TOÁN RỜI RẠC
DISCRETE MATHEMATICS

LÊ THỊ PHƯƠNG DUNG

L.T.P.D.

Thời gian thi cuối kỳ

- 14 giờ ngày 27/12/2020

Nội dung

1. Mệnh đề và vị từ
2. Suy luận toán học
3. Phép đếm
4. Quan hệ
5. Đại số Bool
6. Lý thuyết chia và đồng dư

L.T.D.D.

Tài liệu tham khảo

- Kenneth Rosen, "Toán học rời rạc", bản dịch của NXB KH&KT, 2000
- Nguyễn Đức Nghĩa, Nguyễn Tô Thành, "Toán rời rạc", NXB ĐHQG Hà Nội, 2009
- ……..

L.T.D.D.

Chương 4&5: QUAN HỆ VÀ ĐẠI SỐ BOOL

- Quan hệ
- Đại số Bool
- Hàm Bool
- Hệ phương trình Bool
- Đơn giản công thức

Quan hệ

- Cho hai tập hợp A và B, một quan hệ hai ngôi giữa A và B là tập con $\Re$ của $A \times B$. Với $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \Re$, ta viết $\mathrm{a}\Re b$
- VD: Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $\mathrm{B} = \{11, 12, 13\}$. Một quan hệ $\Re$ được định nghĩa như sau: Với $\mathrm{a} \in A, b \in B, a\Re b \Leftrightarrow a|b$. Hãy xác định $\Re$
  - $\Re = \{(1, 11),\ (1, 12),\ (1, 13),\ (2, 12),\ (3, 12),\ (4, 12)\}$
- Tính chất của quan hệ: Cho $\Re$ là quan hệ của tập A và chính nó
  - Tính phản xạ: $\mathrm{a} \in A, a\Re a$
  - Tính đối xứng: $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in A, a\Re b \Rightarrow b\Re a$
  - Tính phản đối xứng: $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in A, a\Re b \wedge b\Re a \Rightarrow a = b$
  - Tính bắc cầu: $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in A, a\Re b \wedge b\Re c \Rightarrow a\Re c$

L.T.D.D.

Quan hệ

- Quan hệ tương đương: Là quan hệ hai ngôi $\Re$ trên A thỏa các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu
- VD: Cho $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, quan hệ $\Re$ trên A được định nghĩa: Với $\mathrm{a, b} \in A, a\Re b \Leftrightarrow a - b \vdots 3$. CMR $\Re$ là một quan hệ tương đương trên A.
- Thật vậy:
  - Với $\mathrm{a} \in A,\ a - a = 0 \vdots 3 \Leftrightarrow a\Re a$. Suy ra $\Re$ phản xạ
  - Với $\mathrm{a, b} \in A, a\Re b \Leftrightarrow a - b = 3q \Leftrightarrow b - a = 3(-q) \vdots 3 \Leftrightarrow b\Re a$. Suy ra $\Re$ đối xứng
  - Với $\mathrm{a, b, c} \in A, a\Re b \Leftrightarrow a - b = 3q$ và $b\Re c \Leftrightarrow b - c = 3p$. Ta có

  $a - c = (a - b) + (b - c) = 3q + 3p = 3(p + q) \vdots 3 \Leftrightarrow a\Re c$. Vậy $\Re$ có tính bắc cầu

L.T.D.D.

Quan hệ

- Cho $\Re$ là một quan hệ tương đương trên A, với a $\in A$, lớp tương đương của A chứa a, ký hiệu là $\bar{a}$ hoặc $\tilde{a}$ được định nghĩa bởi:

$$\bar{a} = \{b \in A | a\Re b\}$$

- VD: Cho $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, với a, b $\in A, a\Re b \Leftrightarrow a - b \vdots 3$. Khi đó $\Re$ là hệ tương đương. Xác định các lớp tương đương $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{9}$:

$$\tilde{1} = \{1,4,7\}, \quad \tilde{2} = \{2,5,8\}, \quad \tilde{3} = \{3,6,9\},$$
$$\tilde{4} = \{1,4,7\}, \quad \tilde{5} = \{2,5,8\}, \quad \tilde{6} = \{3,6,9\},$$
$$\tilde{7} = \{1,4,7\}, \quad \tilde{8} = \{2,5,8\}, \quad \tilde{9} = \{3,6,9\}.$$

