

# Homework 5 ARAP

华南理工大学 曾亚军

## 一 实验目的

- 理解和实现 ASAP 和 ARAP 算法。
- 对各种参数化方法进行比较。
- 学习和巩固三角网格的数据结构及编程。
- 学习和实现矩阵的 SVD 分解。

## 二 算法实现

ASAP 算法和 ARAP 算法的核心思想基本一致。作业 4 中已实现了固定边界的三角形参数化方法，那边如果我们不固定边界，是否能获得三角行的扭曲形变程度更少的参数化结果呢？为了获取三角行的扭曲形变程度更少的参数化结果，首先要定义一个衡量三角行扭曲形变程度的指标。

在微分几何中，我们知道曲面的参数化实际上就是一个参数映射。局部一个点附近区域的参数化可以由该点的 Jacobi 矩阵描述，不妨设为  $J$ 。通过奇异值分解，可以将  $J$  表示为一个正交变换  $U$ ，一个伸缩变换  $\Sigma$ ，一个正交变换  $V$  的乘积：

$$J = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} V^T. \quad (1)$$

正交变换本身不会造成任何扭曲，因此局部区域上参数化的几何扭曲是由矩阵  $\Sigma$  造成的。 $\Sigma$  是一个对角阵，对角元  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  是  $J$  的两个奇异值。我们有：

- 当  $\sigma_1 = \sigma_2$  时，不会发生角度扭曲，该参数变换是保角变换。
- 当  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  时，形状不会发生扭曲，该参数变换是保形变换。

根据论文，可定义能量：

$$E(u, L) = \sum_{t=1}^T A_t \|J_t(u) - L_t\|_F^2 \quad (2)$$

其中  $L_t \in M$  是目标变换。即在  $M$  中的所有变换，是我们认为可以接受的变换。若我们希望结果尽可能保角，那么  $M$  应当是所有相似变换的集合。若我们希望结果尽可能保形，那么  $M$  中应当只包含刚性变换。现在我们的目的是，使得上述能量最小化，那么我们对每个三角形的变换就尽可能地接近了我们的目标，使得扭曲程度最小。

进一步，上述等式可以改写为：

$$E(u, L) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=0}^2 \cot(\theta_t^i) \|(u_t^i - u_t^{i+1}) - L_t(x_t^i - x_t^{i+1})\|^2 \quad (3)$$

## 2.1 ASAP

ASAP 方法即尽可能保相似的算法，因而  $M$  中仅包含相似变换（保角变换）：

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad (4)$$

取第  $t$  个三角形的对应能量为：

$$\begin{aligned} E_t^i &= \frac{1}{2} \cot(\theta_t^i) \left\| \begin{pmatrix} \Delta u_t^{i,1} \\ \Delta u_t^{i,2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ -b_t & a_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_t^{i,1} \\ \Delta x_t^{i,2} \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \cot(\theta_t^i) \left\{ (\Delta u_t^{i,1} - a_t \Delta x_t^{i,1} - b_t \Delta x_t^{i,2})^2 + (\Delta u_t^{i,2} + b_t \Delta x_t^{i,1} - a_t \Delta x_t^{i,2})^2 \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

令  $D_t^{i,1} = (\Delta u_t^{i,1} - a_t \Delta x_t^{i,1} - b_t \Delta x_t^{i,2})$ ,  $D_t^{i,2} = (\Delta u_t^{i,2} + b_t \Delta x_t^{i,1} - a_t \Delta x_t^{i,2})$ ，容易得到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_t^i}{\partial u_t^{i,1}} &= \cot(\theta_t^i) D_t^{i,1}, & \frac{\partial E_t^i}{\partial u_t^{i+1,1}} &= -\cot(\theta_t^i) D_t^{i,1} \\ \frac{\partial E_t^i}{\partial u_t^{i,2}} &= \cot(\theta_t^i) D_t^{i,2}, & \frac{\partial E_t^i}{\partial u_t^{i+1,2}} &= -\cot(\theta_t^i) D_t^{i,2} \\ \frac{\partial E_t^i}{\partial a_t} &= \cot(\theta_t^i) (-D_t^{i,1} \Delta x_t^{i,1} - D_t^{i,2} \Delta x_t^{i,2}) \\ \frac{\partial E_t^i}{\partial b_t} &= \cot(\theta_t^i) (D_t^{i,2} \Delta x_t^{i,1} - D_t^{i,1} \Delta x_t^{i,2}) \end{aligned} \quad (6)$$

