LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ
GRAPH THEORY

LÊ THỊ PHƯƠNG DUNG

THÔNG TIN
THI CUỐI KỲ

LÝ THUYẾT: CHIỀU CHỦ NHẬT, NGÀY 30/5/2021

THỰC HÀNH: TUẦN THI CHUNG

NỘI DUNG

1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ
2. TÍNH LIÊN THÔNG CỦA ĐỒ THỊ
3. ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT TRÊN ĐỒ THỊ
4. XẾP HẠNG ĐỒ THỊ
5. CÂY VÀ CÂY CÓ HƯỚNG
6. LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. TOÁN RỜI RẠC – *NGUYỄN TÔ THÀNH, NGUYỄN ĐỨC NGHĨA*
2. LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG – *NGUYỄN TUẤN ANH*

… .....

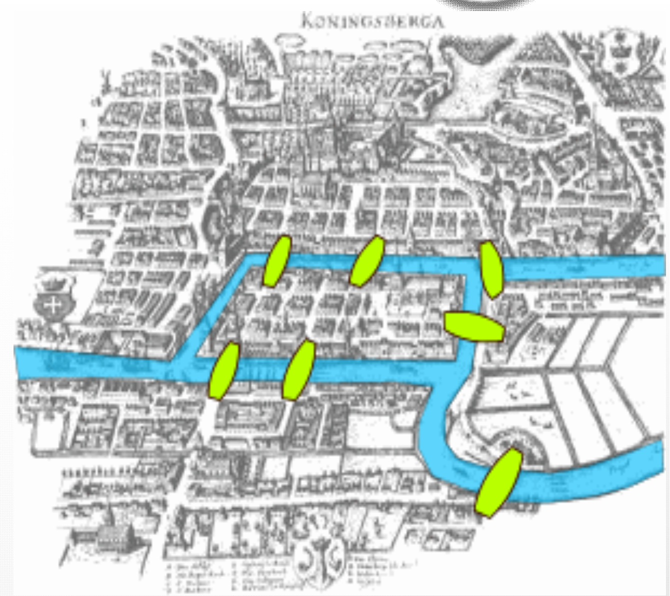
CHƯƠNG 1

ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ

NỘI DUNG:

1. GIỚI THIỆU
2. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ
3. MỘT SỐ ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT
4. SỰ ĐẲNG CẤU CỦA ĐỒ THỊ
5. BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

GIỚI THIỆU



Bài toán bảy cây cầu Euler, còn gọi là **Bảy cầu ở Königsberg** (nay là Kaliningrad, Nga) bao gồm hai hòn đảo lớn nối với nhau và với đất liền bởi bảy cây cầu

Bài toán đặt ra là tìm một tuyến đường mà đi qua mỗi cây cầu một lần và chỉ đúng một lần (bất kể điểm xuất phát hay điểm tới).

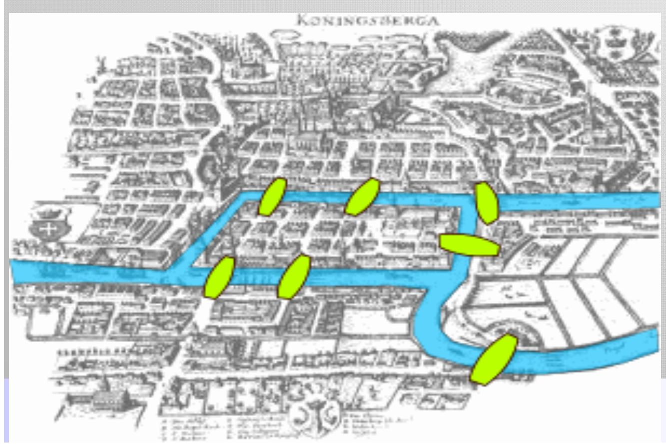
Năm 1736, Leonhard Euler đã chứng minh rằng bài toán này là không có lời giải. Kết quả này là cơ sở phát triển của Lý thuyết đồ thị

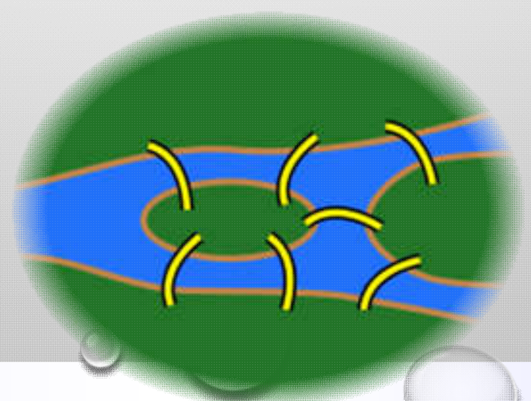
GIỚI THIỆU

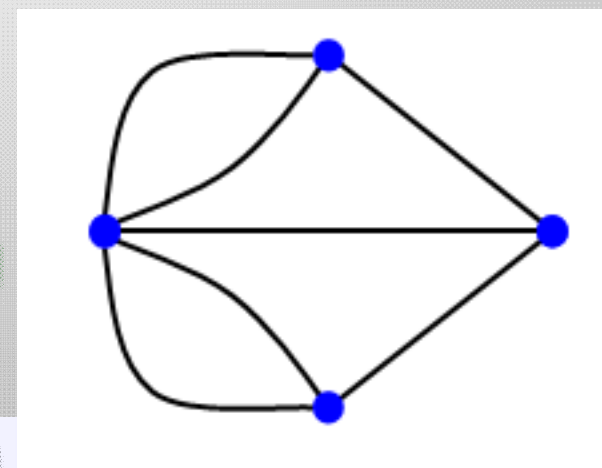
Lời giải bài toán bảy cây cầu Euler:

Ông loại bỏ tất cả các chi tiết ngoại trừ các vùng đất và các cây cầu, sau đó thay thế mỗi vùng đất bằng một điểm, gọi là đỉnh hoặc nút, và thay mỗi cây cầu bằng một đoạn nối, gọi là cạnh hoặc liên kết. Cấu trúc toán học thu được được gọi là một đồ thị

- Điểm xuất phát trùng với điểm đến: Đồ thị không được có đỉnh bậc lẻ
- Điểm xuất phát và điểm đến tùy ý: Đồ thị không quá 2 đỉnh bậc lẻ

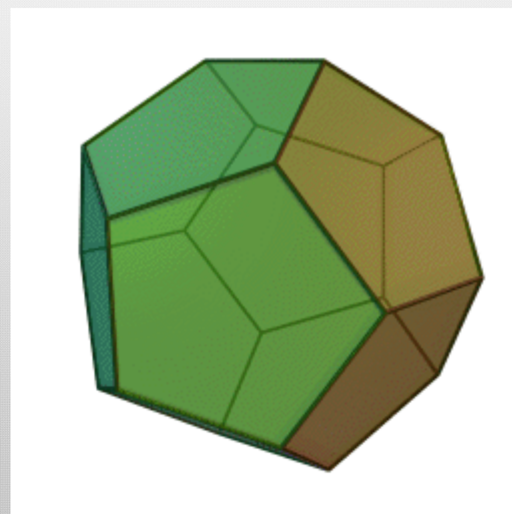


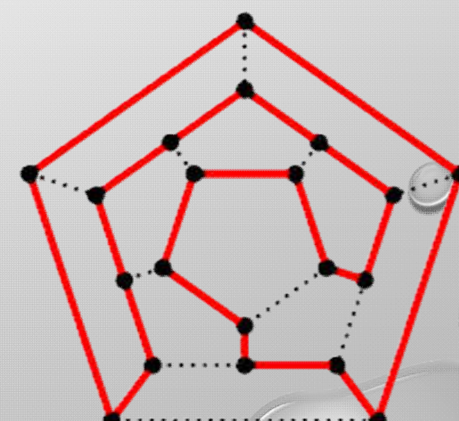




GIỚI THIỆU

Đường đi Hamilton có nguồn gốc từ bài toán: "Xuất phát từ một đỉnh của khối thập nhị diện đều hãy đi dọc theo các cạnh của khối đó sao cho đi qua tất cả các đỉnh khác, mỗi đỉnh đúng một lần sau đó quay về đỉnh xuất phát." là gọi theo tên của William Rowan Hamilton phát biểu vào năm 1859

