

CANTHO UNIVERSITY 


# CHƯƠNG 4

# CÂY AVL

(G.M. Adelson-Velsky và E.M. Landis)

Bộ môn Công Nghệ Phần Mềm

*Phần dành cho đơn vị* [www.ctu.edu.vn](http://www.ctu.edu.vn)

 **Nội dung**

- Khái niệm về cây tìm kiếm nhị phân cân bằng
- Khái niệm về cây AVL
- Các thuật toán trên cây AVL
- Ý tưởng cài đặt cây bằng con trỏ

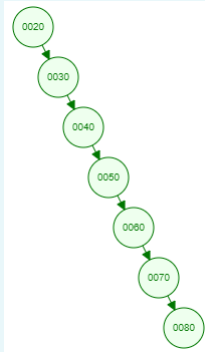
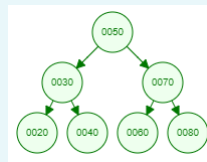
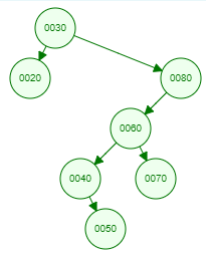
[www.ctu.edu.vn](http://www.ctu.edu.vn)



## Khái niệm về cây tìm kiếm nhị phân cân bằng

CANTHO UNIVERSITY

- Cây TKNP được dựng từ các khóa:  
20, 30, 40, 50, 60, 70, 80



- Nhận xét: Độ phức tạp trong các giải thuật trên cây tìm kiếm nhị phân trường hợp xấu nhất là  $O(n)$  và trung bình  $O(\log n)$ .

[www.ctu.edu.vn](http://www.ctu.edu.vn)



## Khái niệm về cây tìm kiếm nhị phân cân bằng

CANTHO UNIVERSITY

- Quá trình tìm kiếm khóa, thêm nút, xóa nút trên cây TKNP là quá trình di chuyển từ nút gốc ra nút lá. ➔ Cây càng cao thì giải thuật càng kém hiệu quả.
- Do vậy rất cần thiết phải xây dựng cây TKNP mà trong đó chiều cao của cây càng nhỏ càng tốt để cho các giải thuật được hiệu quả nhất. Cây ở dạng này được gọi là cây cân bằng.

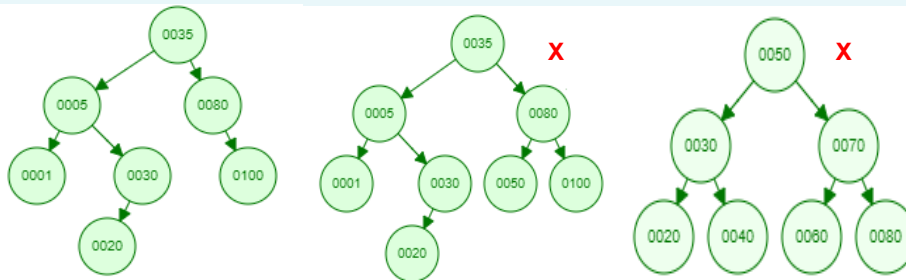
[www.ctu.edu.vn](http://www.ctu.edu.vn)



CANTHO UNIVERSITY

## Cây TKNP cân bằng hoàn toàn

- Cây TKNP **cân bằng hoàn toàn** là cây TKNP mà tại mỗi nút có **tổng số nút của cây con trái và con phải lệch nhau không quá một**.
- Cây nào là cây cân bằng hoàn toàn?



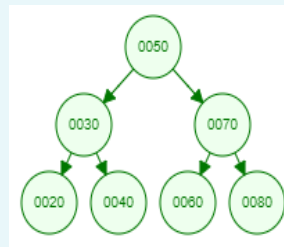
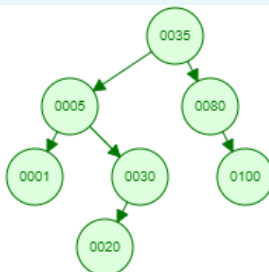
www.ctu.edu.vn



CANTHO UNIVERSITY

## Cây TKNP cân bằng tương đối (cân bằng về chiều cao)

- Cây TKNP **cân bằng về chiều cao** là cây TKNP mà trong đó mỗi nút đều có chiều cao con trái và con phải lệch nhau tối đa là 1.
- Cây cân bằng về chiều cao còn gọi là **cân bằng tương đối**.
- Ví dụ:



www.ctu.edu.vn



CANTHO UNIVERSITY

## Khái niệm về cây AVL

- Cây AVL được gọi theo tên của hai người đề xuất chúng, G.M. Adelson-Velsky và E.M. Landis, được công bố trong bài báo của họ vào năm 1962: "An algorithm for the organization of information." (Một thuật toán về tổ chức thông tin)
- **Cây AVL** là cây **TKNP** mà **chiều cao của hai cây con của mọi nút chênh lệch tối đa là 1**.