则对  $E_t = \sum_{i=0}^2 E_t^i$ ，有：

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_t}{\partial u_t^{i,1}} &= \cot(\theta_t^i) D_t^{i,1} - \cot(\theta_t^{i+2}) D_t^{i+2,1} \\ \frac{\partial E_t}{\partial u_t^{i,2}} &= \cot(\theta_t^i) D_t^{i,2} - \cot(\theta_t^{i+2}) D_t^{i+2,2} \\ \frac{\partial E_t}{\partial a_t} &= \sum_{i=0}^2 \cot(\theta_t^i) (-D_t^{i,1} \Delta x_t^{i,1} - D_t^{i,2} \Delta x_t^{i,2}) \\ \frac{\partial E_t}{\partial b_t} &= \sum_{i=0}^2 \cot(\theta_t^i) (D_t^{i,2} \Delta x_t^{i,1} - D_t^{i,1} \Delta x_t^{i,2}) \end{aligned} \quad (7)$$

再进一步地，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial u_k^1} &= \sum_{u^k \in Tri(t), u_t^i = u_k} \cot(\theta_t^i) D_t^{i,1} - \cot(\theta_t^{i+2}) D_t^{i+2,1} \\ \frac{\partial E}{\partial u_k^2} &= \sum_{u^k \in Tri(t), u_t^i = u_k} \cot(\theta_t^i) D_t^{i,2} - \cot(\theta_t^{i+2}) D_t^{i+2,2} \\ \frac{\partial E}{\partial a_t} &= \sum_{i=0}^2 \cot(\theta_t^i) (-D_t^{i,1} \Delta x_t^{i,1} - D_t^{i,2} \Delta x_t^{i,2}) \\ \frac{\partial E}{\partial b_t} &= \sum_{i=0}^2 \cot(\theta_t^i) (D_t^{i,2} \Delta x_t^{i,1} - D_t^{i,1} \Delta x_t^{i,2}) \end{aligned} \quad (8)$$

上式中  $u^k \in Tri(t)$  表示未知数  $u_k$  在第  $t$  个三角形中,  $u_t^i = u_k$  表示序号  $i$  是  $u_k$  在当前三角形的编号。

## 2.2 ARAP

ASAP 方法即尽可能保刚性的算法, 因而  $M$  中仅包含刚性变换 (旋转):

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right\} \quad (9)$$

相比 ASAP 方法, 由于在 ARAP 方法, 矩阵  $L_t$  具有约束  $\det(L_t) = 1$ 。如果按照和 ASAP 方法同样的思路取求解, 得到的是非线性方程。因而论文中对 ARAP 方法采取从局部到整体的方法。

在 local 步骤, 当每个点的参数值  $u_k$  已经确定。则第  $t$  个三角形对应的雅可比矩阵  $J_t$  可以用如下表达式计算:

$$\sum_{i=0}^2 \cot(\theta_t^i) (u_t^i - u_t^{i+1}) (x_t^i - x_t^{i+1})^T \quad (10)$$

将  $J_t$  分解  $J_t = U_t \Sigma_t V_t^T$  后, 最优的  $L_t$  矩阵表达为:

$$L_t = U_t V_t^T \quad (11)$$

在 global 步骤, 当已经确定了每个三角形的  $L_t$  矩阵, 求解最优的  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  可以转化为求解线性方程组问题:

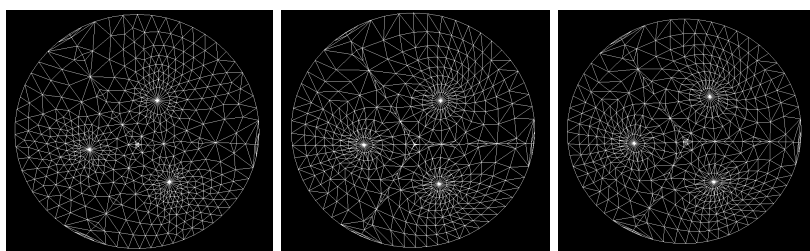
$$\begin{aligned} E(u, L) &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=0}^2 \cot(\theta_t^i) \| (u_t^i - u_t^{i+1}) - L_t (x_t^i - x_t^{i+1}) \|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in he} \sum_{i=0}^2 \cot(\theta_{ij}) \| (u_i - u_j) - L_t(i, j) (x_{t(i,j)}^i - x_{t(i,j)}^{i+1}) \|^2 \end{aligned} \quad (12)$$