- Thực chất chỉ có 3 lớp tương đương rời nhau

$$\tilde{1} = \{1,4,7\}, \quad \tilde{2} = \{2,5,8\}, \quad \tilde{3} = \{3,6,9\}.$$

- Nếu $\Re$ là quan hệ tương đương trên A thì có một phép phân hoạch là tập hợp tất cả các lớp tương đương rời nhau của A

Quan hệ

- Quan hệ thứ tự: Là quan hệ hai ngôi $\Re$ trên A thỏa các tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu
- VD: Cho $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, quan hệ $\Re$ trên A được định nghĩa: Với $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in A, a\Re b \Leftrightarrow a|b$. CMR $\Re$ là một quan hệ thứ tự trên A.
- Thật vậy:
  - Với $\mathrm{a} \in A, a|a \Leftrightarrow a\Re a$. Suy ra $\Re$ phản xạ
  - Với $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in A, a\Re b \wedge b\Re a \Leftrightarrow a|b \wedge b|a \Leftrightarrow (b = ap) \wedge (a = bq),$ trong đó $p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = apq \Rightarrow pq = 1 \Rightarrow p = q = 1$. Suy ra $\Re$ phản đối xứng
  - Với $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in A, a\Re b \wedge b\Re c \Leftrightarrow a|b \wedge b|c \Leftrightarrow (b = aq) \wedge (c = bp),$ trong đó $p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow c = aqp \Rightarrow a|c \Leftrightarrow a\Re c$. Suy ra $\Re$ bắc cầu

L.T.D.D.

Quan hệ

- Cho $\Re$ là quan hệ thứ tự trên A:
  - (A, $\Re$) là tập hợp thứ tự
  - Nếu $a\Re b$ ta nói a bị trội bởi b hoặc b trội a
  - b là trội trực tiếp của a nếu $a\Re b \wedge (\neg\exists c \in A: a\Re c \wedge c\Re b)$
  - Phần tử $a \in A$ được gọi là tối đại nếu a không bị trội bởi phần tử khác
  - Phần tử $a \in A$ được gọi là tối tiểu nếu a không trội phần tử khác
  - Phần tử $a \in A$ được gọi là lớn nhất nếu a trội tất cả phần tử khác: $maxA$
  - Phần tử $a \in A$ được gọi là nhỏ nhất nếu a bị trội bởi tất cả phần tử khác: $minA$
  - Phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của A (nếu có) là phần tử tối đại (tối tiểu) duy nhất

Đại số Bool

- Một đại số Bool $(B,\vee,\wedge)$ gồm tập B và hai phép toán $\vee\ (sup)$ và $\wedge\ (inf)$ thỏa mãn các tính chất: Với mọi $x, y, z \in B$:
- Tính giao hoán: $x \wedge y = y \wedge x$ và $x \vee y = y \vee x$
- Tính kết hợp: $x \wedge y \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
$$x \vee y \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$
- Tính phân phối: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
- Phần tử trung hòa: $\exists 0,1 \in B : \forall x \in B$ ta có:
$$x \vee 0 = x \text{ và } x \wedge 1 = x$$
- Phần tử bù: $\forall x \in B, \exists \bar{x} \in B$:
$$x \vee \bar{x} = 1 \text{ và } x \wedge \bar{x} = 0$$

L.T.D.D.

Đại số Bool

- VD: Cho B^n là tập tất cả các dãy nhị phân chiều dài n, khi đó $(B^n, \vee, \wedge)$ là một đại số Bool, $\forall x, y \in B^n$ ta có $x = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_n$ và $y = \delta_1\delta_2 \dots \delta_n$, trong đó $\gamma_i, \delta_i \in \{0,1\}$, $\forall i = \overline{1, n}$ với các phép toán $\vee$ (sup) và $\wedge$ (inf) được định nghĩa:

$$x \vee y = (\gamma_1 \vee \delta_1)(\gamma_2 \vee \delta_2) \dots (\gamma_n \vee \delta_n)$$
$$x \wedge y = (\gamma_1 \wedge \delta_1)(\gamma_2 \wedge \delta_2) \dots (\gamma_n \wedge \delta_n)$$

Phần tử trung hòa:

Phần tử nhỏ nhất là 00 … 0

Phần tử lớn nhất là 11 … 1

Phần tử bù của $x = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_n \in B^n$ là $\bar{x} = \overline{\gamma_1}\,\overline{\gamma_2} \dots \overline{\gamma_n} \in B^n$, trong đó:

$$\overline{1} = 0, \qquad \overline{0} = 1$$

- Số phần tử của một đại số Bool hữu hạn là một lũy thừa của 2

L.T.D.D.

