



# **NỘI DUNG**

- 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ
- 2. TÍNH LIÊN THÔNG CỦA ĐỒ THỊ
- 3. ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT TRÊN ĐỒ THỊ
- 4. XÉP HẠNG ĐỒ THỊ
- 5. CÂY VÀ CÂY CÓ HƯỚNG
- 6. LUÒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

# TÀI LIỆU THAM KHẢO

- 1. TOÁN RỜI RẠC NGUYỄN TÔ THÀNH, NGUYỄN ĐỰC NGHĨA
- 2. LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG NGUYỄN TUẨN ANH





# CÂY VÀ CÂY CÓ HƯỚNG

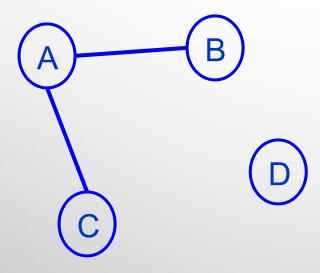
#### **NỘI DUNG:**

- 1. CÂY
- 2. CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT
- 3. CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



#### **CÂY**

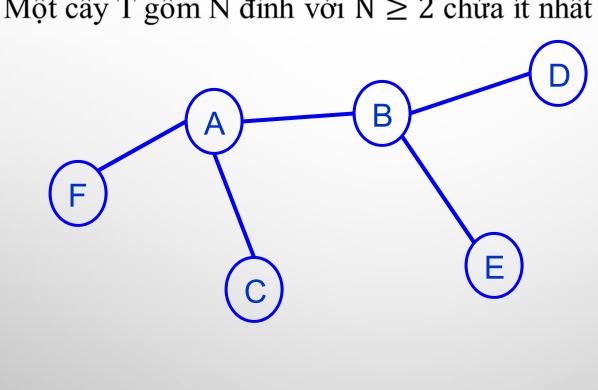
**Cây (tree)** là đồ thị vô hướng liên thông và không có chu trình **Chú ý**: Cây không chứa khuyên và cạnh song song



Rừng (forest) là đồ thị vô hướng không có chu trình



Một cây T gồm N đỉnh với N ≥ 2 chứa ít nhất 2 đỉnh treo





#### CÂY

Xét đồ thị G gồm N đỉnh, các điều sau đây tương đương:

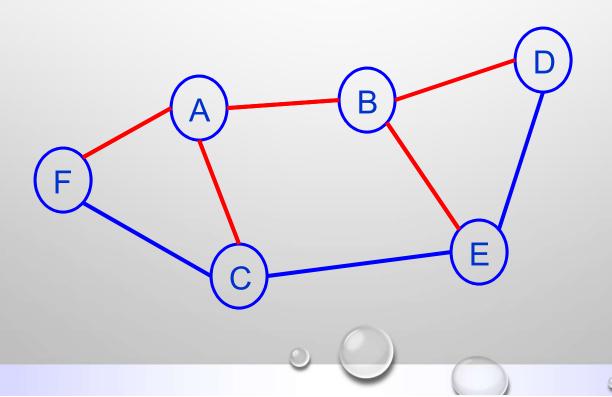
- 1. Đồ thị G là cây.
- 2. Giữa hai đỉnh bất kỳ của G, tồn tại duy nhất một đường đi nối chúng với nhau.
- 3. G liên thông tối tiểu.
- 4. Thêm một cạnh nối 2 đỉnh bất kỳ của G thì G sẽ chứa một chu trình duy nhất.
- 5. G liên thông và có n-1 cạnh.
- 6. G không có chu trình và có n-1 cạnh.



#### **CÂY KHUNG**

Cho G=(X, E) là một đồ thị liên thông và T=(X, F) là một đồ thị bộ phận của G. Nếu T là cây thì T được gọi là một cây tối đại (cây khung, cây bao trùm, cây phủ) của G.

Mọi đồ thị liên thông đều có chứa ít nhất một cây tối đại.



## CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Cho G=(X, E), trọng lượng cây T của G bằng với tổng trọng lượng các cạnh trong cây:

$$L(T) = \sum_{(e \in T)} L(e)$$

Cây khung trọng lượng nhỏ nhất là cây khung có trọng lượng nhỏ nhất của G

## CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Thuật toán PRIM tìm cây khung trọng lượng nhỏ nhất Input: Đồ thị liên thông G=(X, E), X gồm N đỉnh Output: Cây khung nhỏ nhất T=(V, U) của G

- 1. Chọn tùy ý  $v \in X$  và khởi tạo  $V := \{v\}; U := \emptyset;$
- 2. Chọn cạnh e có trọng lượng nhỏ nhất trong các cạnh (u,v) với  $u \in X \setminus V$  và  $v \in V$
- 3.  $V := V \cup \{u\}; U := U \cup \{e\}$
- 4. Nếu U đủ N-1 cạnh thì dừng; ngược lại, lặp lại bước 2.

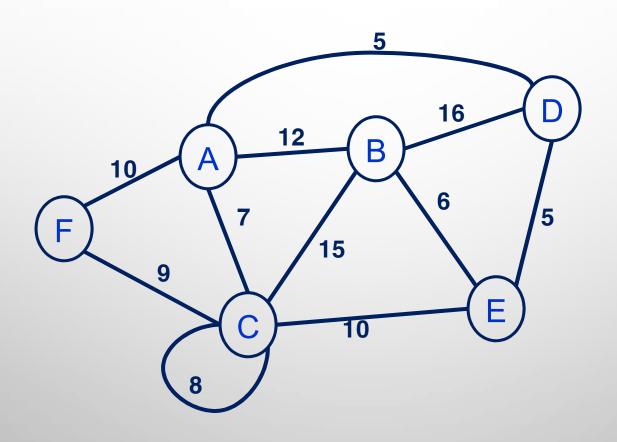
#### CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Thuật toán PRIM tìm cây khung trọng lượng nhỏ nhất

```
1 function Prim(Graph, source):
       create vertex set Q
3
      for each vertex v in Graph:
           \text{key}[v] \leftarrow \text{INFINITY}
                                             //Distance from MST to v
           prev[v] \leftarrow UNDEFINED //Previous of v
           add v to Q
      \text{key}[source] \leftarrow 0
      MST = 0;
8
9
      while Q is not empty:
           u \leftarrow \text{vertex in } Q \text{ with min dist[u]}
10
11
           remove u from Q
           MST = MST + key[u]
12
           for each neighbor v of u: // only v that are still in Q
13
               if w(u,v) < \text{key}[v]:
14
                    \text{key}[v] \leftarrow w
15
                    prev[v] \leftarrow u
16
      return MST, key∏, prev∏
17
```

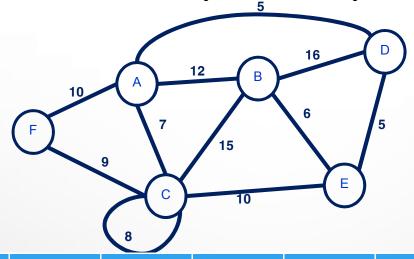
## CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán PRIM bắt đầu từ F



L.T.P.D.

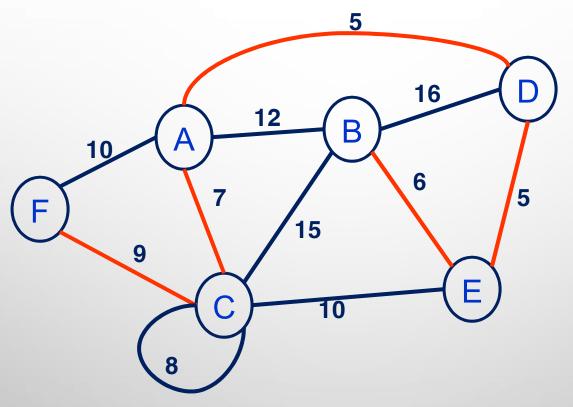
CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



	F	A	В	C	D	E
0	0, -1	∞, <b>-1</b>	∞, <b>-1</b>	∞, <b>-</b> 1	∞, <b>-</b> 1	∞, <b>-</b> 1
1	*	10, F	∞, <b>-</b> 1	9, <i>F</i>	∞, <b>-</b> 1	∞, <b>-</b> 1
2		7, C	15, <i>C</i>	*	∞, −1	10, C
3		*	12, <i>A</i>		5, <i>A</i>	10, <i>C</i>
4			12, <i>A</i>		*	5, <i>D</i>
5			6, <i>E</i>			*
6			*			
KQ		(C,A)	(E,B)	(F,C)	(A,D)	(D,E)
W=32		7	6	9	5	5

## CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán PRIM



KQ	(C,A)	(E,B)	( <b>F</b> , <b>C</b> )	(A,D)	( <b>D</b> , <b>E</b> )
W=32	7	6	9	5	5

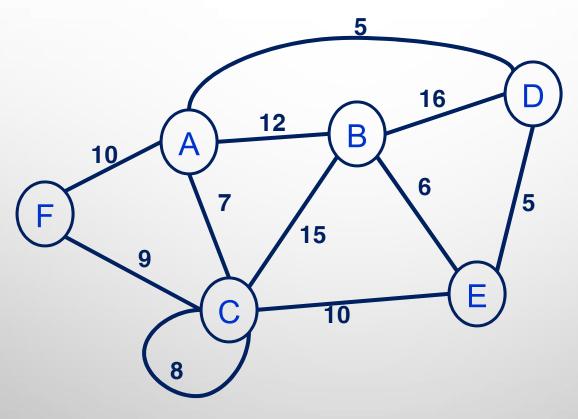
L.T.P.D.

## CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

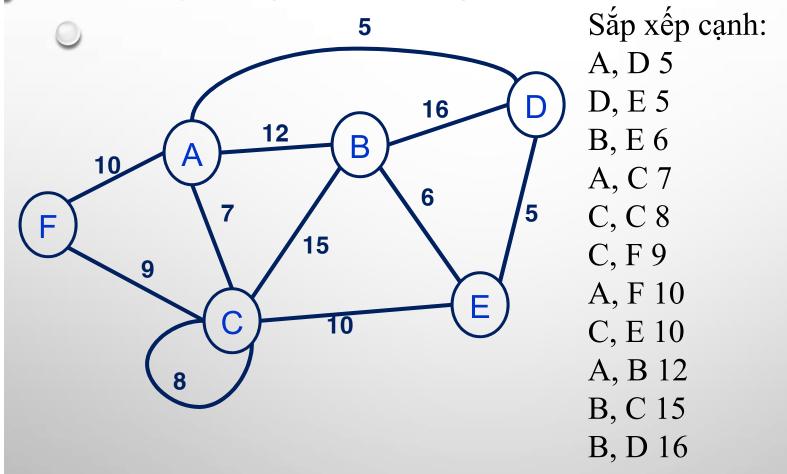
Thuật toán KRUSKAL tìm cây khung nhỏ nhất Input: Đồ thị G=(X, E) liên thông, X gồm N đỉnh Output: Cây tối đại nhỏ nhất T=(V, U) của G

- 1. Sắp xếp các cạnh trong G tăng dần theo trọng lượng; khởi tạo  $T := \emptyset$ .
- 2. Lần lượt lấy từng cạnh e thuộc danh sách đã sắp xếp. Nếu U+{e} không chứa chu trình thì kết nạp e vào T: U := U+{e}.
- 3. Nếu T đủ N-1 cạnh thì dừng; ngược lại, lặp lại bước 2.

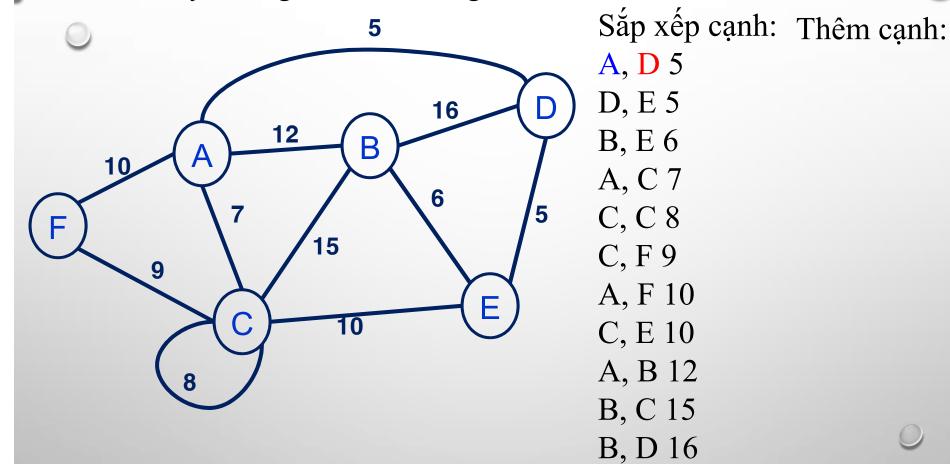
## CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



#### CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

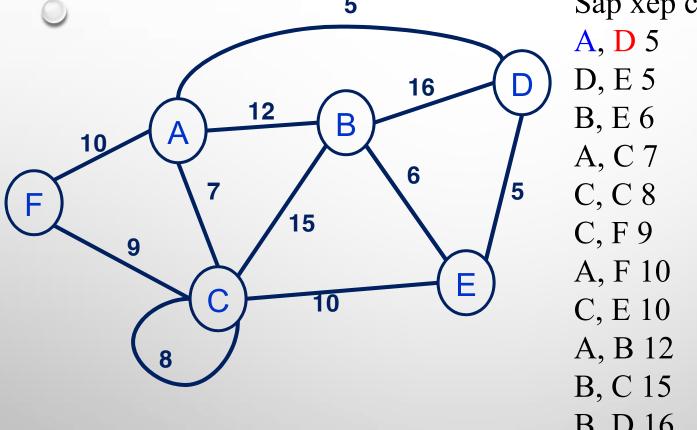


#### CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



#### CÂY KHUNG TRONG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán KRUSKAL

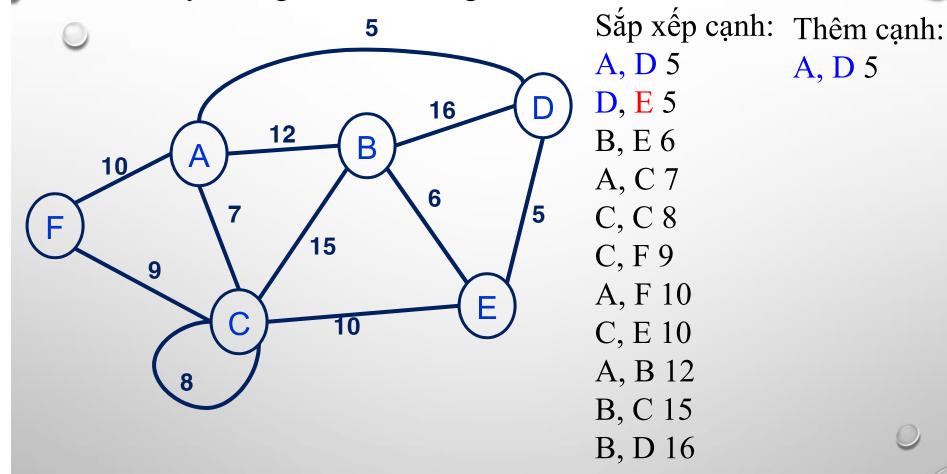


Sắp xếp cạnh: Thêm cạnh:

A, D 5

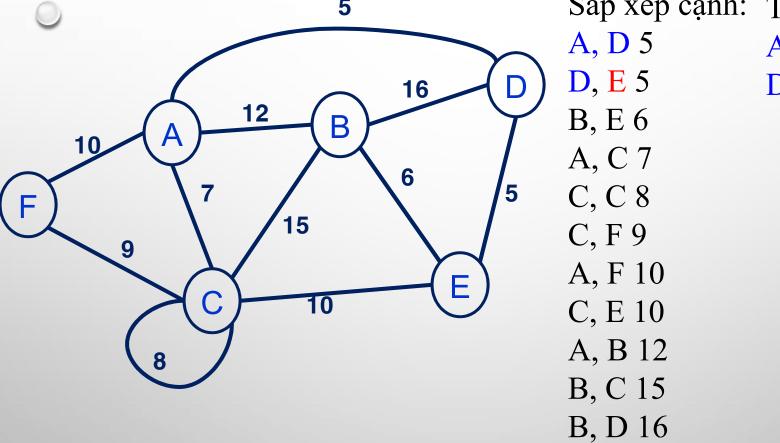
B, D 16

### CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



#### CÂY KHUNG TRONG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán KRUSKAL

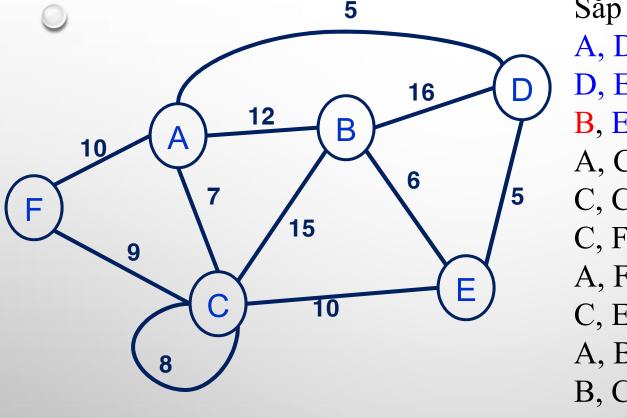


Sắp xếp cạnh: Thêm cạnh:

A, D 5 D, E 5

#### CÂY KHUNG TRONG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán KRUSKAL



Sắp xếp cạnh: Thêm cạnh:

