TOÁN RỜI RẠC
DISCRETE MATHEMATICS

LÊ THỊ PHƯƠNG DUNG

L.T.P.D.

Thời gian thi cuối kỳ

- 14 giờ ngày 27/12/2020

Nội dung

1. Mệnh đề và vị từ
2. Suy luận toán học
3. Phép đếm
4. Quan hệ
5. Đại số Bool
6. Lý thuyết chia và đồng dư

L.T.D.D.

Tài liệu tham khảo

- Kenneth Rosen, "Toán học rời rạc", bản dịch của NXB KH&KT, 2000
- Nguyễn Đức Nghĩa, Nguyễn Tô Thành, "Toán rời rạc", NXB ĐHQG Hà Nội, 2009
- ……..

L.T.D.D.

Chương 2: Suy luận toán học

- Các quy tắc suy luận
- Các phương pháp chứng minh

L.T.D.

Các quy tắc suy luận

- Xét mệnh đề $P \rightarrow Q$, trong đó P là giả thiết Q là kết luận. Từ giả thiết P, chúng ta sử dụng các quy tắc suy luận/các phương pháp chứng minh để đưa ra kết luận Q
- Ví dụ:
  - "Nếu hôm nay trời mưa thì cô ấy không đến. Nếu cô ấy không đến thì ngày mai cô ấy đến. Vì vậy, nếu hôm nay trời mưa thì ngày mai cô ấy đến." ⇒ Hai câu đầu tiên là giả thiết, câu cuối cùng là kết luận
  - "An giỏi toán. Do đó, An giỏi toán hoặc tin" ⇒ Câu đầu là giả thiết, câu cuối là kết luận

Quy tắc	Hằng đúng	Tên
P $\therefore P \vee Q$	$P \rightarrow (P \vee Q)$	Cộng
$P \wedge Q$ $\therefore P$	$(P \wedge Q) \rightarrow P$	Rút gọn
P $P \rightarrow Q$ $\therefore Q$	$[P \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow Q$	Khẳng định
$\bar{Q}$ $P \rightarrow Q$ $\therefore \bar{P}$	$[\bar{Q} \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow \bar{P}$	Phủ định
$P \rightarrow Q$ $Q \rightarrow R$ $\therefore P \rightarrow R$	$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$	Tam đoạn luận giả định
$\bar{P}$ $P \vee Q$ $\therefore Q$	$(\bar{P} \wedge (P \vee Q)) \rightarrow Q$	Tam đoạn luận tuyển

Các quy tắc suy luận

- Ví dụ:
  - “Nếu hôm nay trời mưa thì cô ấy không đến. Nếu cô ấy không đến thì ngày mai cô ấy đến. Vì vậy, nếu hôm nay trời mưa thì ngày mai cô ấy đến.”

$\Rightarrow$ Quy tắc …

  - “An giỏi toán. Do đó, An giỏi toán hoặc tin”

$\Rightarrow$ Quy tắc …

  - “Nếu hôm nay tuyết rơi thì trường học đóng cửa. Hôm nay trường học không đóng cửa. Do đó, hôm nay đã không có tuyết rơi.”

$\Rightarrow$ Quy tắc …

Quy tắc	Tên
$\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$	Cộng
$\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$	Rút gọn
$\dfrac{P \quad P \to Q}{\therefore Q}$	Khẳng định
$\dfrac{\bar{Q} \quad P \to Q}{\therefore \bar{P}}$	Phủ định
$\dfrac{P \to Q \quad Q \to R}{\therefore P \to R}$	Tam đoạn luận giả định
$\dfrac{\bar{P} \quad P \vee Q}{\therefore Q}$	Tam đoạn luận tuyển

L.T.D.D.

Các quy tắc suy luận

- Ví dụ:
  - "Nếu hôm nay trời mưa thì cô ấy không đến. Nếu cô ấy không đến thì ngày mai cô ấy đến. Vì vậy, nếu hôm nay trời mưa thì ngày mai cô ấy đến."

