Chương 3: Phép đếm

- **Nguyên lý Dirichlet**
- **Các phương pháp đếm cơ bản**
  - Nguyên lý tính lực lượng tập hợp
  - Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp
- **Các phương pháp đếm nâng cao**
  - Phương pháp truy hồi
  - *Phương pháp song ánh*
  - *Phương pháp quỹ đạo*
  - *Phương pháp đa thức và số phức*

L.T.D.D.

Nguyên lý Dirichlet

- **Nguyên lý:** Cho n và k là các số nguyên dương. Nếu ta xếp n vật vào k cái hộp thì bao giờ ta cũng tìm được ít nhất một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ vật, với $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{k}$.
- **VD**: CMR trong 5 số nguyên tùy ý luôn tìm được 3 số có tổng chia hết cho 3.
- Một số nguyên chia cho 3 sẽ xảy ra 1 trong 3 trường hợp (TH): Chia hết cho 3; Chia cho 3 dư 1; Chia cho 3 dư 2.
- 5 số nguyên này sẽ rơi vào 3 TH, theo nguyên lý Dirichlet sẽ có ít nhất $\left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil = 2$ số rơi vào chung một TH.
  - Nếu 3 số rơi vào chung 1 TH thì tổng của 3 số này chia hết cho 3
  - Nếu 2 số rơi vào 1 TH thì bỏ qua 2 số và TH này. Ta xét tiếp 3 số và 2 TH còn lại, theo Dirichlet lại có ít nhất $\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2$ số rơi vào 1 TH. Vậy số còn lại sẽ rơi vào TH còn lại. Khi đó ở mỗi TH lấy một số, ta có tổng của 3 số này chi hết cho 3

L.T.D.D.

Nguyên lý Dirichlet

- VD: CMR trong 11 số nguyên tùy ý luôn tìm được 2 số mà hiệu bình phương của chúng chia hết cho 20.
- Theo Dirichlet, trong 11 số nguyên tùy ý luôn tìm được 2 số có cùng số dư khi chia cho 10, gọi hai số này là

  $a_1 = 10q_1 + r$ và

  $a_2 = 10q_2 + r$.

  Ta có:

$$
\begin{aligned}
a_1^2 - a_2^2 &= (10q_1 + r)^2 - (10q_2 + r)^2 \\
&= (10q_1)^2 + 20q_1 + r^2 - (10q_2)^2 - 20q_2 - r^2 \\
&= (10q_1)^2 + 20q_1 - (10q_2)^2 - 20q_2 \\
&= 20(5q_1^2 - 5q_2^2 + q_1 - q_2) \,\vdots\, 20
\end{aligned}
$$

Vậy trong 11 số nguyên tùy ý luôn tìm được 2 số mà hiệu bình phương của chúng chia hết cho 20.

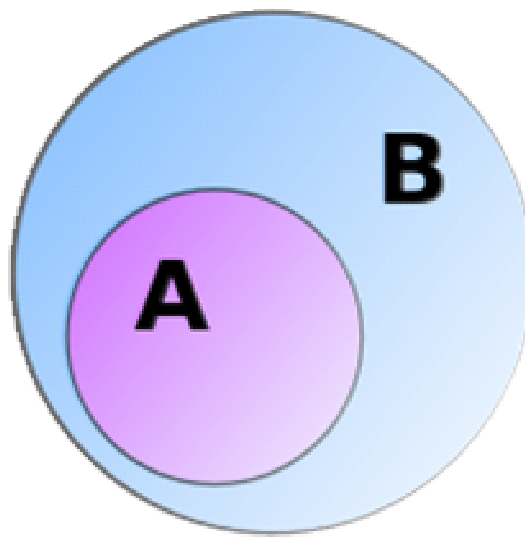
Các phương pháp đếm cơ bản

- **Các nguyên lý tính lực lượng tập hợp**
  - Lực lượng tập hợp A là số phần tử của tập A, ký hiệu $|A|$

1. **Nguyên lý bù trừ:** Cho B là tập hữu hạn, $A \subset B$. Với $\bar{A} = B \backslash A$, ta có:

$$|\bar{A}| = |B| - |A|$$

- VD: B = {1,2,…,10}, A là tập hợp các số nguyên tố nhỏ hơn 10. Tính lực lượng của $|\bar{A}|$?
- A = {2, 3, 5, 7}
- Ta có $|B| = 10$ và $|A| = 4$
- Suy ra $|\bar{A}| = |B| - |A| = 10 - 4 = 6$



L.T.D.D.