A, D 5

D, E 5

A, D 5

D, E 5

B, E 6

A, C 7

C, C 8

C, F 9

A, F 10

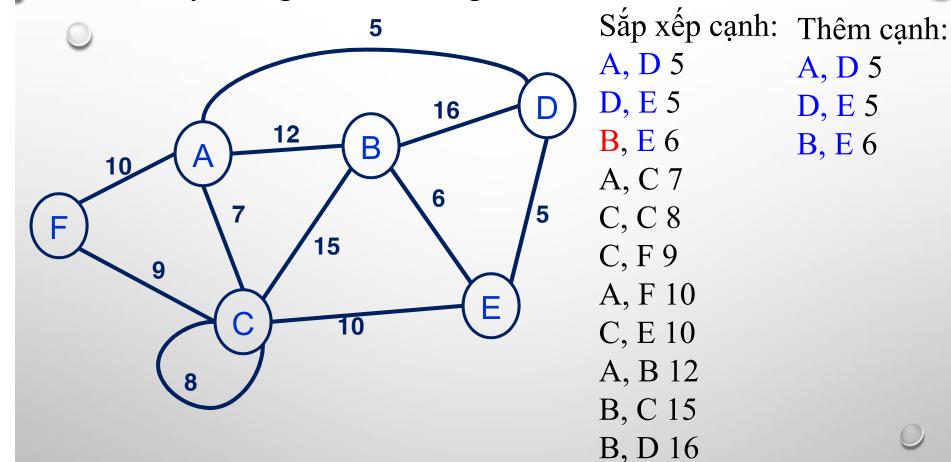
C, E 10

A, B 12

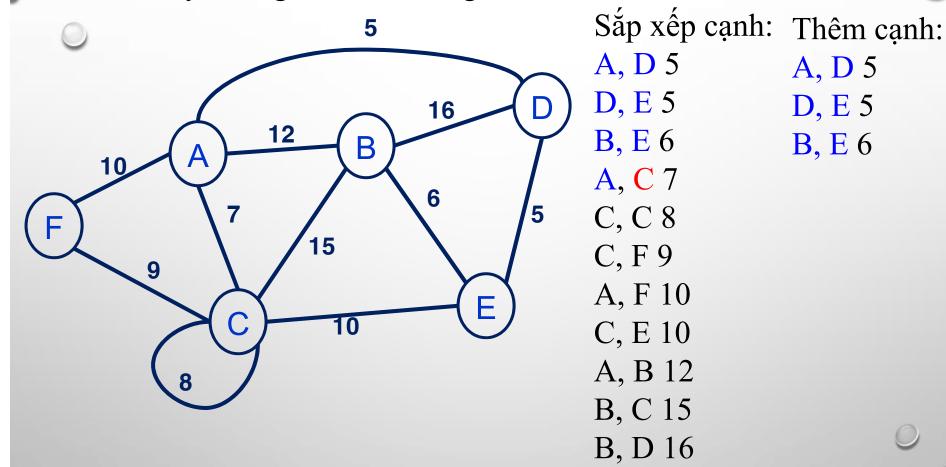
B, C 15

B, D 16

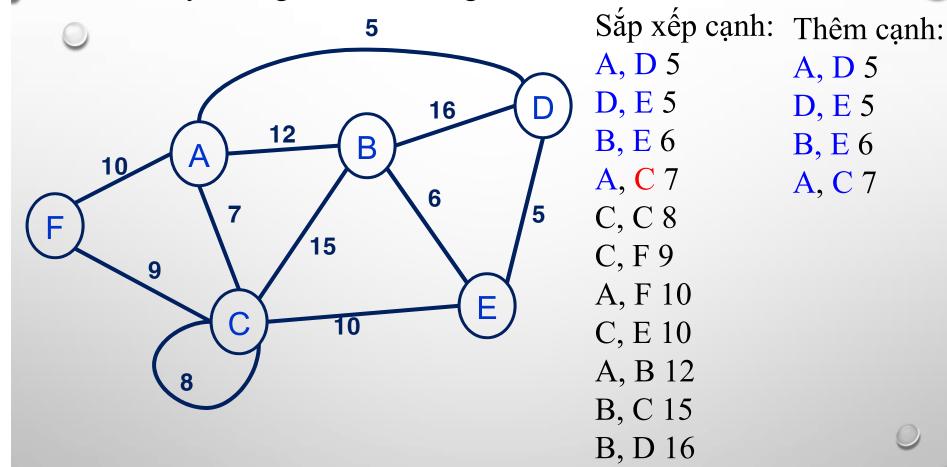
### CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



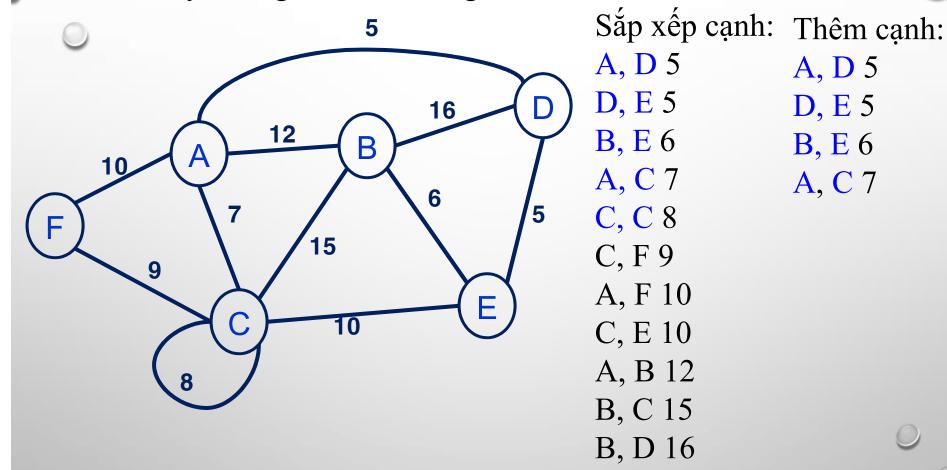
#### CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



### CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

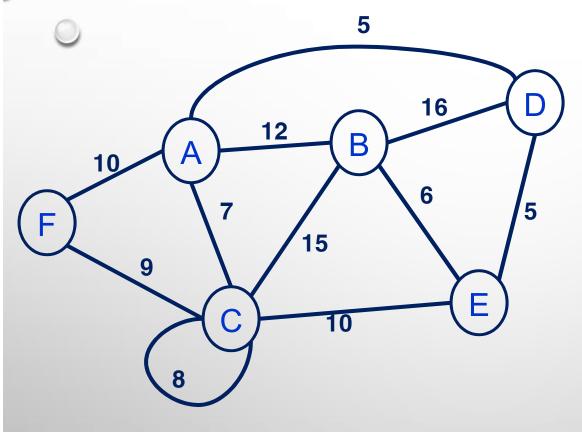


### CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



### CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán KRUSKAL



Sắp xếp cạnh: Thêm cạnh:

A, D 5 D, E 5 A, D 5 D, E 5

B, E 6

A, C 7

C, F 9

C, C 8

A, F 10

C, E 10

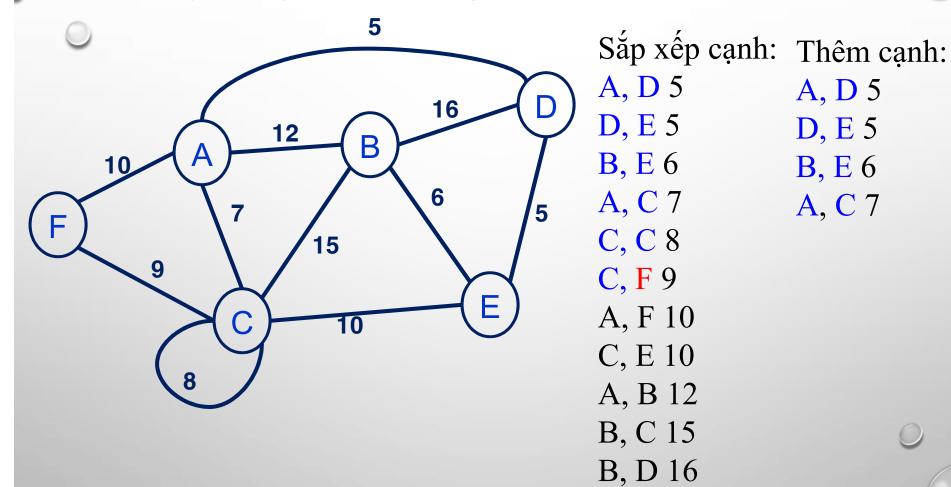
A, B 12

B, C 15

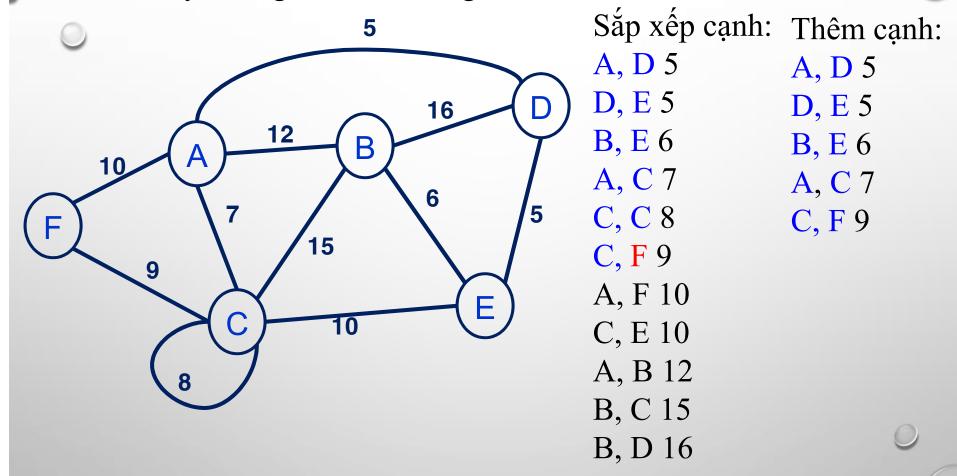
B, D 16

Vì C và C cùng bộ phận liên thông nên không thêm cạnh C,C

#### CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

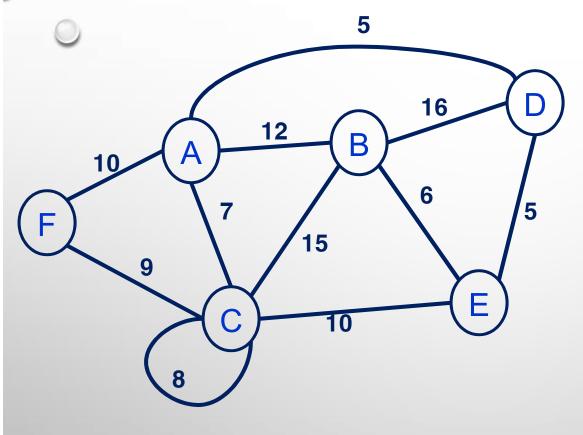


### CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



### CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán KRUSKAL



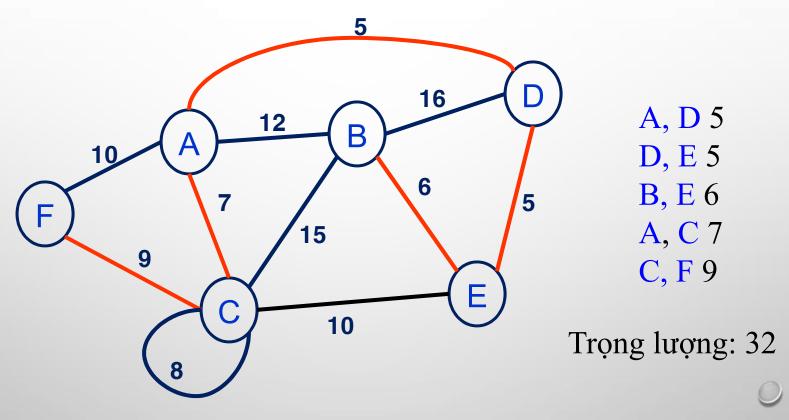
Sắp xếp cạnh: Thêm cạnh:

