

# McKay对应与Du Val奇点

韩增瑞

## 目录

<b>1</b>	<b>前言</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>预备知识</b>	<b>3</b>
2.1	群表示论 . . . . .	3
2.1.1	基本概念 . . . . .	3
2.1.2	主要命题 . . . . .	4
2.2	Dynkin图 . . . . .	5
2.2.1	广义Cartan矩阵 . . . . .	5
2.2.2	Dynkin图 . . . . .	6
2.2.3	主要命题 . . . . .	6
2.3	代数几何 . . . . .	6
2.3.1	基本概念 . . . . .	6
2.3.2	爆破与奇点解消 . . . . .	8
2.3.3	除子与相交数 . . . . .	10
2.4	不变量理论 . . . . .	12
2.4.1	基本概念 . . . . .	12
2.4.2	线性代数群 . . . . .	12
2.4.3	有限反射群 . . . . .	14
<b>3</b>	<b><math>SL(2, \mathbb{C})</math>的有限子群与McKay图</b>	<b>15</b>
3.1	$SL(2, \mathbb{C})$ 有限子群的分类 . . . . .	15
3.2	McKay图 . . . . .	17
3.3	McKay对应 . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Du Val奇点</b>	<b>22</b>
4.1	商簇 $\mathbb{C}^2/G$ 与Du Val奇点 . . . . .	22
4.2	Du Val奇点的解消 . . . . .	24
4.2.1	$A_3$ 及其解消 . . . . .	25
4.2.2	$D_4$ 及其解消 . . . . .	27
	<b>参考文献</b>	<b>32</b>

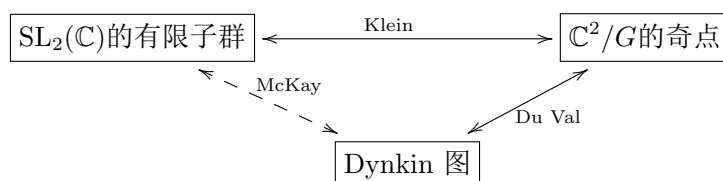
# 1 前言

纵观整个数学发展的历史,我们会发现许多数学成果之所以重要,是因为它们阐述了不同数学领域之间的联系.这些联系使得数学家们能够从一个全新的角度去理解之前的数学对象,从而可以使用更加强有力的工具去解决一些数学问题,而在这之前人们可能对其完全束手无策.McKay对应就是这样的一种联系,它给出了表示论、李理论、代数几何等多个数学领域中的对象之间的对应.

我们首先简要介绍一下McKay对应的内容及历史.设 $G$ 为 $SL_2(\mathbb{C})$ 的有限子群,我们考虑其在 $\mathbb{C}^2$ 及其坐标环 $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ 上的作用.Felix Klein在1884年研究正多面体群时(参考 [Kle56])计算得到了所有情形下的不变量代数 $\mathbb{C}[z_1, z_2]^G$ 的结构,发现它们实际上形如商环 $\mathbb{C}[x, y, z]/(R(x, y, z))$ ,其中 $R(x, y, z)$ 为多项式.这说明 $G$ 在 $\mathbb{C}^2$ 上作用的所有轨道构成的集合与三维复空间 $\mathbb{C}^3$ 中的代数曲面 $R(x, y, z) = 0$ 作为代数簇是同构的,而这些代数曲面均只在原点处有一个奇点.所以,对于 $G$ 在 $\mathbb{C}^2$ 上作用的研究就化归为了对这些代数曲面性质的研究.1934年,Du Val使用代数几何的技术对这些奇点进行解消(参考 [DV34]),他发现解消后得到的例外除子是一些复射影直线的并,而从这些直线的相交性质导出的解消图恰好与李理论中几类不可约根系对应的Dynkin图相同(所以这些奇点也被称为Du Val奇点).到此为止,数学家们建立起了如下数学对象之间的对应:

$$\boxed{SL_2(\mathbb{C})\text{的有限子群}} \xleftrightarrow{\text{Klein}} \boxed{\mathbb{C}^2/G\text{的奇点}} \xleftrightarrow{\text{Du Val}} \boxed{\text{Dynkin 图}}$$

但是在很长一段时间内,人们没有找到一种将 $SL_2(\mathbb{C})$ 的有限子群与Dynkin图直接联系起来的方法.直到1980年,John McKay发现通过将嵌入映射 $G \hookrightarrow SL_2(\mathbb{C})$ 看作 $G$ 的二维复表示,然后考虑与它相关的某些表示的不可约分解所得到的McKay图恰好与某些仿射型Dynkin图相同(参考 [McK80]与 [McK81]).这样的话,我们就得到了:



我们将这一对应关系称为McKay对应.值得一提的是,McKay凭借这一发现获得了2003年的CRM-Fields-PIMS prize.

在本文中,我们首先给出理解经典McKay对应所需要的群表示论、代数几何等预备知识,然后分别从上面提到的两种不同途径得到 $SL_2(\mathbb{C})$ 的有限子群与Dynkin图之间的对应.为了使思路更加明晰、顺畅,我们把证明中需要用到的一些引理与命题放在第二节的预备知识中.

除了以上提到的这些,McKay对应还有许多其他丰富的内涵,它们与代数K-理论、导出范畴等领域有着密切的联系.遗憾的是,这些内容已经超出了本文的范围.同时,为了理解McKay对应出现的深层次原因,我们需要更加深奥的数学知识,这也是本文不会涉及到的.

最后,我要感谢我的指导老师陈小伍教授,他在为期一年的大学生研究计划中给予了我许多帮助与鼓励,与他的交流非常令人愉快,使我受益匪浅.感谢他让我接触McKay对应与Du

Val 奇点这一有趣且富有内涵的课题.

## 2 预备知识

### 2.1 群表示论

在本节中,我们来介绍本文中所需的群表示论知识.为了节省空间,我们略去部分证明.此外,本节中涉及的群表示均为有限群的有限维线性表示.

#### 2.1.1 基本概念

在本小节中我们给出一些基本定义和命题.

**定义2.1.** 设 $G$ 为群, $k$ 为域, $V$ 为 $k$ -向量空间, $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ 为群同态,则我们称 $(V, \rho)$ 为群 $G$ 的一个 $k$ -线性表示.如果 $W$ 为 $V$ 的 $k$ -线性子空间,并且对任意的 $g \in G$ 有 $\rho(g)W \subset W$ (以下将此作用简记为 $gW$ ),那么称 $W$ 为 $V$ 的一个子表示.如果表示 $V$ 没有非平凡的子表示,则称 $V$ 为不可约表示.

**命题2.2.** 设 $G$ 为有限群, $k$ 为域,那么在 $G$ 的有限维 $k$ -表示与非零有限生成 $k[G]$ -模之间存在一一对应,其中 $k[G]$ 为 $G$ 在 $k$ 上的群环.

从已知的表示出发,我们可以通过下面的方式得到新的表示.设 $U, V$ 均为 $G$ 的表示,那么我们在线性空间 $\text{Hom}(U, V)$ 上定义 $G$ 的作用为 $(g\varphi)(u) = g(\varphi(g^{-1}u))$ ,其中 $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ .容易验证在这个作用下 $\text{Hom}(U, V)$ 做成 $G$ 的一个表示.类似地,我们在 $U \otimes V$ 上定义作用 $g(u \otimes v) = (gu) \otimes (gv)$ ,同样可以得到 $G$ 上的一个表示.

**定义2.3.** 设 $U$ 为群 $G$ 的一个 $k$ -表示,那么我们称 $U^* = \text{Hom}(U, k)$ 为 $U$ 的对偶表示.

在群表示理论中,我们有如下定理:

**定理2.4.** (Maschke) 设 $\text{char } k = 0$ ,  $V$ 为 $G$ 的任意 $k$ -表示,那么 $V$ 可以分解成不可约子表示的直和.等价地说,任意非零有限生成 $k[G]$ -模为半单模(即,可以分解为单子模的直和).

利用半单代数的Wedderburn定理我们可以证明如下定理:

**定理2.5.** 设 $G$ 为有限群,那么存在 $G$ 的不可约复表示 $V_1, \dots, V_r$ 使得 $G$ 的任意复表示都可以唯一地写成如下形式:

$$V \cong a_1 V_1 \oplus \dots \oplus a_r V_r, \quad a_i \in \mathbb{N}$$

并且 $V_1, \dots, V_r$ 在同构意义下为 $G$ 的全部不可约复表示.

然后给出特征标的定义.

**定义2.6.** 设 $(V, \rho)$ 为 $G$ 的表示.我们称函数

$$\chi_V: G \rightarrow \mathbb{C}, \quad \chi_V(g) = \text{tr} \rho(g)$$

为表示 $V$ 的特征标.

