Homework 6 MassSpring

华南理工大学 曾亚军

一　实验目的

- 实现质点弹簧仿真模型的欧拉隐式方法。
- 实现质点弹簧仿真模型的加速模拟方法。
- 学习使用 Tetgen 库生成四面体剖分。

二　弹簧质点模型

一个弹簧质点系统就是由节点及节点之间的边所构成的图（Graph），也就是网格。网格图的每个顶点看为一个质点，每条边看为一根弹簧。模拟的核心问题在于：如何由前 n 帧信息，求得第 $n+1$ 帧信息。

一般来说，需要考虑的信息是速度 $\boldsymbol{v}$ 和位移 $\boldsymbol{x}$。

2.1　隐式欧拉方法

采取简单的物理模型，可用隐式欧拉方程描述：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{n+1} &= \boldsymbol{x}_n + h\boldsymbol{v}_{n+1},\\ \boldsymbol{v}_{n+1} &= \boldsymbol{v}_n + h\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{f}_{int}(t_{n+1}) + \boldsymbol{f}_{ext}),\end{aligned} \tag{1}$$

令

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_n + h\boldsymbol{v}_n + h^2\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}_{ext}, \tag{2}$$

则原问题转化为求解 $\boldsymbol{x}$ 的方程：

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - h^2\boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{3}$$

利用牛顿迭代法，由：

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - (\nabla\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{(k)}))^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{(k)}). \tag{4}$$

迭代初值可选为 $\boldsymbol{x}^{(0)} = y$.

迭代过程中，需计算 $\nabla\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$。对于单个弹簧（端点为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$），劲度系数为 k，原长为 l，有：

$$\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = k(||\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|| - l)\frac{\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1}{||\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2||}, \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = -\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2),$$

其中 $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$ 是 $\boldsymbol{x}_1$ 在这根弹簧受到的力，$\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$ 是 $\boldsymbol{x}_2$ 在这根弹簧受到的力。对

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = k(||\boldsymbol{x}|| - l)\frac{-\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||},$$

求导，有：

$$\frac{d\boldsymbol{h}}{d\boldsymbol{x}} = k(\frac{l}{||\boldsymbol{x}||} - 1)\boldsymbol{I} - kl||\boldsymbol{x}||^{-3}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T.$$

进一步地，有

$$\frac{\partial\ \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}_1} = \frac{\partial\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)}{\partial \boldsymbol{x}_1} = k(\frac{l}{||\boldsymbol{r}||} - 1)\boldsymbol{I} - kl||\boldsymbol{r}||^{-3}\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T,$$

其中 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$。且

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}_2} = -\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}_1}, \frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{x}_1} = -\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}_1}, \frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{x}_2} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}_1},$$

对所有弹簧求导并组装即可求得力的导数（组装为稀疏矩阵，矩阵为对称阵）。

2.2 加速方案

在隐式欧拉方法中，保守力可以表达为势能的梯度：

$$\boldsymbol{f}_{int}(x) = -\nabla E(\boldsymbol{x})$$

因而求解隐式欧拉方程等价于求解如下最小化问题：

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \min_{x} \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^T \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + h^2 E(\boldsymbol{x}).$$

同时，弹簧的弹性势能可以表达如下形式:

$$\frac{1}{2}k(||\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2|| - r)^2 = \frac{1}{2}k \min_{||\boldsymbol{d}||=r} ||\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{d}||^2,$$

最终可以表达成如下形式：

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \min_{x,\boldsymbol{d}\in \boldsymbol{U}} \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{M} + h^2\boldsymbol{L})\boldsymbol{x} - h^2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{J}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{y},$$

其中：

The matrices $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{3m\times 3m}$, $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3m\times 3s}$ are defined as follows:

$$\mathbf{L} = \left(\sum_{i=1}^{s} k_i \mathbf{A}_i \mathbf{A}_i^{\mathsf{T}}\right) \otimes \mathbf{I}_3,\ \mathbf{J} = \left(\sum_{i=1}^{s} k_i \mathbf{A}_i \mathbf{S}_i^{\mathsf{T}}\right) \otimes \mathbf{I}_3$$

where $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^m$ is the incidence vector of i-th spring, i.e., $A_{i,i_1} = 1, A_{i,i_2} = -1$, and zero otherwise. Similarly, $\mathbf{S}_i \in \mathbb{R}^s$ is the i-th spring indicator, i.e., $S_{i,j} = \delta_{i,j}$. The matrix $\mathbf{I}_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ is the identity matrix and $\otimes$ denotes Kronecker product. Note that the matrix $\mathbf{L}$ is nothing but a stiffness-weighted Laplacian of the mass-spring system graph.