Sup Acp cum.	
A, D 5	A, D 5
D, E 5	D, E 5
B, E 6	B, E 6
A, C 7	A, C 7
C, C 8	C, F 9
C, F 9	
Δ F 10	Số canh

A, F 10
C, E 10
dủ n-1
A, B 12
nên thuật
B, C 15
toán dừng

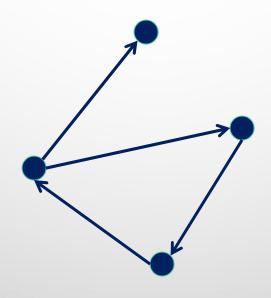
B, D 16

### CÂY KHUNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



# CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

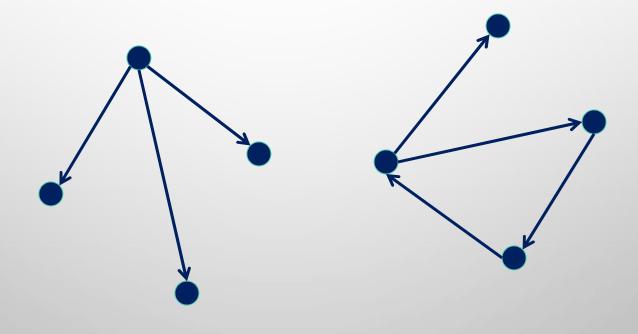
Cho đồ thị có hướng G=(X, E). Ta nói G là một D THỊ CÓ G Cố nếu tồn tại đỉnh  $r \in X$  sao cho từ r có đường đi đến v,  $\forall v \in X$ 



# CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Cho G=(X, E) là đồ thị có hướng liên thông. G được gọi là cây có hướng nếu:

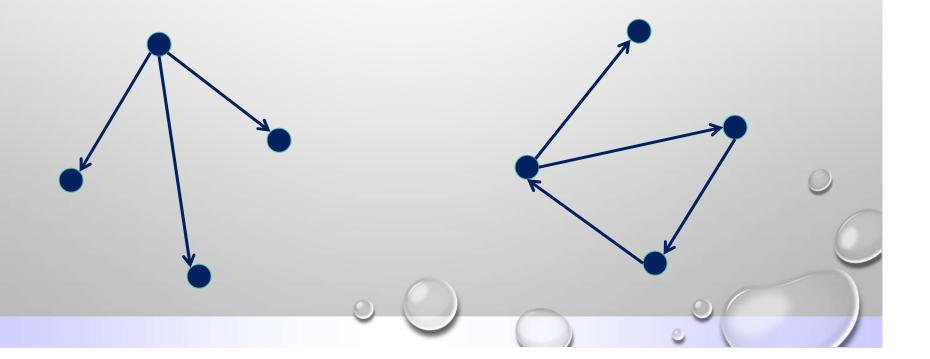
- a) G không có chu trình,
- b) G có gốc.



# CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

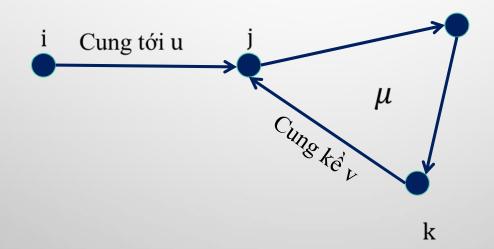
#### Lưu ý:

- Gốc của cây có hướng là duy nhất
- Mỗi đỉnh i∈X có duy nhất một đỉnh j mà cạnh liên kết với (j, i) hướng vào i, đỉnh j được gọi đỉnh cha của I
- Nếu đỉnh x∈X thỏa điều kiện d<sup>+</sup>(x)=0 thì x được gọi là lá của cây có hướng.



# CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

- Cho chu trình  $\mu$ :
- Cung u=(i,j) là cung tới  $\mu$  nếu i  $\notin \mu$  và j  $\in \mu$
- Cung v trên  $\mu$  có ngọn trùng với ngọn của cung u được gọi là cung kề trong  $\mu$  của u

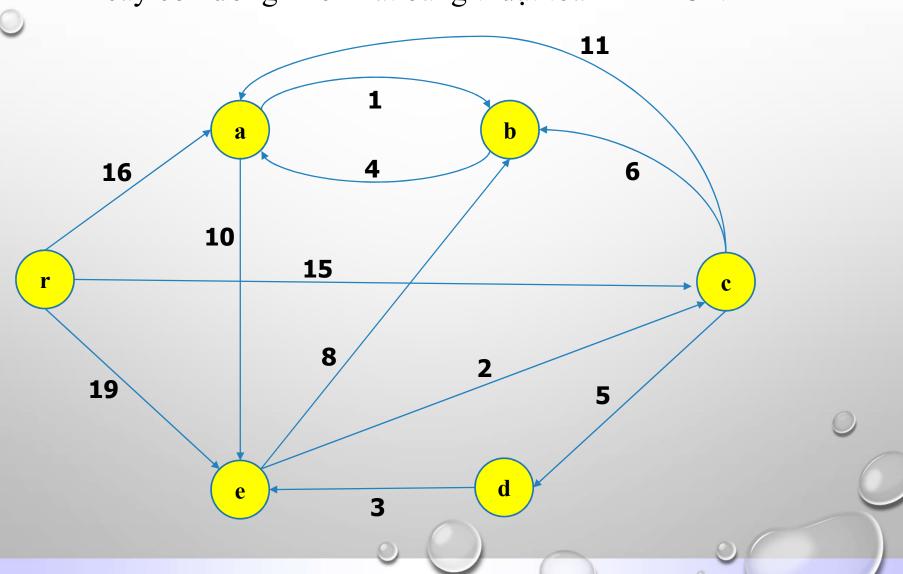


# CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

- Thuật toán EDMOND tìm cây có hướng trọng lượng nhỏ nhất
- 1. Khởi tạo:  $G_0=G$ , t=0,  $w_0(u)=w(u)$
- 2. Ở mỗi vòng lặp t:
  - a) Xây dựng đồ thị xấp xỉ H<sub>t</sub> từ G<sub>t</sub>: Với mỗi đỉnh của G<sub>t</sub> chọn cung tới có w<sub>t</sub> nhỏ nhất
  - b) Nếu  $H_t$  không chứa chu trình thì  $H_t$  là cây có hướng nhỏ nhất của  $G_t$ => Suy ngược lại tìm cây có hướng trên  $G_{t-1},...,G_0$ . Giải thuật kết thúc.
  - c) Ngược lại:  $H_t$  chứa chu trình, gọi chu trình đó là  $\mu$ :
    - Xác định đồ thị co  $G_{t+1} = G_t/\mu$
    - Trọng số w<sub>t+1</sub> được xác định:
      - $w_{t+1}(u) = w_t(u)$  với u không là cung đi tới  $\mu$
      - w<sub>t+1</sub>(u)= w<sub>t</sub>(u)- w<sub>t</sub>(v) với u là cung tới μ và v là cung kề của u
      - Gán t=t+1

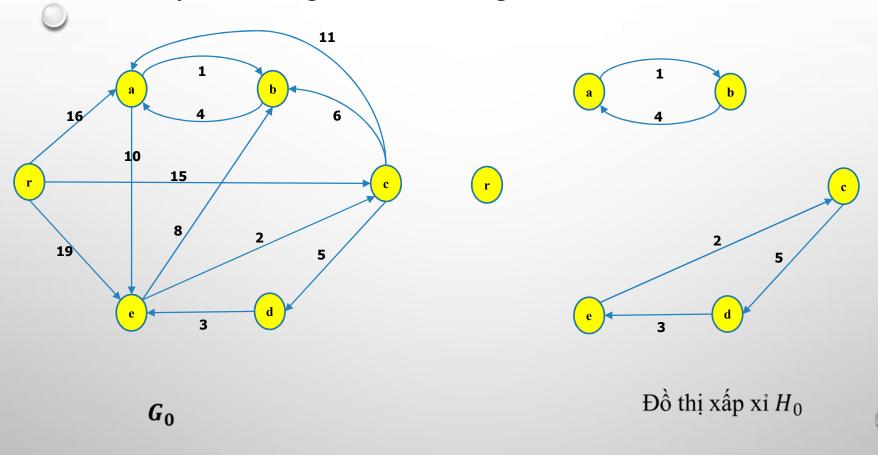
### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Tìm cây có hướng nhỏ nhất bằng thuật toán EDMOND