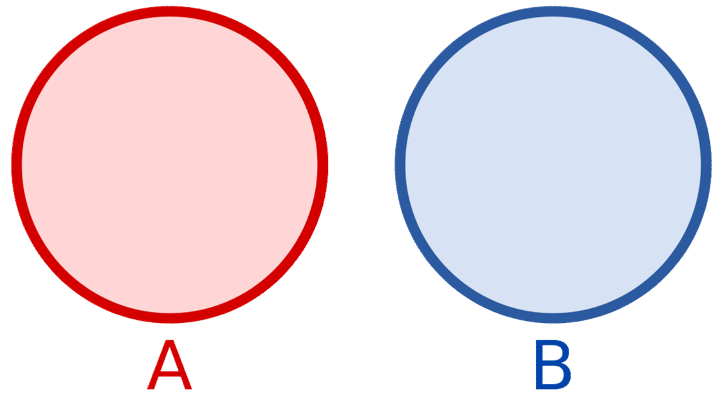
Các phương pháp đếm cơ bản

- Các nguyên lý tính lực lượng tập hợp

  2. **Nguyên lý cộng:**

     - Cho A và B là hai tập rời nhau:

$$|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$$



- VD: Cho các tập hợp:

$$A_1 = \{x \in \mathbb{N} |\ x \leq 12 \land (x-1) \vdots 3\}$$
$$A_2 = \{x \in \mathbb{N} |\ x \leq 12 \land (x-2) \vdots 3\}$$
$$A_3 = \{x \in \mathbb{N} |\ x \leq 12 \land (x-3) \vdots 3\}$$

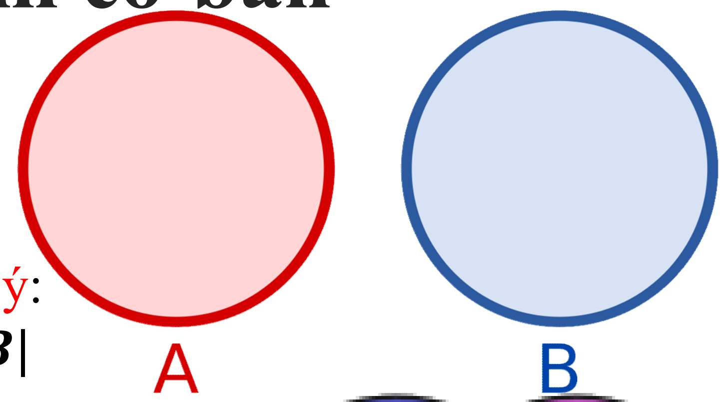
Tính $|A|$ với $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

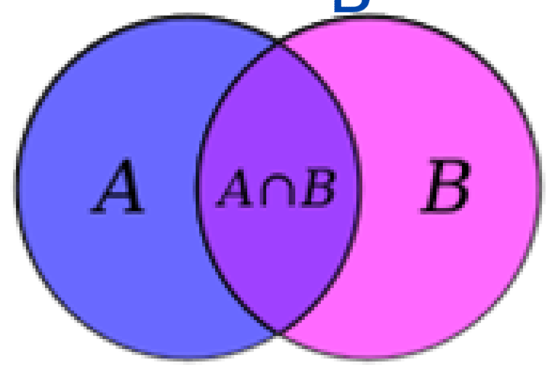
- Ta có $A_1 = \{1, 4, 7, 10\}$, $A_2 = \{2, 5, 8, 11\}$, $A_3 = \{3, 6, 9, 12\}$
- Vì A_1, A_2, A_3 rời nhau nên $|A| = |A_1| + |A2| + |A3| = 4 + 4 + 4 = 12$