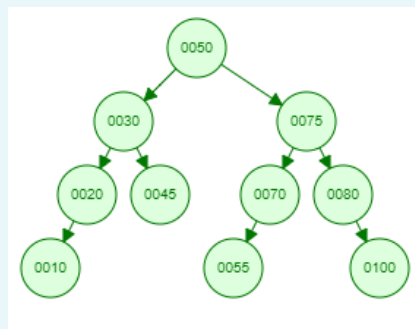
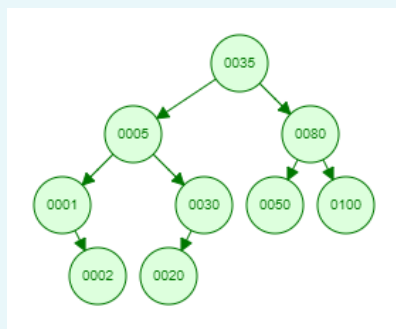
www.ctu.edu.vn



CANTHO UNIVERSITY

## Khái niệm về cây AVL

- Ví dụ:



www.ctu.edu.vn



CANTHO UNIVERSITY

## Các thao tác trên cây AVL

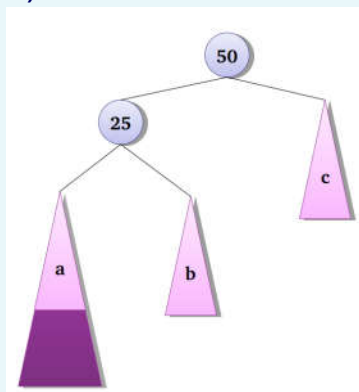
- Cây AVL là cây tìm kiếm nhị phân nên các thao tác cơ bản trên cây AVL tương tự như các thao tác cơ bản trên cây TKNP.
- Trong đó, thao tác thêm và xóa nút trên cây có thể làm cây mất cân bằng nên phải có thao tác cân bằng lại cây sau khi thực hiện thêm hoặc xóa nút.

[www.ctu.edu.vn](http://www.ctu.edu.vn)


CANTHO UNIVERSITY

## Các trường hợp cây mất cân bằng

- Trường hợp 1: Cây mất cân bằng bên trái của con trái (L-L)

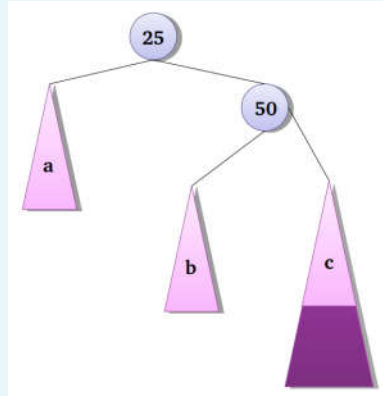

[www.ctu.edu.vn](http://www.ctu.edu.vn)



CANTHO UNIVERSITY

## Các trường hợp cây mất cân bằng

- Trường hợp 2: Cây mất cân bằng bên phải của con phải (R-R)



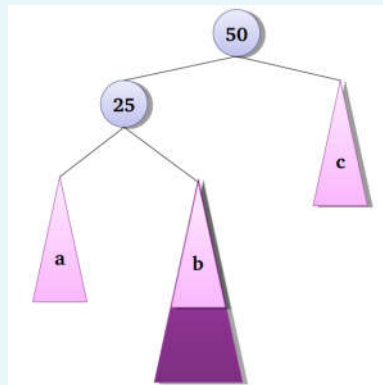
www.ctu.edu.vn



CANTHO UNIVERSITY

## Các trường hợp cây mất cân bằng

- Trường hợp 3: Cây mất cân bằng bên phải của con trái (R-L)



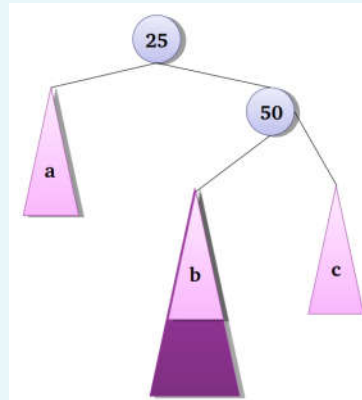
www.ctu.edu.vn



CANTHO UNIVERSITY

## Các trường hợp cây mất cân bằng

- Trường hợp 4: Cây mất cân bằng bên trái của con phải (L-R)