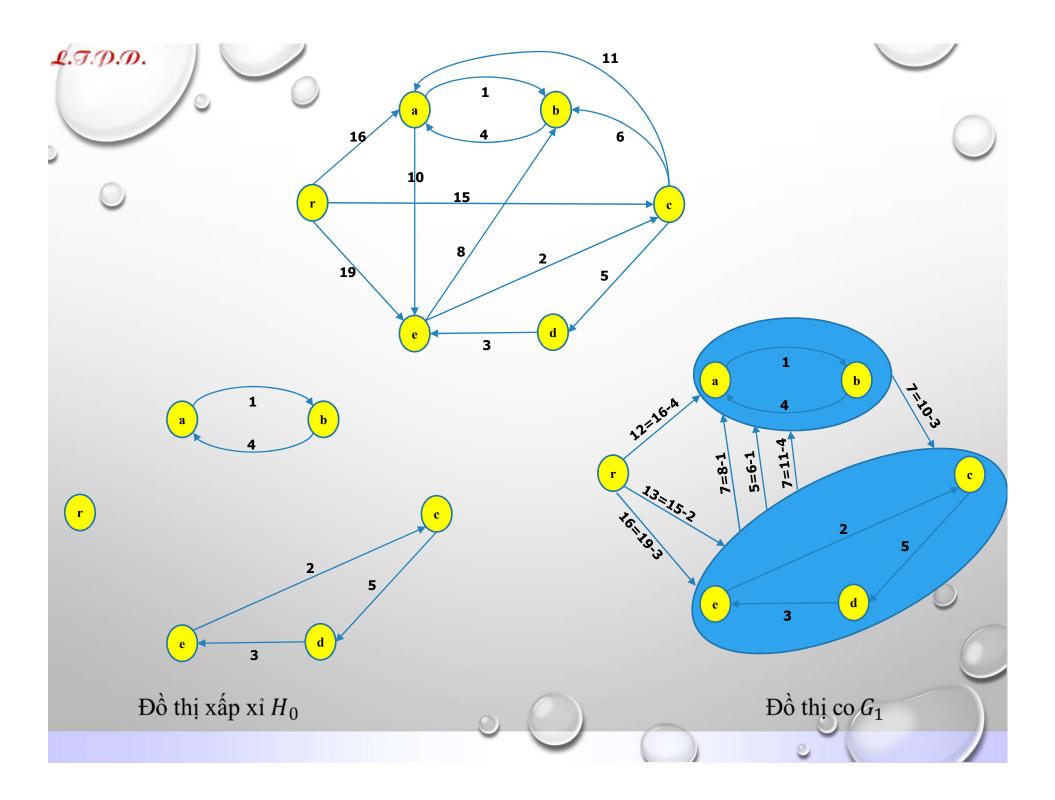


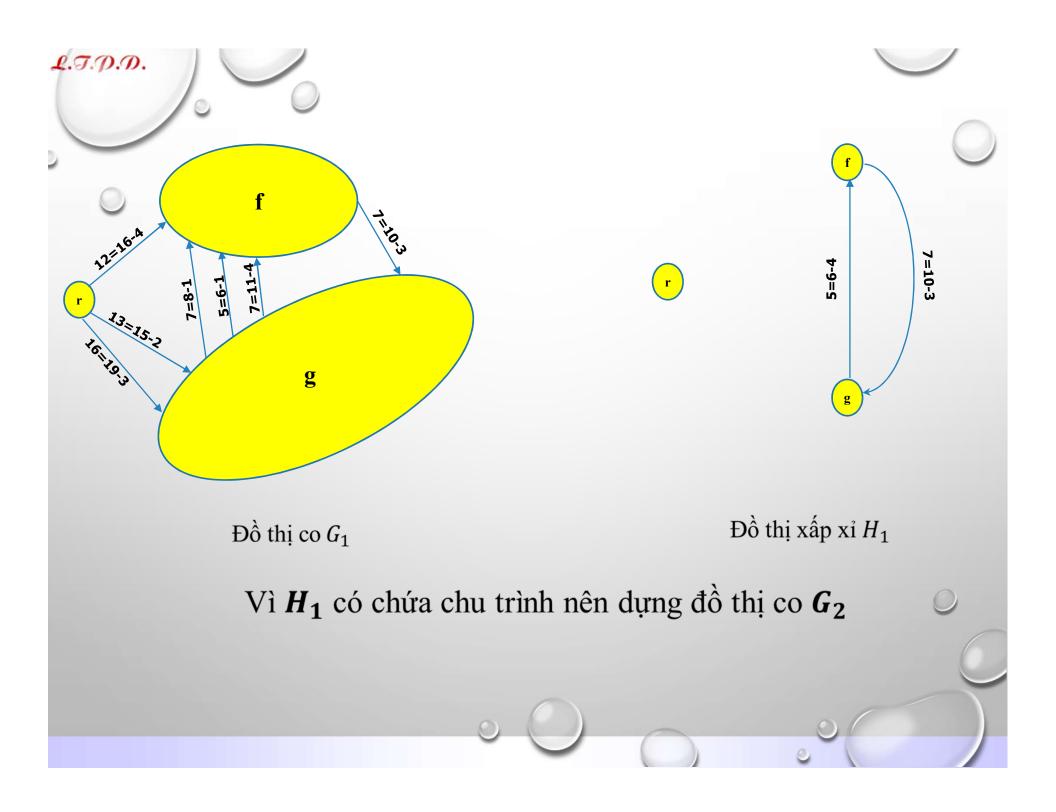
### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

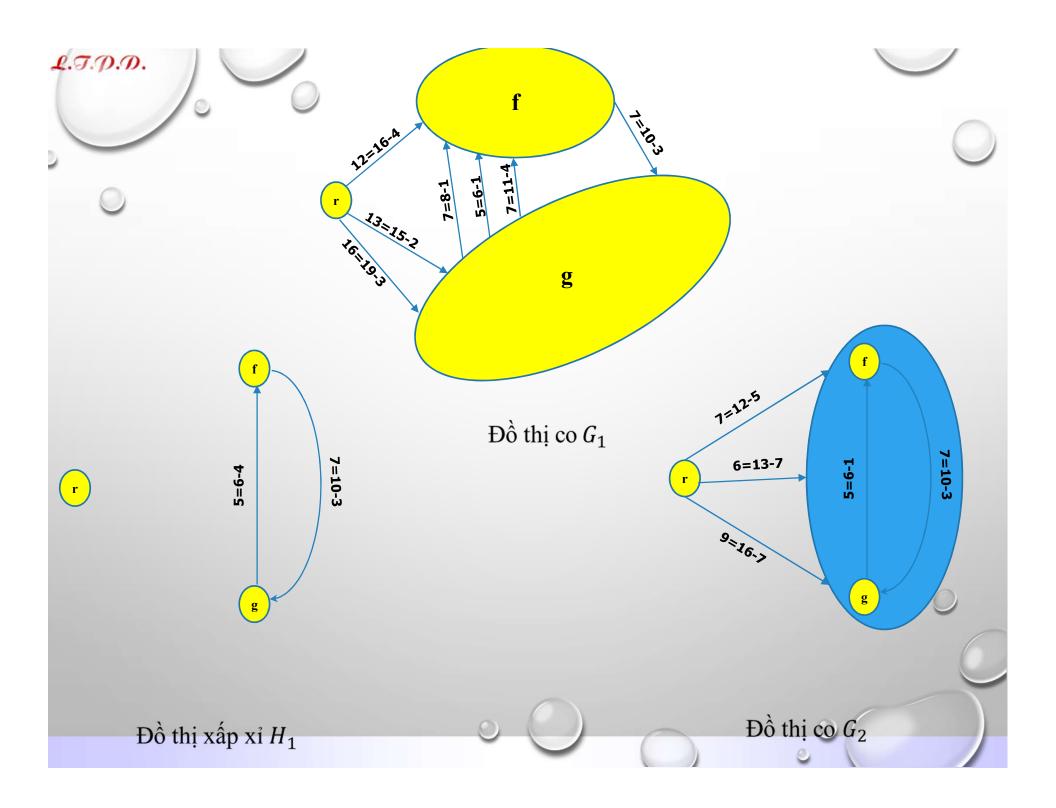
Tìm cây có hướng nhỏ nhất bằng thuật toán EDMOND

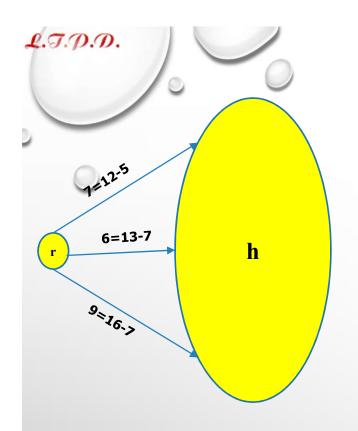


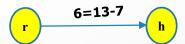
Vì  $H_0$  có chứa chu trình nên dựng đồ thị co  $G_1$ 









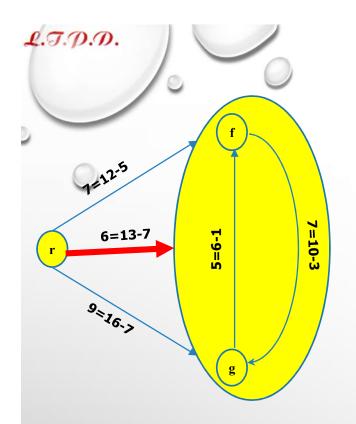


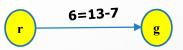
Đồ thị xấp xỉ  $H_2$ 

Đồ thị co  $G_2$ 

Vì  $H_2$  không chứa chu trình nên  $H_2$  là cây có hướng của  $G_2$ .