通过求导, 可建立线性方程组:

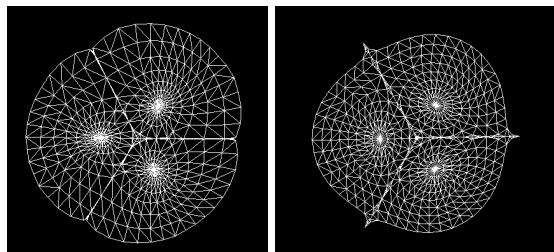
$$\sum_{j \in N(i)} [\cot(\theta_{ij}) + \cot(\theta_{ji})] (u_i - u_j) = \sum_{j \in N(i)} [\cot(\theta_{ij}) L_{t(i,j)} + \cot(\theta_{ji}) L_{t(j,i)}] (x_i - x_j) \quad (13)$$

注意, 这里的表达为是对  $i$  的所有邻接节点计算系数, 但这是有方向的, 根据半边决定, 对于网格的内点, 两侧的半边都存在, 不会有任何问题。对于边界, 只存在一个方向的半边, 另外一个方向的半边不存在, 则对应的系数直接为 0。

## 三 实验结果

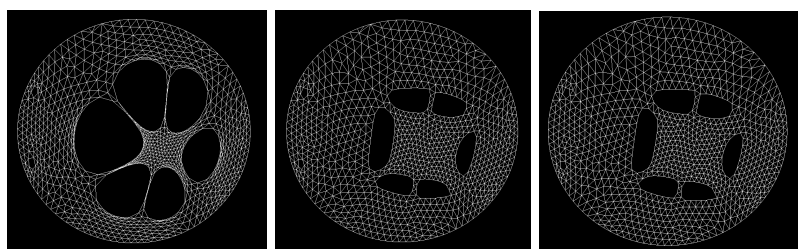


(a) Uniform weight Circle (b) Cotangent weight Circle (c) shape preserving Circle