Các phương pháp đếm cơ bản

- Các nguyên lý tính lực lượng tập hợp
  2. **Nguyên lý cộng (thêm bớt):**
     - Cho A và B là hai tập hữu hạn tùy ý:

$$|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}|$$





- VD: Cho các tập hợp:

$A_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 12 \wedge (x-1) \vdots 3\}$

$A_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 12 \wedge x$ là số nguyên tố$\}$

Tính $|A|$ với $A = A_1 \cup A_2$

- Ta có $A_1 = \{1, 4, 7, 10\}$, $A_2 = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ và $A_1 \cap A_2 = \{7\}$
- Khi đó $|A| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 4 + 5 - 1 = 8$

Các phương pháp đếm cơ bản

- Các nguyên lý tính lực lượng tập hợp

2. **Nguyên lý thêm bớt:**

   - Cho Cho A, B và C là các tập hữu hạn, khi đó:
   $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

   - Tổng quát: Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các tập hợp hữu hạn. Ta có
   $|\cup_{i=1}^{n} A_i| = \Sigma_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(-1)^{\mathrm{k}-1}\Sigma_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm cơ bản

- Các nguyên lý tính lực lượng tập hợp

  3. **Nguyên lý nhân (tích Descartes):**

     - Cho A và B là hai tập hữu hạn:

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|.|\boldsymbol{B}|$$

- VD: Cho các tập hợp:

$A_1 = \{1, 2, 3\}$

$A_2 = \{a, b, c\}$

Với $A = A_1 \times A_2$, Ta có $|A| = |A_1 \times A_2| = |A_1|.|A_2| = 3.3 = 9$

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm cơ bản

- **Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp**

1. Hoán vị, hoán vị lặp, hoán vị vòng

Hoán vị: Mỗi cách sắp xếp n phần tử theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử. Gọi P_n là số các hoán vị của n phần tử, khi đó

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

VD: Từ các chữ số 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau?

Vì với mỗi cách sắp xếp 4 chữ số trên ta được một số có 4 chữ số cách lập thành các số có 4 chữ số khác nhau chính là hoán vị của 4 phần tử được tính bởi

$$P_4 = 4! = 1.2.3.4 = 24$$

L.T.D.

Các phương pháp đếm cơ bản

- **Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp**

1. Hoán vị, hoán vị lặp, hoán vị vòng

Hoán vị lặp: Mỗi cách sắp xếp n phần tử thuộc k loại theo một thứ tự nào đó, trong đó mỗi loại xuất hiện ít nhất 1 lần, được gọi là một hoán vị lặp của n phần tử thuộc k loại. Gọi $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ là số các hoán vị lặp của n phần tử, trong đó n_i là số lần xuất hiện của phần tử loại $i \in \{1,2,\dots,k\}$, khi đó

$$\boldsymbol{P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}}$$

VD: Có bao nhiêu cách sắp xếp khác nhau cho các chữ cái trong từ

I V S I T I G T N

Loại	Số lượng
V	1
I	3
S	1
T	2
N	1
G	1

NX: Chuỗi có 9 phần tử, một số ký tự xuất hiện hơn 1 lần (I:3 và T:2). Các hoán vị của 3 chữ I hay 2 chữ T này sẽ không được tính. Do đó số lượng cách sắp xếp trong trường hợp này là hoán vị lặp bằng $\frac{9!}{1!3!1!2!1!1!} = 30240$