Suy ngược lại tìm cây có hướng trên  $G_1$  và  $G_0$ 





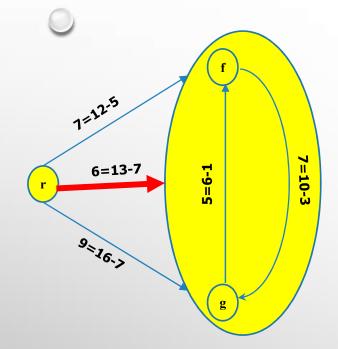
Đồ thị xấp xỉ  $H_2$ 

Đồ thị co  $G_2$ 

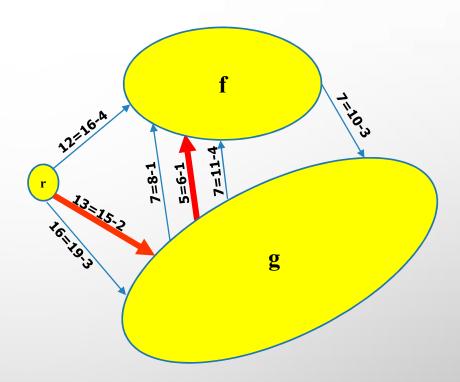
Vì  $H_2$  không chứa chu trình nên  $H_2$  là cây có hướng của  $G_2$ .

Suy ngược lại tìm cây có hướng trên  $G_1$  và  $G_0$ 

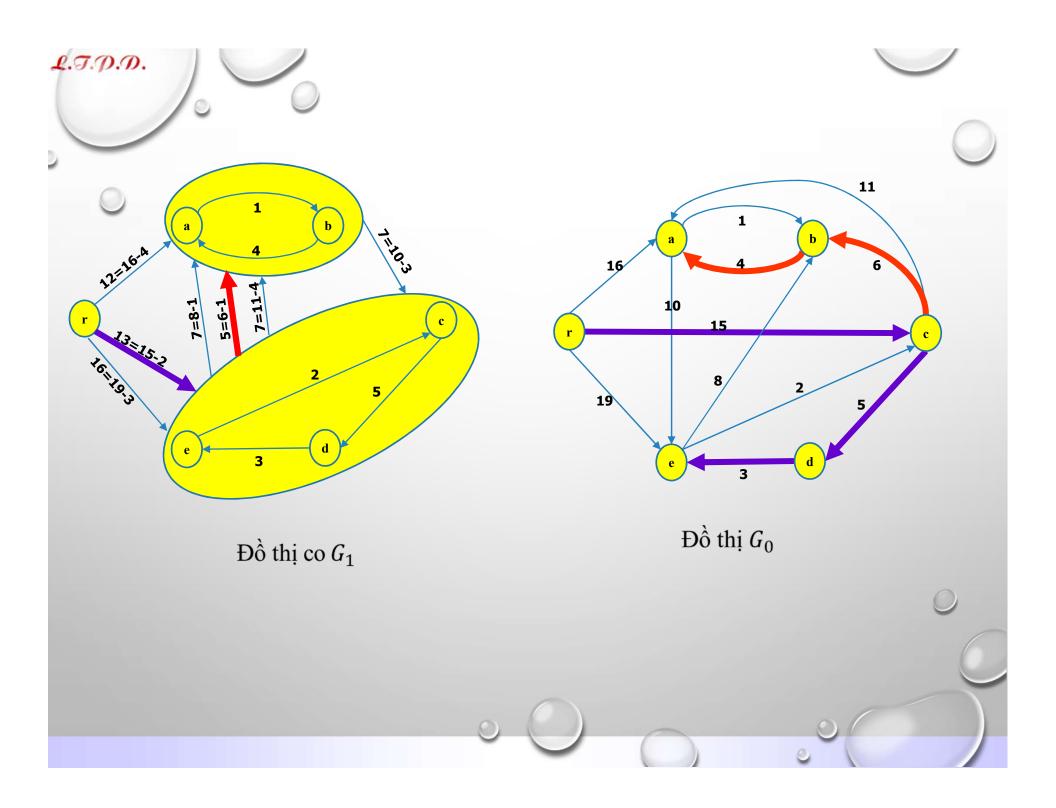




Đồ thị co  $G_2$ 

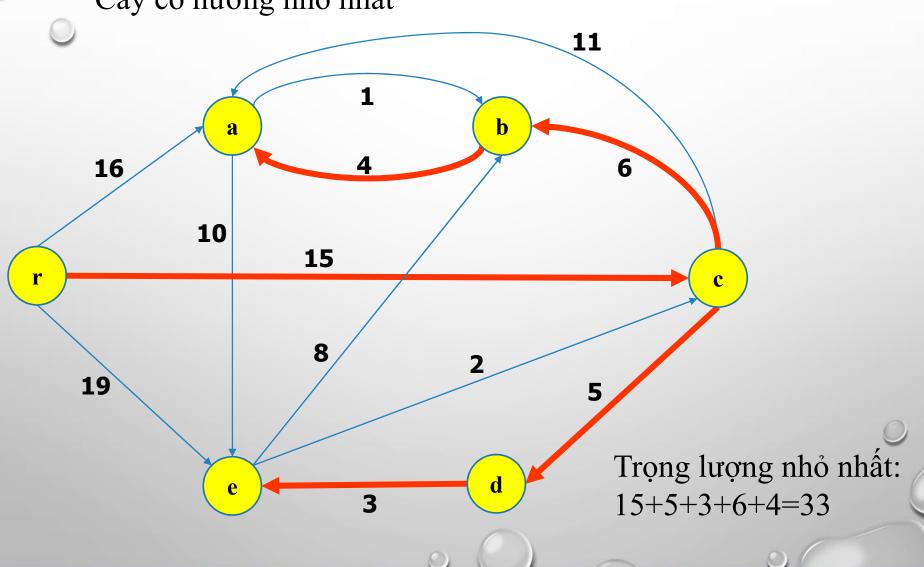


Đồ thị co $G_1$ 



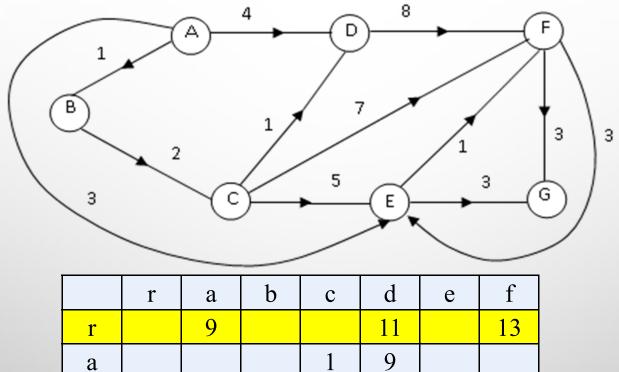
### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Cây có hướng nhỏ nhất



### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

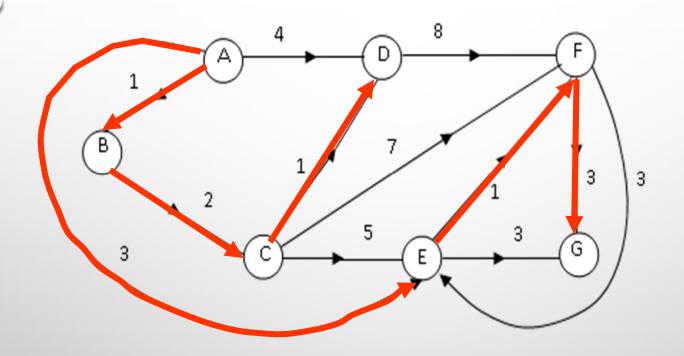
Tìm cây có hướng trọng lượng nhỏ nhất của các đồ thị sau



	r	a	b	c	d	e	f
r		9			11		13
a				1	9		
b		3					14
c			2				
d				4			8
e		7		3	5		
f						4	

### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Tìm cây có hướng trọng lượng nhỏ nhất của các đồ thị sau

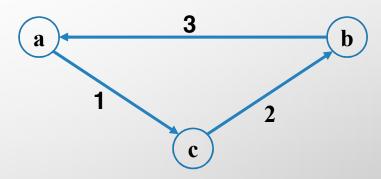


Trọng lượng nhỏ nhất: 1+1+1+2+3+3=11

### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Tìm cây có hướng trọng lượng nhỏ nhất của các đồ thị sau

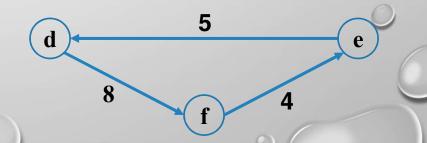
	r	a	b	c	d	e	f
r		9			11		13
a				1	9		
b		3					14
c			2				
d				4			8
e		7		3	5		
f						4	