Đặt:

P = "Hôm nay trời mưa"

Q = "Cô ấy không đến"

R = "Ngày mai cô ấy đến"

Biểu thức: $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

$\Rightarrow$ Quy tắc Tam đoạn luận giả định

Quy tắc	Tên
$\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$	Cộng
$\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$	Rút gọn
$\dfrac{P \quad P \rightarrow Q}{\therefore Q}$	Khẳng định
$\dfrac{\bar{Q} \quad P \rightarrow Q}{\therefore \bar{P}}$	Phủ định
$\dfrac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow R}{\therefore P \rightarrow R}$	Tam đoạn luận giả định
$\dfrac{\bar{P} \quad P \vee Q}{\therefore Q}$	Tam đoạn luận tuyển

L.T.D.D.

Các quy tắc suy luận

- Ví dụ:
  - “An giỏi toán. Do đó, An giỏi toán hoặc tin”

Đặt:

P = “An giỏi toán”

Q = “An giỏi tin”

Biểu thức: $P \rightarrow (P \lor Q)$

$\Rightarrow$ Quy tắc Cộng

Quy tắc	Tên
$\dfrac{P}{\therefore P \lor Q}$	Cộng
$\dfrac{P \land Q}{\therefore P}$	Rút gọn
$\dfrac{\begin{array}{l} P \\ P \rightarrow Q \end{array}}{\therefore Q}$	Khẳng định
$\dfrac{\begin{array}{l} \bar{Q} \\ P \rightarrow Q \end{array}}{\therefore \bar{P}}$	Phủ định
$\dfrac{\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ Q \rightarrow R \end{array}}{\therefore P \rightarrow R}$	Tam đoạn luận giả định
$\dfrac{\begin{array}{l} \bar{P} \\ P \lor Q \end{array}}{\therefore Q}$	Tam đoạn luận tuyển

Các quy tắc suy luận

- Ví dụ:
  - "Nếu hôm nay tuyết rơi thì trường học đóng cửa. Hôm nay trường học không đóng cửa. Do đó, hôm nay đã không có tuyết rơi."

Đặt:

P = "Hôm nay tuyết rơi"

Q = "Trường học đóng cửa"

Biểu diễn: $[(P \to Q) \land \bar{Q}] \to \bar{P}$

$\Rightarrow$ Quy tắc Phủ định

Quy tắc	Tên
$\dfrac{P}{\therefore P \lor Q}$	Cộng
$\dfrac{P \land Q}{\therefore P}$	Rút gọn
P $\dfrac{P \to Q}{\therefore Q}$	Khẳng định
$\bar{Q}$ $\dfrac{P \to Q}{\therefore \bar{P}}$	Phủ định
$P \to Q$ $\dfrac{Q \to R}{\therefore P \to R}$	Tam đoạn luận giả định
$\bar{P}$ $\dfrac{P \lor Q}{\therefore Q}$	Tam đoạn luận tuyển

Các quy tắc suy luận

- Ví dụ:
  - “Hôm nay trời nóng trên 100 độ hoặc sự ô nhiễm là nguy hại. Hôm nay nhiệt độ ngoài trời thấp hơn 100 độ. Do đó, sự ô nhiễm là nguy hại.”

⇒ Quy tắc Tam đoạn luận tuyển

Quy tắc	Tên
$\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$	Cộng
$\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$	Rút gọn
$\dfrac{P \quad P \to Q}{\therefore Q}$	Khẳng định
$\dfrac{\bar{Q} \quad P \to Q}{\therefore \bar{P}}$	Phủ định
$\dfrac{P \to Q \quad Q \to R}{\therefore P \to R}$	Tam đoạn luận giả định
$\dfrac{\bar{P} \quad P \vee Q}{\therefore Q}$	Tam đoạn luận tuyển

L.T.D.D.

Các quy tắc suy luận

- Ví dụ:
  - “Nếu tôi làm bài tập này cả đêm thì tôi có thể trả lời được tất cả các bài tập. Nếu tôi trả lời được tất cả các bài tập thì tôi sẽ hiểu được tài liệu này. Do đó, nếu tôi làm được bài tập này cả đêm thì tôi sẽ hiểu được tài liệu này.”