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm cơ bản

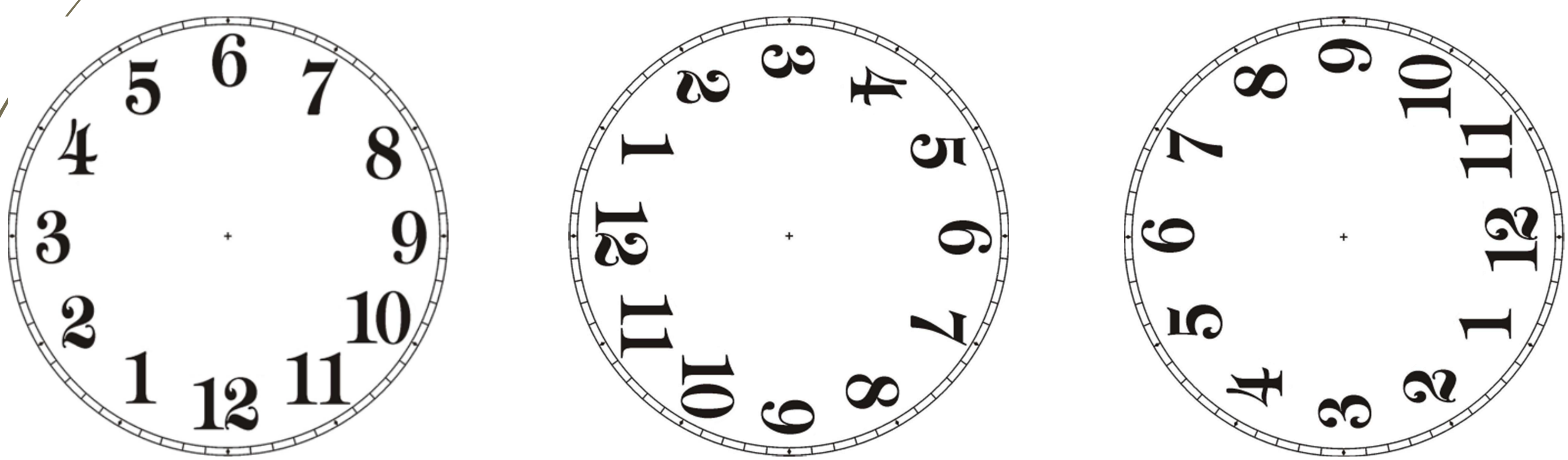
Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

1. **Hoán vị, hoán vị lặp, hoán vị vòng**

Hoán vị vòng: Mỗi cách sắp xếp n phần tử vào n vị trí quanh một vòng tròn là một hoán vị vòng. Số hoán vị vòng của n phần tử được tính bởi

$$\boldsymbol{Q_n = (n - 1)!}$$

Chú ý: Các cách sắp xếp dưới đây là như nhau



Các phương pháp đếm cơ bản

- **Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp**

1. **Hoán vị, hoán vị lặp, hoán vị vòng**

Hoán vị vòng: Mỗi cách sắp xếp n phần tử vào n vị trí quanh một vòng tròn là một hoán vị vòng. Số hoán vị vòng của n phần tử được tính bởi

$$\boldsymbol{Q_n = (n-1)!}$$

VD: Có bao nhiêu cách sắp xếp khác nhau để 5 đại biểu ngồi vào một bàn tròn khép kín?

Số cách sắp xếp là số hoán vị vòng của 5 phần tử bằng 4! = 24 cách

Các phương pháp đếm cơ bản

- **Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp**

  2. **Tổ hợp, tổ hợp lặp**

  Tổ hợp: Mỗi tập con gồm k phần tử của một tập gồm n phần tử cho trước gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử. Số tổ hợp chập k của n phần tử được tính bởi

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Tính chất: $\forall n \in \mathbb{N}^*, k \in \{1,2,\dots,n\}$, ta có:

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm cơ bản

- **Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp**

  2. Tổ hợp, tổ hợp lặp

  Tổ hợp: Mỗi tập con gồm k phần tử của một tập gồm n phần tử cho trước gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử. Số tổ hợp chập k của n phần tử được tính bởi

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

VD: Có n đội bóng thi đấu vòng tròn, hỏi phải tổ chức bao nhiêu trận đấu?

Vì mỗi trận bóng được tạo thành bởi hai đội nên số cách lập thành hai đội từ n đội cho trước chính là số trận đấu cần tổ chức. Do đó, số trận đấu được tính bởi

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm cơ bản

- **Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp**

2. Tổ hợp, tổ hợp lặp

Tổ hợp lặp: Cho tập X có n phần tử. Mỗi bộ gồm m phần tử mà mỗi phần tử này là một trong các phần tử của X được gọi là một tổ hợp lặp chập m của n phần tử. Số tổ hợp lặp chập m của n phần tử được tính bởi

$$\overline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}-\mathbf{1}}^{\boldsymbol{m}} = \frac{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}-\mathbf{1})!}{\boldsymbol{m}!\,(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!}$$