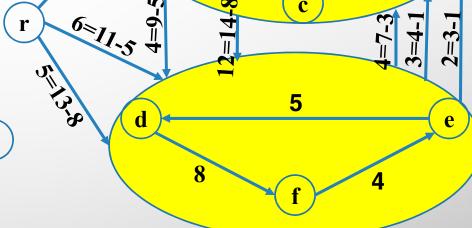
Đồ thị xấp xỉ  $H_0$ 

Vì đồ thị xấp xỉ  $H_0$  có chu trình nên xây dựng đồ thị co  $G_1$ 



## CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

	r	a	b	c	d	e	f
r		9			11		13
a				1	9		
b		3					14
С			2				
d				4			8
e		7		3	5		
f						4	



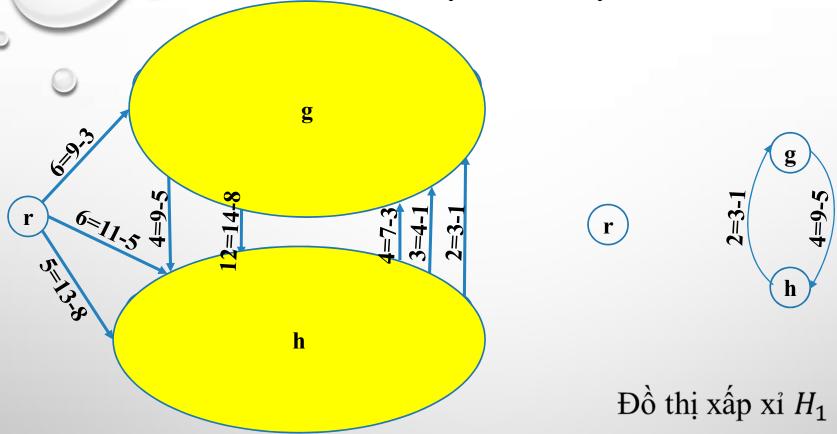
3

c 5 e

Đồ thị co  $G_1$ 

Đồ thị xấp xỉ  $H_0$ 

## CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



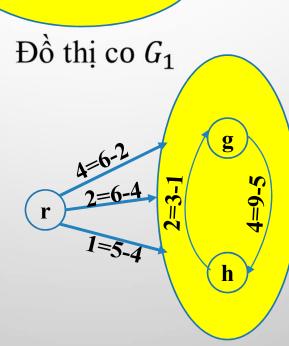
Đồ thị co  $G_1$ 

Vì đồ thị xấp xỉ  $H_1$  có chu trình nên xây dựng đồ thị co  $G_2$ 

L.T.D.D. CÂY CÓ HƯỚNG ÇNG NHỞ NHẤT 6=11-5 4 h g Đồ thị co  $G_1$ 2=3-1

Đồ thị xấp xỉ  $H_1$ 

h



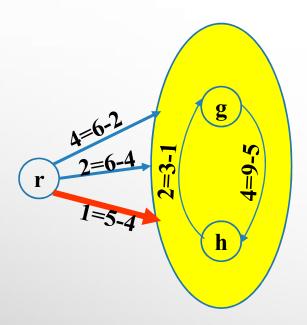
Đồ thị co  $G_2$ 

 $Vi H_2$  không chứa chu trình nên  $H_2$  là cây có hướng trọng lượng nhỏ nhất trên G<sub>2</sub>

1=5-4

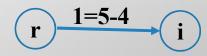
Đồ thị xấp xĩ  $H_2$ 

## CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



CCH trên đồ thị co  $G_2$ 

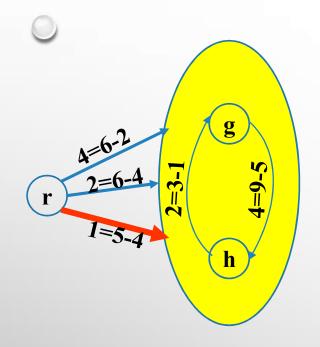
Suy ngược lại tìm cây có hướng trọng lượng nhỏ nhất trên  $G_1$  và  $G_0$ 



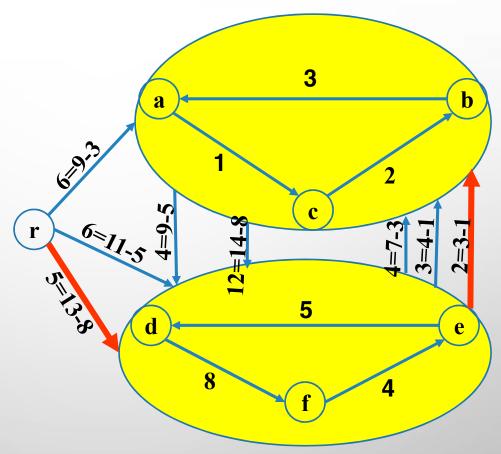
Đồ thị xấp xĩ $H_2$ 

### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

Suy ngược lại tìm cây có hướng trọng lượng nhỏ nhất trên  $G_1$  và  $G_0$ 



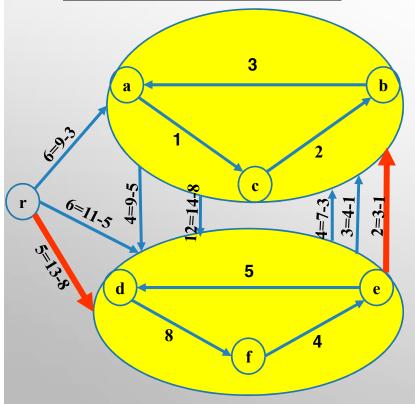
CCH trên đồ thị co  $G_2$ 



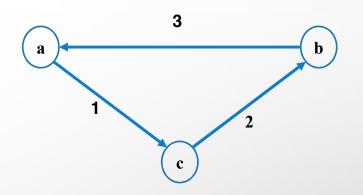
### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

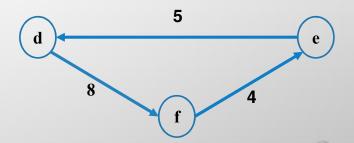
		-						
-		r	a	b	c	d	e	f
	r		9			11		13
1	a				1	9		
1	b		3					14
	c			2				
	d				4			8
	e		7		3	5		
	f						4	

có hướng trọng lượng nhỏ nhất trên  $G_1$  và  $G_0$ 

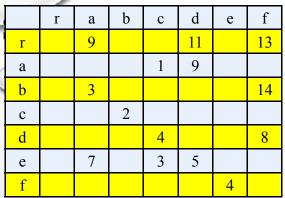


CCH trên đồ thị co  $G_1$ 

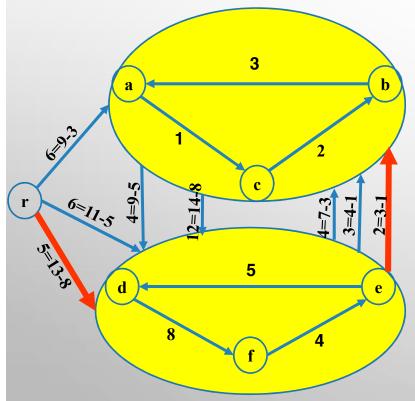


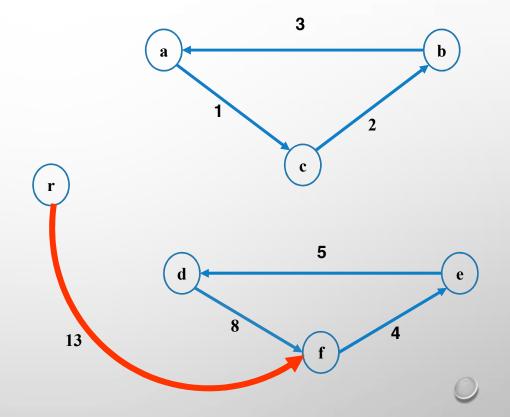


#### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



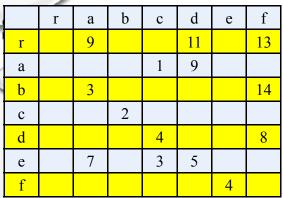
có hướng trọng lượng nhỏ nhất trên  $G_1$  và  $G_0$ 



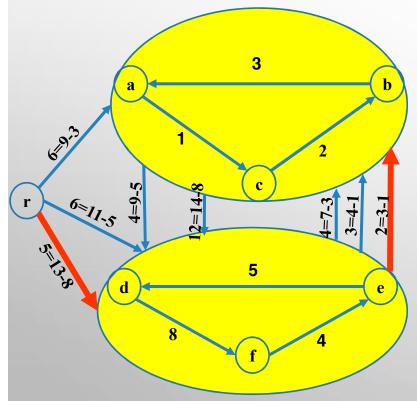


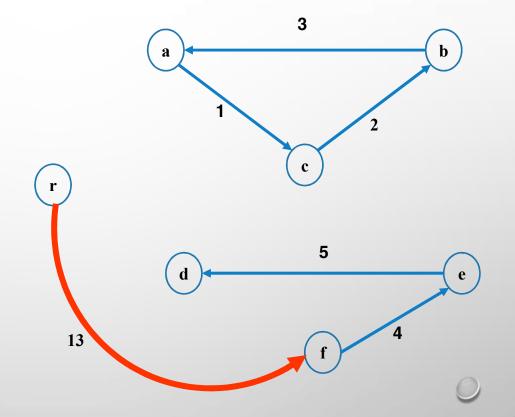
CCH trên đồ thị G

### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



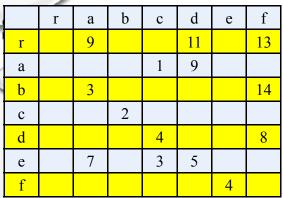
có hướng trọng lượng nhỏ nhất trên  $G_1$  và  $G_0$ 