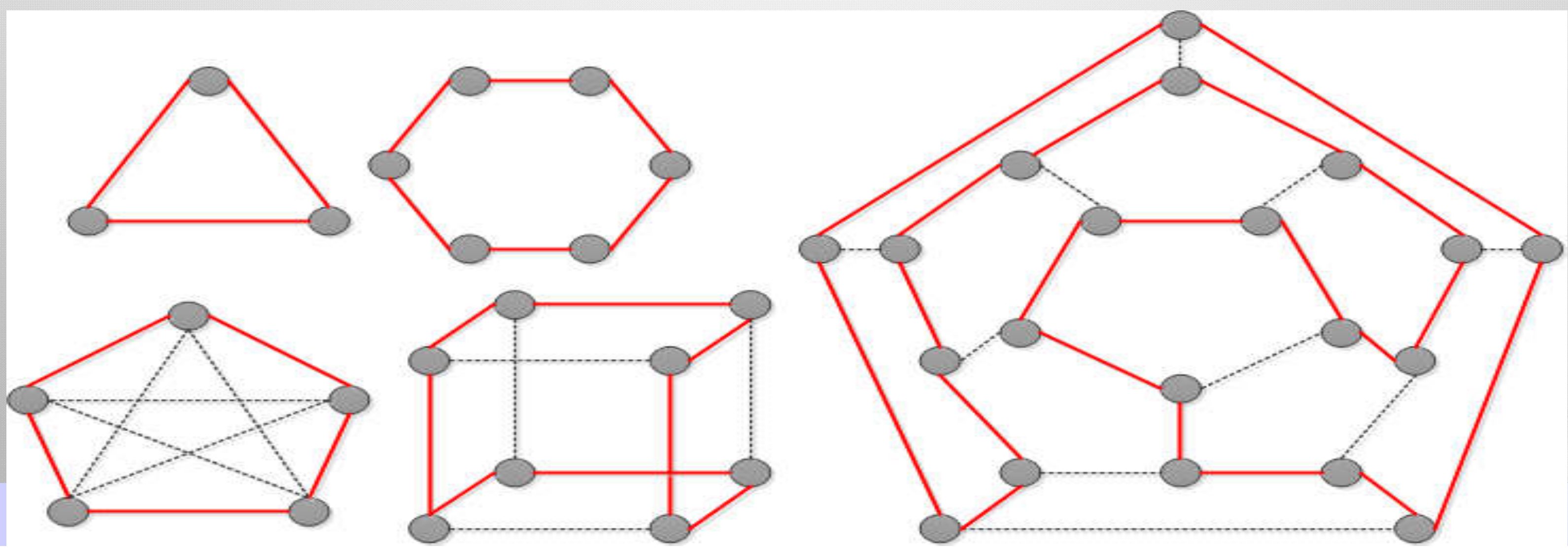




GIỚI THIỆU

Hiện nay chưa có quy tắc cần và đủ để kiểm tra xem một đồ thị có là Hamilton không. Các kết quả có được hiện nay chỉ là các điều kiện đủ để một đồ thị là đồ thị Hamilton hay có đường đi Hamilton

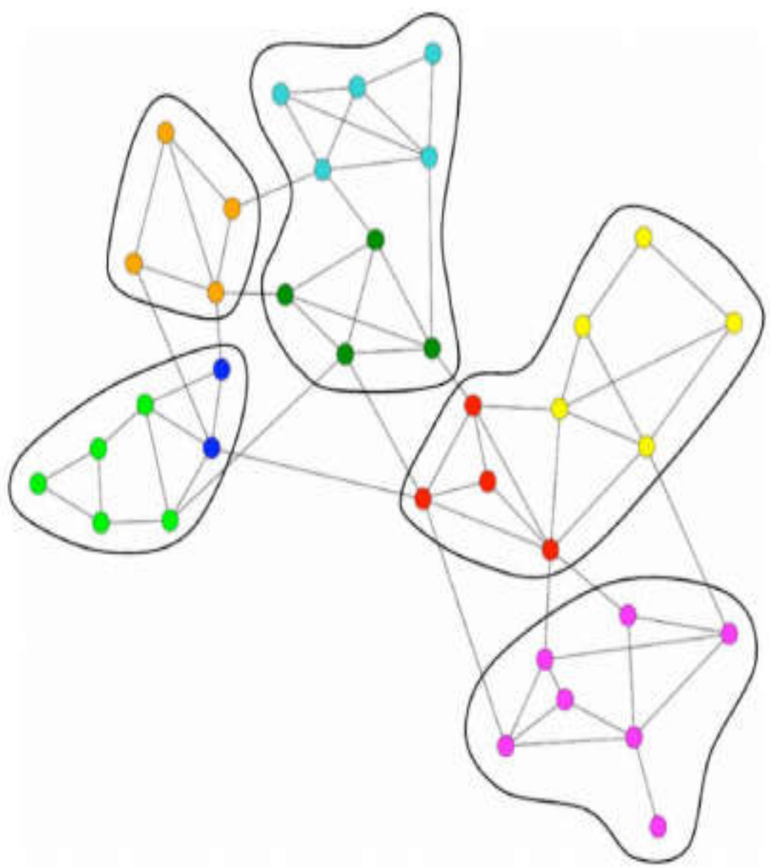
- Đồ thị đủ luôn là đồ thị Hamilton. Với n lẻ và $n \geq 3$ thì Kn có $(n-1)/2$ chu trình Hamilton đôi một không có cạnh chung
- Giả sử G là đồ thị phân đôi với hai tập đỉnh X1, X2 và $|X1| = |X2| = n$. Nếu $d(x) \geq n/2$ với mọi đỉnh x của G thì G là đồ thị Hamilton
- ……

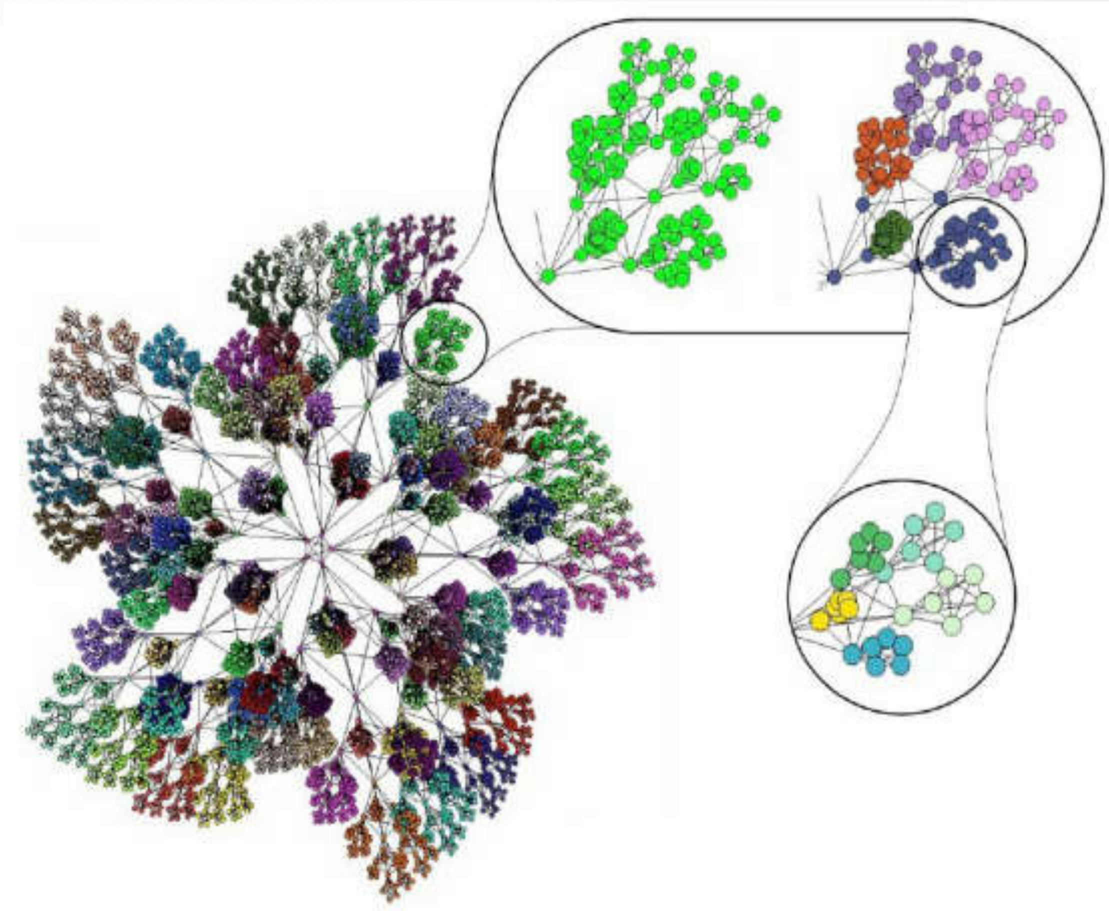


GIỚI THIỆU

Một số ứng dụng khác:

- Tìm cộng đồng trên mạng

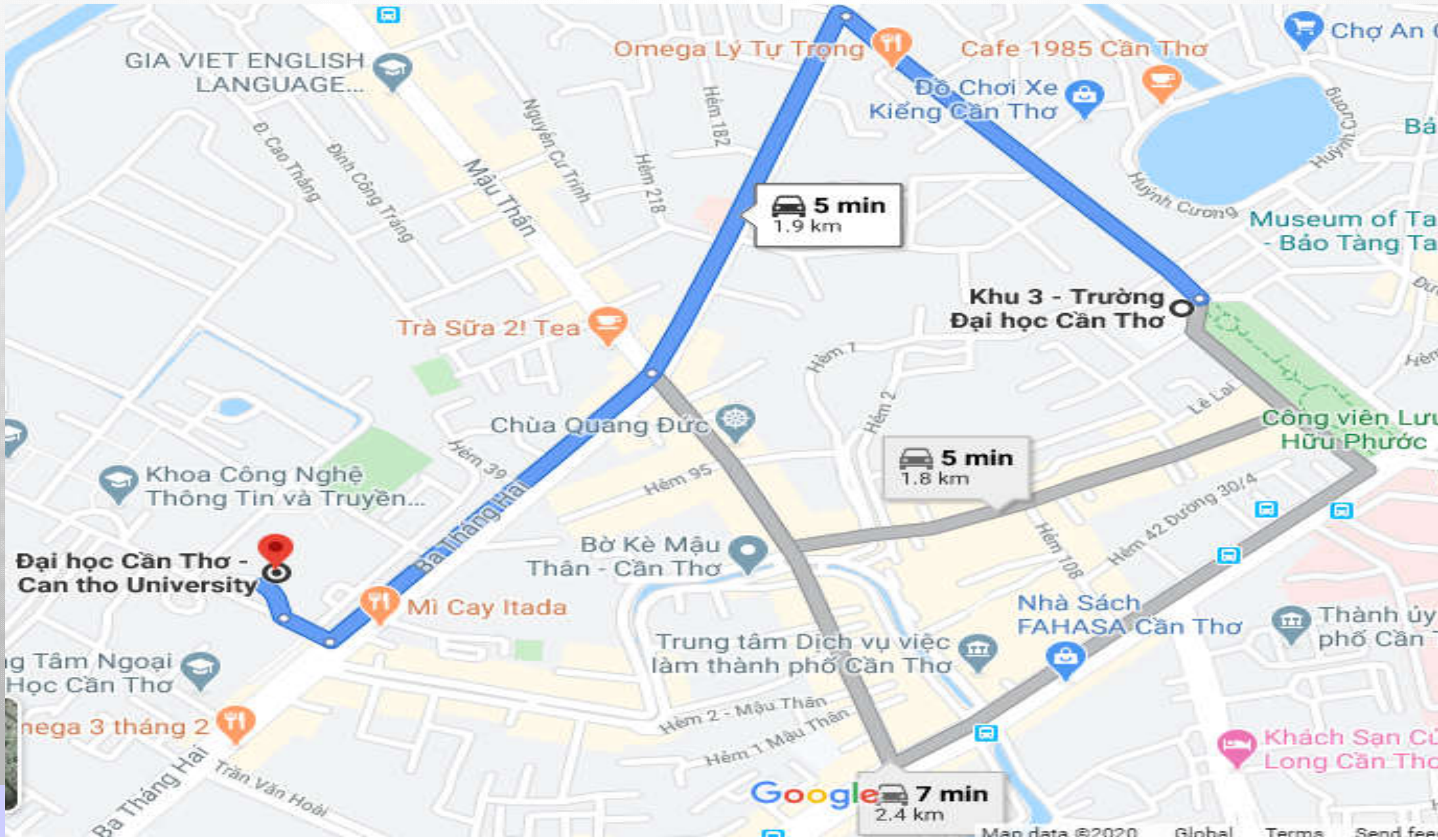




GIỚI THIỆU

Một số ứng dụng khác:

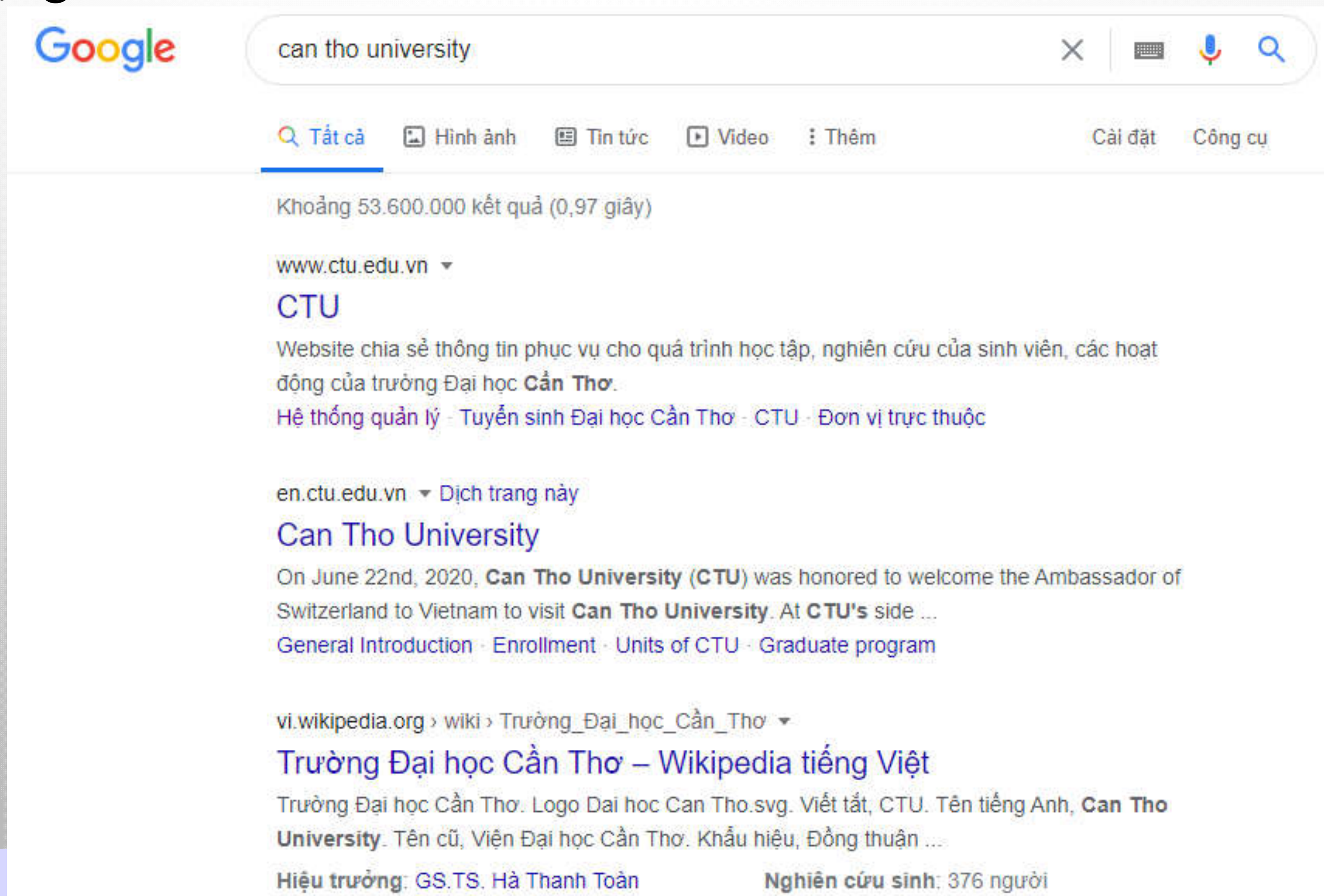
- Tìm đường đi ngắn nhất



GIỚI THIỆU

Một số ứng dụng khác:

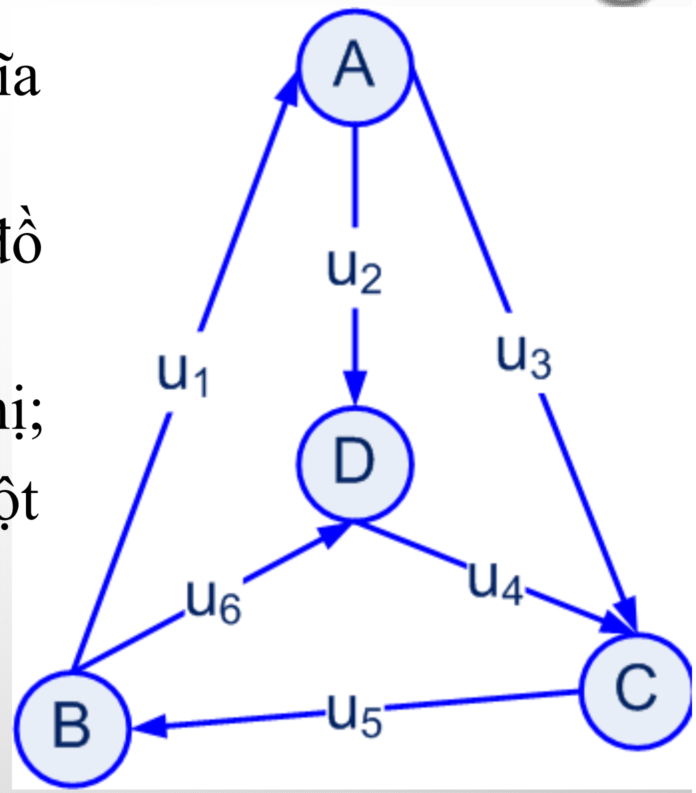
- Xếp hạng



CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ

Một **đồ thị có hướng** G=(X, U) được định nghĩa bởi:

- Tập $X \neq \varnothing$ được gọi là tập các đỉnh của đồ thị;
- Tập hợp U là tập các cung/cạnh của đồ thị;
- Mỗi cung/cạnh $u \in U$ được liên kết với một cặp đỉnh có thứ tự $(i, j) \in X^2$



Cho ĐTCH G=(X, U) như hình bên, hãy xác định:

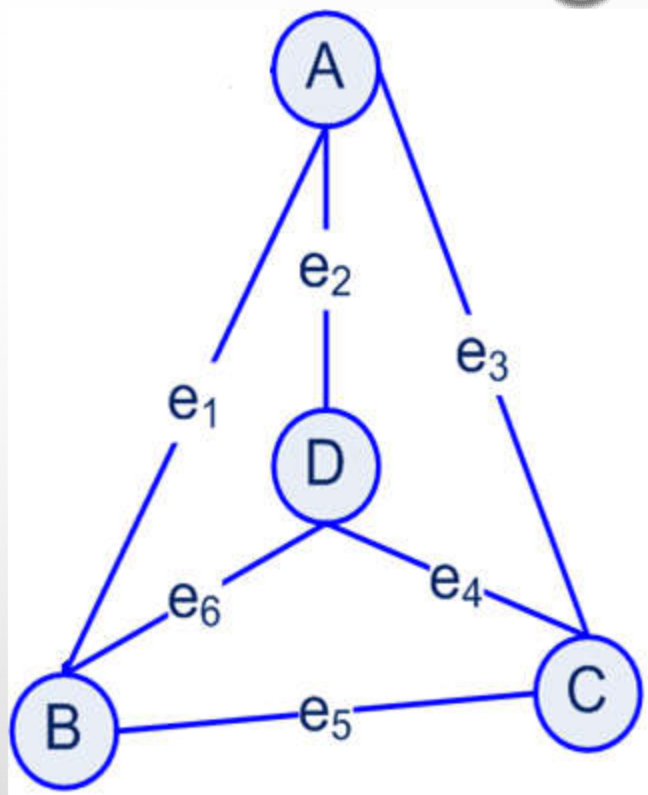
- Tập đỉnh X X={A, B, C, D}
- Tập cung/cạnh U $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$

$=\{(B, A), (A, D), (A, C), (D, C), (C, B), (B, D)\}$

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ

Một **đồ thị vô hướng** G=(X, E) được định nghĩa bởi:

- Tập X ≠ ∅ được gọi là tập các đỉnh của đồ thị;
- Tập hợp E là tập các cạnh của đồ thị;
- Mỗi cạnh e∈E được liên kết với một cặp đỉnh không phân biệt thứ tự $\{i, j\} \in X^2$

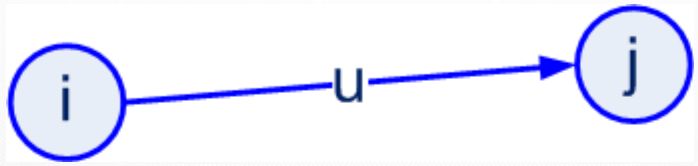


Cho ĐTVH G=(X, E) như hình bên, hãy xác định:

- Tập đỉnh X X={A, B, C, D}
- Tập cạnh E $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$
  ={{A, B}, {A, D}, {A, C}, {C, D}, {B, C}, {B, D}}

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ

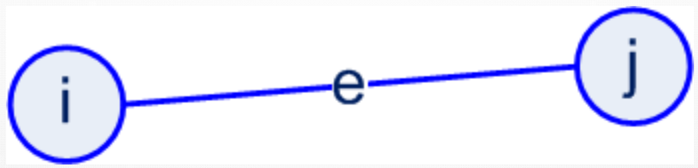
Trên đồ thị có hướng, xét cung u được liên kết với cặp đỉnh (i, j):



- Cung u **kề** với đỉnh i và đỉnh j (hay đỉnh i và đỉnh j **kề** với cung u); có thể viết tắt u=(i, j). Cung u đi ra khỏi đỉnh i và đi vào đỉnh j
- Đỉnh j được gọi là **đỉnh kề** của đỉnh i
- Bậc của đỉnh i: $deg(i)=deg^{-}(i)+deg^{+}(i)$
  - Bán bậc ngoài của đỉnh i ký hiệu $deg^{+}(i)$ là n nếu đỉnh i kề với n đỉnh hay từ i có n cung đi ra
  - Bán bậc trong của đỉnh i ký hiệu $deg^{-}(i)$ là m nếu đỉnh i có m cung đi vào

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ

Trên đồ thị vô hướng, xét cạnh e được liên kết với cặp đỉnh (i, j):



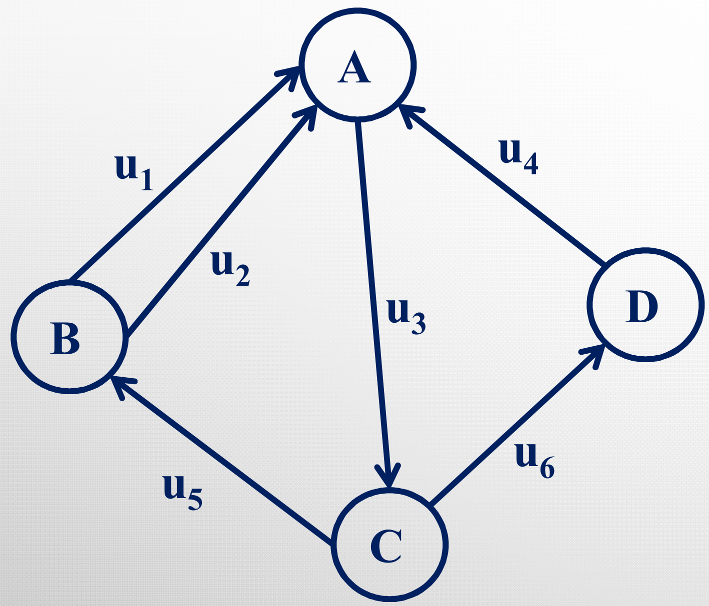
- Cạnh e **kề** với đỉnh i và đỉnh j (hay đỉnh i và đỉnh j **kề** với cạnh e); có thể viết tắt e=(i, j)
- Đỉnh i và đỉnh j được gọi là 2 đỉnh kề nhau (hay đỉnh i kề với đỉnh j và ngược lại đỉnh j kề với đỉnh i)
- Bậc của đỉnh i ký hiệu deg(i) là n nếu i có n đỉnh kề với nó hoặc i kề với n cạnh

Tập hợp tất cả các đỉnh kề của i được gọi là tập láng giềng (neighbors) của i

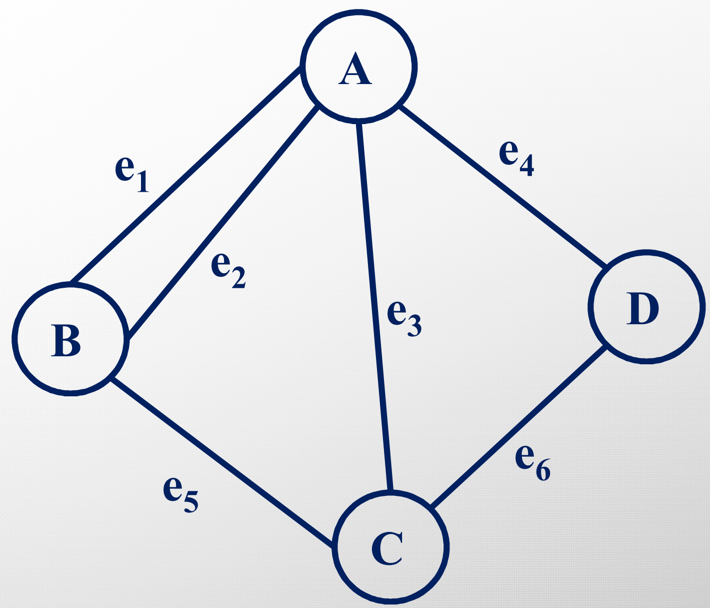
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ

Tính bậc của tất cả các đỉnh trong ĐTCH G?

Tính bậc của tất cả các đỉnh trong ĐTVH H?



G



H

$deg^-(A) = 3$ $deg^-(B) = 1$ $deg^-(C) = 1$ $deg^-(D) = 1$

$deg^+(A) = 1$ $deg^+(B) = 2$ $deg^+(C) = 2$ $deg^+(D) = 1$

$deg(A) = 4$ $deg(B) = 3$ $deg(C) = 3$ $deg(D) = 2$

$deg(A) = 4$

$deg(B) = 3$

$deg(C) = 3$

$deg(D) = 2$

Tổng bậc = 4+3+3+2=12

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ

Định lý 1: **(Định lý bắt tay)** Trong một đồ thị, tổng bậc của tất cả các đỉnh bằng gấp đôi số cung.

$$\sum_{x \in X} \deg(x) = 2|E|$$

Định lý 2: Trong một đồ thị, tổng số đỉnh bậc lẻ là số chẵn.