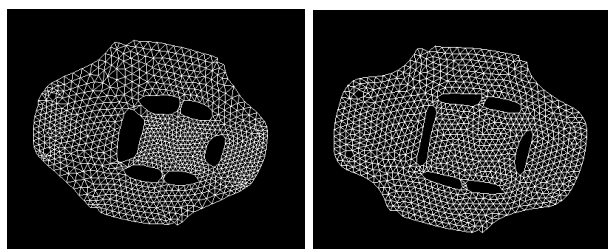


(d) ASAP Circle (e) ARAP Circle

图 1: balls 五种参数化结果对比



(a) Uniform weight (b) Cotangent weight (c) shape preserving



(d) ASAP (e) ARAP

图 2: Beetle\_ABF 五种参数化结果对比

进行纹理贴图后结果：

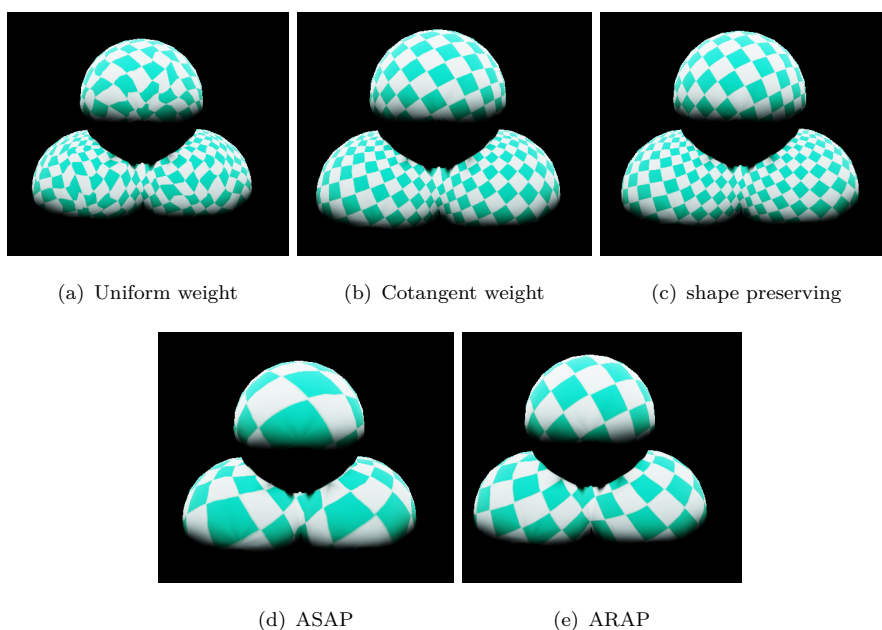


图 3: balls 五种参数化结果加纹理贴图对比

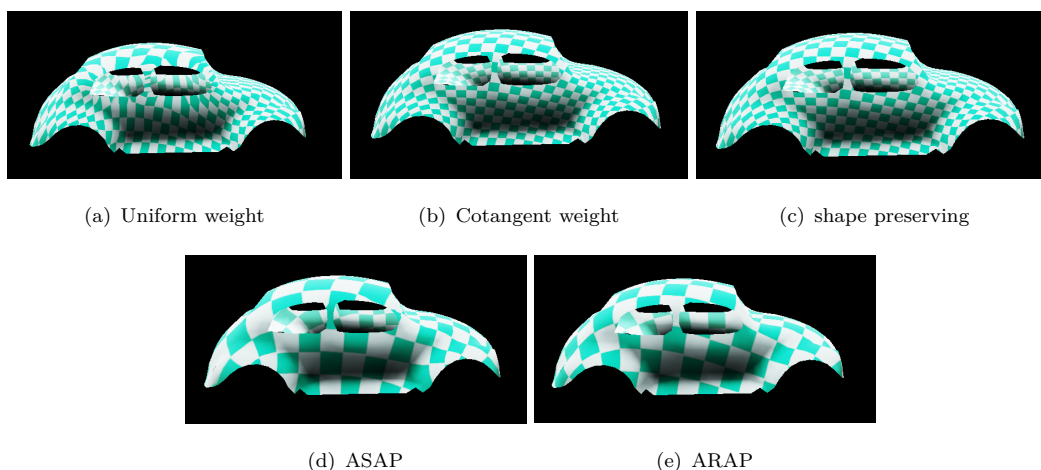


图 4: Beetle\_ABf 五种参数化结果加纹理贴图对比

由以上结果，发现 ARAP 方法在参数化时会无法避免三角形的翻转。但参数化后的结果扭曲变形较少，能较好地保持了网格本身的几何性质，纹理贴图后图样均匀。在运算过程中，从局部到整体的方法收敛速度很快，而且不依赖于初始结果（只需要是正确的参数化结果，不管是 uniform 还是 cotangent 权重，还是 ASAP 方法得到的初始化结果，最终都会收敛到同样的结果）。

## 四 注意事项

- 若考虑直接解线性方程组求解 ASAP 方法，公式一定要耐心推导，否则很容易出错。
- 本次实验中有些模型边界不只一条，为了达到比较好的效果，初始参数化时应当识别并固定最长一条边界。

- ASAP 方法要挑选两个或以上的锚点，否则会得到平凡解。如果用从局部到整体的方法求解 ASAP 方法，则每次迭代后应当对点进行放缩，否则会迭代到平凡解。
- 在实现 ARAP 算法过程中，要注意对于内部的边，它会被两个三角形包含，对于位于边界的边，只会被一个三角形包含。
- 要熟悉 openmesh 的半边结构。在实现 ARAP 算法时，我是按照半边的方法识别三角形的，对于每一个顶点以及其邻接顶点，用 `v->halfedgeTo(v1)` 函数去寻找半边，然后对半边求取其所在的三角形 `he->Polygon()`。但事实上，对于边界边  $(v, v1)$ ，尽管其实只存在一条半边（假设为  $(v-v1)$ ），但是用 `he=v1->halfedgeTo(v)` 仍然是非空的，而此时对应的 `he->Polygon()` 是 NULL。

## 五 收获和感悟

这次作业最大的收获，还是从局部到整体的方法这种思路。因为从局部到整体这种思路将求解非线性方程组转换成了通过线性方程组求解并迭代实现解的收敛。求解非线性方程组是非常耗时而且麻烦的，而转换成求解线性方程组无疑大大加速了求解的速度。但我还存在一定的疑惑，这样的方法是否能收敛到最优解，会不会存在收敛到鞍点之类的情况。

另外一个收获在于，ASAP 和 ARAP 的提出过程。因为这两个方法的提出过程非常自然。如果不固定边界，扭曲程度是否应当更小？那么为了获取扭曲程度更小的参数化方法，怎么定义衡量扭曲程度的指标？定义了指标之后就是一个优化问题。这样研究课题的思路非常值得我学习的。