

Homework 4 MinSurf Mesh

华南理工大学 曾亚军

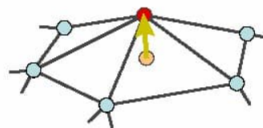
一 实验目的

- 极小化曲面类。
- 网格参数化。
- 熟悉三维网格结构。

二 算法主要过程

本次作业主要包括两部分内容，曲面极小化和曲面参数化。对于三维网格曲面，每一个顶点的拉普拉斯坐标如下：

$$\delta_i = v_i - \sum_{j \in N(i)} w_j v_j \quad (1)$$



$$\delta_i = \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} (v_i - v_j)$$

图 1: 拉普拉斯坐标

曲面的极小化，即曲面的各点平均曲率 $H(v_i)$ 为 0。又由于

$$\lim_{len(\gamma) \rightarrow 0} \frac{1}{len(\gamma)} \int_{v \in \gamma} (v_i - v) ds = H(v_i) \mathbf{n}_i \quad (2)$$

则

$$\delta_i = v_i - \frac{1}{d_i} \sum_{v \in N(i)} v = \frac{1}{d_i} \sum_{v \in N(i)} (v_i - v) = 0 \quad (3)$$

实现曲面的极小化不难，其步骤如下：

- 检测边界
- 固定边界
- 建立稀疏方程组

- 求解

事实上本质上也就只是求解稀疏方程组而已，这一点在作业 3 中已经了解并练习过了。

而曲面的参数化，即将曲面的边界固定到一个平面上（圆形或矩形），再极小化。事实上，在极小化曲面的时候，最终求解的顶点是边界顶点的线性组合。因此，当边界顶点固定到一个平面时，曲面也就会被参数化到一个平面上。