Định lý 3: Trong một đồ thị, tổng bậc trong bằng tổng bậc ngoài

$$\sum_{x \in X} \deg^-(x) = \sum_{x \in X} \deg^+(x) = |E|$$

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ

Cạnh bội/song song: Hai cạnh phân biệt tương ứng với một cặp đỉnh. **VD:** e_1, e_7

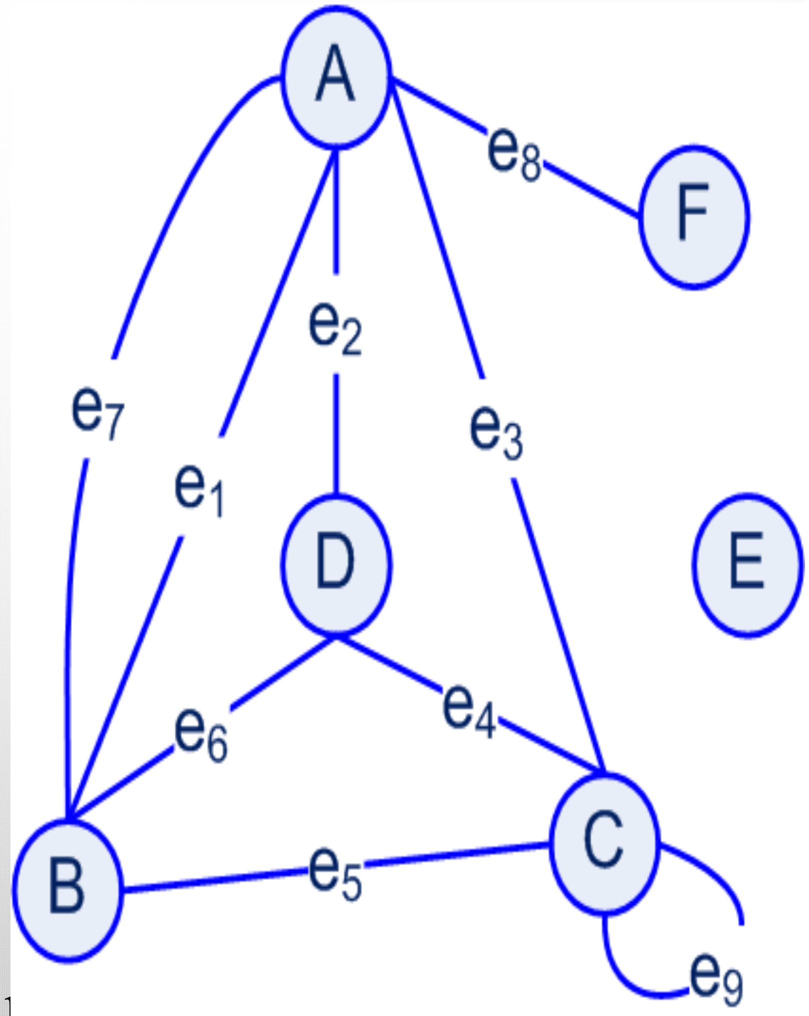
Khuyên: Cạnh có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau. VD: e_9

Đỉnh treo: Đỉnh có bậc bằng 1. VD: F

Đỉnh cô lập: Đỉnh có bậc bằng 0. VD: E

Đỉnh khớp: Là đỉnh mà nếu xóa đi thì số thành phần liên thông của đồ thị tăng lên. VD: A

Cạnh cầu: Là cạnh nếu xóa đi thì số thành phần liên thông của đồ thị tăng lên. VD: e8



MỘT SỐ ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

Đồ thị rỗng: Tập đỉnh và cạnh là rỗng

Đồ thị hữu hạn: Tập đỉnh và tập cạnh hữu hạn

Đồ thị đơn: Không có khuyên và cạnh bội

Đa đồ thị: Không có khuyên

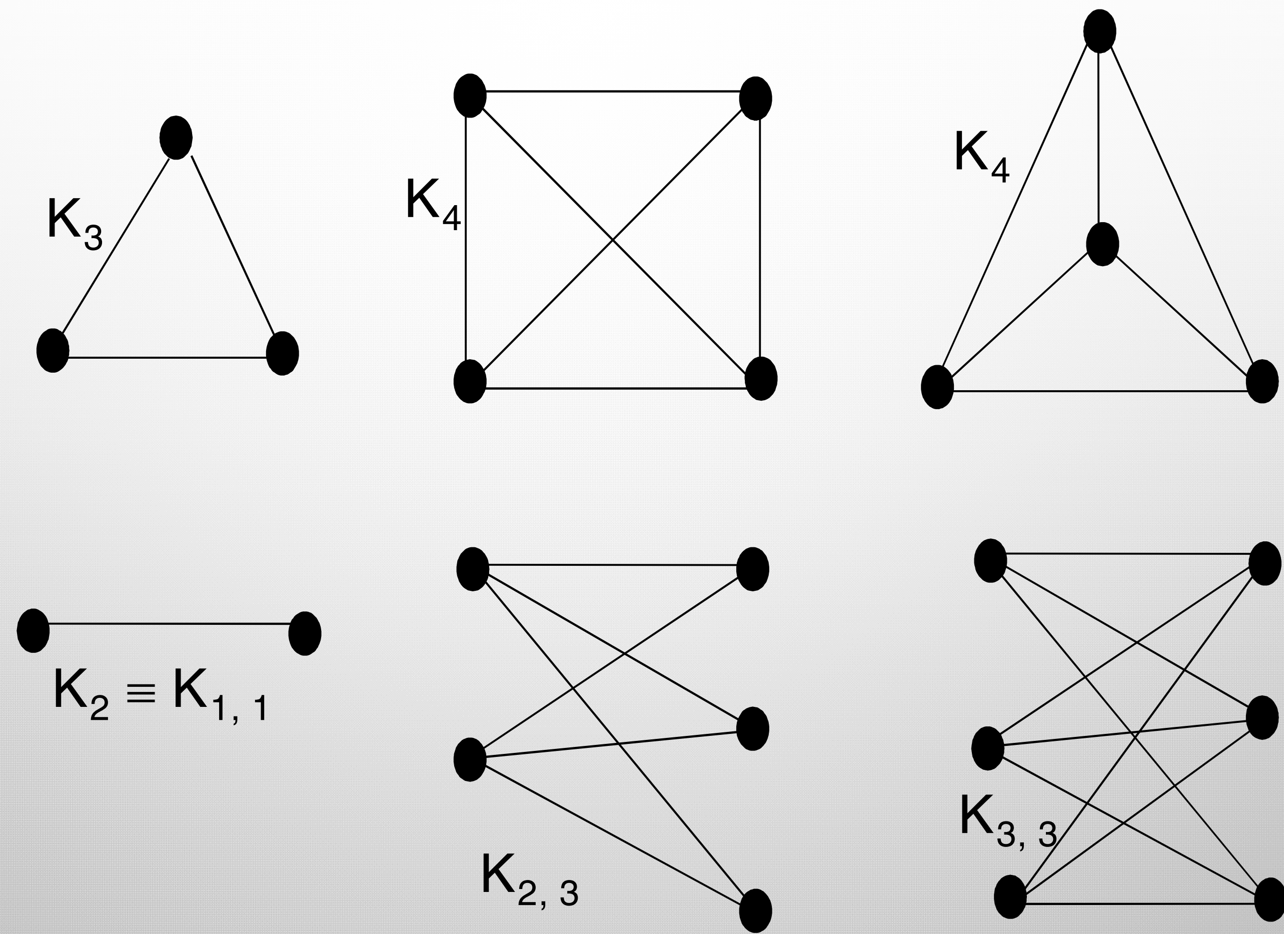
Đồ thị đầy đủ: Mọi cặp đỉnh đều kề nhau

- Đơn đồ thị đầy đủ N đỉnh ký hiệu là K_N
- K_N Có N(N-1)/2 cạnh

Đồ thị con: Đồ thị G'=(X', E') là con của đồ thị G=(X, E) nếu có X'⊆X và E'⊆ E

Đồ thị bộ phận: Đồ thị G'=(X', E') là bộ phận của đồ thị G=(X, E) nếu có X'=X và E'⊆ E

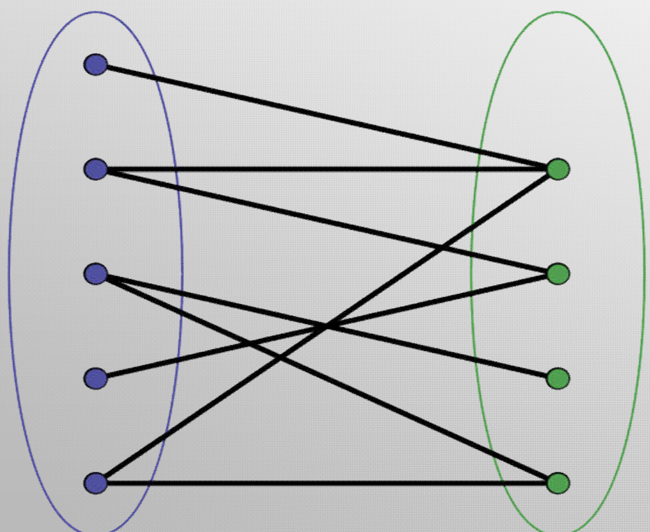
VÍ DỤ ĐỒ THỊ ĐẦY ĐỦ

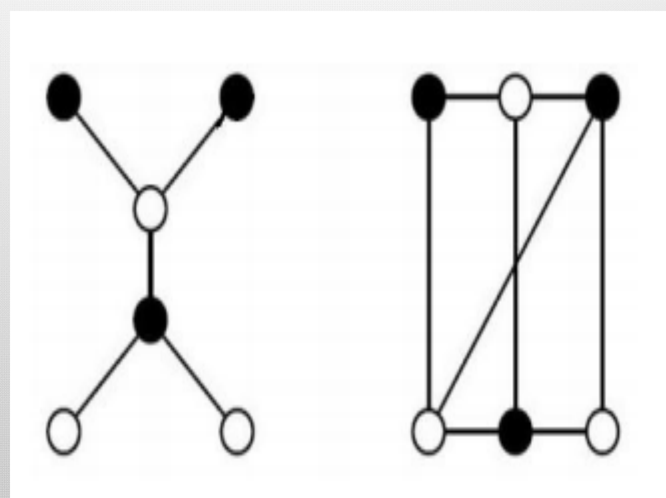


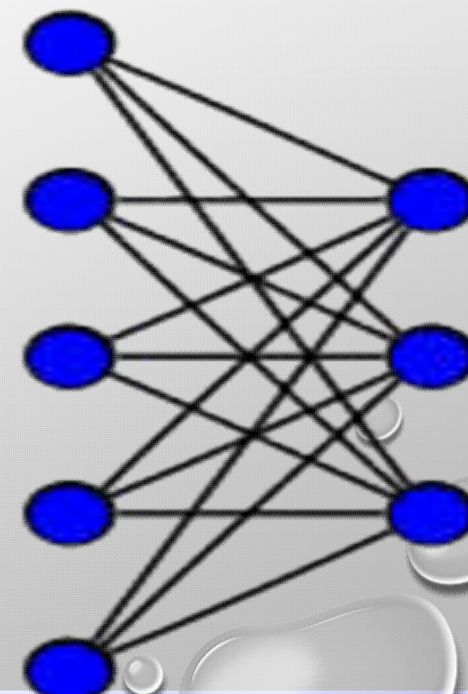
MỘT SỐ ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