显然,特征标在群 $G$ 中的一个共轭类中的每个元素处取值相等.除此之外,特征标具有下列性质:

**命题2.7.** 设 $U, V$ 为 $G$ 的两个表示,那么

$$(1)\chi_{U \oplus V} = \chi_U + \chi_V; (2)\chi_{U \otimes V} = \chi_U \chi_V; (3)\chi_{U^*} = \overline{\chi_U}.$$

我们可以定义特征标之间的内积运算:

**定义2.8.** 对于两个特征标 $\chi_i, \chi_j$ ,我们定义

$$(\chi_i, \chi_j) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_j(g)}$$

### 2.1.2 主要命题

在本小节我们将证明如下命题,在本文的第三部分中我们会用它来导出 $SL_2(\mathbb{C})$ 有限子群的McKay图.

**命题2.9.** 设 $\rho$ 是 $G$ 的任意 $d$ 维复表示,并设 $G$ 的所有不可约复表示为 $\rho_1, \dots, \rho_m$ (其中 $\rho_1$ 为平凡表示),它们的特征标分别记为 $\chi$ 和 $\chi_i$ ,维数分别记为 $d_1, \dots, d_m$ .设 $\rho \otimes \rho_i$ 在这些不可约表示下的直和分解为 $\rho \otimes \rho_i = \sum_{j=1}^m n_{ij} \rho_j$ ,并定义矩阵 $C = (c_{ij}) = (d\delta_{ij} - n_{ij})$ .那么我们有以下结论:

(1)列向量 $(\chi_j(x))$ 是矩阵 $C$ 的一个特征向量,其对应的特征值为 $d - \chi(x)$ .

(2)记 $\rho$ 的对偶表示为 $\rho^*$ ,设 $\rho^* \otimes \rho_i$ 的直和分解为 $\rho^* \otimes \rho_i = \sum_{j=1}^m n_{i\bar{j}} \rho_j$ ,那么有 $n_{ij} = n_{\bar{j}\bar{i}}$ .

(3) $dd_i = \sum_{j=1}^m n_{ij} d_j$ .

(4) $dd_i = \sum_{j=1}^m n_{ji} d_j$ .

(5) $\rho \cong \rho^*$ 当且仅当对任意的 $i, j$ 有 $n_{ij} = n_{ji}$ .

*Proof.*

(1)由 $\rho \otimes \rho_i = \sum_{j=1}^m n_{ij} \rho_j$ 知 $\chi \chi_i = \sum_{j=1}^m n_{ij} \chi_j$ ,注意到 $C = dI - (n_{ij})$ 以及

$$(n_{ij})(\chi_j(x)) = (\sum_{j=1}^m n_{ij} \chi_j(x)) = (\chi(x) \chi_i(x)) = \chi(x)(\chi_i(x))$$

所以

$$C(\chi_j(x)) = dI(\chi_j(x)) - (n_{ij})(\chi_j(x)) = (d - \chi(x))(\chi_j(x))$$

(2)注意到

$$\begin{aligned} n_{ij} &= (\chi \chi_i, \chi_j) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi(x) \chi_i(x) \overline{\chi_j(x)} \\ n_{i\bar{j}} &= (\overline{\chi} \chi_j, \chi_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi(x)} \chi_j(x) \overline{\chi_i(x)} \end{aligned}$$

所以 $\overline{n_{ij}} = n_{\bar{j}\bar{i}}$ ,再由 $n_{ij}, n_{\bar{j}\bar{i}} \in \mathbb{Z}$ 即得.

(3)在 $\chi \chi_i = \sum n_{ij} \chi_j$ 中取 $x = 1$ 即得.

(4)因为 $\rho_i$ 为有限维表示,所以 $\dim \rho_i = \dim \rho_i^*$ ,即 $d_i = d_{\bar{i}}$ ,所以由(3)可知

$$dd_i = dd_{\bar{i}} = \sum n_{\bar{i}j} d_j = \sum n_{j\bar{i}} d_j = \sum n_{ji} d_j$$

(5)必要性显然.充分性由

$$\rho \cong \rho \otimes \rho_1 = \sum n_{1j} \rho_j = \sum n_{j1} \rho_j = \sum n_{1\bar{j}} \rho_j = \rho^* \otimes \rho_1 \cong \rho^*$$

即得.

□

## 2.2 Dynkin图

在本节中,我们介绍本文中需要的Dynkin图的相关知识.为了方便,对于一个 $n$ 维列向量 $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ,我们用 $v \geq 0$ 表示对任意 $i = 1, 2, \dots, n$ 有 $v_i \geq 0$ ,并类似地定义 $v > 0$ .本节的内容我们主要参考了 [CC05].

### 2.2.1 广义Cartan矩阵

**定义2.10.** 一个矩阵 $A = (A_{ij})$ 称为**广义Cartan矩阵**,如果它满足以下条件:

- (1)对所有 $i$ 有 $A_{ii} = 2$ ;
- (2)对于所有 $i \neq j$ 有 $A_{ij} \in \mathbb{Z}$ ,且 $A_{ij} \leq 0$ .
- (3) $A_{ij} = 0$ 当且仅当 $A_{ji} = 0$ .

注意到,如果 $A = (A_{ij})$ 为广义Cartan矩阵,那么它的一个主子式 $A_J = (A_{ij}), i, j \in J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ 也是一个广义Cartan矩阵.

**定义2.11.**

(1)两个广义Cartan矩阵 $A, A'$ 称为**等价的**,如果它们的大小相同,而且存在 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的一个置换 $\sigma$ 使得 $A'_{ij} = A_{\sigma(i)\sigma(j)}$ ,对所有的 $i, j$ .

(2)广义Cartan矩阵 $A$ 称为**可分解的**,如果它等价于准对角阵 $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ ,其中 $A_1, A_2$ 均为广义Cartan矩阵.反之,则称 $A$ 为**不可分解的**.

**定义2.12.**

(1)广义Cartan矩阵 $A$ 称为**有限型的**,如果它满足:

(i) $\det A \neq 0$ ; (ii)存在向量 $u > 0$ 使得 $Au > 0$ ; (iii) $Au \geq 0$ 蕴含 $u > 0$ 或 $u = 0$ .

(2)广义Cartan矩阵 $A$ 称为**仿射型的**,如果它满足:

(i) $\text{corank } A = 1$ ; (ii)存在向量 $u > 0$ 使得 $Au = 0$ ; (iii) $Au \geq 0$ 蕴含 $Au = 0$ .

(3)广义Cartan矩阵 $A$ 称为**不定型的**,如果它满足:

(i)存在向量 $u > 0$ 使得 $Au < 0$ ; (ii) $Au \geq 0$ 和 $u \geq 0$ 蕴含 $u = 0$ .

实际上,任意广义Cartan矩阵必属于以上三种其一:

**命题2.13.** 一个广义Cartan矩阵必定属于有限型,仿射型,不定型其中之一.

*Proof.* 参考 [CC05]的定理15.1.

□

### 2.2.2 Dynkin图

在本小节中,我们为每一个广义Cartan矩阵定义一个图,即该矩阵对应的Dynkin图.

**定义2.14.** 设 $A$ 为 $n \times n$ 广义Cartan矩阵.我们设 $\Delta(A)$ 为一个图,其中的顶点分别标记为 $1, 2, \dots, n$ . 设 $i, j$ 为 $\Delta(A)$ 中的不同顶点,我们在这两个顶点之间连 $A_{ij}A_{ji}$ 条边.这样得到的图 $\Delta(A)$ 称为广义Cartan矩阵 $A$ 对应的**Dynkin图**.进一步地,如果 $A$ 为有限型广义Cartan矩阵,那么称 $\Delta(A)$ 为**有限型Dynkin图**.类似定义**仿射型Dynkin图**和**不定型Dynkin图**.

有限型Dynkin图和仿射型Dynkin图的完全分类可以在 [CC05]的附录中找到,为了节省空间在此略去.

### 2.2.3 主要命题

本小节中的两个命题将在本文的第三部分中用来对 $SL_2(\mathbb{C})$ 有限子群的McKay图进行分类.

**命题2.15.** 设 $A$ 为广义Cartan矩阵.那么 $A$ 是不可分解的当且仅当 $A$ 对应的Dynkin图是连通图.

*Proof.* 显然. □

**命题2.16.** 设 $A$ 为不可分解的仿射型广义Cartan矩阵, $A_J$ 为 $A$ 的一个真主子式.如果 $A_J$ 作为广义Cartan矩阵是不可分解的,那么 $A_J$ 一定是有限型的Cartan矩阵.从Dynkin图的角度,也就是说,仿射型Dynkin图的真连通子图一定是有限型Dynkin图.

*Proof.* 参考 [CC05]的引理15.13(ii). □

## 2.3 代数几何

在本节中,我们介绍本文中需要的代数几何知识.在本节中, $k$ 是一个特征零代数闭域.本节中的内容我们主要参考了 [Har13]与 [SR94].

### 2.3.1 基本概念

首先是一些基本概念.

**定义2.17.** 我们记 $\mathbb{A}_k^n = k^n$  (或简记为 $\mathbb{A}^n$ ),称之为 $k$ 上的**仿射 $n$ -空间**.记 $A = k[x_1, \dots, x_n]$ ,称之为 $\mathbb{A}^n$ 上的**坐标环**,其分式域称为 $\mathbb{A}^n$ 上的**有理函数域**.