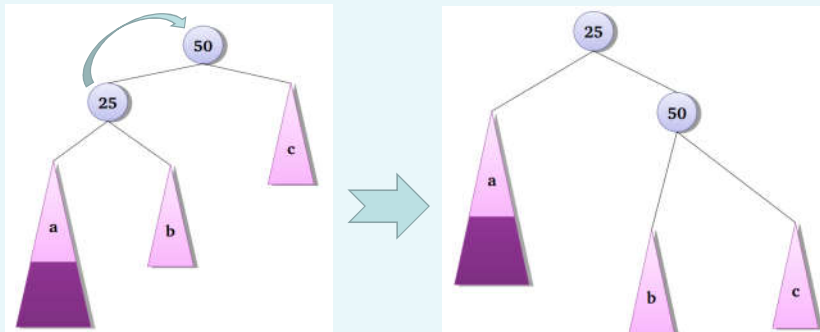
www.ctu.edu.vn



CANTHO UNIVERSITY

## Các quy tắc xử lý khi cây mất cân bằng

- Đối với trường hợp 1 (L-L) ta thực hiện quay đơn qua phải (right rotate) như sau:



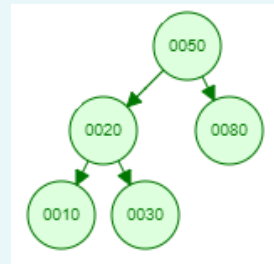
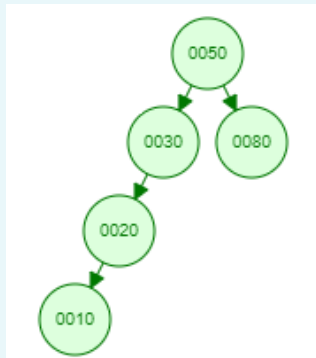
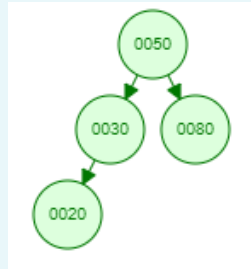
www.ctu.edu.vn



CANTHO UNIVERSITY

## Ví dụ

- Thêm nút 10



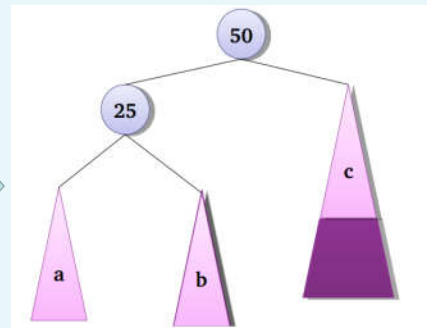
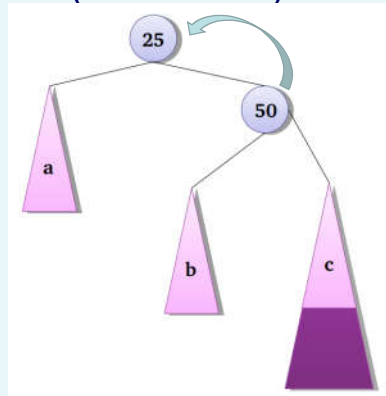
www.ctu.edu.vn



CANTHO UNIVERSITY

## Các quy tắc xử lý khi cây mất cân bằng

- Trường hợp 2: Ta thực hiện quay đơn sang trái (Left Rotate) như sau:



www.ctu.edu.vn

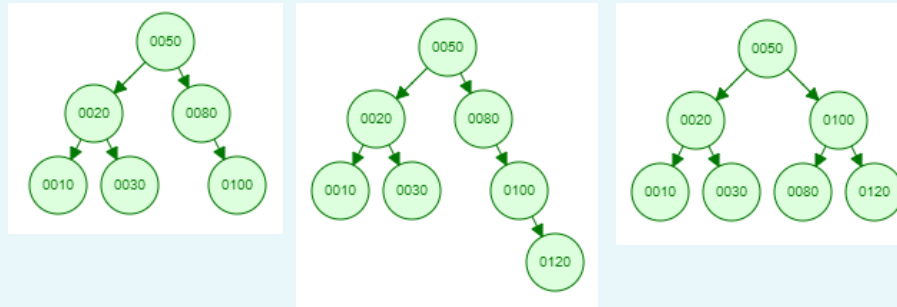




CANTHO UNIVERSITY

## Ví dụ

- Thêm nút 120



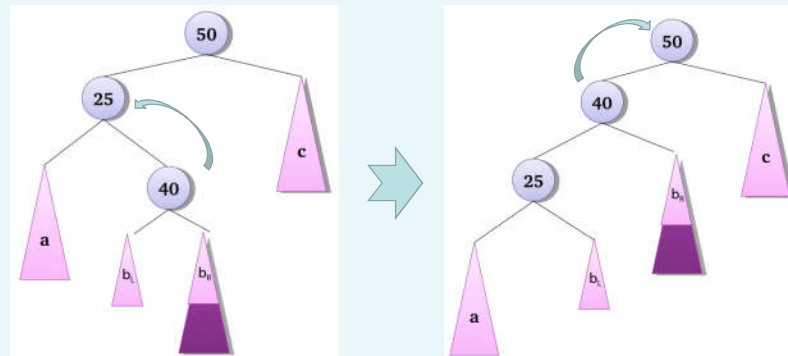
www.ctu.edu.vn



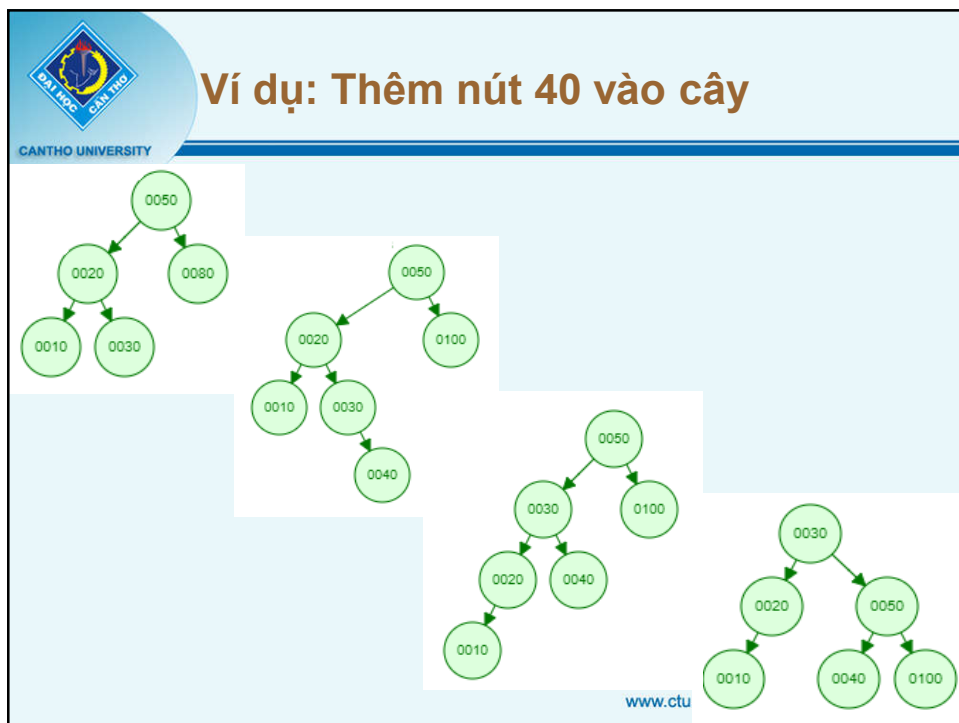
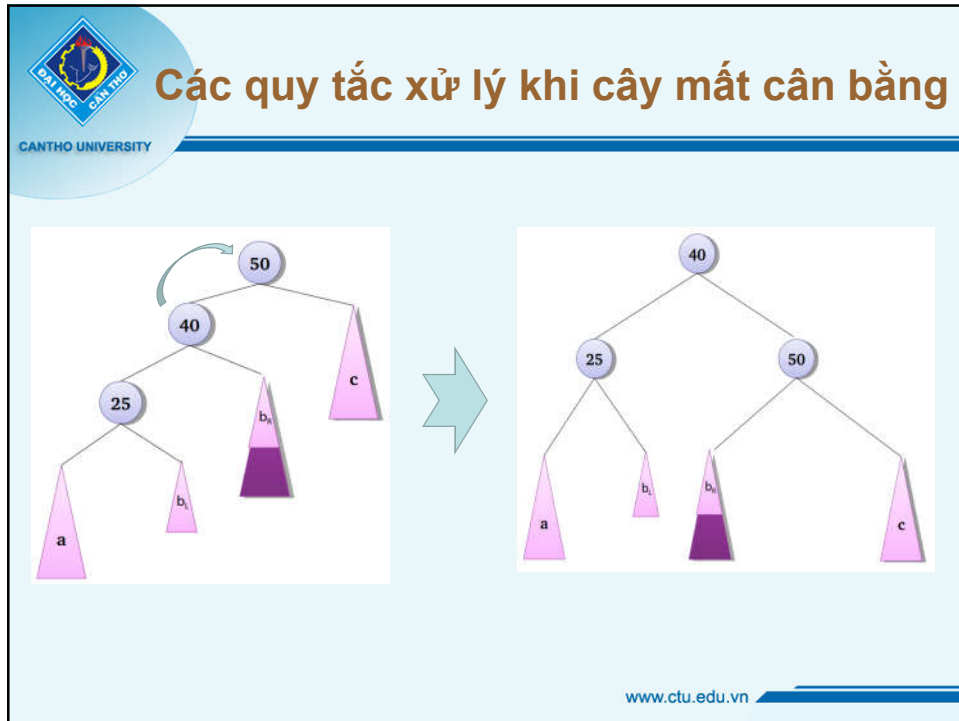
CANTHO UNIVERSITY