VD: Bài toán chia kẹo Euler, chẳng hạn chia 12 viên kẹo cho 3 người:

- Thêm 2 vách ngăn vào 12 viên kẹo để chia cho 3 người => Có tất cả 12+2=14 phần tử. Số cách lấy ra 12 phần tử từ 14 phần tử chính là số cách chia kẹo cho 3 người được tính bởi $\bar{C}_3^{12} = C_{3+12-1}^{12} = \frac{(3+12-1)!}{12!(3-1)!} = \frac{14!}{12!2!} = \frac{14.13}{2} = 91$ cách

Các phương pháp đếm cơ bản

Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

3. Chỉnh hợp, chỉnh hợp lặp

Chỉnh hợp: Cho tập X gồm n phần tử. Một bộ có thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ gồm k phần tử của tập X được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử. Số chỉnh hợp chập k của n phần tử được tính bởi

$$\boldsymbol{A_n^k} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$$

VD: Có bao nhiêu số có 3 chữ số được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5?

Mỗi số có 3 chữ số là một chỉnh hợp chập 3 của 5 chữ số. Vậy số các số có 3 chữ số được tính bởi

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 3.4.5 = 60$$

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm cơ bản

Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

3. Chỉnh hợp, chỉnh hợp lặp

Chỉnh hợp lặp: Mỗi dãy gồm m phần tử của tập X trong đó các phần tử này có thể lặp lại nhiều lần và được sắp xếp theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp lặp chập m của n phần tử. Số chỉnh hợp lặp chập m của n phần tử được tính bởi

$$\bar{A}_n^m = n^m$$

VD: Tìm số dãy nhị phân có độ dài 10.

Cách 1: Số dãy nhị phân là số chỉnh hợp lặp chập 10 của 2 phần tử 0 và 1, được tính bằng $\bar{A}_2^{10} = 2^{10} = 1024$

Cách 2: Dãy nhị phân có độ dài 10 có dạng $a_1 a_2 \dots a_{10}$ trong đó $a_i \in \{0, 1\}$, $\forall i = 1,2, \dots, 10$. Ta thấy, mỗi phần tử a_i có 2 cách chọn mà ta có tất cả là 10 phần tử. Do đó, số cách chọn/số dãy nhị phân là $2.2 \dots .2 = 2^{10} = 1024$.

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm nâng cao

Phương pháp truy hồi

Một quan hệ truy hồi bậc k là một công thức cho phép tính giá trị $f(n+k)$ qua các giá trị $f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k-1)$

VD: Cho $\{a_n\}$ là dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2,3,\ldots$ và $a_0 = 3, a_1 = 5$. Tìm a_2, a_3?

Từ hệ thức truy hồi ta có:

$$a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$$
$$a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$$

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm nâng cao

VD: Hãy xác định xem dãy $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 3n$ với mọi n là số nguyên không âm có phải là lời giải của hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2,3, \dots$ hay không?

Với mọi $n \geq 2$ ta có

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)] - 3(n-2) = 3n$$

Do đó dãy $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 3n$ với mọi n là số nguyên không âm là lời giải của hệ thức truy hồi đã cho.

VD: Hãy xác định xem dãy $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 2^n$ với mọi n là số nguyên không âm có phải là lời giải của hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2,3, \dots$ hay không?

Với $a_n = 2^n$, ta có $a_0 = 1, a_1 = 2$ và $a_2 = 2^2 = 4$

Mặt khác, theo hệ thức truy hồi $a_2 = 2a_1 - a_0 = 2.2 - 1 = 3 \neq 4$

Do đó dãy $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 2^n$ với mọi n là số nguyên không âm không phải là lời giải của hệ thức truy hồi

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm nâng cao

VD: Hãy xác định xem dãy $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 5$ với mọi n là số nguyên không âm có phải là lời giải của hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2,3, \ldots$ hay không?

Với mọi $n \geq 2$ ta có

$$a_n = 2.5 - 5 = 5$$

Do đó dãy $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 5$ với mọi n là số nguyên không âm là lời giải của hệ thức truy hồi đã cho.