Đồ thị phân đôi/lưỡng phân: Đồ thị G=(X, E) được gọi là đồ thị lưỡng phân nếu tập X được phân hoạch thành hai thành phần X_1 và X_2 không giao nhau, sao cho cạnh chỉ nối giữa đỉnh thuộc X_1 với đỉnh thuộc X_2. Nếu $|X_1|$=N và $|X_2|$=M, ký hiệu $K_{M, N}$

Đồ thị phân đôi/lưỡng phân đầy đủ (2 Clique/ Biclique): Là đồ thị phân đôi mà mỗi đỉnh của phần này nối với tất cả các đỉnh của phần kia

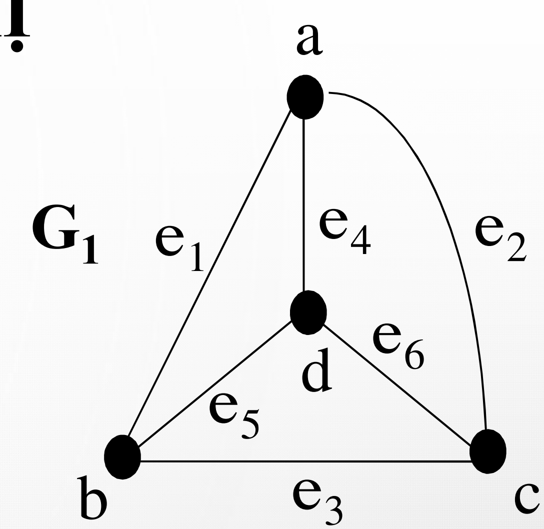




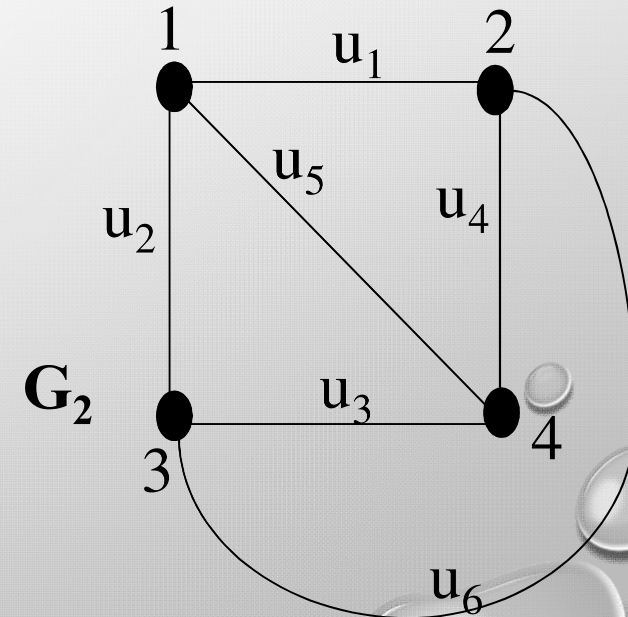


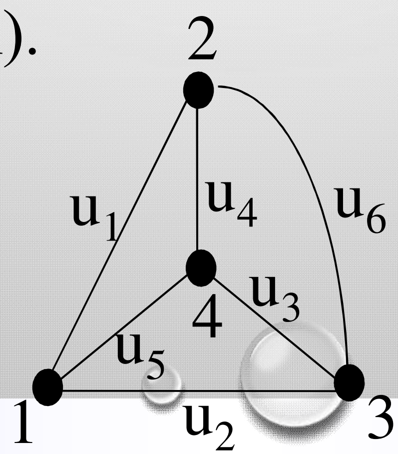
ĐẲNG CẤU ĐỒ THỊ

Hai đồ thị vô hướng $G_1 = (X_1, E_1)$ và $G_2 = (X_2, E_2)$ được gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại hai song ánh ψ và δ thỏa mãn điều kiện:



- $\psi: X_1 \to X_2$ và $\delta: E_1 \to E_2$
- Nếu cạnh $e \in E_1$ kề với cặp đỉnh $\{x, y\} \subseteq X_1$ trong G_1 thì cạnh $\delta(e)$ sẽ kề với cặp đỉnh $\{\psi(x), \psi(y)\}$ trong G_2 (sự tương ứng cạnh).

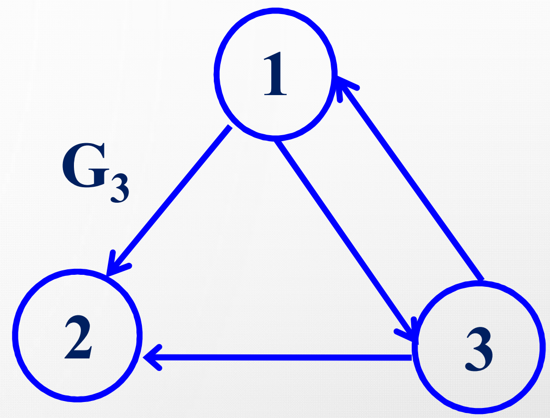


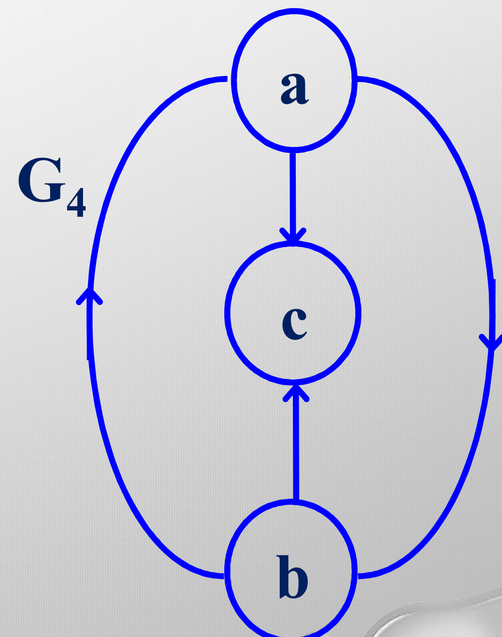


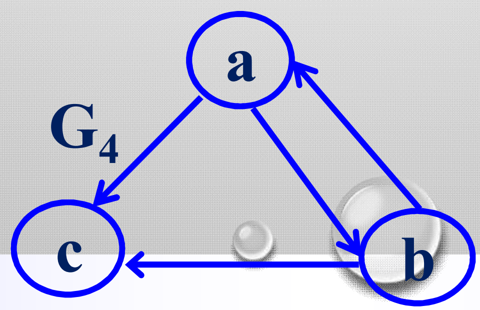
ĐẲNG CẤU ĐỒ THỊ

Hai đồ thị có hướng $G_1=(X_1, U_1)$ và $G_2=(X_2, U_2)$ được gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại hai song ánh ψ và δ thỏa mãn điều kiện:

- $\psi: X_1 \rightarrow X_2$ và $\delta: U_1 \rightarrow U_2$
- Nếu cạnh $u \in U_1$ liên kết với cặp đỉnh $(x, y) \in X_1$ trong G_1 thì cạnh $\delta(u)$ sẽ liên kết với cặp đỉnh $(\psi(x), \psi(y))$ trong G_2 (sự tương ứng cạnh).