## Các quy tắc xử lý khi cây mất cân bằng

- Trường hợp 3: Cây mất cân bằng bên phải của con trái ta thực hiện xoay kép trái phải (left-right rotate)



www.ctu.edu.vn

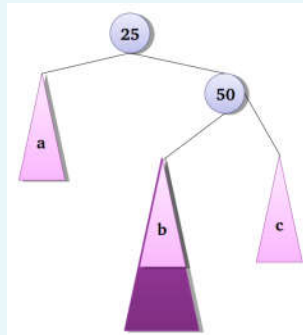




CANTHO UNIVERSITY

## Các quy tắc xử lý khi cây mất cân bằng

- Trường hợp 4: Cây mất cân bằng bên trái của con phải. Trường hợp này ta thực hiện quay kép phải-trái như sau:



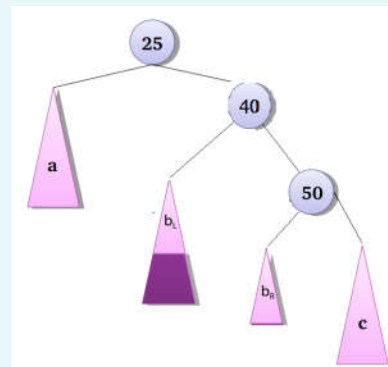
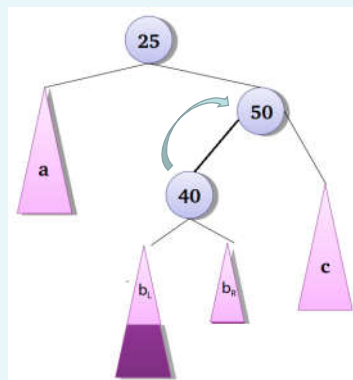
www.ctu.edu.vn



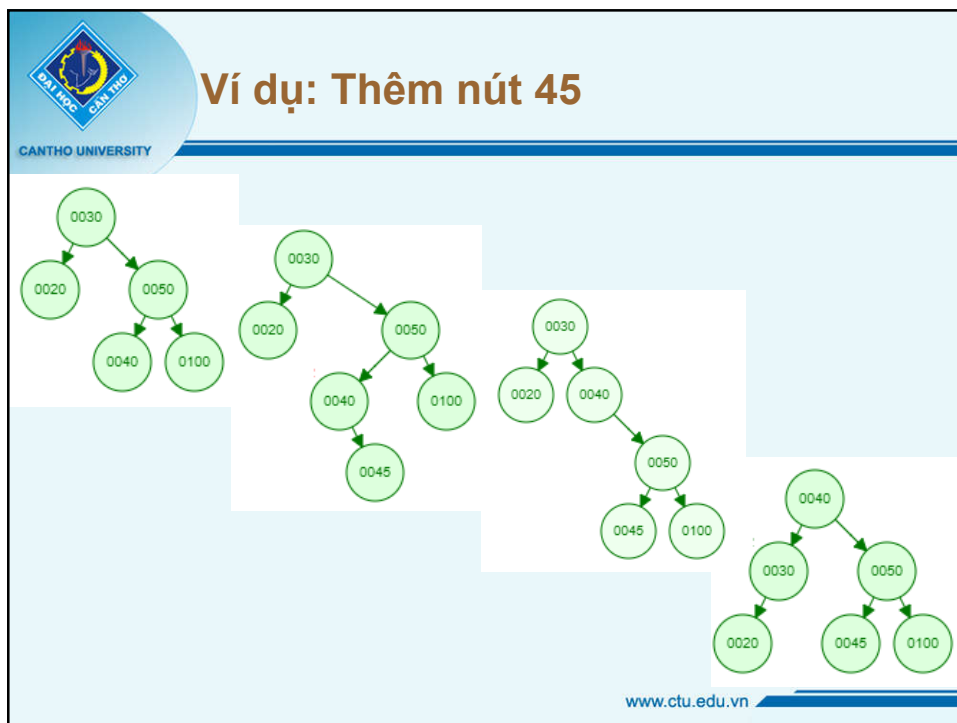
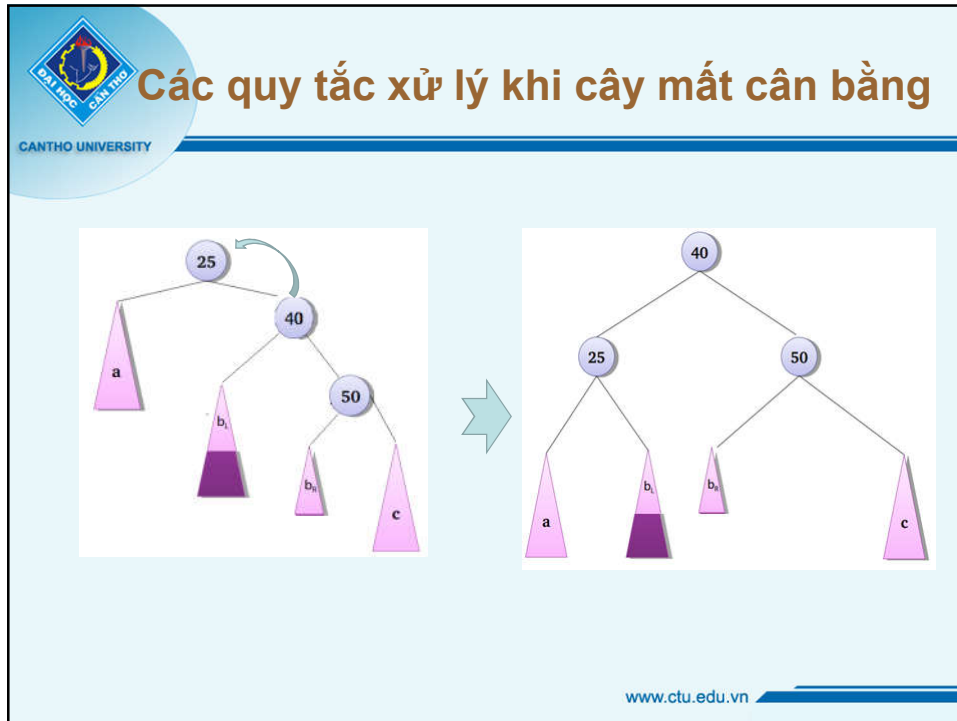
CANTHO UNIVERSITY