现在我们设 $I \subset A$ 为理想, $V \subset \mathbb{A}^n$ 为子集,定义如下记号:

$$Z(I) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0, \forall f \in I\}, \quad I(V) = \{f \in k[\mathbb{A}^n] \mid f(p) = 0, \forall p \in V\}$$

**定义2.18.**  $\mathbb{A}^n$ 的子集 $Y$ 称为**代数集**,如果存在理想 $I \subset A$ 使得 $Y = Z(I)$ .

容易证明,两个代数集的并仍为代数集,任意多个代数集的交仍为代数集,所以我们可以通过定义 $\mathbb{A}^n$ 上的开集为代数集的补集来定义 $\mathbb{A}^n$ 上的一个拓扑,称之为**Zariski拓扑**.

**定义2.19.**  $\mathbb{A}^n$ 赋予了Zariski拓扑后,其中的不可约闭子集称为**仿射代数簇**,简称**仿射簇**.仿射簇的开子集称为**拟仿射簇**.

我们有如下著名的Hilbert零点定理及其推论:

**定理2.20.** (Hilbert's Nullstellensatz) 设 $k$ 为代数闭域, $I \subset A = k[x_1, \dots, x_n]$ 为理想.那么 $I(Z(I)) = \sqrt{I}$ .

**推论2.21.** 在 $\mathbb{A}^n$ 中的代数集与 $A$ 中的根式理想之间存在一一对应.特别地, $Y \subset \mathbb{A}^n$ 是不可约的当且仅当它对应的根式理想为素理想.

现在设 $Y \subset \mathbb{A}^n$ 为仿射代数集,我们定义 $Y$ 的**仿射坐标环**为 $k[Y] = A/I(Y)$ ,所以由上面的推论可知 $Y$ 为仿射簇当且仅当其坐标环为整环.此时我们可以作 $k[Y]$ 的分式域 $k(Y)$ ,称之为 $Y$ 上的**有理函数域**.

现在我们来介绍射影簇,首先给出射影空间的定义.

**定义2.22.** 我们用 $\mathbb{P}^n$ 表示 $\mathbb{A}^{n+1}$ 中全体一维子空间构成的集合,称之为 $k$ 上的**射影 $n$ -空间**.

记 $S = k[x_0, \dots, x_n]$ ,称 $S$ 的由齐次多项式生成的理想为**齐次理想**.容易看到,对于齐次理想 $I$ ,我们可以在 $\mathbb{P}^n$ 中定义它的零点集 $Z(I)$ .与仿射空间类似,我们可以在射影空间中定义射影代数集,Zariski拓扑,射影簇,拟射影簇等概念.

**命题2.23.** 我们记 $U_i = \{(a_0, \dots, a_n) | a_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$ ,定义映射 $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n, (a_0, \dots, a_n) \mapsto (\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i})$ ,则 $\varphi_i$ 为 $U_i$ 与 $\mathbb{A}^n$ 之间的同胚.

**推论2.24.** 设 $Y \subset \mathbb{P}^n$ 为(拟)射影簇,那么 $Y$ 可以被 $n+1$ 个开集 $Y \cap U_i$ 覆盖,每个 $Y \cap U_i$ 都是(拟)仿射簇.

然后给出拟仿射簇与拟射影簇上的正则函数的概念.

**定义2.25.** 设 $Y \subset \mathbb{A}^n$ 为拟仿射簇.称函数 $f : Y \rightarrow k$ 在点 $P \in Y$ 处**正则**,如果存在开集 $U \subset Y$ 使得 $P \in U$ 以及多项式 $g, h \in A = k[x_1, \dots, x_n]$ 使得 $h$ 在 $U$ 上处处不为0,且在 $U$ 上有 $f = \frac{g}{h}$ .如果 $f$ 在 $Y$ 中的每点处均正则,那么称 $f$ 在 $Y$ 上**正则**.

**定义2.26.** 设 $Y \subset \mathbb{P}^n$ 为拟射影簇.称函数 $f : Y \rightarrow k$ 在点 $P \in Y$ 处**正则**,如果存在开集 $U \subset Y$ 使得 $P \in U$ 以及次数相同的齐次多项式 $g, h \in S = k[x_0, \dots, x_n]$ 使得 $h$ 在 $U$ 上处处不为0,且在 $U$ 上有 $f = \frac{g}{h}$ .如果 $f$ 在 $Y$ 中的每点处均正则,那么称 $f$ 在 $Y$ 上**正则**.

**定义2.27.** 设 $Y$ 为簇.我们用 $\mathcal{O}(Y)$ 表示 $Y$ 上全体正则函数构成的环.设 $P$ 为 $Y$ 中一点,我们定义 $Y$ 在 $P$ 处的**局部环**为 $P$ 附近的正则函数芽构成的环,记作 $\mathcal{O}_{P,Y}$ ,或 $\mathcal{O}_P$ .

事实上, $\mathcal{O}_P$ 为局部环,其极大理想为在 $P$ 处消灭的正则函数芽构成的集合 $\mathfrak{m}_P$ .显然,我们有 $\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P \cong k$ .

可以证明,在 $Y$ 为仿射簇的情形中, $\mathcal{O}(Y)$ 就是我们之前定义的坐标环.在 $Y$ 为射影簇时, $\mathcal{O}(Y) = k$ (换句话说,射影簇上没有非平凡的正则函数).

现在我们将 $k$ 上的任何(拟)仿射簇,(拟)射影簇统称为**簇**.

**定义2.28.** 设 $X, Y$ 为簇, 其中 $Y \subset \mathbb{P}^m$ , 我们称映射 $\varphi: X \rightarrow Y$ 为**正则映射**, 如果 $f$ 连续且对任何开集 $V \subset Y$ 和任何正则函数 $f: V \rightarrow k$ , 函数 $f \circ \varphi: \varphi^{-1}(V) \rightarrow k$ 正则. 此时, 如果存在正则映射 $\psi$ 使得 $\psi$ 与 $\varphi$ 互为逆映射, 则称 $\varphi$ 为**同构**.

我们已经看到, 对于一般的簇 $Y$ 而言,  $Y$ 上面的正则函数可能非常少(例如在 $Y$ 为射影簇时,  $Y$ 上没有非平凡的正则函数). 所以我们有必要将正则函数的概念加以推广.

**定义2.29.** 设 $Y$ 为簇, 我们如下定义 $Y$ 的**函数域** $k(Y)$ :  $k(Y)$ 中的元素是有序对 $(U, f)$ 的一个等价类, 其中 $U$ 为 $Y$ 中的非空开子集,  $f$ 为 $U$ 上的正则函数, 等价关系定义为 $(U, f)$ 与 $(V, g)$ 等价当且仅当在 $U \cap V$ 上有 $f = g$ 成立.  $k(Y)$ 中的元素称为 $Y$ 上的**有理函数**.

由这个定义可以看出, 有理函数实际上可以看成只在 $Y$ 的一个开子集上正则的函数. 类似地, 我们可以定义簇 $X$ 与 $Y$ 之间的**有理映射**, 即只在 $X$ 中的一个开子集上正则的映射.

**定义2.30.** 设 $X$ 为簇. 我们定义 $X$ 的函数域 $k(X)$ 在 $k$ 上的超越维数为簇 $X$ 的**维数**. 如果 $Y \subset X$ 为 $X$ 的闭子簇, 那么称 $\dim X - \dim Y$ 为 $Y$ 在 $X$ 中的**余维数**.

**定义2.31.** 设 $f: X \rightarrow Y$ 为有理映射. 如果 $f$ 存在逆映射且逆映射也为有理映射, 则称 $f$ 为一个**双有理映射**, 并称 $X$ 与 $Y$ 是**双有理等价的**.

### 2.3.2 爆破与奇点解消

本小节中我们将给出双有理映射的一个重要例子—爆破.

我们用 $x_1, \dots, x_n$ 表示 $\mathbb{A}^n$ 上的坐标, 用 $y_1, \dots, y_n$ 表示 $\mathbb{P}^{n-1}$ 上的齐次坐标. 我们用 $X$ 表示 $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ 中的由方程组 $\{x_i y_j = x_j y_i \mid i, j = 1, \dots, n\}$ 定义的闭子集, 称之为 $\mathbb{A}^n$ 在**原点 $O$ 处的爆破**. 那么我们自然有:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \\ & \searrow \varphi & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{A}^n \end{array}$$

其中 $\iota$ 为嵌入映射,  $\pi$ 为自然投射,  $\varphi$ 为二者的复合.

现在, 设 $Y$ 为 $\mathbb{A}^n$ 中过点 $O$ 的仿射簇, 我们定义 $Y$ 在点 $O$ 处的**爆破**为 $\tilde{Y} = \overline{\varphi^{-1}(Y - O)}$ , 并同样用 $\varphi: \tilde{Y} \rightarrow Y$ 表示上面定义的映射 $\varphi$ 在 $\tilde{Y}$ 上的限制. 此外, 通过仿射坐标变换, 我们可以定义仿射簇在任意一点处的爆破. 称集合 $\varphi^{-1}(O)$ 为 $\varphi: \tilde{Y} \rightarrow Y$ 的**例外除子**.