  $\Rightarrow$ Quy tắc Tam đoạn luận giả định

Quy tắc	Tên
$\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$	Cộng
$\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$	Rút gọn
$\dfrac{P \quad P \to Q}{\therefore Q}$	Khẳng định
$\dfrac{\bar{Q} \quad P \to Q}{\therefore \bar{P}}$	Phủ định
$\dfrac{P \to Q \quad Q \to R}{\therefore P \to R}$	Tam đoạn luận giả định
$\dfrac{\bar{P} \quad P \vee Q}{\therefore Q}$	Tam đoạn luận tuyển

L.T.D.D.

Các quy tắc suy luận

- VD: Dùng các quy tắc suy luận chứng minh rằng

$$\big(p \to (q \to r)\big) \wedge (q \vee \bar{p}) \wedge p \Rightarrow r$$

1. $p \to (q \to r)$

2. $q \vee \bar{p}$

3. p

4.	$q \to r$	Khẳng định 1 và 3
5.	q	Tam đoạn luận tuyển 2 và 3
6.	r	Khẳng định 4 và 5

Quy tắc	Tên
$\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$	Cộng
$\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$	Rút gọn
P $\dfrac{P \to Q}{\therefore Q}$	Khẳng định
$\bar{Q}$ $\dfrac{P \to Q}{\therefore \bar{P}}$	Phủ định
$P \to Q$ $\dfrac{Q \to R}{\therefore P \to R}$	Tam đoạn luận giả định
$\bar{P}$ $\dfrac{P \vee Q}{\therefore Q}$	Tam đoạn luận tuyển

L.T.D.D.

Các quy tắc suy luận

- VD: Dùng các quy tắc suy luận chứng minh rằng
$$p \wedge (p \to q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \to \bar{q}) \Rightarrow s$$

1. p
2. $p \to q$
3. $s \vee r$
4. $r \to \bar{q}$

----

5. q Từ 1 và 2
6. $\bar{r}$ Từ 4 và 5
7. s Từ 3 và 6

Quy tắc	Tên
$\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$	Cộng
$\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$	Rút gọn
$\dfrac{P \quad P \to Q}{\therefore Q}$	Khẳng định
$\dfrac{\bar{Q} \quad P \to Q}{\therefore \bar{P}}$	Phủ định
$\dfrac{P \to Q \quad Q \to R}{\therefore P \to R}$	Tam đoạn luận giả định
$\dfrac{\bar{P} \quad P \vee Q}{\therefore Q}$	Tam đoạn luận tuyển

L.T.D.D.

Các quy tắc suy luận

- VD: "Nếu bạn đã giải hết bài tập trong sách Toán rời rạc này thì bạn nắm vững logic. Bạn nắm vững logic. Vậy, bạn đã giải hết bài tập trong sách Toán rời rạc này."

⇒ Quy tắc …

Đặt: P = "Bạn đã giải hết bài tập trong sách Toán rời rạc này"

Q = "Bạn nắm vững logic"

Biểu diễn: $[(P \to Q) \wedge Q] \to P$

⇒ Đây là một tiếp liên

⇒ Một suy diễn như trên được gọi là ngụy biện

- Ngụy biện hay ngộ nhận kết quả là phương pháp chứng minh sai, suy luận không dựa vào hằng đúng mà chỉ dựa vào một tiếp liên

Các quy tắc suy luận

VD: Cho 2 giả thiết:

- Môn Logic là khó hoặc không có nhiều sinh viên thích môn Logic.
- Nếu môn Toán là dễ thì Logic là không khó.

Hãy xác định xem các khẳng định sau là có dựa trên cơ sở của các giả thiết đã cho hay không:

a/ Môn toán là không dễ nếu nhiều sinh viên thích môn logic.

b/ Không có nhiều sinh viên thích môn logic nếu môn toán là không dễ.

c/ Môn toán là dễ hoặc môn logic là khó.

d/ Môn logic là không khó hoặc môn toán là không dễ.

e/ Nếu không có nhiều sinh viên thích môn logic khi đó hoặc là môn toán không dễ hoặc là logic không khó.

Các quy tắc suy luận

VD: Cho 2 giả thiết:

- Môn logic là khó hoặc không có nhiều sinh viên thích môn logic.
- Nếu môn toán là dễ thì logic là không khó.

Đặt:

- P = "Môn logic là khó"
- Q = "Nhiều sinh viên thích môn logic"
- R = "Môn Toán là dễ"

Hai giả thiết được biểu diễn:

- $P \vee \bar{Q}$
- $R \rightarrow \bar{P}$ hoặc $\bar{R} \vee \bar{P}$

L.T.D.D.