可采取 Local/Global 方法进行求解。在 Local step，对每个 d_i，有：

$$\boldsymbol{d}_i = l_i \frac{\boldsymbol{p}_{i_1} - \boldsymbol{p}_{i_2}}{||\boldsymbol{p}_{i_1} - \boldsymbol{p}_{i_2}||}$$

在 Global step，有：

$$(\boldsymbol{M} + h^2\boldsymbol{L})\boldsymbol{x} = h^2\boldsymbol{J}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}.$$

迭代过程中只涉及线性方程组，求解速度较快。

2.3 固定点约束

将所有 n 个质点的坐标列为列向量 $x \in R^{3n}$，将所有 m 个自由质点坐标（无约束坐标）列为列向量 $x_f \in R^{3m}$, 则两者关系：

$$\boldsymbol{x}_f = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{K}^T\boldsymbol{x}_f + \boldsymbol{b},$$

其中 $K \in R^{3m\times 3n}$ 为单位阵删去约束坐标序号对应行所得的稀疏矩阵，b 为与约束位移有关的向量，计算为 $b = x - K^T K x$, 若约束为固定质点则 b 为常量。

由此，问题转化为：

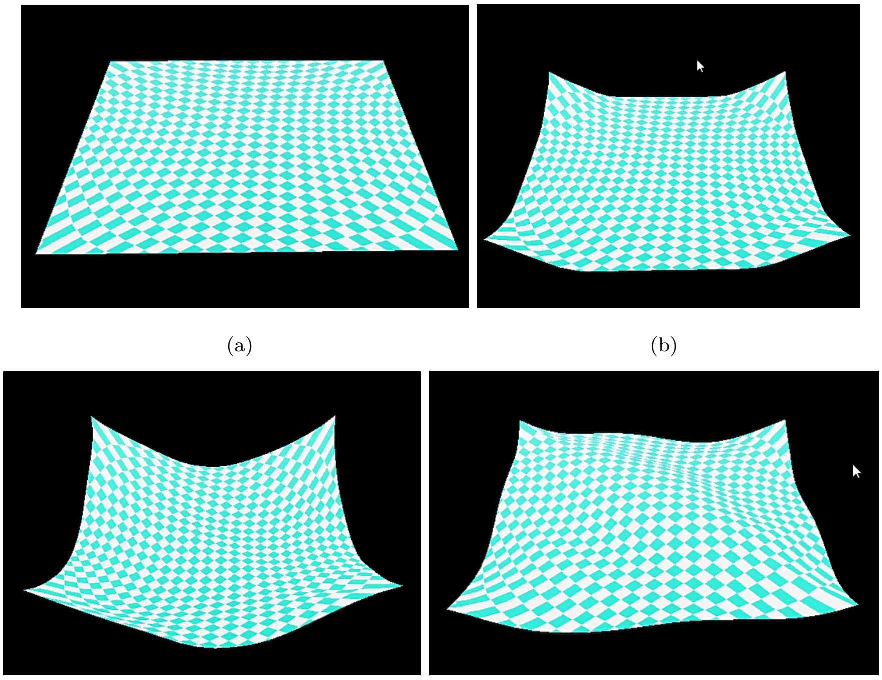
$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_f) &= K(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - h^2\boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{x})) = 0, \\ \nabla_{x_f}\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_f) &= K\nabla_x \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})K^T, \end{aligned} \tag{5}$$

因而 Global Step 转化为求解如下线性方程：

$$K(\boldsymbol{M} + h^2\boldsymbol{L})K^T\boldsymbol{x}_f = K(h^2\boldsymbol{J}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{M} + h^2\boldsymbol{L})\boldsymbol{b}).$$