可以证明, 爆破具有如下性质:

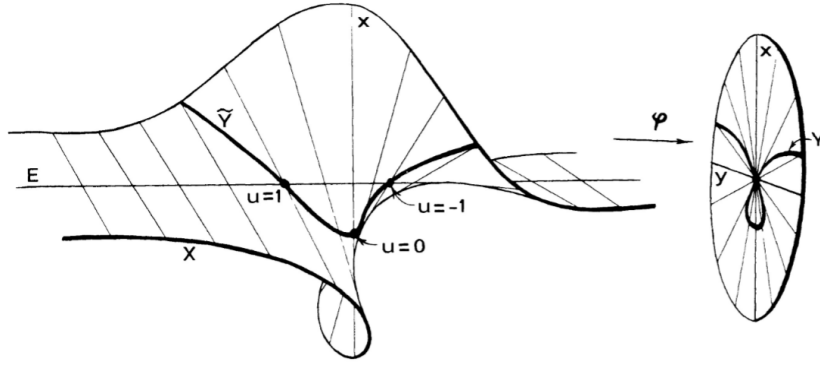
**命题2.32.** 设 $Y$ 为仿射簇,  $\varphi: \tilde{Y} \rightarrow Y$ 为 $Y$ 在点 $O$ 处的爆破. 那么 $\varphi$ 为双有理映射, 且其在开子集 $\tilde{Y} - \varphi^{-1}(O)$ 上的限制 $\varphi: \tilde{Y} - \varphi^{-1}(O) \rightarrow Y - O$ 为同构.

现在我们来用一个例子来说明这个过程是如何进行的.

**例子2.33.** 我们来看 $X = Z(x^2 + y^2 + z^2 = 0) \subseteq \mathbb{A}^3$ . 它的Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$





所以 $X$ 唯一的奇点是 $O = (0, 0, 0)$ .我们对 $X$ 在 $O$ 处进行爆破,用 $X_1$ 来表示爆破之后得到的代数簇.

我们记 $\widetilde{\mathbb{A}^3} = \{((x, y, z), (u : v : w)) \mid xv = yu, xw = zu, yw = zv\}$ .我们用 $B_1, B_2, B_3$ 来分别表示 $u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0$ 的仿射坐标卡.

第一个坐标卡:在 $B_1$ 中,我们有 $y = xv, z = xw$ .代入 $X$ 的方程,我们可以得到 $X_1 \cap B_1$ 的局部方程为

$$1 + v^2 + w^2 = 0$$

(注意,在这个坐标卡中,局部坐标为 $(x, v, w)$ ).它的Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 2v & 2w \end{pmatrix}$$

但点 $(x, v, w) = (0, 0, 0)$ 不在 $X_1 \cap B_1$ 上,所以 $X_1$ 在坐标卡 $B_1$ 中是非奇异的.

第二个坐标卡:在 $B_2$ 中,我们有 $x = yu, z = yw$ .代入 $X$ 的方程,我们可以得到 $X_1 \cap B_2$ 的局部方程为

$$u^2 + 1 + w^2 = 0$$

(注意,在这个坐标卡中,局部坐标为 $(u, y, w)$ ).它的Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2u & 0 & 2w \end{pmatrix}$$

但点 $(u, y, w) = (0, 0, 0)$ 不在 $X_1 \cap B_2$ 上,所以 $X_1$ 在坐标卡 $B_2$ 中是非奇异的.

第三个坐标卡:在 $B_3$ 中,我们有 $x = zu, y = zv$ .代入 $X$ 的方程,我们可以得到 $X_1 \cap B_3$ 的局部方程为

$$u^2 + v^2 + 1 = 0$$

(注意,在这个坐标卡中,局部坐标为 $(u, v, z)$ ).它的Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2u & 2v & 0 \end{pmatrix}$$

但点 $(u, v, z) = (0, 0, 0)$ 不在 $X_1 \cap B_3$ 上,所以 $X_1$ 在坐标卡 $B_3$ 中是非奇异的.

所以对 $X$ 在 $O$ 处做一次爆破之后得到的代数簇 $X_1$ 是非奇异的,从而 $\pi : X_1 \rightarrow X$ 就是所要求的解消.

### 2.3.3 除子与相交数

为了方便起见,在本节中涉及到的所有簇都是非奇异的.

**定义2.34.** 设 $X$ 为簇.设 $C_1, \dots, C_r$ 为 $X$ 的余维数为1的闭子簇, $k_1, \dots, k_r$ 为整数.我们称形式和

$$D = k_1 C_1 + \dots + k_r C_r$$

为 $X$ 上的一个除子.如果所有的 $k_i = 0$ ,我们记 $D = 0$ .如果所有的 $k_i \leq 0$ 且不全为零,则称 $D$ 为有效的(*effective*),记作 $D > 0$ .如果在 $k_i$ 中有一个为1,其余全部为0,则称 $D$ 为素除子.如果所有的 $k_i$ 均不为0,我们称簇 $C_1 \cup \dots \cup C_r$ 为 $D$ 的支集,记作 $\text{Supp} D$ .

我们可以通过显然的方式定义除子之间的加法,从而 $X$ 上的所有除子构成一个自由阿贝尔群,其生成元为 $X$ 上的全体余维数为1的子簇.记这个群为 $\text{Div} X$ .

我们现在来对每一个非零函数 $f \in k(X)$ 定义一个除子 $\text{div} f$ .为此,我们不加证明地引用下列结果:

**命题2.35.** 设 $X$ 为非奇异簇, $Y$ 为 $X$ 的余维数1的子簇.那么 $X$ 中每一点处都存在一个邻域 $U$ ,使得 $Y$ 在 $U$ 中有局部方程 $\pi = 0$ .

*Proof.* 参考 [SR94]的定理2.10. □

现在设 $D$ 为 $X$ 中的一个素除子,由命题2.38可知存在仿射邻域 $U$ 使得在 $k[U]$ 中有 $I(D) = (\pi)$ .容易证明对任意的 $0 \neq f \in k[U]$ ,存在整数 $k \geq 0$ 使得 $f \in (\pi^k)$ 但 $f \notin (\pi^{k+1})$ .我们记这个数 $k$ 为 $v_D(f)$ .容易看出它具有如下性质:

$$v_D(f_1 f_2) = v_D(f_1) + v_D(f_2), \text{ 以及 } v_D(f_1 + f_2) \geq \min\{v_D(f_1), v_D(f_2)\}, \text{ 如果 } f_1 + f_2 \neq 0$$

现在设 $f \in k(X)$ ,那么存在 $g, h \in k[U]$ 使得在 $U$ 中有 $f = \frac{g}{h}$ .我们定义 $v_D(f) = v_D(g) - v_D(h)$ .可以证明, $v_D(f)$ 的定义不依赖于邻域 $U$ 的选取,并且对于一个给定的 $f \in k(X)$ ,只有有限个素除子 $D$ 使得 $v_D(f) \neq 0$ ,证明可以参考 [SR94].

所以现在我们可以对 $f \in k(X)$ 定义其对应的除子为

$$\text{div} f = \sum_{D \text{ 为素除子}} v_D(f) D$$

**定义2.36.** 设 $D$ 为除子.如果存在 $f \in k(X)$ 使得 $D = \text{div} f$ ,那么称 $D$ 为主除子. $X$ 上全体主除子构成的 $\text{Div}(X)$ 的子群记作 $P(X)$ ,并称商群 $\text{Div}(X)/P(X)$ 为 $X$ 的除子类群,记作 $\text{Cl}(X)$ ,其中的陪集称为除子类.落在同一个除子类中的除子 $D_1, D_2$ 称为线性等价的,记作 $D_1 \sim D_2$ .

下面我们来定义除子之间的相交数.

**定义2.37.** 设 $D_1, \dots, D_n$ 为 $X$ 上的除子.如果对任意的 $x \in \bigcap \text{Supp}(D_i)$ ,都存在 $x$ 的邻域 $U$ 使得 $\bigcap \text{Supp}(D_i) \cap U = \{x\}$ ,那么称 $D_1, \dots, D_n$ 在 $x$ 处处于一般位置.

**定义2.38.** 设 $D_1, \dots, D_n$ 为 $X$ 上的有效除子且在点 $x$ 处处于一般位置,并且在 $x$ 的某个邻域内有局部方程 $f_1, \dots, f_n$ ,那么我们称

$$(D_1 D_2 \cdots D_n)_x = \dim_k(\mathcal{O}_x / (f_1, \dots, f_n))$$

为  $D_1, \dots, D_n$  在  $x$  处的局部相交数.

可以证明,  $(D_1 D_2 \cdots D_n)_x$  与局部方程  $f_1, \dots, f_n$  的选取无关, 可参考 [SR94].