Hàm Bool

- Hàm Bool n biến là một ánh xạ $f: B^n \to B$ giữa các đại số Bool $B^n,\ B$. Các biến trong hàm Bool được gọi là biến Bool.
- Bảng chân trị của hàm Bool thể hiện giá trị của hàm Bool ứng với giá trị các biến Bool
- VD: Cho hàm Bool 3 biến $f = 00110110$ có bảng chân trị như sau

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

L.T.D.D.

Hàm Bool

- Dạng tuyển chuẩn tắc của hàm Bool được biểu diễn bởi
$$f = f_1 \vee f_2 \vee \cdots \vee f_k$$
- Dạng hội chuẩn tắc của hàm Bool được biểu diễn bởi
$$f = f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k$$
- VD: Cho hàm $f = 00110110$ hãy viết dạng tuyển chuẩn tắc và hội chuẩn tắc

x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	0	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
0	0	1	0	$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$
0	1	0	1	$\overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3}$
0	1	1	1	$\overline{x_1}\, x_2\, x_3$
1	0	0	0	$\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$
1	0	1	1	$x_1\, \overline{x_2}\, x_3$
1	1	0	1	$x_1\, x_2\, \overline{x_3}$
1	1	1	0	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$

Tuyển chuẩn tắc:
$$f = \overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3} \vee \overline{x_1}\, x_2\, x_3 \vee x_1\, \overline{x_2}\, x_3 \vee x_1\, x_2\, \overline{x_3}$$

Hội chuẩn tắc:
$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$
$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

Có thể thay dấu $\vee$ bởi dấu $+$

Hàm Bool

- Bài tập: Một kỳ thi có 4 môn a, b, c, d với hệ số tương ứng là 8, 5, 4, 3. Mỗi môn được cho điểm là 0 hoặc 1. Để được đậu phải có tổng số điểm lớn hơn 10. Một hàm bool f có giá trị là 1nếu thí sinh đậu, là 0 nếu ngược lại.
    1. Xác định bảng chân trị của hàm bool f
    2. Xác định dạng tuyển chuẩn tắc của hàm bool f
    3. Xác định dạng hội chuẩn tắc của hàm bool f.

Hệ phương trình Bool

- Cho các hàm Bool n biến $f_1, f_2, \dots, f_k$ và $g_1, g_2, \dots, g_k$. Hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

trong đó các biến Bool $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các ẩn, được gọi là hệ phương trình Bool

VD: Tìm giá trị các biến Bool x, y, z, u thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x(y \vee u) = 1 \\ \bar{x} \vee \bar{u} = yz \\ \bar{x}z \vee yu = 0. \end{cases}$$

Bằng cách thử trực tiếp ta nhận được nghiệm của hệ phương trình là:

(1,1,1,0), (1,0,0,1), (1,0,1,1)

L.T.D.D.

Hệ phương trình Bool

- Các bước giải tổng quát:
  - B1: Biến các vế của hpt thành dạng tổng các tích
  - B2: Áp dụng $f = g \Leftrightarrow 1 = fg \vee \bar{f}\,\bar{g}$ cho tất cả các phương trình
  - B3: Biến hpt thành dạng $1 = h_1 h_2 \dots h_k$, trong đó h_i là vế phải của các phương trình $\forall i = 1,2,\dots,k$
  - B4: Thu gọn biểu thức B3 thành dạng $1 = v_1 \vee v_2 \vee \cdots \vee v_l$, trong đó v_i có dạng tích của các biến/bù của biến $\forall i = 1,2,\dots,l$
  - B5: Pt B4 tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} 1 = v_1 \\ 1 = v_2 \\ \quad \dots \\ 1 = v_l \end{array}\right.$$

  - Suy ra nghiệm của hpt từ B5

L.T.D.D.