Các quy tắc suy luận

P = "Môn logic là khó"
Q = "Nhiều sinh viên thích môn logic"
R = "Môn Toán là dễ"

- $P \vee \bar{Q}$
- $R \rightarrow \bar{P}$ hoặc $\bar{R} \vee \bar{P}$

a/ Môn toán là không dễ nếu nhiều sinh viên thích môn logic.

Biểu thức kết luận: Q → $\bar{R} = \bar{Q} \vee \bar{R}$

Nếu mệnh đề "giả thiết → kết luận" = T thì phát biểu trong câu a/ là có cơ sở

Ta xét:

$$(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P}) \rightarrow (\bar{Q} \vee \bar{R}) = \overline{(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P})} \vee \bar{Q} \vee \bar{R}$$
$$= (\bar{P} \wedge Q) \vee (R \wedge P) \vee \bar{Q} \vee \bar{R} = (\bar{P} \wedge Q) \vee \bar{Q} \vee (R \wedge P) \vee \bar{R}$$
$$= [(\bar{P} \vee \bar{Q}) \wedge (Q \vee \bar{Q})] \vee [(R \vee \bar{R}) \wedge (P \vee \bar{R})]$$
$$= [(\bar{P} \vee \bar{Q}) \wedge T] \vee [T \wedge (P \vee \bar{R})] = \bar{P} \vee \bar{Q} \vee P \vee \bar{R} = T$$

Vậy kết luận trong phát biểu a/ là có cơ sở

b/ Không có nhiều sinh viên thích môn logic nếu môn toán là không dễ.

Các quy tắc suy luận

P = "Môn logic là khó"
Q = "Nhiều sinh viên thích môn logic"
R = "Môn Toán là dễ"

- $P \vee \bar{Q}$
- $R \rightarrow \bar{P}$ hoặc $\bar{R} \vee \bar{P}$

b/ Không có nhiều sinh viên thích môn logic nếu môn toán là không dễ.

Biểu thức kết luận: $\bar{R} \rightarrow \bar{Q} = R \vee \bar{Q}$

Nếu mệnh đề "giả thiết → kết luận" = T thì phát biểu trong câu b/ là có cơ sở

Ta xét:

$$(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P}) \rightarrow (R \vee \bar{Q}) = \overline{(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P})} \vee R \vee \bar{Q}$$
$$= (\bar{P} \wedge Q) \vee (R \wedge P) \vee \bar{Q} \vee \bar{R} = (\bar{P} \wedge Q) \vee \bar{Q} \vee (R \wedge P) \vee R$$
$$= [(\bar{P} \vee \bar{Q}) \wedge (Q \vee \bar{Q})] \vee R$$
$$= [(\bar{P} \vee \bar{Q}) \wedge T] \vee R = \bar{P} \vee \bar{Q} \vee R$$

Đây là một tiếp liên. Vậy kết luận trong phát biểu b/ là không có cơ sở

c/ Môn toán là dễ hoặc môn logic là khó.

Các quy tắc suy luận

P = "Môn logic là khó"
Q = "Nhiều sinh viên thích môn logic"
R = "Môn Toán là dễ"

- $P \vee \bar{Q}$
- $R \rightarrow \bar{P}$ hoặc $\bar{R} \vee \bar{P}$

c/ Môn toán là dễ hoặc môn logic là khó.

Biểu thức kết luận: $R \vee P$

Nếu mệnh đề "giả thiết → kết luận" = T thì phát biểu trong câu c/ là có cơ sở

Ta xét:

$$(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P}) \rightarrow (R \vee P) = \overline{(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P})} \vee R \vee P$$
$$= (\bar{P} \wedge Q) \vee (R \wedge P) \vee R \vee P = (\bar{P} \wedge Q) \vee P \vee (R \wedge P) \vee R$$
$$= [(\bar{P} \vee P) \wedge (Q \vee P)] \vee R$$
$$= [T \wedge (Q \vee P)] \vee R = Q \vee P \vee R$$

Đây là một tiếp liên. Vậy kết luận trong phát biểu c/ là không có cơ sở

d/ Môn logic là không khó hoặc môn toán là không dễ.