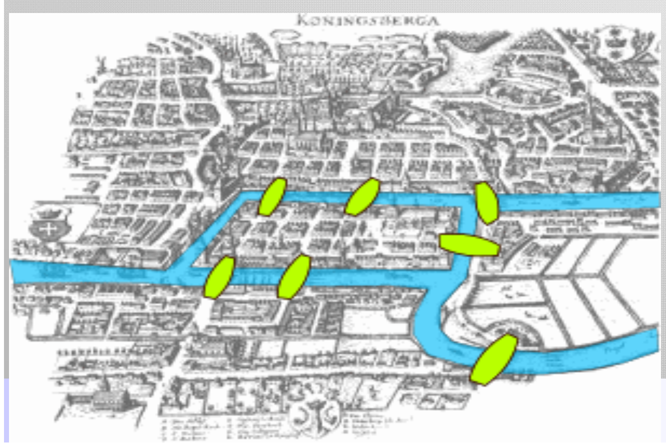


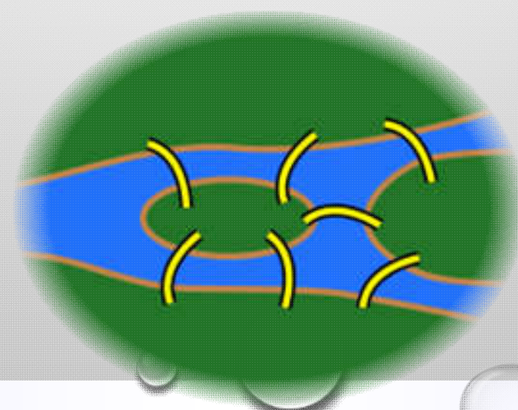
BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

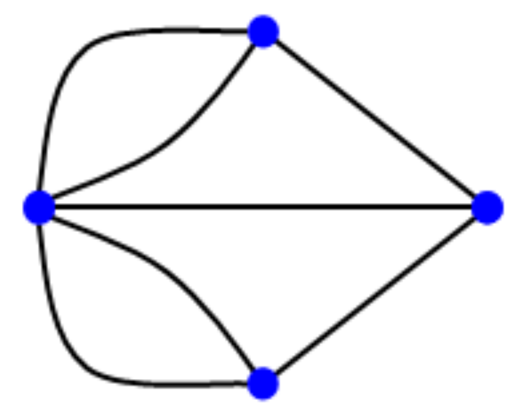
Đồ thị hóa bài toán thực tế: (Bài toán 7 chiếc cầu Königsberg)

Ông Euler loại bỏ tất cả các chi tiết ngoại trừ các vùng đất và các cây cầu, sau đó thay thế mỗi vùng đất bằng một điểm, gọi là đỉnh hoặc nút, và thay mỗi cây cầu bằng một đoạn nối, gọi là cạnh hoặc liên kết. Cấu trúc toán học thu được được gọi là một đồ thị.

- Điểm xuất phát trùng với điểm đến: Đồ thị không được có đỉnh bậc lẻ
- Điểm xuất phát và điểm đến tùy ý: Đồ thị không quá 2 đỉnh bậc lẻ

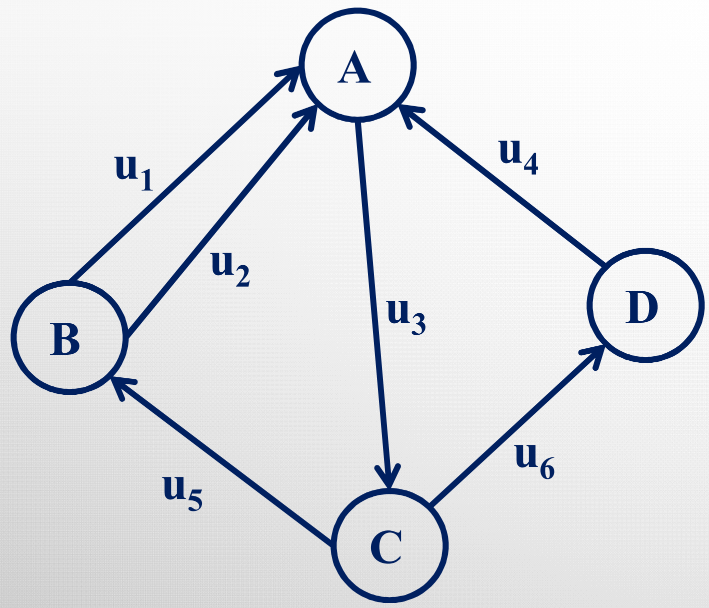




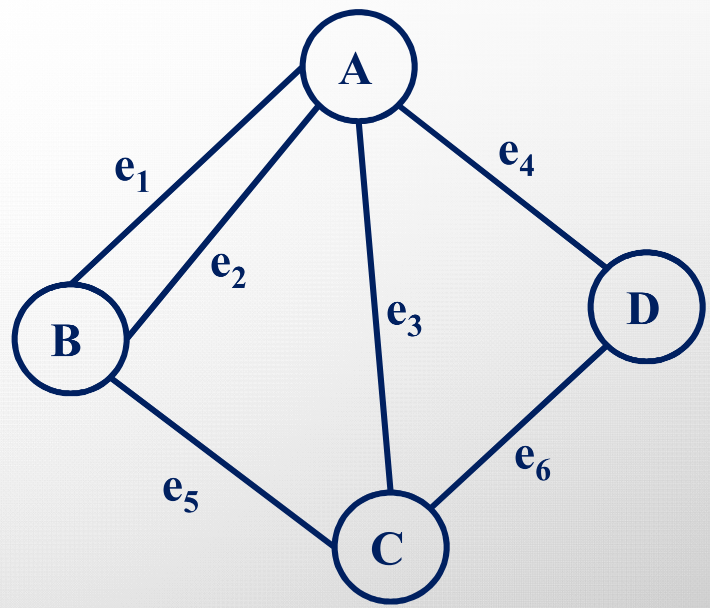


BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

Biểu diễn đồ thị bằng hình vẽ



G

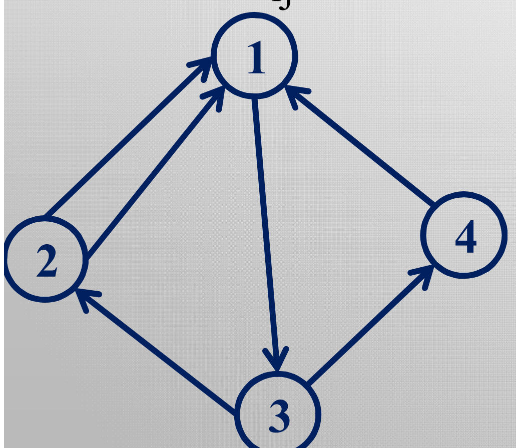


H

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

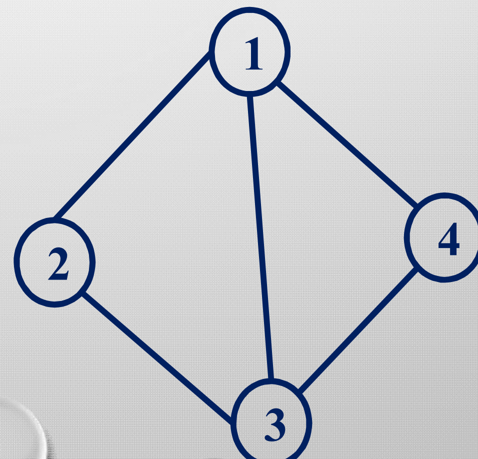
Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề (đỉnh-đỉnh)

- Xét đồ thị G=(X, U), giả sử tập X gồm N đỉnh và được sắp thứ tự $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, tập U gồm M cạnh và được sắp thứ tự $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_M\}$.
- Ma trận kề của đồ thị G, ký hiệu B(G), là một ma trận nhị phân cấp NxN, $B=(B_{ij})$ với B_{ij} được định nghĩa:
  - $B_{ij}=1$ nếu có cạnh nối x_i tới x_j,
  - $B_{ij}=0$ trong trường hợp ngược lại.



G

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



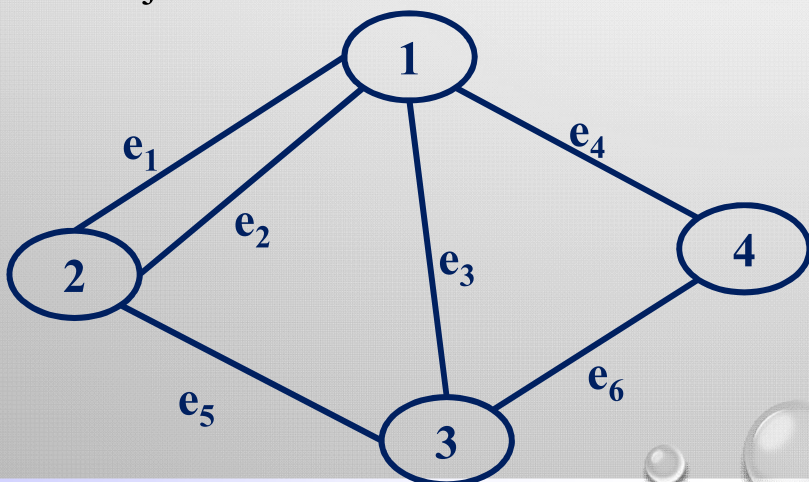
G

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

Biểu diễn đồ thị vô hướng bằng ma liên thuộc (đỉnh-cạnh)

- Xét đồ thị G=(X, U) vô hướng, giả sử tập X gồm N đỉnh và được sắp thứ tự $X=\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, tập U gồm M cạnh và được sắp thứ tự $U=\{u_1, u_2, \dots, u_M\}$.
- Ma trận liên thuộc (đỉnh-cạnh) của G, ký hiệu A(G), là ma trận nhị phân cấp NxM, $A=(A_{ij})$ với A_{ij} được định nghĩa:
  - $A_{ij}=1$ nếu đỉnh x_i kề với cạnh u_j,
  - $A_{ij}=0$ nếu ngược lại.