## Các quy tắc xử lý khi cây mất cân bằng

- Trường hợp 4 ta thực hiện quay kép Phải- Trái



www.ctu.edu.vn

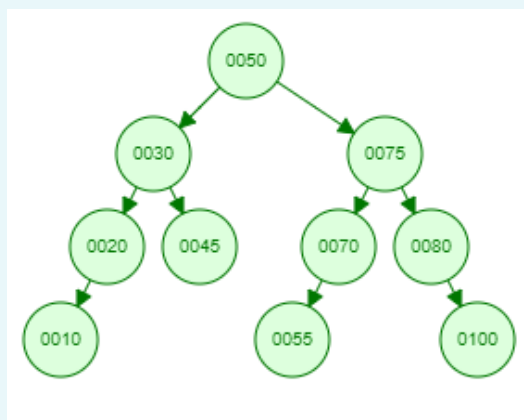




CANTHO UNIVERSITY

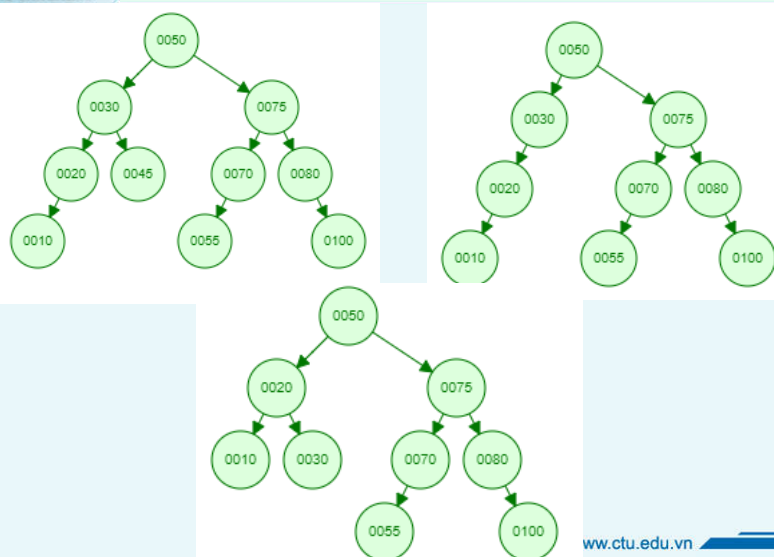
## Vẽ cây AVL cho bởi danh sách

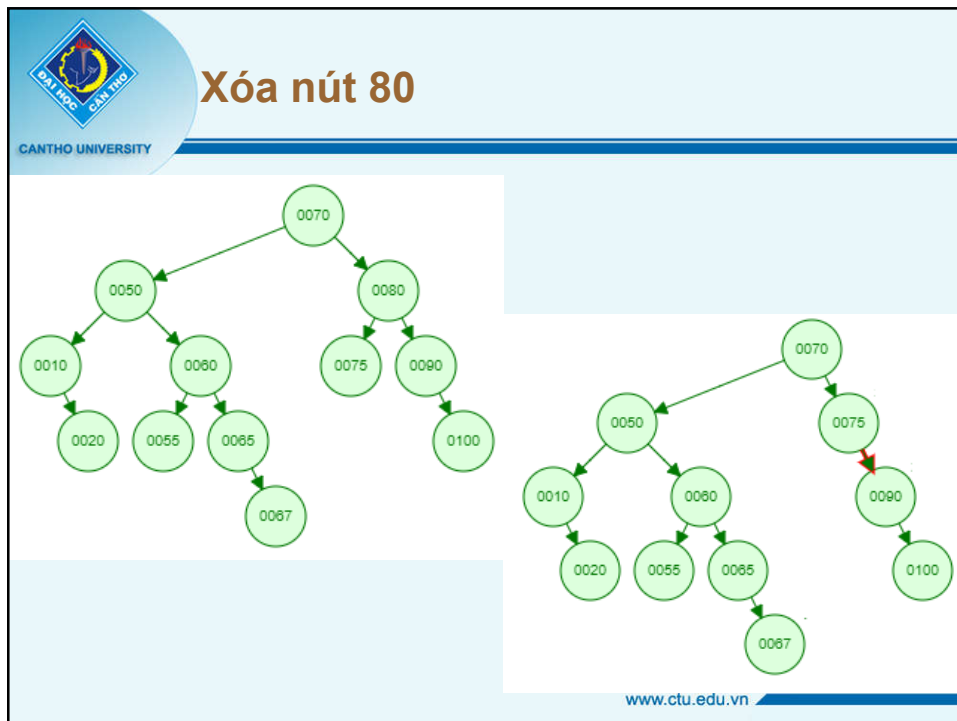
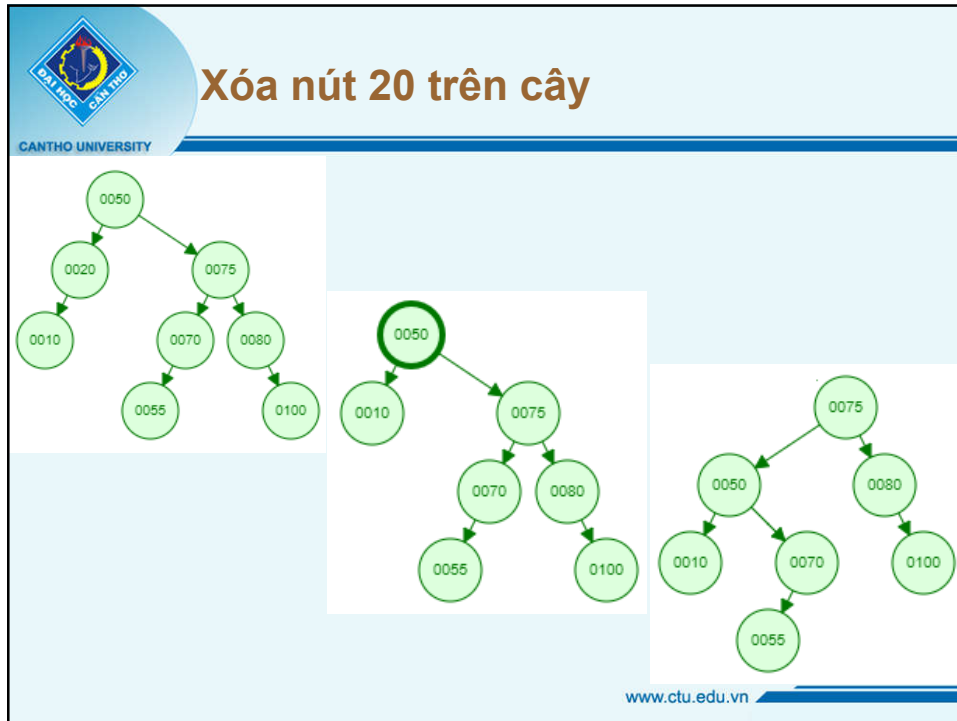
50, 70, 30, 10, 20, 45, 80, 75, 100, 55