参数化的方法有很多种，在本文中，我实现了其中三种：

- Uniform weight
- Cotangent weight
- shape preserving parametrization

而边界参数化的方式，我采取了累积弦长参数化的方法。实验效果见于下一小节。

三 实验结果和对比

3.1 极小化曲面

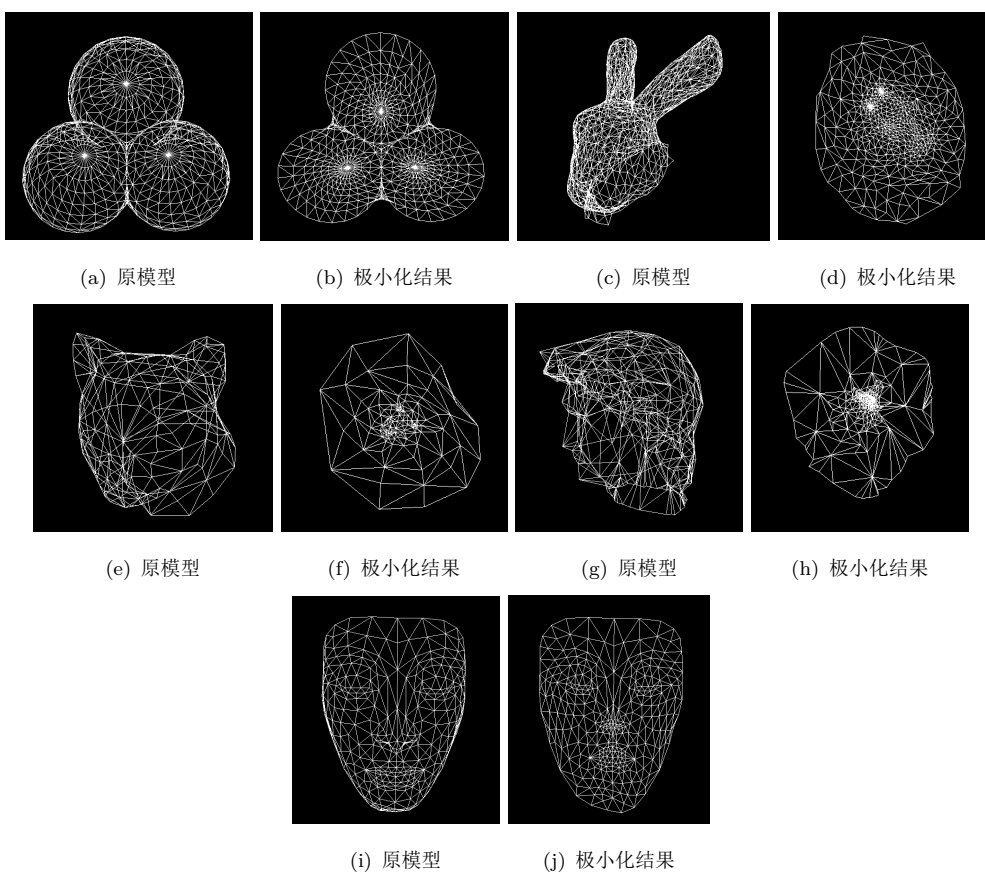


图 2: balls 参数化结果

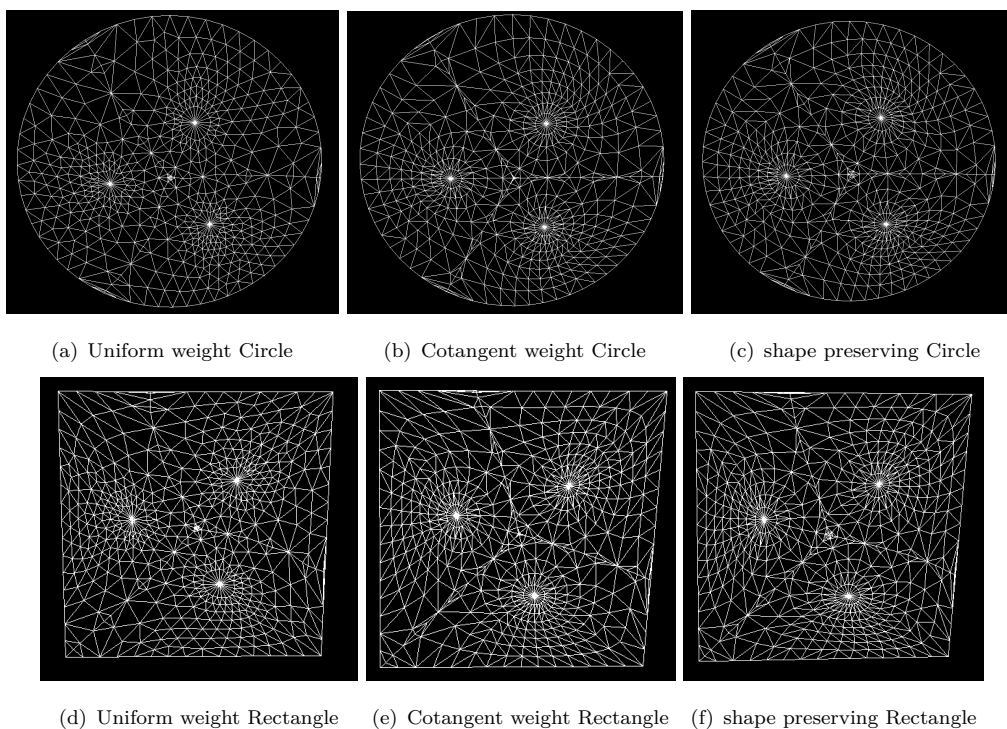


图 3: balls 三种参数化结果

3.2 参数化

这里我实现了三种方法，以及两种边界。以 balls 模型作对比如下：从上图可以看出，用 Cotangent weight 和 shape preserving 这两种方法得到的参数化曲面结果差不多，都比均匀权重要好很多，扭曲要少一些。下图展示了 Nefertiti_face 在圆边界的三种参数化结果（矩形边界是差不多的，就不重复了）。