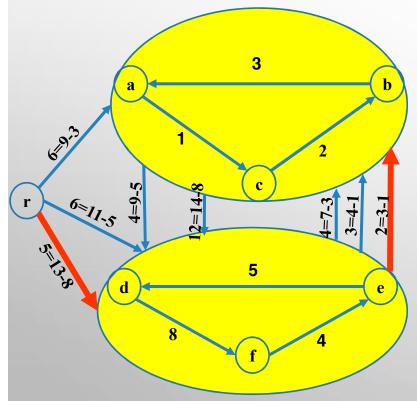


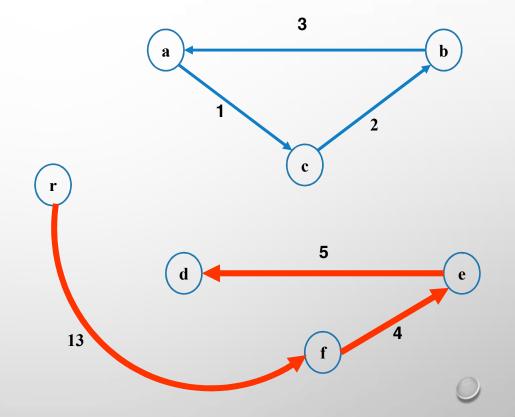
CCH trên đồ thị G

### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



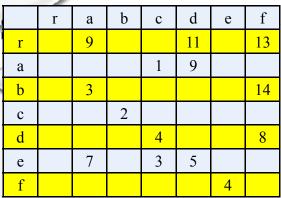
có hướng trọng lượng nhỏ nhất trên  $G_1$  và  $G_0$ 



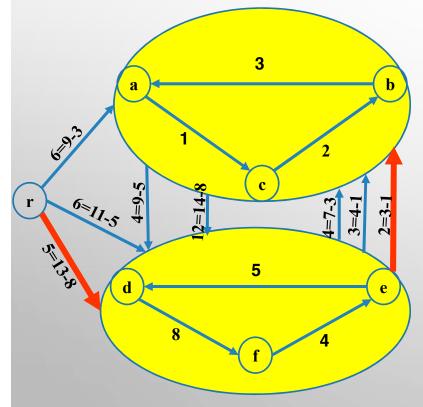


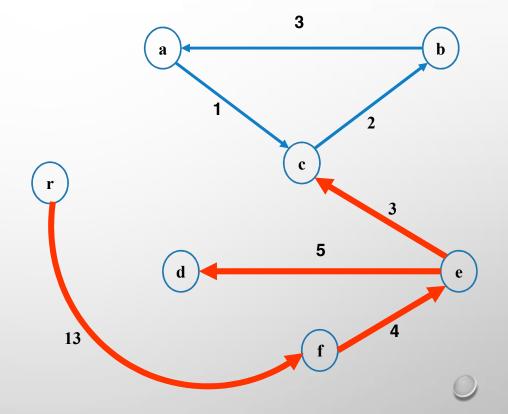
CCH trên đồ thị G

#### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



có hướng trọng lượng nhỏ nhất trên  $G_1$  và  $G_0$ 



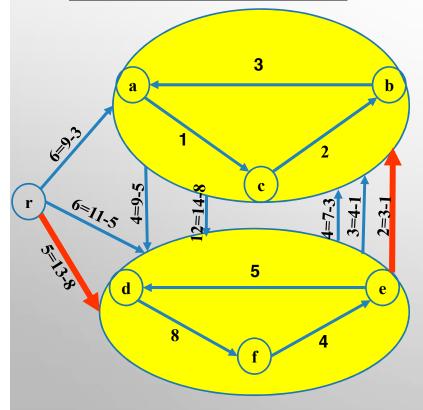


CCH trên đồ thị G

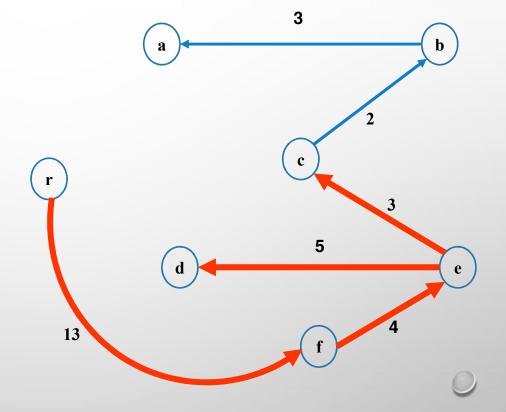
### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

		r	a	b	c	d	e	f
Ì	r		9			11		13
Ī	a				1	9		
١	b		3					14
Ī	c			2				
	d				4			8
	e		7		3	5		
	f						4	

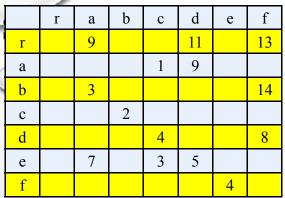
có hướng trọng lượng nhỏ nhất trên  $G_1$  và  $G_0$ 



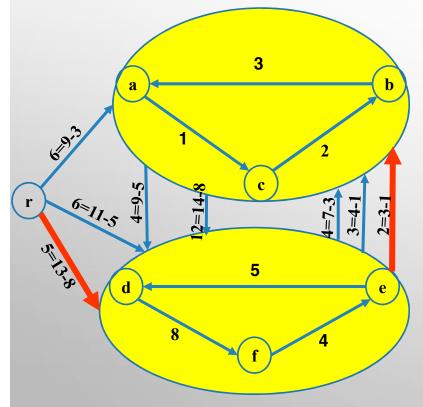
CCH trên đồ thị co  $G_1$ 



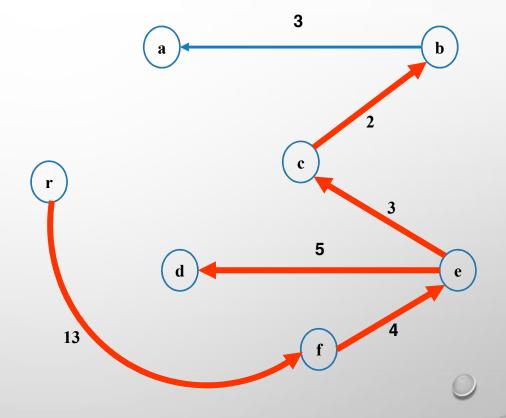
#### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT



có hướng trọng lượng nhỏ nhất trên  $G_1$  và  $G_0$ 



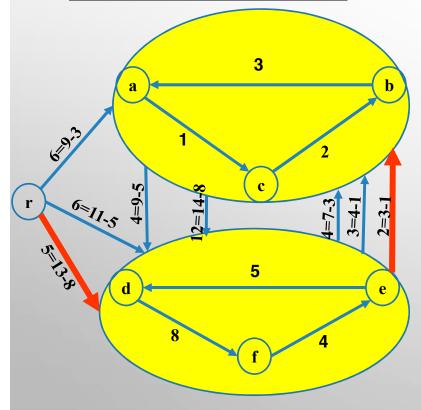
CCH trên đồ thị co  $G_1$ 



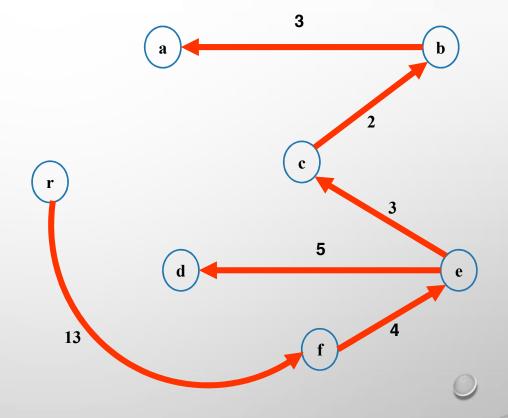
### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

		-						
-		r	a	b	c	d	e	f
1	r		9			11		13
1	a				1	9		
-	b		3					14
,	c			2				
	d				4			8
	e		7		3	5		
	f						4	

có hướng trọng lượng nhỏ nhất trên  $G_1$  và  $G_0$ 



CCH trên đồ thị co  $G_1$ 

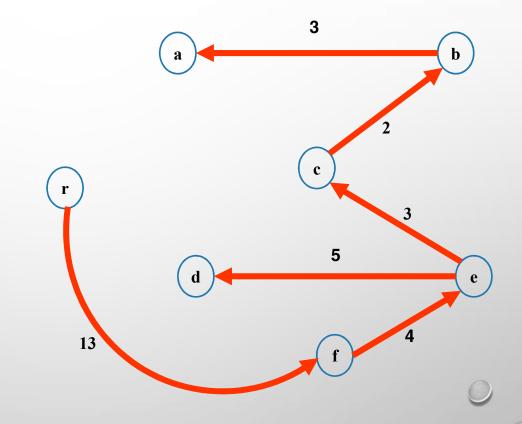


### CÂY CÓ HƯỚNG TRỌNG LƯỢNG NHỎ NHẤT

		r	a	b	c	d	e	f
	r		9			11		13
1	a				1	9		
1	b		3					14
	c			2				
	d				4			8
	e		7		3	5		
	f						4	

có hướng trọng lượng nhỏ nhất trên  $G_1$  và  $G_0$ 

Trọng lượng của cây có hướng nhỏ nhất là: 13+4+5+3+2+3=30





# XÉP HẠNG ĐÒ THỊ

#### **NỘI DUNG:**

- 1. HẠNG CỦA ĐỈNH
- 2. GIẢI THUẬT XẾP HẠNG
- 3. BÀI TOÁN GANT