L.T.P.D.

Các quy tắc suy luận

P = "Môn logic là khó"
Q = "Nhiều sinh viên thích môn logic"
R = "Môn Toán là dễ"

- $P \vee \bar{Q}$
- $R \rightarrow \bar{P}$ hoặc $\bar{R} \vee \bar{P}$

d/ Môn logic là không khó hoặc môn toán là không dễ.

Biểu thức kết luận: $\bar{R} \vee \bar{P}$

Nếu mệnh đề "giả thiết → kết luận" = T thì phát biểu trong câu d/ là có cơ sở

Ta xét:

$$(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P}) \rightarrow (\bar{R} \vee \bar{P}) = \overline{(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P})} \vee \bar{R} \vee \bar{P}$$
$$= (\bar{P} \wedge Q) \vee (R \wedge P) \vee \bar{R} \vee \bar{P} = (\bar{P} \wedge Q) \vee \bar{P} \vee (R \wedge P) \vee \bar{R}$$
$$= \bar{P} \vee [(\bar{R} \vee R) \wedge (\bar{R} \vee P)]$$
$$= \bar{P} \vee [T \wedge (\bar{R} \vee P)] = \bar{P} \vee \bar{R} \vee P = T$$

Vậy kết luận trong phát biểu d/ là có cơ sở

e/ Nếu không có nhiều sinh viên thích môn logic khi đó hoặc là môn toán không dễ hoặc là logic không khó.

Các quy tắc suy luận

P = “Môn logic là khó”
Q = “Nhiều sinh viên thích môn logic”
R = “Môn Toán là dễ”

- $P \vee \bar{Q}$
- $R \rightarrow \bar{P}$ hoặc $\bar{R} \vee \bar{P}$

e/ Nếu không có nhiều sinh viên thích môn logic khi đó hoặc là môn toán không dễ hoặc là logic không khó.

Biểu thức kết luận: $\bar{Q} \rightarrow (\bar{R} \vee \bar{P}) = Q \vee \bar{R} \vee \bar{P}$

Nếu mệnh đề “giả thiết → kết luận” = T thì phát biểu trong câu e/ là có cơ sở

Ta xét:

$$(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P}) \rightarrow (Q \vee \bar{R} \vee \bar{P}) = \overline{(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{P})} \vee Q \vee \bar{R} \vee \bar{P}$$
$$= (\bar{P} \wedge Q) \vee (R \wedge P) \vee \bar{R} \vee \bar{P} = (\bar{P} \wedge Q) \vee Q \vee (R \wedge P) \vee (\overline{R \wedge P})$$
$$= Q \vee T = T$$

Vậy kết luận trong phát biểu e/ là có cơ sở

Các phương pháp chứng minh

- Cho mệnh đề $P \rightarrow Q$, trong đó P là giả thiết và Q là kết luận của bài toán, việc đi từ giả thiết đến kết luận là đi chứng minh mệnh đề $P \rightarrow Q = \mathrm{T}$

Phương pháp	Thực hiện	Cách chứng minh
Rỗng	$P \rightarrow Q$	P sai
Tầm thường	$P \rightarrow Q$	Q đúng
Trực tiếp	$P \rightarrow Q$	Nếu $P = T$ thì $Q = T$
Gián tiếp	$P \rightarrow Q$	$\bar{Q} \rightarrow \bar{P}$
Phản chứng	P	Giả sử $P = F$ đi đến $\mathrm{P} \rightarrow Q = T$, với $Q = F$
Quy nạp	$\forall n \geq n_0, P(n)$	Kiểm chứng $P(n_0) = T$ Giả sử $P(k) = T,$ chứng minh $P(k+1) = T$

L.T.D.D.

