ $x$  đã học Toán rời rạc”, không gian vị từ là tập hợp toàn bộ sinh viên

Biểu thức của mệnh đề phát biểu:  $\forall x P(x)$

Biểu thức của mệnh đề phủ định:

- $\overline{\forall x P(x)}$
- $\exists x \overline{P(x)}$



# Lượng từ

Phép phủ định của các lượng từ:

➤  $\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$

➤  $\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$



# Lượng từ

Cho vị từ  $P(a, b) = \text{“Cặp số nguyên thỏa mãn } a + b = 5\text{”}$

Ký hiệu	Ý nghĩa	Chân trị
$\forall a \forall b P(a, b)$	Tất cả cặp số nguyên đều thỏa mãn $a + b = 5$	F
$\exists a \exists b P(a, b)$	Tồn tại cặp số nguyên thỏa mãn $a + b = 5$	T
$\forall a \exists b P(a, b)$	Với mỗi số nguyên $a$ , tồn tại số nguyên $b$ sao cho $a + b = 5$	T
$\exists b \forall a P(a, b)$	Tồn tại số nguyên $b$ sao cho với mọi số nguyên $a$ ta có $a + b = 5$	F
$\exists a \forall b P(a, b)$	Tồn tại số nguyên $a$ sao cho với mọi số nguyên $b$ ta có $a + b = 5$	F
$\forall b \exists a P(a, b)$	Với mỗi số nguyên $b$ , tồn tại số nguyên $a$ sao cho $a + b = 5$	T

# Lượng từ

Định lý: Cho vị từ  $P(a, b)$ . Khi đó:

- $\forall a \forall b P(a, b) = \forall b \forall a P(a, b)$
- $\exists a \exists b P(a, b) = \exists b \exists a P(a, b)$
- Nếu  $\exists a \forall b P(a, b)$  thì  $\forall b \exists a P(a, b)$
- Nếu  $\exists b \forall a P(a, b)$  thì  $\forall a \exists b P(a, b)$

Ký hiệu	Ý nghĩa	Chân trị
$\forall a \forall b P(a, b)$	Tất cả cặp số nguyên đều thỏa mãn $a + b = 5$	F
$\exists a \exists b P(a, b)$	Tồn tại cặp số nguyên thỏa mãn $a + b = 5$	T
$\forall a \exists b P(a, b)$	Với mỗi số nguyên a, tồn tại số nguyên b sao cho $a + b = 5$	T
$\exists b \forall a P(a, b)$	Tồn tại số nguyên b sao cho với mọi số nguyên a ta có $a + b = 5$	F
$\exists a \forall b P(a, b)$	Tồn tại số nguyên a sao cho với mọi số nguyên b ta có $a + b = 5$	F
$\forall b \exists a P(a, b)$	Với mỗi số nguyên b, tồn tại số nguyên a sao cho $a + b = 5$	T

# Lượng từ

VD: Trên không gian là tập số nguyên, cho các vị từ sau:

$$P(x) = \{x > 0\} \quad Q(x) = \{x \text{ là số chẵn}\}$$

$$R(x) = \{x \text{ là số chính phương}\}$$

$$S(x) = \{x \text{ chia hết cho } 4\} \quad T(x) = \{x \text{ chia hết cho } 5\}$$

a) Viết dạng ký hiệu của những mệnh đề sau:

1. Có ít nhất 1 số nguyên chẵn.
2. Tồn tại 1 số nguyên dương là số chẵn.
3. Nếu  $x$  chẵn, thì  $x$  không chia hết cho 5.
4. Không có số nguyên chẵn nào là chia hết cho 5.
5. Tồn tại 1 số nguyên chẵn chia hết cho 4.
6. Nếu  $x$  chẵn và  $x$  là số chính phương, thì  $x$  chia hết cho 4.

b) Xác định chân trị của mỗi mệnh đề

c) Với mỗi mệnh đề sai, hãy cho một dẫn chứng cụ thể.

# Lượng từ

$$P(x) = \{x > 0\}$$

$$Q(x) = \{x \text{ là số chẵn}\}$$

$$R(x) = \{x \text{ là số chính phương}\}$$

$$S(x) = \{x \text{ chia hết cho 4}\}$$

$$T(x) = \{x \text{ chia hết cho 5}\}$$

Mệnh đề	Biểu thức logic	Chân trị	Giải thích
Có ít nhất 1 số nguyên chẵn.	$\exists x Q(x)$	T	
Tồn tại 1 số nguyên dương là số chẵn.	$\exists x [P(x) \wedge Q(x)]$	T	
Nếu x chẵn, thì x không chia hết cho 5.	$\forall x [Q(x) \rightarrow \overline{T(x)}]$	F	Tại giá trị $x = 10$ : $Q(10) = T$ , $\overline{T(10)} = F$
Không có số nguyên chẵn nào là chia hết cho 5.	$\forall x [Q(x) \rightarrow \overline{T(x)}]$	F	Tại giá trị $x = 10$ : $Q(10) = T$ , $\overline{T(10)} = F$
Tồn tại 1 số nguyên chẵn chia hết cho 4.	$\exists x [Q(x) \wedge S(x)]$	T	
Nếu x chẵn và x là số chính phương, thì x chia hết cho 4.	$\forall x [Q(x) \wedge R(x) \rightarrow S(x)]$	T	

# Tóm tắt chương 1

- Định nghĩa mệnh đề và vị từ
- Ký hiệu và ý nghĩa các phép toán: phủ định, hội, tuyển, tuyển loại trừ, kéo theo và tương đương
- Các quy tắc tương đương logic
- Ký hiệu và ý nghĩa các lượng từ: với mọi và tồn tại
- Các dạng bài tập:
  - Xác định chân trị của (biểu thức) mệnh đề
  - Chứng minh các biểu thức tương đương logic
  - Biểu diễn câu phát biểu thành biểu thức logic và ngược lại

# Giới thiệu chương 2

## Suy luận toán học

- Các quy tắc suy luận
- Các phương pháp chứng minh