现在设  $D_1, \dots, D_n$  为  $X$  上的在点  $x$  处处于一般位置的除子, 我们将每个除子  $D_i$  写成两个有效除子之差  $D_i = D'_i - D''_i$ , 然后定义它们的局部相交数为

$$\begin{aligned} (D_1 D_2 \cdots D_n)_x &= \left( \prod_{i=1}^n (D'_i - D''_i) \right)_x \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} (D'_{i_1} \cdots D'_{i_k} D''_{i_{k+1}} \cdots D''_{i_n})_x \end{aligned}$$

**定义2.39.** 设  $D_1, \dots, D_n$  为  $X$  上的处于一般位置的除子, 我们称

$$D_1 \cdots D_n = \sum_{x \in \bigcap \text{Supp } D_i} (D_1 \cdots D_n)_x$$

为它们的相交数.

下面这个命题说明, 线性等价不会对相交数产生影响:

**命题2.40.** 设  $X$  为非奇异簇,  $D_1, \dots, D_n, D'_n$  为  $X$  上的除子, 且满足:

(1)  $D_1, \dots, D_{n-1}, D_n$  和  $D_1, \dots, D_{n-1}, D'_n$  均处于一般位置; (2)  $D_n$  与  $D'_n$  线性等价;

那么我们有

$$D_1 \cdots D_{n-1} D_n = D_1 \cdots D_{n-1} D'_n$$

*Proof.* 参考 [SR94] 的定理4.2. □

事实上, 这个命题告诉我们, 相交数实际上可以视作从  $\text{Cl}(X) \times \text{Cl}(X)$  到  $\mathbb{Z}$  的映射. 为了给出相交数的一般定义, 我们给出如下命题:

**命题2.41.** 设  $D_1, \dots, D_n$  为  $X$  上的除子. 那么存在  $n$  个除子  $D'_1, \dots, D'_n$  使得  $D_i \sim D'_i$ , 并且  $D'_1, \dots, D'_n$  处于一般位置.

*Proof.* 参考 [SR94] 的引理4.5. □

现在我们可以去掉相交数定义中的处于一般位置的条件. 下面我们给出几个具体的计算例子.

**例子2.42.** 取  $X = \mathbb{C}^2$ ,  $D_1 = (x^2 - y = 0)$ ,  $D_2 = (y = 0)$ . 那么容易看出  $\text{Supp } D_1 \cap \text{Supp } D_2 = \{(0, 0)\}$ . 注意到

$$\mathcal{O}_{(0,0)} / (x^2 - y, y) = \mathbb{C}[x, y] / (x^2 - y, y) = (1, x)$$

所以我们有

$$D_1 D_2 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{(0,0)} / (x^2 - y, y) = \dim_{\mathbb{C}} (1, x) = 2$$

如果我们取 $D_2 = (x^4 = 0)$ ,那么

$$\mathcal{O}_{(0,0)}/(x^2 - y, x^4) = \mathbb{C}[x, y]/(x^2 - y, x^4) = (1, x, y, xy)$$

所以我们有

$$D_1 D_2 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{(0,0)}/(x^2 - y, x^4) = \dim_{\mathbb{C}} (1, x, y, xy) = 4$$

这两个例子与我们直观上对相交数的定义是相符合的.但是命题2.43,2.44告诉我们相交数的内涵远比这要丰富.我们甚至可以考虑一个除子 $D$ 与它自身的相交数(称为 $D$ 的自相交数).我们来看下面这个例子.

**例子2.43.** 我们设 $X = \mathbb{C}^2$ ,并用 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ 表示 $X$ 在原点处的爆破.我们用 $L = \pi^{-1}(O)$ 表示这个爆破的例外曲线.在2.3节中已经看到 $L \cong \mathbb{CP}^1$ .我们考虑 $X$ 上的有理函数 $f = \frac{y}{x}$ ,并考虑其在爆破 $\pi$ 下的拉回(同样记为 $f$ ).我们分别用 $H_1, H_2$ 表示 $X$ 中的超平面( $x = 0$ )与( $y = 0$ )在 $\pi$ 下的拉回.那么容易看到

$$\operatorname{div} f = L + H_2 - H_1$$

亦即 $L \sim H_1 - H_2$ .显然 $L$ 与 $H_1$ 不相交,所以它们的相交数为0.简单的计算可以得到 $L$ 与 $H_2$ 的相交数为1,所以我们得到 $L$ 的自相交数

$$L \cdot L = L(H_1 - H_2) = -1$$

上面这个例子说明相交数并不一定总是非负整数.我们在第四节中还会看到这样的例子.

## 2.4 不变量理论

### 2.4.1 基本概念

我们首先考虑一般线性群 $\operatorname{GL}_n(k)$ 中的元素在坐标环 $k[x_1, \dots, x_n]$ 上的作用.

设 $g \in \operatorname{GL}_n(k)$ ,  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ ,定义

$$(gf)(v) = f(g^{-1}v)$$

**定义2.44.** 设 $G$ 为 $\operatorname{GL}_n(k)$ 的子群,称 $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ 为 $G$ -不变的,如果 $f$ 在 $G$ 中任意元素的作用下不变.全体 $G$ -不变多项式构成 $k[x_1, \dots, x_n]$ 的一个子代数 $k[x_1, \dots, x_n]^G$ ,称之为 $G$ 的不变量代数.

在不变量理论中,我们主要研究不变量代数的性质.

### 2.4.2 线性代数群

我们考虑一般线性群 $\operatorname{GL}_n(k)$ .由定义,它可以看成 $\mathbb{A}^{n^2} = k^{n^2}$ 中的一个Zariski开集(因为它的补集是方程 $\det x = 0$ 的解集).所以它是 $\mathbb{A}^{n^2}$ 的一个开子簇,我们可以通过把它嵌入到 $\mathbb{A}^{n^2+1}$ 中做成一个仿射簇.

**定义2.45.**  $\text{GL}_n(k)$ 的闭子群称为**线性代数群**.

现在借助下面两个命题,我们可以将对任意群 $G$ 的不变量代数的研究化归为对线性代数群的不变量代数的研究:

**命题2.46.** 设 $G$ 为 $\text{GL}_n(k)$ 的子群,那么它的闭包 $\overline{G}$ 也是一个群.

**命题2.47.** 设 $G$ 为 $\text{GL}_n(k)$ 的子群,那么 $k[x_1, \dots, x_n]^G = k[x_1, \dots, x_n]^{\overline{G}}$

下面我们定义线性代数群的有理表示.注意,与第2.1节中不同,这里的群不一定是有限群.

**定义2.48.** 设 $G \subset \text{GL}_n(k)$ 为线性代数群, $\rho: G \rightarrow \text{GL}(W)$ 为 $G$ 的线性表示.如果 $\rho$ 同时是仿射簇之间的正则映射,那么称 $\rho$ 为 $G$ 的一个**有理表示**.

从这个角度来看,线性代数群实际上就是赋予了仿射簇结构的线性群.

**例子2.49.** 设 $G = \text{SL}_2(k)$ .我们定义 $G$ 在坐标环 $R = k[x, y]$ 上的作用为

$$\rho \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} (x) = ax + by,$$

$$\rho \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} (y) = cx + dy$$

然后设 $R_d \subset R$ 为全体 $d$ 次齐次多项式构成的 $d+1$ 维线性空间,那么显然 $R_d$ 在 $\rho(g)$ 的作用下不变,从而得到了 $G$ 在 $R_d$ 上的一个表示.这是一个有理表示.

下面,我们来考虑在什么情况下群 $G$ 的不变量代数 $k[x_1, \dots, x_n]^G$ 是有限生成的.换句话说,存在不变量 $f_1, \dots, f_s$ 使得

$$k[x_1, \dots, x_n]^G = k[f_1, \dots, f_s]$$

为了方便起见,以下设 $k$ 的特征为0.

**定义2.50.** 设 $G$ 为 $\text{GL}_n(k)$ 的任意子群, $\rho: G \rightarrow \text{GL}(W)$ 为 $G$ 的任意表示.我们称 $\rho$ 为**半单的**,如果 $\rho$ 可以分解为不可约子表示的直和.

**定义2.51.** 设 $G \subset \text{GL}_n(k)$ 为线性代数群,如果 $G$ 的任意有理表示均为半单表示,那么称 $G$ 为**线性约化群**.

我们有如下命题:

**命题2.52.**  $\text{GL}_n(k)$ 的任意有限子群都是线性约化群.

我们下面给出一个一般性的结果:

**定理2.53.** 设 $G \subset \text{GL}_n(k)$ 为线性约化的线性代数群,那么不变量代数 $k[x_1, \dots, x_n]^G$ 是有限生成的.

### 2.4.3 有限反射群

在本小节中我们来研究有限反射群的不变量与半不变量.

**引理2.54.** 设  $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  为有限子群. 那么存在  $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  使得  $aGa^{-1} \subseteq \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ .

*Proof.* 参考 [Spr06]. □

**定义2.55.** 称  $g \in G$  为**反射**, 如果它有  $n-1$  个特征值等于 1, 且  $g$  可对角化.

设  $s \in G$  为反射, 那么  $V$  中被  $s$  固定的全体元素构成一个超平面  $H_s$ . 显然, 以  $H_s$  为零点集的线性函数  $l_s$  在相差一个常数因子的意义下唯一. 用  $\epsilon_s$  表示  $s$  的异于 1 的特征值.