Các phương pháp đếm nâng cao

VD: Bài toán lãi kép

Một người gửi tiết kiệm 10 triệu đồng với lãi suất hằng năm 10%. Hết một năm gửi tiền, nếu không rút tiền ra người đó được cộng số lãi vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo (lãi kép). Hỏi sau 20 năm gửi không rút ra lần nào thì số tiền của người đó là bao nhiêu?

Gọi P_n là số tiền sau n năm gửi, khi đó số tiền bằng số tiền của năm thứ n-1 cộng với lãi suất của năm thứ n, tức là:

$$P_n = P_{n-1} + 0.1P_{n-1} = 1.1P_{n-1}$$

Với giá trị ban đầu $P_0 = 10$ (triệu), ta có:

$P_1 = 1.1P_0;\ P_2 = 1.1P_1 = 1.1^2P_0;\ P_3 = 1.1P_2 = 1.1^3P_0;\ \ldots;\ P_n = 1.1^nP_0$

Sau 20 năm số tiền của người đó là $P_{20} = 1.1^{20} \times 10 \approx 67.275$ triệu đồng

Các phương pháp đếm nâng cao

Phương pháp song ánh:

Cho X và Y là các tập hợp hữu hạn khác rỗng và ánh xạ $f: X \to Y$. Khi đó, ta có các khẳng định sau:

- Nếu f là đơn ánh thì $|X| \leq |Y|$
- Nếu f là toàn ánh thì $|X| \geq |Y|$
- Nếu f là song ánh thì $|X| = |Y|$

VD: Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình nguyên

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12 \qquad (*)$$

L.T.D.D.

Các phương pháp đếm nâng cao

VD: Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình nguyên

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12 \qquad (*)$$

Gọi X là tập nghiệm nguyên không âm của phương trình (*), tức là:

$$X = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_+^3 | (a_1, a_2, a_3)\ thỏa (*)\}$$

Gọi Y là tập các dãy nhị phân có độ dài 14 (=12+3-1), trong đó có 12 bit 1 và 2 (=3-1) bit 0. Xét ánh xạ $f: X \to Y$ xác định bởi

$$(a_1, a_2, a_3) \mapsto \underbrace{11 \dots 1}_{a_1} 0 \underbrace{11 \dots 1}_{a_2} 0 \underbrace{11 \dots 1}_{a_3}$$

Ta thấy f là một song ánh, do đó $|X| = |Y|$. Lực lượng của Y được tính bằng

$$\bar{C}_3^{12} = C_{3+12-}^{12} = \frac{(3+12-1)!}{12!\,(3-1)!} = \frac{14!}{12!\,2!} = \frac{14.13}{2} = 91$$

Các phương pháp đếm nâng cao

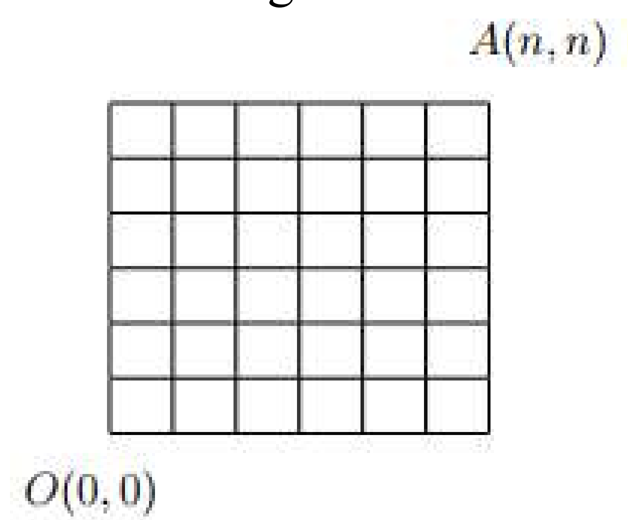
Phương pháp quỹ đạo

Số các quỹ đạo/đường đi ngắn nhất từ điểm O(0,0) đến điểm A(m,n) trên một lưới nguyên $n \times m$ ô vuông bằng C_{m+n}^{n}.