Các phương pháp chứng minh

- VD: Cho $P(n) =$"Nếu $n > 1$ thì $n^2 > n$". Chứng minh rằng $P(1) = T$

  Ta có $P(1) =$"Nếu $1 > 1$ thì $1^2 > 1$"

  Vì giả thiết "$1 > 1$" = F nên $P(1) = T$ (Không cần xét đến kết luận "$1^2 > 1$")

⇒ Phương pháp chứng minh Rỗng

- VD: Cho $P(n) =$"Nếu $a, b \in \mathbb{Z}_+$ và $a \geq b$ thì $a^n \geq b^n$". Chứng minh $P(0) = T$

  Ta có $\mathrm{a}^0 = \mathrm{b}^0 = 1$. Do đó "$\mathrm{a}^0 \geq \mathrm{b}^0$" $= T$

  Vậy $P(0) = T$ bất chấp giả thiết là đúng hay sai

⇒ Phương pháp chứng minh Tầm thường

L.T.D.D.

Các phương pháp chứng minh

- VD: Chứng minh rằng nếu n lẻ thì n^2 lẻ

  Giả sử rằng giả thiết n lẻ là đúng. *Đặt* $n = 2k + 1$, với $k \in \mathbb{Z}$, ta có

  $n^2 = (2k+1)^2 = (4k^2 + 4k + 1) = 2(2k^2 + 2k) + 1$ là lẻ

  Vậy nếu n lẻ thì n^2 lẻ

$\Rightarrow$ Phương pháp chứng minh Trực tiếp

- VD: Cho $P(n) =$"Nếu $n > 1$ thì $n^2 > n$". Chứng minh rằng $P(n)$ với mọi n $\in \mathbb{Z}$

  Giả sử $n > 1$, tức là: $n = 1 + k$, với $k \geq 1$. Ta có:

  $n^2 = (1+k)^2 = 1 + 2k + k^2 = (1+k) + k + k^2 > n$

  Vậy nếu $n > 1$ thì $n^2 > n$

$\Rightarrow$ Phương pháp chứng minh Trực tiếp

L.T.D.D.

Các phương pháp chứng minh

- VD: Chứng minh định lý "Nếu $3n + 2$ là số lẻ thì n là số lẻ"

  Giả sử n chẵn, tức là $n = 2k$, với $k \in \mathbb{Z}$, ta có

  $3n + 2 = 3.2k + 2 = 2(3k + 1)$ là chẵn

  Vậy nếu $3n + 2$ là số lẻ thì n là số lẻ

$\Rightarrow$ Phương pháp chứng minh Gián tiếp

L.T.D.D.

Các phương pháp chứng minh

VD: Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

⇒ Sử dụng phương pháp chứng minh Phản chứng

Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_7$ là độ dài các đoạn thẳng được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

$\forall i = 1,2,\ldots,7$, ta có $10 < a_i < 100$. Ta cần tìm được ba đoạn liên tiếp sao cho tổng độ dài của hai đoạn đầu lớn hơn đoạn cuối

Giả sử không thể tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác, tức là ta có:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \le a_3 \\ a_2 + a_3 \le a_4 \\ a_3 + a_4 \le a_5 \\ a_4 + a_5 \le a_6 \\ a_5 + a_6 \le a_7 \end{cases} \xrightarrow[\forall i = 1,2,\ldots,7]{\text{Vì } a_i > 10} \begin{cases} a_3 > 20 \\ a_4 > 30 \\ a_5 > 50 \\ a_6 > 80 \\ a_7 > 130 \end{cases}$$

✖ Mâu thuẫn với giả thiết

Vậy luôn tồn tại được 3 đoạn a_i, a_{i+1}, a_{i+2} để $a_i + a_{i+1} > a_{i+2}$, tức là luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác

Các phương pháp chứng minh

VD: Với $n \geq 1$ là số nguyên. Chứng minh mệnh đề $\forall n \geq 1, P(n)$, với

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\Rightarrow$ Sử dụng phương pháp chứng minh Quy nạp

- Với $n = 1$: $VT = 1$ và $VP = \frac{1(1+1)}{2} = 1$. Ta được $VT = VP \Rightarrow P(1) = T$
- Giả sử điều cần chứng minh đúng với giá trị $n = k$, tức là:

$$\sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

- Chứng minh điều này cũng đúng với giá trị $n = k + 1$. Ta có:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

- Vậy điều cần chứng minh đúng với mọi số nguyên $n \geq 1$

L.T.D.D.