**定义2.56.** 称  $G$  为**反射群**, 如果它可以被它所包含的反射生成.

有限反射群的不变量理论的主要结果都包含在下面的定理中:

**定理2.57.** 设  $G$  为有限群, 那么下列命题等价:

- (1)  $G$  为有限反射群;
- (2)  $S$  是  $S^G$  上的自由分次模, 且具有一组有限基;
- (3)  $S^G$  可以由  $n$  个代数无关的齐次多项式生成.

*Proof.* 参考 [Spr06]. □

**推论2.58.** 设  $G$  为反射群,  $S^G = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$ , 其中  $f_i$  为  $d_i$  次齐次多项式. 那么  $d_i$  在不计次序的意义下由  $G$  唯一决定.  $G$  的阶等于  $\prod_{i=1}^n d_i$ ,  $G$  中的反射个数为  $\sum_{i=1}^n (d_i - 1)$ .

我们给出半不变量的定义.

**定义2.59.** 设  $G$  为  $\mathrm{GL}(V)$  的子群. 那么  $f \in S$  称为  $G$  的一个**半不变量**, 如果存在函数  $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$  使得对任意的  $g \in G$  有  $g \cdot f = \chi(g)f$ .

由这个定义容易看出,  $\chi$  实际上是一个群同态.  $f$  为  $G$  的不变量当且仅当  $\chi = 1$ .

现在设  $G$  为有限反射群, 我们来描述它的半不变量. 我们记

$$\mathcal{H} = \{H_s \mid s \in G \text{ 为反射}\}$$

显然  $g \cdot H_s = H_{gs g^{-1}}$ , 所以  $G$  在  $\mathcal{H}$  上有一个置换作用. 我们用  $\sigma$  表示  $G$  在  $\mathcal{H}$  上的一个轨道, 记

$$f_\sigma = \prod_{H_s \in \sigma} l_s$$

这个多项式在相差一个常数因子的意义下由  $\sigma$  唯一确定. 设  $H$  为  $V$  中的一个超平面, 由引理2.54, 所有使得  $H_s = H$  的反射  $s \in G$  构成一个循环群, 用  $e(H)$  表示它的阶. 此外, 我们定义  $e(\sigma) = e(H)$ , 其中  $H \in \sigma$ . 我们有如下定理:

**定理2.60.**  $f_\sigma$  即为  $G$  的全部半不变量, 且  $G$  的齐次半不变量可以唯一地写成

$$f = \left( \prod_{\sigma} f_\sigma^{a(\sigma)} \right) f_1, \quad 0 \leq a(\sigma) < e(\sigma), \quad f_1 \in S^G$$

*Proof.* 参考 [Spr06]. □

我们将在第4.1节中使用本节中的技术决定  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  的有限子群的不变量代数.

### 3 SL(2, ℂ)的有限子群与McKay图

在本部分,我们给出McKay对应(1)的叙述和证明.McKay的基本想法是对于SL(2, ℂ)的有限子群 $G$ ,考虑其自然嵌入 $\rho: G \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ 作为 $G$ 的复表示的不可约分解式,并由此定义一个图(称为McKay图).他发现这样的图与A,D,E型的仿射Dynkin图存在一一对应关系.

#### 3.1 SL(2, ℂ)有限子群的分类

首先来对SL<sub>2</sub>(ℂ)的有限子群进行分类,为此需要做一些准备工作.

我们定义SL<sub>2</sub>(ℂ)在复射影直线ℂP<sup>1</sup>上的作用为

$$g \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{其中 } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{CP}^1$$

因为 $-1 \cdot z = z$ ,所以这个作用诱导出PSL<sub>2</sub>(ℂ)在ℂP<sup>1</sup>上的作用.

注意到利用球极投影可以将ℂP<sup>1</sup>视作二维球面.我们用 $E$ 表示三维欧氏空间,并用 $(-, -)$ 表示 $E$ 上的通常内积.用 $S$ 表示 $E$ 中的单位球面,然后用 $\pi$ 表示从点 $(0, 0, 1)$ 出发的球极投影,容易写出它的坐标表达式

$$\pi(x) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

如果 $x = (0, 0, 1)$ ,那么我们定义 $\pi(x) = \infty$ .容易看到 $\pi: S \rightarrow \mathbb{CP}^1$ 为双射.

下面我们定义ℂP<sup>1</sup>上的球面距离为

$$\begin{aligned} d(z, z') &= \frac{|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}} \\ d(z, \infty) &= \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} \\ d(\infty, \infty) &= 0 \end{aligned}$$

容易验证这定义了ℂP<sup>1</sup>上的一个距离.

然后我们考虑特殊酉群SU<sub>2</sub>(ℂ).因为它是SL<sub>2</sub>(ℂ)的子群,所以上面的作用诱导出SU<sub>2</sub>(ℂ)与PSU<sub>2</sub>(ℂ)在ℂP<sup>1</sup>上的作用.另一方面,我们分别用SO<sub>3</sub>(ℝ)与O<sub>3</sub>(ℝ)表示 $E$ 上的正交群与特殊正交群,它们在 $S$ 上有一个自然的作用.

#### 引理3.1.

- (1)如果 $t$ 是 $S$ 上的保持 $E$ 中的距离不变的双射,那么 $t$ 可以唯一地延拓为O<sub>3</sub>(ℝ)中的一个元素.
- (2)设 $u \in \text{SU}_2(\mathbb{C})$ ,那么对任意的 $z, z' \in \mathbb{CP}^1$ 有 $d(uz, uz') = d(z, z')$ .
- (3)设 $\varphi$ 为ℂP<sup>1</sup>到自身的双射且满足对任意的 $z, z' \in \mathbb{CP}^1$ 有 $d(\varphi(z), \varphi(z')) = d(z, z')$ ,那么存在唯一的 $u \in \text{PSU}_2(\mathbb{C})$ 使得 $\varphi(z) = uz$ 或者 $\varphi(z) = u\bar{z}$ .

利用这个引理,我们可以证明下面的命题:

**命题3.2.** 存在同构  $\psi : \text{SO}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{PSU}_2(\mathbb{C})$  使得对任意的  $t \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ ,  $x \in S$  有

$$\pi(tx) = \psi(t)(\pi(x))$$

利用这些结论,我们现在可以对  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  的有限子群进行分类了.设  $G$  为  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  的有限子群,并用  $\Lambda$  表示它在  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  中的像.不妨设  $\Lambda \neq \{1\}$ .利用引理3.1,我们不妨设  $\Lambda \subseteq \text{PSU}_2(\mathbb{C})$ .

我们用  $F$  表示  $\mathbb{CP}^1$  中被  $\Lambda$  中某些非平凡元素固定的点构成的集合,那么  $F$  为有限集,且  $\Lambda$  在  $F$  上的作用置换  $F$  中的元素.我们用  $p_1, \dots, p_d$  表示  $\Lambda$  在  $F$  中的各轨道中的代表元,并设

$$\Lambda_i = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda \cdot p_i = p_i\}$$

记  $|\Lambda| = c, |\Lambda_i| = c_i$ .因为  $\Lambda$  中的每个非单位元都固定  $\mathbb{CP}^1$  中的两个不同的点,设  $\Lambda_p = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda \cdot p = p\}$ ,则有

$$2(|\Lambda| - 1) = \sum_{p \in \mathbb{CP}^1} (|\Lambda_p| - 1) = \sum_{p \in F} (|\Lambda_p| - 1)$$

所以有

$$2c - 2 = \sum_{p \in F} |\Lambda_p| - |F| = \sum_{i=1}^d c - \sum_{i=1}^d \frac{c}{c_i}$$

即

$$d + \frac{2}{c} = 2 + \sum_{i=1}^d \frac{1}{c_i}$$

下面来解这个方程.显然  $c_i \geq 2$ ,所以这个方程蕴含  $d + 2/c \leq 2 + d/2$ ,故  $d = 1, 2, 3$ .

(1)  $d = 1$  时,我们有  $2 = c + c/c_1$ ,这蕴含  $c = 1$ ,矛盾.

(2)  $d = 2$  时,我们有  $2 = c(1/c_1 + 1/c_2)$ ,这说明  $\Lambda = \Lambda_1 = \Lambda_2$ ,所以  $\Lambda$  中的所有元素都固定  $p_1, p_2$ .由复分析的基本知识,我们知道对于  $\mathbb{CP}^1$  中的任意三个点  $a_1, a_2, a_3$ ,存在  $t \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$  使得  $ta_1 = 0, ta_2 = \infty, ta_3 = 1$  (即分式线性变换),所以我们不妨设  $p_1 = 0, p_2 = \infty$ .所以  $G$  与  $\Lambda$  均为循环群.