Hệ phương trình Bool

VD: Tìm các biến Bool x, y, z, u thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x(y \vee u) = 1 \\ \bar{x} \vee \bar{u} = yz \\ \bar{x}z \vee yu = 0. \end{cases}$$

- B1: Biến các vế của hpt thành dạng tổng các tích

$$\begin{cases} xy \vee xu = 1 \\ \bar{x} \vee \bar{u} = yz \\ \bar{x}z \vee yu = 0. \end{cases}$$

- B2: Áp dụng $f = g \Leftrightarrow 1 = fg \vee \bar{f}\,\bar{g}$ cho tất cả các phương trình

$$\begin{cases} 1 = xy \vee xu \\ 1 = \bar{x}yz \vee yz\bar{u} \vee x\bar{y}u \vee x\bar{z}u \\ 1 = x\bar{y} \vee x\bar{u} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{u}. \end{cases}$$

Hệ phương trình Bool

- B3: Biến hpt thành dạng $1 = h_1 h_2 \dots h_k$, trong đó h_i là vế phải của các phương trình $\forall i = 1,2,\dots,k$

$$1 = (xy \vee xu)(\bar{x}yz \vee yz\bar{u} \vee x\bar{y}u \vee x\bar{z}u)(x\bar{y} \vee x\bar{u} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{u}).$$

- B4: Thu gọn biểu thức B3 thành dạng $1 = v_1 \vee v_2 \vee \dots \vee v_l$, trong đó v_i có dạng tích của các biến/bù của biến $\forall i = 1,2,\dots,l$

$$1 = x\bar{y}u \vee xyz\bar{u}.$$

- B5: Pt B4 tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} 1 = x\bar{y}u \\ 1 = xyz\bar{u}. \end{array}\right.$$

Tức là $\begin{cases} x = 1 \\ \bar{y} = 1 \\ z \text{ tùy ý} \\ u = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \bar{u} = 1. \end{cases}$

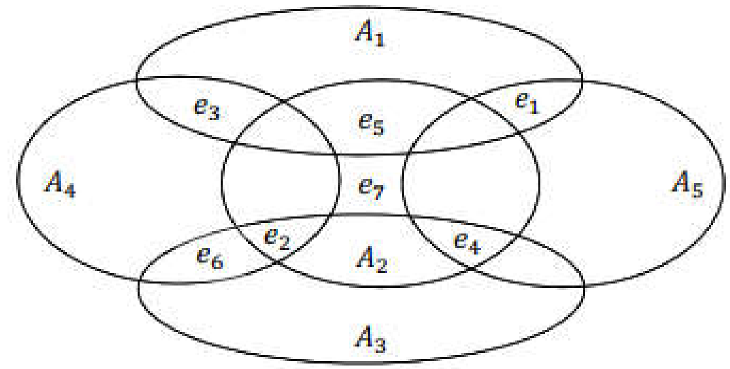
Suy ra nghiệm của hpt: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ u = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ u = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ u = 0. \end{cases}$

Vậy các nghiệm của hpt là $(1,0,0,1), (1,0,1,1), (1,1,1,0)$

L.T.D.D.

Hệ phương trình Bool – Phủ tối tiểu

- Cho $E = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ và $A_1, A_2, \dots, A_k \subset E$. Một hệ nhỏ nhất trong số các tập con này sao cho hợp của chúng phủ (chứa) được E gọi là một phủ tối tiểu của E



- Xét bài toán phủ tối tiểu như hình vẽ

Gọi x_i là biến đại diện cho A_i

- Nếu $x_i = 1$ thì A_i được chọn
- Nếu $x_i = 0$ thì A_i không được chọn

e_i	**Tập hợp phủ**
e_1	A_1 hoặc A_5
e_2	A_2 hoặc A_3 hoặc A_4
e_3	A_1 hoặc A_4
e_4	A_2 hoặc A_3 hoặc A_5
e_5	A_1 hoặc A_2
e_6	A_3 hoặc A_4
e_7	A_2

Ta lập được hpt Bool:

$$\begin{cases} 1 = x_1 \vee x_5 \\ 1 = x_2 \vee x_3 \vee x_4 \\ 1 = x_1 \vee x_4 \\ 1 = x_2 \vee x_3 \vee x_5 \\ 1 = x_1 \vee x_2 \\ 1 = x_3 \vee x_4 \\ 1 = x_2. \end{cases}$$

Hệ phương trình Bool – Phủ tối tiểu

- Giải hpt Bool:

$$\begin{cases} 1 = x_1 \vee x_5 \\ 1 = x_2 \vee x_3 \vee x_4 \\ 1 = x_1 \vee x_4 \\ 1 = x_2 \vee x_3 \vee x_5 \\ 1 = x_1 \vee x_2 \\ 1 = x_3 \vee x_4 \\ 1 = x_2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_1 \vee x_5)(x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3 \vee x_5)(x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4)x_2 = 1.$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_2x_4x_5 = 1,$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1x_2x_3 = 1 \quad \text{hoặc} \quad x_1x_2x_4 = 1 \quad \text{hoặc} \quad x_2x_4x_5 = 1.$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Các phủ tối tiểu
1	1	1	0	0	$\{A_1, A_2, A_3\}$
1	1	0	1	0	$\{A_1, A_2, A_4\}$
0	1	0	1	1	$\{A_2, A_4, A_5\}$

L.T.D.D.