Các phương pháp chứng minh

- Chứng minh từng trường hợp: Để chứng minh $\big((P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n) \rightarrow Q\big)$, ta có thể sử dụng tương đương logic $\big((P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n) \rightarrow Q\big) = \big((\mathrm{P}_1 \rightarrow Q) \wedge (\mathrm{P}_2 \rightarrow Q) \wedge \cdots \wedge (P_n \rightarrow Q)\big)$
- VD: Chứng minh rằng "Nếu n không chia hết cho 3 thì n^2 không chia hết cho 3"

  Đặt: $P(n) =$"n không chia hết cho 3" và $\mathrm{Q}(n) =$"n^2 không chia hết cho 3"

  $P_1(n) =$"n chia cho 3 dư 1" và $P_2(n) =$"n chia cho 3 dư 2"

Để chứng minh $P \rightarrow Q$, ta chứng minh $(P_1 \rightarrow Q) \wedge (P_2 \rightarrow Q)$

Các phương pháp chứng minh

- VD: Chứng minh rằng "Nếu n không chia hết cho 3 thì n^2 không chia hết cho 3"

  Đặt: $P(n)$ ="n không chia hết cho 3" và $Q(n)$ ="n^2 không chia hết cho 3"

  $P_1(n)$ ="n chia cho 3 dư 1" và $P_2(n)$ ="n chia cho 3 dư 2"

Để chứng minh $P \rightarrow Q$, ta chứng minh $(P_1 \rightarrow Q) \wedge (P_2 \rightarrow Q)$

Giả sử P_1 đúng, tức là $n = 3k + 1,$ với $k \in \mathbb{Z}.$ Khi đó:

$n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ chia cho 3 dư 1

Do đó, $P_1 \rightarrow Q = T$ (1)

Giả sử P_2 đúng, tức là $n = 3k + 2,$ với $k \in \mathbb{Z}.$ Khi đó:

$n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ chia cho 3 dư 1

Do đó, $P_2 \rightarrow Q = T$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra nếu n không chia hết cho 3 thì n^2 không chia hết cho 3

Các phương pháp chứng minh

VD: Một lớp học có 20 học sinh. Các học sinh tham gia vào 3 nhóm năng khiếu: nhóm Toán có 17 em, nhóm Văn có 13 em và Anh văn có 11 em. Chứng minh rằng trong lớp có em tham gia đồng thời cả 3 nhóm.

- Gọi x_i là số nhóm mà học sinh i tham gia, với $i = 1,2,\dots,20$. Khi đó:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} = 17 + 13 + 11 = 41 \qquad (1)$$

- Giả sử không tồn tại một học sinh nào tham gia cả 3 nhóm. Tức là $x_i \leq 2, \forall i = 1,2,\dots,20$. Ta có:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i \leq 40 \qquad (2)$$

- Từ (1) và (2) suy ra $41 \leq 40$ là một mâu thuẫn.
- Vậy trong lớp có em tham gia đồng thời cả 3 nhóm.

L.T.D.D.

Các phương pháp chứng minh

VD: Chứng minh rằng $n^3 + 2n$ luôn chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

- Đặt $A = n^3 + 2n = n(n^2 + 2)$. Xét hai trường hợp:
  - Nếu $n \vdots 3$ thì A $\vdots$ 3
  - Ngược lại, đặt $n = 3k \pm 1$. Khi đó:

  $n^2 + 2 = (3k \pm 1)^2 + 2 = 3(3k^2 \pm 2k + 1) \vdots 3$

  Do đó A $\vdots$ 3

Các phương pháp chứng minh

1. Chứng minh các biểu thức sau

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i)! = (n+1)! - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i.2^i = 2 + (n-1).2^{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2.3^{i-1} = 3^n - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

L.T.D.D.

Các phương pháp chứng minh

2. Cho $n \in \mathbb{Z}, n > 1$ và $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Chứng minh rằng nếu $\left(x + \frac{1}{x}\right) \in \mathbb{Z}$ thì $\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \in \mathbb{Z}$.

3. Cho $n \in \mathbb{Z}, n > 1$. Tìm chữ số tận cùng của $\mathrm{A} = 2^{2^{\mathrm{n}}} - 1$ và chứng minh kết luận đó là đúng.

4. Chứng minh rằng mọi bưu phí lớn hơn hay bằng 12 xu đều có thể tạo ra bằng các con tem 4 xu hay 5 xu

L.T.D.D.