三 实验结果

由于隐式欧拉方法和加速方案本质都是求解隐式欧拉方程，仿真的结果其实是差不多的。区别在于仿真的速度。这里展示的是加速方法的仿真结果。



(a) (b) (c) (d)

图 1: 仿真结果，四角固定

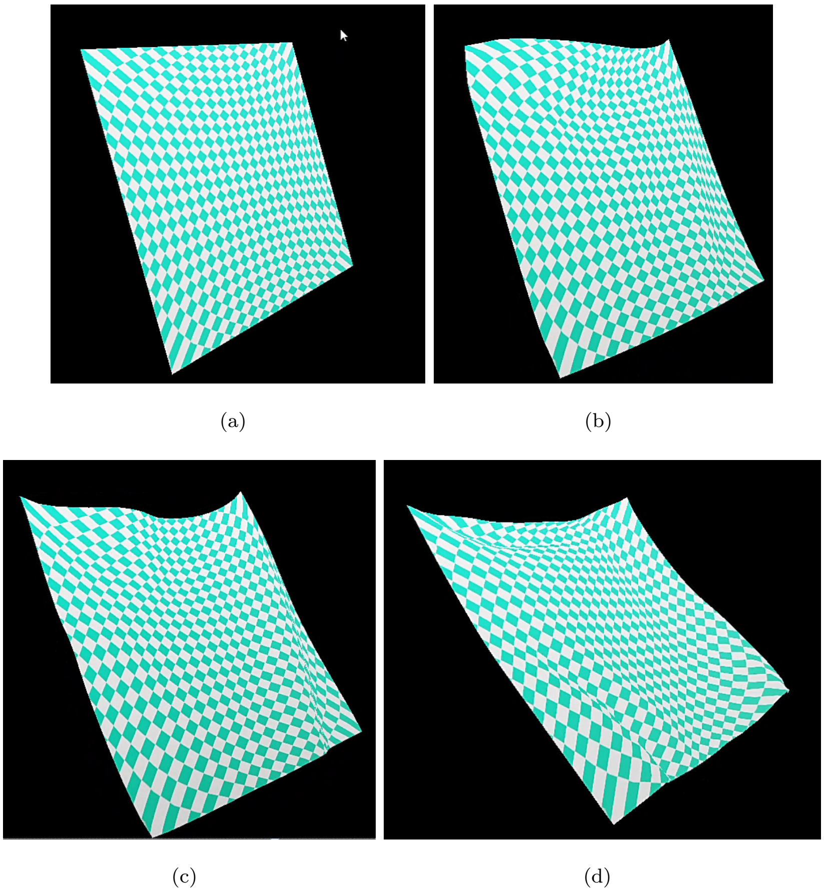


图 2: 仿真结果，两角固定

四 注意事项

- 一开始在写加速方案时，我采取的是在方程中设置固定点的方法，即方程未知数个数实际上大于自由未知数个数，存在固定的未知数。但后来发现，这样的方法在数学和物理上其实并不对。于是根据 document 里面的降维方法进行降维。
- 在设置用户交互上，我一开始是将 Local/Global 方法的系数矩阵直接先求解出来，放在 Init 函数里面。但后来发现，每当加载一个新的 sobj 文件，会调用一次 Init() 函数，但事实上我并不需要每次加载三维物体文件就初始化，这样还有可能造成程序的闪退。因而我新设置了一个按钮，对应加速方案的初始化。
- 隐式欧拉方法实现之后，检查了很多遍确定没错之后，但是仿真的时候还是线条到处走，后来才发现弹簧的精度系数和步长都是非常关键的系数。如果步长太大的化，很可能就无法实现收敛。

五 收获和感悟

第一次接触仿真，非常兴奋。最后得到好看的仿真结果也让人非常开心。隐式欧拉方法和牛顿迭代算法应该算是老熟人了。这次的作业，没有复杂的推导。但实现过程中还是

Debug 了不少时间。写代码确实得是一个细心活、耐心活。稍微不注意，就很容易出错。

有限元这个板块的内容看似很难，但其实核心就弄懂物理模型。但之前在有限元这部分内容接触得非常少，需要不断了解和学习。