Hệ phương trình Bool – Phủ tối tiểu

Bài tập: E là tập hợp các số nguyên từ 5 đến 15. Hãy tìm phủ tối tiểu của E từ các tập hợp con của nó được xác định như sau :

- A1 : tập hợp các số nguyên tố thuộc E.
- A2 : tập hợp các phần tử thuộc E và là ước của 140.
- A3 : tập hợp các phần tử của E và là bội của 3.
- A4 : tập hợp các phần tử của E và có dạng bình phương hoặc lập phương.
- A5 : tập hợp các phần tử của E từ 9 đến 12.
- A6 : tập hợp các phần tử của E mà tổng các chữ số của mỗi phần tử là từ 4 đến 6.

L.T.D.D.

Hệ phương trình Bool – Phủ tối tiểu

Bài tập: Hà cần đi siêu thị mua các mặt hàng: đậu xanh (1), đậu trắng (2), dừa khô (3), trứng (4), nếp (5), nha đam (6), bột mì (7), nước ngọt (8), táo (9), lê (10). Để mua được 10 mặt hàng này, Hà có thể đến các siêu thị A, B, C, D, E, F. Tuy nhiên, không siêu thị nào trong số 6 siêu thị này có đầy đủ tất cả các mặt hàng mà Hà cần, cụ thể các siêu thị có:

- Siêu thị A có trứng, nếp;
- Siêu thị B có đậu trắng, nếp, nước ngọt;
- Siêu thị C có đậu xanh, dừa khô, nha đam, lê;
- Siêu thị D có nếp, nha đam, bột mì, nước ngọt;
- Siêu thị E có đậu xanh, dừa khô, bột mì, táo;
- Siêu thị F có đậu xanh, đậu trắng, táo, lê.

Hãy xác định xem Hà phải đến **ít nhất bao nhiêu siêu thị** trong số 6 siêu thị kể trên để mua đủ 10 mặt hàng này, biết rằng lượng hàng có sẵn ở mỗi siêu thị là không thiếu, và **đó là những siêu thị nào**?

L.T.D.D.

Đơn giản công thức

Từ đơn: Là hàm Bool x hoặc $\bar{x}$

Đơn thức: Là tích khác không của một số hữu hạn từ đơn. VD: $xyz, \bar{x}y\bar{z}$

Trong đơn thức, từ đơn được gọi là **nhân tử nguyên tố**

Từ tối tiểu: Tích khác không của n từ đơn (với hàm Bool n biến)

Công thức đa thức: Là công thức dạng tổng của các đơn thức

Quan hệ "đơn giản hơn":

- Cho hai công thức đa thức của một hàm Bool:
  - $f = m_1 \vee m_2 \vee \cdots \vee m_k \quad (F)$
  - $f = M_1 \vee M_2 \vee \cdots \vee M_l \quad (G)$
- Ta nói rằng công thức F "đơn giản hơn" công thức G nếu tồn tại đơn ánh $h: \{1,2, \dots, k\} \to \{1,2, \dots, l\}$ sao cho với mọi i $\in \{1,2, \dots, k\}$ thì số từ đơn của m_i không nhiều hơn số từ đơn của $M_{h(i)}$

L.T.D.D.

Đơn giản công thức

Đơn giản như nhau:

Nếu F đơn giản hơn G và G đơn giản hơn F thì ta nói F và G *đơn giản như nhau*

Công thức đa thức tối tiểu:

Công thức F của hàm Bool f được gọi là *tối tiểu* nếu với bất kỳ công thức G của f mà đơn giản hơn F thì F và G đơn giản như nhau

Các phương pháp đơn giản công thức:

- Karnaugh
- Quine-Mc Cluskey
- *Concensus*

Phương pháp Karnaugh

Bản đồ Karnaugh của hàm Bool 3 biến:

	a	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$
c	5	7	3	1
$\bar{c}$	4	6	2	0
	$\bar{b}$	b	b	$\bar{b}$

Bản đồ Karnaugh của hàm Bool 4 biến:

	a	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	
c	10	14	6	2	$\bar{d}$
c	11	15	7	3	d
$\bar{c}$	9	13	5	1	d
$\bar{c}$	8	12	4	0	$\bar{d}$
	$\bar{b}$	b	b	$\bar{b}$	

L.T.D.D.