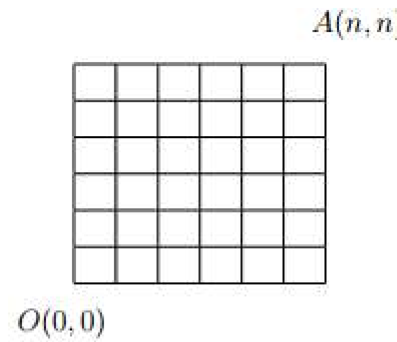
VD: Với n là số nguyên dương, hãy chứng minh rằng

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

Xét lưới nguyên gồm có $n \times n$ ô vuông sau:



Các phương pháp đếm nâng cao



VD: Với n là số nguyên dương, hãy chứng minh rằng

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

Xét lưới nguyên gồm có $n \times n$ ô vuông sau:

Theo định lý Phương pháp quỹ đạo, đường đi ngắn nhất từ gốc O(0,0) đến A(n,n) bằng C_{2n}^n

Mặt khác, đường đi ngắn nhất từ gốc O(0,0) đến A(n,n) phải đi qua một trong các điểm $M_k(k, n-k)$ với $k = 0,1,2,\ldots,n$ của lưới nguyên. Gọi S_k là số đường đi ngắn nhất từ gốc O(0,0) đến A(n,n) và đi qua $M_k(k, n-k)$.

Số đường đi ngắn nhất từ gốc O(0,0) đến $M_k(k, n-k)$ bằng C_n^{n-k}, số đường đi ngắn nhất từ $M_k(k, n-k)$ đến A(n,n) bằng $C_{(n-k)+(n-(n-k))}^{m-(n-k)}$. Suy ra

$$S_k = C_n^{n-k} . C_{(n-k)+(n-(n-k))}^{m-(n-k)} = C_n^k . C_n^k = \left(C_n^k\right)^2$$

Vậy số đường đi ngắn nhất từ gốc O(0,0) đến A(n,n) bằng

$$C_{2n}^n = \Sigma_{k=0}^n S_k = \Sigma_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2 = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2$$

Bài tập thêm về NL Dirichlet

1. Một lớp mẫu giáo gồm 33 cháu tập tô màu bằng bút chì màu xanh/đỏ, mỗi bức tranh gồm 5 đồ vật, mỗi đồ vật được tô thuần nhất 1 màu. Chứng minh rằng luôn tìm được ít nhất hai cháu tô màu tranh giống như nhau.

2. Bài thi các môn học trong một trường đại học được chấm theo thang điểm là các số nguyên từ 0 đến 20. Hỏi một lớp cần phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để đảm bảo trong mọi môn thi đều tìm được ít nhất 5 sinh viên của lớp nhận cùng điểm thi?

3. Chứng minh rằng từ 100 số nguyên dương bất kỳ, ta có thể chọn ra một số các số nào đấy để tổng của chúng chia hết cho 100.

L.T.D.D.

a) Hãy thiết lập hệ thức truy hồi cho tổng số tiền có trong tài khoản vào cuối năm thứ n.

b) Tìm công thức tường minh cho tổng số tiền có trong tài khoản vào cuối năm thứ n.

c) Sau 100 năm tổng số tiền có trong tài khoản là bao nhiêu?

Câu 34: Một nhà máy sản xuất ô tô thể thao theo đơn đặt hàng với tốc độ ngày càng tăng. Tháng đầu chỉ sản xuất một chiếc, tháng thứ hai sản xuất được hai chiếc và cứ như vậy tháng thứ n sản xuất được n chiếc.

a) Hãy lập công thức truy hồi tính số ô tô sản xuất được trong n tháng đầu tiên của nhà máy.

b) Bao nhiêu ô tô được sản xuất trong năm năm đầu tiên?

c) Hãy tìm công thức tường minh tính số ô tô sản xuất được trong n tháng đầu tiên của nhà máy.

Câu 35:

a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu nhị phân độ dài n, chứa 2 bit 0 liên tiếp.
b) Tìm điều kiện đầu.
c) Có bao nhiêu xâu như vậy có độ dài bằng 7?

Câu 36:

a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu nhị phân độ dài n, chứa 3 bit 0 liên tiếp.
b) Tìm điều kiện đầu.
c) Có bao nhiêu xâu như vậy có độ dài bằng 7?