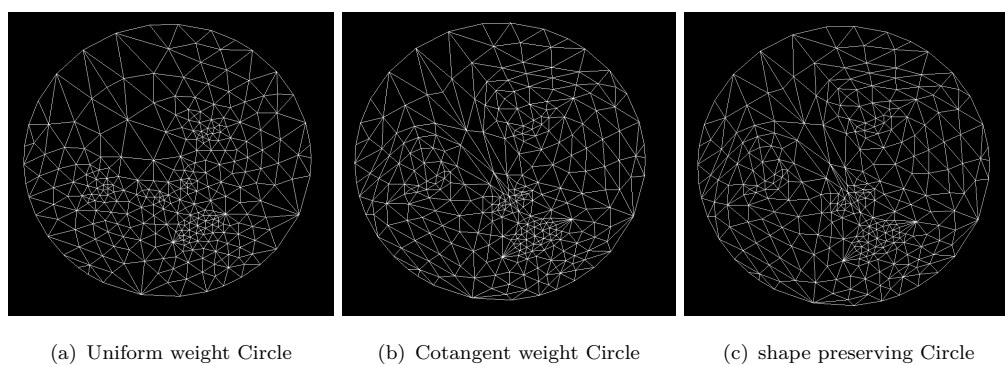


图 4: Nefertiti_face 三种参数化结果

对 balls 模型贴图后结果如下：

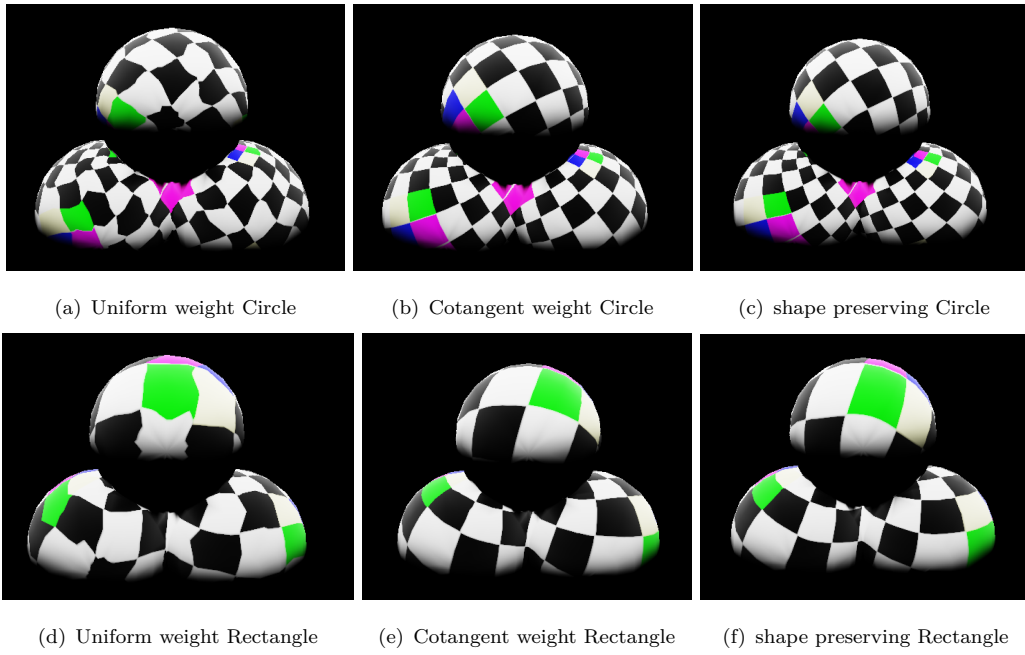


图 5: balls 三种参数化加纹理贴图后结果

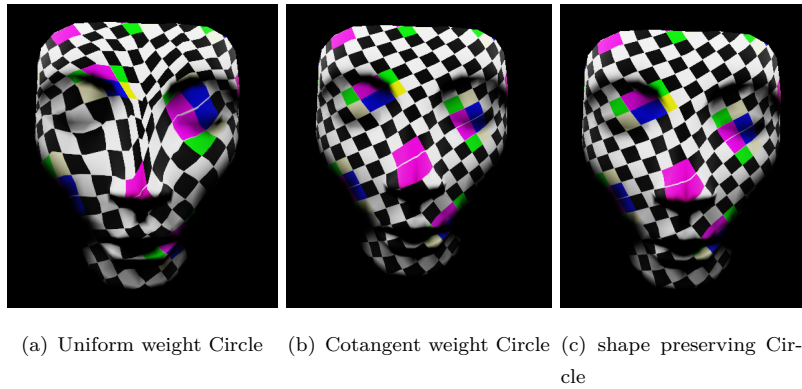
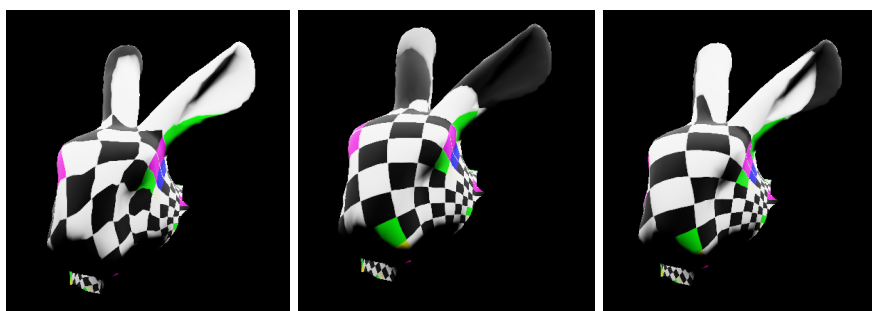


图 6: Nefertiti_face 三种参数化纹理贴图后结果



(a) Uniform weight Circle (b) Cotangent weight Circle (c) shape preserving Circle

图 7: rabbit 三种参数化纹理贴图后结果

增加了纹理贴图后，可以更容易地看出，用 Cotangent weight 和 shape preserving 这两种方法明显要比 Uniform 方法要好。

四 收获和感悟

事实上本次作业涉及的三种参数化方法，我之前有在处理鞋楦模型的时候都实现过。当时就是对着论文的方法直接去实现的，但并没有思考为什么是这样。但现在从极小曲面的角度往下推，就会觉得这样的参数化方法非常自然。现在重新审视参数化的结果，会感觉有一种几何美。

参考文献

Floater M S. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. Computer aided geometric design, 1997, 14(3): 231-250