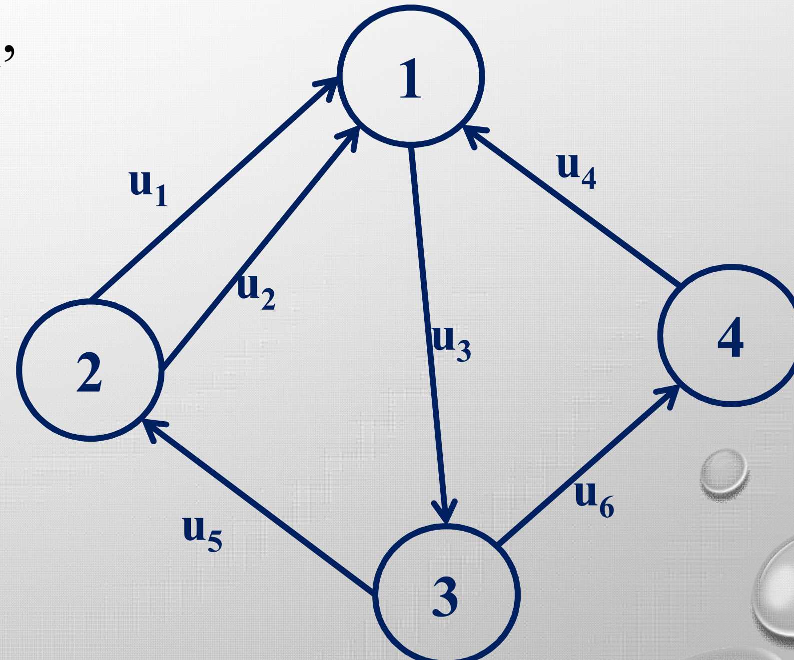
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

Biểu diễn đồ thị có hướng bằng ma liên thuộc (đỉnh-cạnh/cung)

- Xét đồ thị G=(X, U) có hướng…
- Ma trận liên thuộc (hay liên kết đỉnh cạnh) của G, ký hiệu A(G), là ma trận nhị phân cấp NxM $A=(A_{ij})$ với A_{ij} được định nghĩa:
  - $A_{ij}=1$ nếu cạnh u_j đi ra khỏi đỉnh x_i,
  - $A_{ij}=-1$ nếu cạnh u_j đi vào đỉnh x_i,
  - $A_{ij}=0$ trong các trường hợp khác.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



G

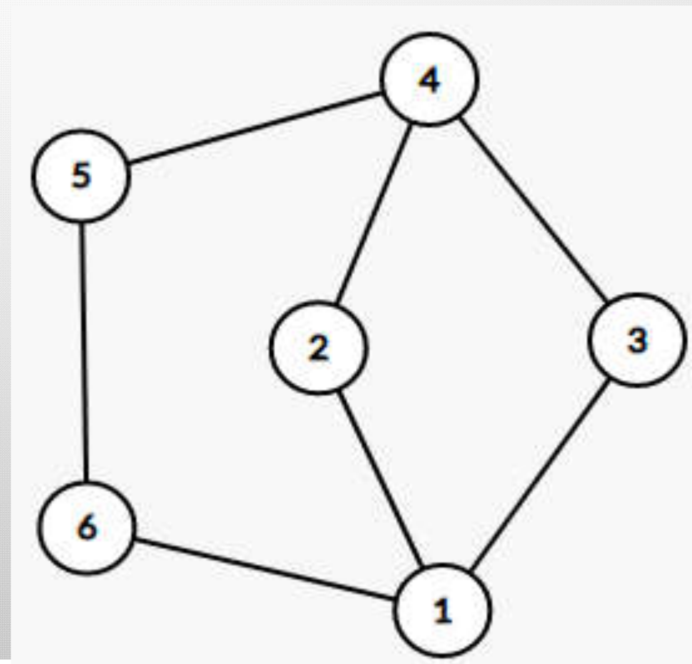
BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cung

- Xét đồ thị G=(X, U) có hướng…
- Danh sách cung của G, ký hiệu U(G), liệt kê tất cả các cặp đỉnh dạng **x y** với (x,y) là cạnh của G

VD: Cho đồ thị G với danh sách cung như sau

6 7 ← Số đỉnh, số cung
1 2
1 3
1 6
2 4
3 4
4 5
5 6



BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

VD: Hãy xây dựng đồ thị cho sáu loài chim được đánh số tên gọi lần lượt là 1, 2, 3, 4, 5 và 6 trong đó có các loài cạnh tranh nhau nguồn thức ăn như sau:

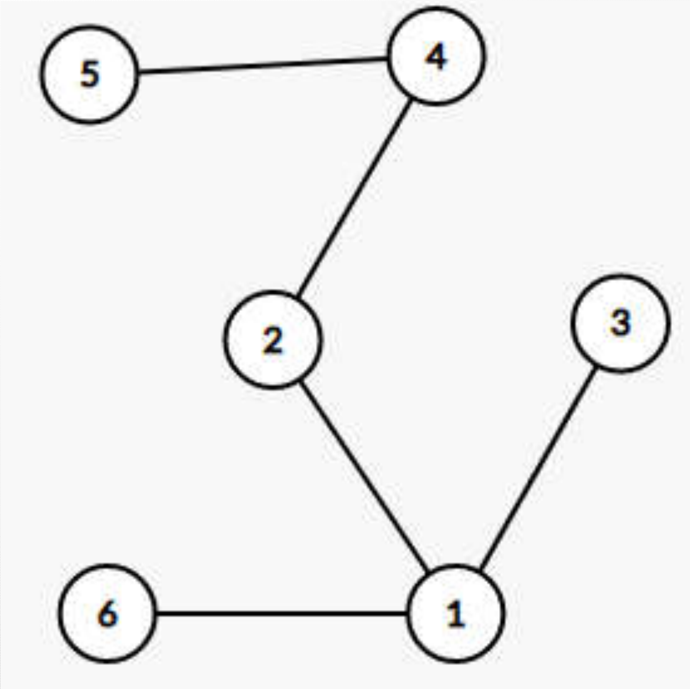
- Loài 1 và 2 cạnh tranh nhau;
- Loài 1 và 3 cạnh tranh nhau;
- Loài 1 và 6 cạnh tranh nhau;
- Loài 2 và 4 cạnh tranh nhau;
- Loài 4 và 5 cạnh tranh nhau;

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1		1	1			1
2				1		
3						
4					1	
5						
6						

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

- Loài 1 và 2 cạnh tranh nhau;
- Loài 1 và 3 cạnh tranh nhau;
- Loài 1 và 6 cạnh tranh nhau;
- Loài 2 và 4 cạnh tranh nhau;
- Loài 4 và 5 cạnh tranh nhau;

	1	2	3	4	5	6
1		1	1			1
2				1		
3						
4					1	
5						
6						



BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

Cấu trúc dữ liệu đồ thị

- Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh

```
#define MAXV 50
#define MAXE 300
typedef struct{
        int n, m;                          //So dinh, so canh
        int A[MAXV][MAXE];                 //Ma tran mang 2 chieu
} Graph;
```

- Ma trận kề đỉnh đỉnh

```
#define MAXV 50
typedef struct{
        int n;                   //So dinh
        int A[MAXV][MAXV];   //Ma tran mang 2 chieu
} Graph;
```

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

Cấu trúc dữ liệu đồ thị

- Các hàm trên cấu trúc đồ thị ma trận liên thuộc đỉnh cạnh

```
Init_graph(G): Khởi tạo
Add_edge(G,e,x,y): Thêm cạnh e=(x,y)
Remove(G,e,x,y): Xóa cạnh e=(x,y)
Adjacent(G,x,y): Xét xem y có kề với x không
Degree(G,x): Tính bậc của x
Neighbors(G,x): Tìm tập láng giềng của x
```

- Các hàm trên cấu trúc đồ thị ma trận kề đỉnh đỉnh

```
Init_graph(G): Khởi tạo
Add_edge(G,x,y): Thêm cạnh (x,y)
Remove(G,x,y): Xóa cạnh (x,y)
Adjacent(G,x,y): Xét xem y có kề với x không
Degree(G,x): Tính bậc của x
Neighbors(G,x): Tìm tập láng giềng của x
```

TÓM TẮT CHƯƠNG 1

Một số khái niệm cơ bản:

- Đồ thị có hướng/vô hướng, đỉnh, cạnh/cung
- Đỉnh kề, bậc (bậc trong, bậc ngoài) của đỉnh
- Đỉnh treo, đỉnh cô lập, khuyên, cạnh bội, đỉnh khớp, cầu

Các dạng đồ thị đặc biệt:

- Đồ thị đơn/đa
- Đồ thị rỗng/hữu hạn/vô hạn
- Đồ thị con/bộ phận
- Đồ thị đầy đủ/phân đôi/phân đôi đầy đủ

Đẳng cấu đồ thị

Biểu diễn đồ thị: TH

- Đồ thị hóa bài toán thực tế
- Biểu diễn đồ thị trên máy tính:
    - Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh
    - Ma trận kề đỉnh đỉnh
    - Đọc dữ liệu đầu vào từ file dạng danh sách cạnh

GIỚI THIỆU CHƯƠNG 2
TÍNH LIÊN THÔNG CỦA ĐỒ THỊ

- Đường đi và chu trình
- Đồ thị liên thông
  - Tính số bộ phận liên thông của đồ thị
- Duyệt đồ thị & ứng dụng
  - Duyệt chiều rộng (Breadth First Search)
  - Duyệt chiều sâu (Depth-first search)
- Đồ thị liên thông mạnh (có hướng)