Phương pháp Karnaugh

VD: Biểu diễn sơ đồ Karnaugh của hàm Bool 4 biến sau đây:

$$f = \bar{a}\bar{b}c\bar{d} \vee \bar{a}\bar{b}cd \vee \bar{a}bc\bar{d} \vee \bar{a}bcd \vee a\bar{b}\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{b}\bar{c}d \vee ab\bar{c}d \vee abcd$$

	a	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	
c			X	X	$\bar{d}$
c		X	X	X	d
$\bar{c}$	X	X			d
$\bar{c}$	X				$\bar{d}$
	$\bar{b}$	b	b	$\bar{b}$	

L.T.P.D.

Phương pháp Karnaugh

VD: Biểu diễn sơ đồ Karnaugh của hàm Bool 4 biến sau đây:

$$f = \underbrace{\bar{a}\bar{b}c\bar{d}}_{0010} \vee \underbrace{\bar{a}\bar{b}cd}_{0011} \vee \underbrace{\bar{a}bc\bar{d}}_{0110} \vee \underbrace{\bar{a}bcd}_{0111} \vee \underbrace{a\bar{b}\bar{c}\bar{d}}_{1000} \vee \underbrace{a\bar{b}\bar{c}d}_{1001} \vee \underbrace{ab\bar{c}d}_{1101} \vee \underbrace{abcd}_{1111}$$

2 **3** **6** **7** **8** **9** **13** **15**

	a	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	
c	10	14	6	2	$\bar{d}$
c	11	15	7	3	d
$\bar{c}$	9	13	5	1	d
$\bar{c}$	8	12	4	0	$\bar{d}$
	$\bar{b}$	b	b	$\bar{b}$	

	a	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	
c			X	X	$\bar{d}$
c		X	X	X	d
$\bar{c}$	X	X			d
$\bar{c}$	X				$\bar{d}$
	$\bar{b}$	b	b	$\bar{b}$	

Phương pháp Karnaugh

VD: Biểu diễn sơ đồ Karnaugh của hàm Bool có dãy nhị phân tương ứng

f = 1011 1100 1111 0111

	a	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	
c	10	14	6	2	$\bar{d}$
c	11	15	7	3	d
$\bar{c}$	9	13	5	1	d
$\bar{c}$	8	12	4	0	$\bar{d}$
	$\bar{b}$	b	b	$\bar{b}$	

X	X		X
X	X		X
X	X	X	
X		X	X

Phương pháp Karnaugh

Cell là đơn thức do p nhân tử nguyên tố tạo thành được biểu diễn bởi một hình chữ nhật mở rộng gồm 2^{n-p} ô trong sơ đồ Karnaugh

VD: Xác định các cell từ sơ đồ Karnaugh:

	a	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	
c			X	X	$\bar{d}$
c		X	X	X	d
$\bar{c}$	X	X			d
$\bar{c}$	X				$\bar{d}$
	$\bar{b}$	b	b	$\bar{b}$	

		X	X
		X	X

$\bar{a}c$

X			
X			

$a\bar{b}\bar{c}$

	X		
	X		

abd

	X	X	

bcd

X	X		

$a\bar{c}d$

		X	X

$ac\bar{d}$

		X	X

$\bar{a}cd$

			X
			X

$\bar{a}\bar{b}c$

...

L.T.D.D.

Phương pháp Karnaugh

Các bước xác định công thức tối tiểu của hàm Bool *f* :

- **Bước 1.** Biểu diễn *f* bằng sơ đồ Karnaugh
- **Bước 2.** Xác định tất cả các ***Cell lớn*** theo thứ tự từ 2*n* đến 1 ô, sao cho Cell vừa xác định *không bị chứa trong bất kỳ Cell nào* được xác định trước đó
- **Bước 3.** Trong sơ đồ Karnaugh, nếu tồn tại ô trong chỉ nằm trong duy nhất một Cell lớn thì tô Cell lớn này vào sơ đồ phụ. Lặp lại bước 3 cho đến khi không còn Cell lớn nào có tính chất trên
- **Bước 4.** Nếu sơ đồ phụ giống với sơ đồ Karnaugh thì sang **Bước 5**. Nếu không, trong số các Cell lớn còn lại, chọn ra Cell lớn chứa nhiều ô chưa được tô đen nhất. Tiếp tục chọn cho đến khi sơ đồ phụ giống sơ đồ Karnaugh
- **Bước 5.** Vì **Bước 4** có thể có nhiều sự lựa chọn để tô các Cell lớn vào sơ đồ phụ nên *f* thường có nhiều hơn một công thức. Loại trừ các công thức không tối tiểu của *f*, ta nhận được công thức tối tiểu của *f*