(3)  $d = 3$  时,方程成为

$$1 + \frac{2}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}$$

不妨设  $c_1 \leq c_2 \leq c_3$ .显然  $c_1 = 2$  且  $c_2 \leq 3$ ,所以  $(c, c_1, c_2, c_3)$  的所有可能取值为

$$(2n, 2, 2, n), \text{ 其中 } n \geq 2, \text{ 或 } (12, 2, 3, 3), (24, 2, 3, 4), (60, 2, 3, 5)$$

实际上,这些情况都是可以具体实现的,并且它们分别对应  $\Lambda$  为二面体群,四面体群,八面体群,二十面体群(或  $G$  为双二面体群,双四面体群,双八面体群,双二十面体群).具体的实现过程可以参考 [Spr06] 的第89-94页,因为过于冗长,我们在此略去.



### 3.2 McKay图

在本节中我们来对 $SL_2(\mathbb{C})$ 的每个有限子群构造与之对应的McKay图.

设 $G$ 为 $SL_2(\mathbb{C})$ 的有限子群,设其所有不可约复表示为 $\rho_1, \dots, \rho_m$ ,它们的维数分别为 $d_1, \dots, d_m$ ,特征标分别为 $\chi_1, \dots, \chi_m$ ,并用 $\rho_{nat} : G \hookrightarrow SL_2(\mathbb{C})$ 表示自然嵌入映射.

现在我们将 $\rho_{nat}$ 看作 $G$ 的一个二维复表示,然后来考虑表示 $\rho_{nat} \otimes \rho_i$ 的不可约分解式:

$$\rho_{nat} \otimes \rho_i = \sum_{j=1}^m n_{ij} \rho_j, \quad i = 1, \dots, m$$

我们记 $c_{ij} = 2\delta_{ij} - n_{ij}$ ,然后定义矩阵 $C = (c_{ij})$ .我们利用命题2.9来证明下面的命题:

**命题3.3.**

- (a)  $c_{ij} = c_{ji}$ ,即 $C$ 为对称阵;
- (b) 每个不可约表示 $\rho_j$ 都会在某个 $\rho \otimes \rho_i$ 的分解式中出现;
- (c)  $c_{ii} = 2$ ,即 $\rho_i$ 不会在 $\rho \otimes \rho_i$ 的不可约分解式中出现;
- (d) 在 $G \neq \{\pm 1\}$ 且 $i \neq j$ 时, $c_{ij} = 0$ 或 $1$ ,即 $\rho \otimes \rho_i$ 的不可约分解式中各分量的系数为0或1.

*Proof.*

- (a) 设 $x \in G$ ,因为 $\rho_{nat}$ 为自然嵌入,所以

$$\chi_{nat}(x) = \text{tr} \rho_{nat}(x) = \text{tr} x = a + a^{-1} = a + \bar{a} \in \mathbb{R}$$

所以 $\chi_{nat} = \overline{\chi_{nat}}$ ,即 $\rho_{nat} \cong \rho_{nat}^*$ ,由命题2.9(5)即得.

- (b) 若否,则存在 $\rho_j$ 不出现在任意 $\rho \otimes \rho_i$ 的分解中,则对任意 $i$ 都有 $n_{ij} = 0$ ,由(a)可知 $n_{ji} = 0, \forall i$ .由此得 $\rho \otimes \rho_j = \sum n_{ji} \rho_i = 0$ ,这不可能.

- (c) 首先我们有

$$n_{ii} = (\chi_{nat} \chi_i, \chi_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{nat}(g) \chi_i(g) \overline{\chi_i(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{nat}(g) |\chi_i(g)|^2$$

如果 $|G|$ 为奇数,那么考虑其在 $SO(3)$ 中的像可知 $G$ 为循环群,所以其不可约表示的取值均为单位根.设 $G$ 的生成元为 $A$ ,那么我们有

$$n_{ii} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{nat}(g) |\chi_i(g)|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{nat}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr} g = \frac{1}{|G|} \text{tr}(1 + A + \dots + A^{|G|-1}) = 0$$

如果 $|G|$ 为偶数,那么必有 $-I \in G$ ,从而有 $\chi_{nat}(g) = -\chi_{nat}(-g)$ ,通过配对我们有

$$n_{ii} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{nat}(g) |\chi_i(g)|^2 = \frac{1}{2|G|} \sum_{g \in G} \chi_{nat}(g) (|\chi_i(g)|^2 - |\chi_i(-g)|^2) = 0$$

所以结论成立.

(d)因为 $\rho_{nat}$ 为二维表示,我们显然有 $|\chi_{nat}(g)| \leq 2$ .由Cauchy-Schwarz不等式有

$$\begin{aligned} n_{ij} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{nat}(g) \chi_i(g) \overline{\chi_j(g)} \leq \frac{1}{|G|} \sqrt{\sum_{g \in G} |\chi_{nat}(g)|^2 |\chi_i(g)|^2} \sqrt{\sum_{g \in G} |\chi_j(g)|^2} \\ &\leq \frac{1}{|G|} \sqrt{4 \sum_{g \in G} |\chi_i(g)|^2} \sqrt{\sum_{g \in G} |\chi_j(g)|^2} = 2 \end{aligned}$$

显然等号不会成立.所以必有 $n_{ij} = 0, 1$ . □

利用这个命题,我们可以定义一个图 $\Gamma$ ,其各顶点分别对应 $G$ 的不可约复表示 $\rho_1, \dots, \rho_m$ ,然后在顶点 $\rho_i, \rho_j$ 之间连 $n_{ij}$ 条边.由上面的结论(a)可知这个定义是合理的,而结论(b)保证了图 $\Gamma$ 为连通图,结论(c)(d)则说明 $\Gamma$ 为简单图.所以每个顶点 $V_i$ 的度恰为这个顶点对应的表示 $\rho_i$ 的维数 $d_i$ .这个图称为群 $G$ 对应的**McKay图**.

### 3.3 McKay对应

在本节中我们来证明,前一节中为 $SL_2(\mathbb{C})$ 的有限子群构造的McKay图(记为 $\Gamma$ )实际上与 $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ 型仿射Dynkin图是一一对应的.

**命题3.4.** 矩阵 $C$ 为不可分解仿射型广义Cartan矩阵.

*Proof.* 首先由命题3.3(b)可知 $C$ 不可分解(否则其对应的McKay图不连通).为了证明 $C$ 为仿射型广义Cartan矩阵,由命题2.13可知,我们只要证明 $C$ 既不为有限型,也不为不定型.

(1)由命题2.9(1)可知矩阵 $C$ 的全部特征值为 $2 - \chi_{nat}(x)$ .特别地,取 $x = 1$ 可知0为 $C$ 的一个特征值,从而 $\det C = 0$ ,所以由定义2.12(1)(ii)可知 $C$ 不是有限型的.

(2)同样由命题2.9(1)可知群 $G$ 的特征标表的第一列 $(\chi_i(1))$ 为 $C$ 的特征值为0的特征向量.熟知其各分量为 $G$ 的各不可约表示的维数,所以 $(\chi_i(1)) > 0$ .但是 $C(\chi_i(1)) = 0$ ,由定义2.12(3)(ii)不是不定型的. □

由本命题可知,每个McKay图都是仿射型Dynkin图.这样我们就可以利用命题2.15,2.16来对McKay图进行分类,即证明如下定理:

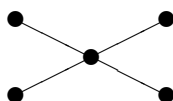
**定理3.5.** (McKay, [McK81]) 设 $G$ 为 $SL_2(\mathbb{C})$ 的有限子群,那么 $G$ 的McKay图 $\Gamma$ 如下表所示:

对应的仿射型 <i>Dynkin</i> 图名称	$SL_2(\mathbb{C})$ 的有限子群 $G$	<i>McKay</i> 图
$\widetilde{A}_n$	循环群 $\mathbb{Z}/(n+1)$	
$\widetilde{D}_n$	双二面体群 $\mathbb{B}D_{2n}$	
$\widetilde{E}_6$	双正四面体群 $\mathbb{B}\mathbb{T}$	
$\widetilde{E}_7$	双正八面体群 $\mathbb{B}\mathbb{O}$	
$\widetilde{E}_8$	双正二十面体群	

我们分几步来证明. 为了方便, 以下我们称一个有  $k(\geq 3)$  个相邻顶点的顶点为  $k$ -分支点.

**第一步** 首先来确定  $\Gamma$  中可能存在的  $k$ -分支点及其个数.

(1)  $\Gamma$  中不存在  $k$ -分支点, 其中  $k \geq 5$ . 也就是说,  $\Gamma$  中每个顶点都至多与 4 个顶点相连. 否则,  $\Gamma$  将有一个这样的真子图:

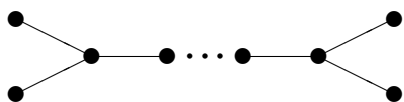


而由有限型 *Dynkin* 图的分类可知, 这不是有限型的 *Dynkin* 图, 与引理矛盾.

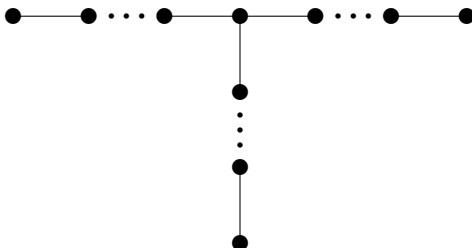
(2) 如果  $\Gamma$  中存在 4-分支点, 那么  $\Gamma$  本身一定形如上面的样子 (也就是  $\widetilde{D}_4$  型仿射型 *Dynkin* 图), 否则它也将包含上图作为它的真子图, 同样会导出矛盾.