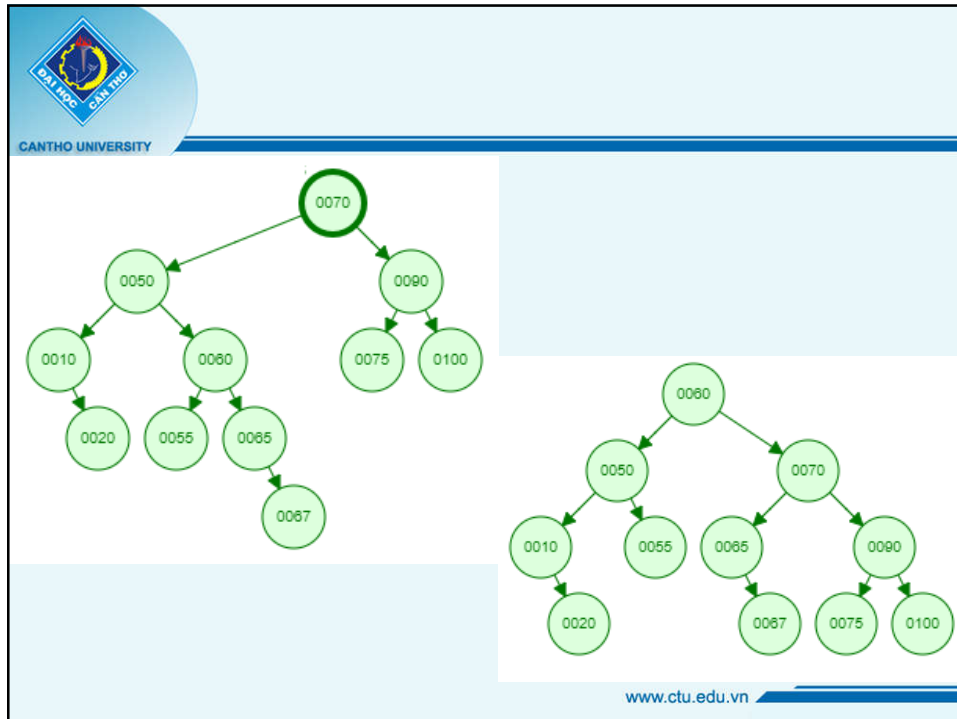

[www.ctu.edu.vn](http://www.ctu.edu.vn)


CANTHO UNIVERSITY

## Xóa nút 45


[www.ctu.edu.vn](http://www.ctu.edu.vn)





## Ý tưởng cài đặt cây

Mỗi nút trên cây cần có các thông tin:

- Khóa của nút
- Cây con trái
- Cây con phải
- Chỉ số cân bằng với quy như sau:
  - Chỉ số là EH (=0) nếu cây cân bằng
  - Chỉ số là LH (=1) nếu cây lệch trái
  - Chỉ số là RH (=2) nếu cây lệch phải

www.ctu.edu.vn



CANTHO UNIVERSITY

## Thêm nút vào cây AVL

- Thêm nút vào AVL tương tự như thêm nút vào cây TKNP thông thường. Sau đó ta xét xem cây có bị mất cân bằng hay không để thực hiện cân bằng lại cây theo các quy tắc xoay và cập nhật lại chỉ số cân bằng của các nút.

[www.ctu.edu.vn](http://www.ctu.edu.vn)


CANTHO UNIVERSITY

## Xóa nút ra khỏi cây AVL

- Xóa nút ra khỏi AVL tương tự như xóa nút ra khỏi cây TKNP thông thường. Sau đó ta xét xem cây có bị mất cân bằng hay không để thực hiện cân bằng lại cây theo các quy tắc xoay và cập nhật lại chỉ số cân bằng của các nút.
- Quá trình xóa nút có thể dẫn đến cây mất cân bằng dây chuyền liên tiếp đến các nút tiền bối của nó. Theo đó, nguyên tắc thực hiện là phải cân bằng từ nút con trước rồi đến lên nút cha.

[www.ctu.edu.vn](http://www.ctu.edu.vn)





CANTHO UNIVERSITY

## Khai báo cây AVL

```
typedef ... KeyType;
typedef struct Node
{
    KeyType Key;
    int Bal;
    Node *Left;
    Node *Right;
};
typedef Node * AVLTree;
```

www.ctu.edu.vn



CANTHO UNIVERSITY

## Tài liệu tham khảo

- [Adam Drozdek, Data structures and Algorithms Analysis in C++ 4th Edition, Cengage Learning, 2012](#)
- [Introduction to Algorithms, Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest & Clifford Stein, MIT Press, 2012](#)
- <https://www.cs.usfca.edu/~galles/cs245S08/lecture/lecture23.pdf>
- <http://www.cse.chalmers.se/edu/year/2018/course/DAT037/slides/6c-avl-trees.pdf>
- <https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html>

www.ctu.edu.vn