Phương pháp Karnaugh

VD: Xác định công thức tối tiểu của *f* từ sơ đồ Karnaugh:

	a	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	
c			X	X	$\bar{d}$
c		X	X	X	d
$\bar{c}$	X	X			d
$\bar{c}$	X				$\bar{d}$
	$\bar{b}$	b	b	$\bar{b}$	

Các cell lớn:

		X	X
		X	X

$1.\ \bar{a}c$

X			
X			

$2.\ a\bar{b}\bar{c}$

	X		
	X		

$3.\ abd$

	X	X	

$4.\ bcd$

X	X		

$5.\ a\bar{c}d$

Sơ đồ phụ được tô đen bởi cell 1 và 2

		X	X
		X	X
X			
X			

Phương pháp Karnaugh

VD: Xác định công thức tối tiểu của *f* từ sơ đồ Karnaugh:

	a	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	
c			X	X	$\bar{d}$
c		X	X	X	d
$\bar{c}$	X	X			d
$\bar{c}$	X				$\bar{d}$
	$\bar{b}$	b	b	$\bar{b}$	

Các cell lớn:

		X	X
		X	X

1. $\bar{a}c$

X			
X			

2. $a\bar{b}\bar{c}$

	X		
	X		

3. abd

	X	X	

4. bcd

X	X		

5. $a\bar{c}d$

Sơ đồ phụ được tô đen bởi cell lớn 1 và 2

		X	X
		X	X
X			
X			

Vì sơ đồ phụ chưa giống sơ đồ Karnaugh nên chọn thêm cell lớn 3 hoặc cell lớn 4 và 5.

L.T.D.D.

Phương pháp Karnaugh

VD: Xác định công thức tối tiểu của *f* từ sơ đồ Karnaugh:

	a	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	
c			X	X	$\bar{d}$
c		X	X	X	d
$\bar{c}$	X	X			d
$\bar{c}$	X				$\bar{d}$
	$\bar{b}$	b	b	$\bar{b}$	

Các cell lớn:

		X	X
		X	X

1. $\bar{a}c$

X			
X			

2. $a\bar{b}\bar{c}$

	X		
	X		

3. abd

	X	X	

4. bcd

X	X		

5. $a\bar{c}d$

Suy ra các công thức đa thức tối giản của *f* là:

$$f = \bar{a}c \vee a\bar{b}\bar{c} \vee abd$$

$$f = \bar{a}c \vee a\bar{b}\bar{c} \vee bcd \vee a\bar{c}d$$

Suy ra công thức tối tiểu

$$f = \bar{a}c \vee a\bar{b}\bar{c} \vee abd$$

Bài tập

Tìm công thức tối tiểu bằng phương pháp Karnaugh của hàm bool f có dãy nhị phân tương ứng như sau

$$f = 1011\ 1100\ 1111\ 0111$$

Phương pháp Quine-Mc Cluskey

Công thức tối tiểu của hàm Bool f được xác định qua hai bước:

i) Tìm công thức tối giản dạng đa thức của *f*

Ta lập bảng gồm nhiều cột để thực hiện tính toán trên các đơn thức của f

(a) Cột thứ nhất: Các chuỗi nhị phân làm cho hàm f bằng 1. Các chuỗi được viết thành từng nhóm. Các chuỗi trong cùng một nhóm có số bít 1 bằng nhau

(b) Cột thứ hai: Áp dụng tính chất $Ax \vee A\bar{x} = A$ ghi lại kết quả của phép tính đối với mỗi chuỗi trong nhóm thứ i với các chuỗi trong nhóm thứ $i + 1$ của cột thứ nhất. Chuỗi nào có tham gia ít nhất một lần vào phép tính thì đánh dấu $*$ bên cạnh

(c) Cột thứ ba thực hiện công việc tương tự như ở cột thứ hai nhưng tính chất được áp dụng trên các đơn thức của cột thứ hai

(d) Quá trình này sẽ lặp lại cho đến khi không thể áp dụng tính chất trên cho các đơn thức ở cột hiện tại. Khi đó, tất cả các đơn thức không được đánh dấu $*$ chính là các đơn thức trong công thức tối giản của f

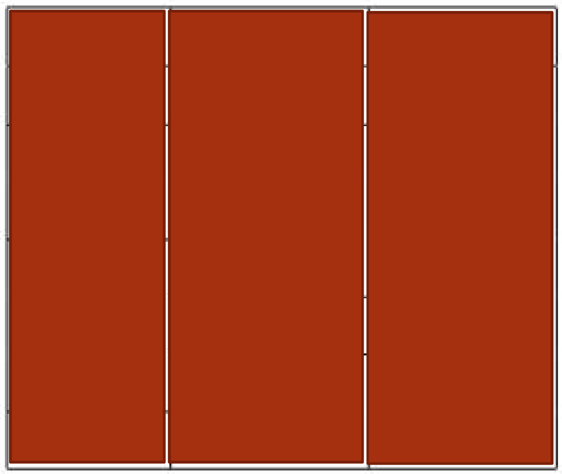
ii) Tìm phủ tối tiểu của các đơn thức tối giản của *f*

Phương pháp Quine-Mc Cluskey

VD: Tìm công thức tối tiểu dạng đa thức của hàm Bool sau đây:

$$f = \bar{x}\bar{y}z\bar{u} \vee \bar{x}\bar{y}zu \vee x\bar{y}zu \vee xy\bar{z}\bar{u} \vee xy\bar{z}u \vee xyz\bar{u} \vee xyzu.$$

i) Tìm công thức tối giản dạng đa thức của *f*



Công thức tối giản dạng đa thức của *f*:

$$f = xy \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{y}zu \vee xzu.$$

L.T.P.D.

Phương pháp Quine-Mc Cluskey

VD: Tìm CTTT dạng đa thức của hàm Bool:

$$f = \bar{x}\bar{y}z\bar{u} \vee \bar{x}\bar{y}zu \vee x\bar{y}zu \vee xy\bar{z}\bar{u} \vee xy\bar{z}u \vee xyz\bar{u} \vee xyzu.$$

ii) Tìm phủ tối tiểu của các đơn thức tối giản

$$f = xy \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{y}zu \vee xzu.$$

Chọn các cột chỉ có 1 ô được tô đen, các đơn thức nằm trên dòng tương ứng là các đơn thức cốt yếu

$\bar{x}\bar{y}z$

xy

	$\bar{x}\bar{y}z\bar{u}$	$\bar{x}\bar{y}zu$	$x\bar{y}zu$	$xy\bar{z}\bar{u}$	$xy\bar{z}u$	$xyz\bar{u}$	$xyzu$
xy				X	X	X	X
$\bar{x}\bar{y}z$	X	X					
$\bar{y}zu$		X	X				
xzu			X				X

Suy ra đơn thức cốt yếu là xy và $\bar{x}\bar{y}z$
Xóa các các cột được phủ bởi đơn thức cốt yếu ta được

	$xyz\bar{u}$
xy	
$\bar{x}\bar{y}z$	
$\bar{y}zu$	X
xzu	X

Xóa những dòng không được tô đen

	$xyz\bar{u}$
$\bar{y}zu$	X
xzu	X

Tìm hệ ít nhất các đơn thức có thể phủ hết các cột còn lại

Như vậy hệ ít nhất các đơn thức có thể phủ hết các cột còn lại là $\bar{y}zu$ hoặc xzu

L.T.D.D.

Phương pháp Quine-Mc Cluskey

VD: Tìm CTTT dạng đa thức của hàm Bool:

$$f = \bar{x}\bar{y}z\bar{u} \vee \bar{x}\bar{y}zu \vee x\bar{y}zu \vee xy\bar{z}\bar{u} \vee xy\bar{z}u \vee xyz\bar{u} \vee xyzu.$$

ii) Tìm phủ tối tiểu của các đơn thức tối giản

$$f = xy \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{y}zu \vee xzu.$$

Công thức tối tiểu của *f* được xác định như sau:

$$\left[\begin{array}{l} f = xy \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{y}zu \\ f = xy \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xzu \end{array}\right.$$

L.T.D.D.

Bài tập

Tìm công thức tối tiểu bằng phương pháp Quine-Mc Cluskey của hàm Bool

$$f = abc \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}bc \vee \bar{a}\bar{b}c \vee \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

L.T.D.D.