(3)  $\Gamma$  中至多存在两个 3-分支点. 否则,  $\Gamma$  将包含一个有两个 3-分支点的真连通子图, 而有限型 *Dynkin* 图的分类告诉我们没有这样的有限型 *Dynkin* 图.

如果  $\Gamma$  中恰存在两个 3-分支点, 那么容易看出它一定是  $\widetilde{D}_n (n \geq 5)$  型仿射 *Dynkin* 图:



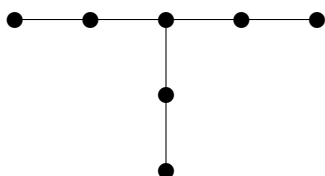
如果 $\Gamma$ 中只有一个3-分支点,那么它一定形如:



**第二步** 确定在只有一个3-分支点的情况下 $\Gamma$ 的可能情形.

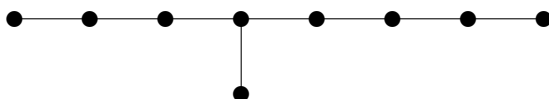
我们设这个图的三个分支上的顶点的个数分别为 $l_1 \leq l_2 \leq l_3$ (注意,每个分支上的顶点数的计算都不包括根部的那个3-分支点),那么图 $\Gamma$ 共有 $l_1 + l_2 + l_3 + 1$ 个顶点.下面对 $l_1, l_2, l_3$ 的值进行讨论.

首先,我们一定有 $l_1 \leq 2$ ,否则图 $\Gamma$ 将包含下面这样一个真子图,而它不是有限型的:



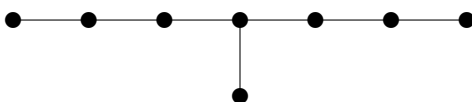
如果 $l_1 = 2$ ,那么我们必须有 $l_2 = l_3 = 2$ ,否则 $\Gamma$ 同样将包含上图作为它的一个真子图,同样导致矛盾.这种情形恰好对应 $\tilde{E}_6$ 型仿射Dynkin图.

所以我们设 $l_1 = 1$ .如果 $l_2 = 1$ ,那么图 $\Gamma$ 将成为 $D_n$ 型有限Dynkin图,所以我们必定有 $l_2 \geq 2$ .但是,我们必须有 $l_2 \leq 3$ ,否则 $\Gamma$ 将包含下图作为一个真子图,而它不是有限型的:



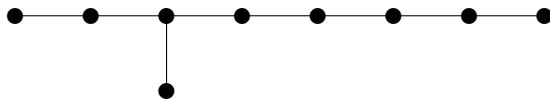
所以我们有 $l_2 = 2$ 或 $3$ .

如果 $l_2 = 3$ ,那么 $l_3$ 只能是3,否则 $\Gamma$ 将包含下图作为一个真子图,而它不是有限型的:



这种情形(即 $l_1 = 1, l_2 = l_3 = 3$ )对应的是 $\tilde{E}_7$ 型仿射Dynkin图.

然后我们设 $l_1 = 1, l_2 = 2$ . 容易看出 $l_3 = 2, 3, 4$ 时 $\Gamma$ 将成为有限型Dynkin图, 所以必定有 $l_3 \geq 5$ . 但是我们必须有 $l_3 \leq 5$ , 否则 $\Gamma$ 将包含下图作为一个真子图, 而它不是有限型的:



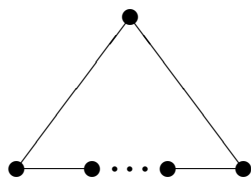
这种情形(即 $l_1 = 1, l_2 = 2, l_3 = 5$ )对应的是 $\tilde{E}_8$ 型仿射Dynkin图.

**第三步** 确定在没有3-分支点的情况下 $\Gamma$ 的可能情形.

此时 $\Gamma$ 中的顶点的度数或者为2, 或者为1. 显然, 度数为1的顶点的个数最多只有两个, 否则 $\Gamma$ 中将出现3-分支点. 而恰有两个这样的顶点的情况对应的是一条链:



这是有限型的Dynkin图, 所以不可能出现这种情况. 而显然 $\Gamma$ 中不可能只有1个度数为1的顶点, 所以 $\Gamma$ 中的所有顶点度数均为2, 这只能是如下这种情况:



这种情形对应 $\tilde{A}_n$ 型仿射Dynkin图.

至此, 我们完成了整个证明.

## 4 Du Val奇点

在本部分中,我们从 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的有限子群 $G$ 出发,考虑其作用在 $\mathbb{C}^2$ 上得到的商空间 $\mathbb{C}^2/G$ ,通过利用不变量理论的知识(第2.4节)说明 $\mathbb{C}^2/G$ 是一个只在原点处奇异的仿射簇,并给出它的坐标环的具体表达式,然后通过逐次爆破(第2.3节)的方法进行奇点解消,最后通过观察在这个解消下的例外除子得到一个解消图.我们将看到,这个图与有限型Dynkin图一一对应.

### 4.1 商簇 $\mathbb{C}^2/G$ 与Du Val奇点

设群 $G$ 作用在一个集合 $X$ 上,我们用 $X/G$ 表示 $G$ 在 $X$ 上的作用的全体轨道构成的集合(称之为 $G$ 在 $X$ 上作用得到的商空间),并用 $\pi : X \rightarrow X/G$ 表示自然投射 $x \mapsto Gx$ .如果 $X$ 为代数簇,并且 $G$ “代数地”作用在簇 $X$ 上,我们希望 $X/G$ 上也可以被赋予一个代数簇的结构,并且使得自然投射 $\pi$ 是簇之间的正则映射.但是一般来说,即使对于非常平凡的群作用,这也是做不到的(例如群 $k^\times$ 在 $\mathbb{A}^1$ 上的作用).下面我们引入两个几何不变量理论中的概念(可参考 [MFK94]):

**定义4.1.** 设 $G$ 为代数群,其在簇 $X$ 上有一个作用.我们将有序对 $(Y, \varphi)$ 为 $G$ 在 $X$ 上的一个**范畴商**,其中 $Y$ 为代数簇, $\varphi : X \rightarrow Y$ 为正则映射,如果它满足:

- (1) $\varphi$ 在 $X$ 中的任一轨道上的取值为常值;
- (2)(泛性质)对任意簇 $Y'$ 和满足(1)中条件的任意正则映射 $\varphi' : X \rightarrow Y'$ ,存在唯一的正则映射 $\psi : Y \rightarrow Y'$ 使得 $\psi \circ \varphi = \varphi'$ .

**定义4.2.** 设 $Y, \varphi$ 为 $G$ 在 $X$ 上的一个范畴商.如果对任意的 $y \in Y, \varphi^{-1}(y)$ 都是 $G$ 在 $X$ 上的一个轨道,那么我们称这个范畴商为一个**轨道空间**,我们同样把它记作 $X/G$ .

由这个定义可以看出,轨道空间实际上是一个代数簇,其中的点与 $G$ 在 $X$ 上作用的轨道一一对应.所以如果轨道空间存在,我们就可以把它与商空间等同起来,相当于在商空间上赋予了代数簇的结构.

对于一般的情形,轨道空间是否存在是一个非常复杂的问题.但是,在 $X$ 为仿射簇, $G$ 为有限群的情形,这个问题有一个非常漂亮的解答:

**定理4.3.** 设 $G$ 为有限群, $X$ 为域 $k$ 上的仿射簇, $G$ 作用在 $X$ 上.如果 $\mathrm{char} k$ 不整除 $|G|$ ,那么

$$Y = \mathrm{Spec} k[X]^G$$

就是 $G$ 在 $X$ 上的一个轨道空间.

换句话说,这种情形下的轨道空间是一个仿射簇,且其坐标环恰为 $G$ 在 $X$ 的坐标环上的作用的不变量代数 $k[X]^G$ .

现在我们考虑 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的有限子群 $G$ 在 $\mathbb{C}^2$ 上的作用.由上面的定理,我们知道为了确定 $\mathbb{C}^2/G$ 的结构,只需要确定 $G$ 在 $\mathbb{C}^2$ 的坐标环 $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ 上的不变量代数.本节的目标是证明下面这个定理,它是Felix Klein在1884年研究正多面体时得到的.

**定理4.4.** (F.Klein, [Kle56]) 设 $G$ 为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的有限子群,那么不变量代数 $\mathbb{C}[z_1, z_2]^G$ 由三个变量 $x, y, z$ 生成,它们满足关系

$$R(x, y, z) = 0$$

其中 $R(x, y, z)$ 的表达式由下表给出:

名称	$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的有限子群 $G$	$R(x, y, z)$
$A_n$	循环群 $\mathbb{Z}/(n+1)$	$x^2 + y^2 + z^{n+1}$
$D_n$	双二面体群 $\mathbb{B}D_{2n}$	$x^2 + y^2z + z^{n-1}$
$E_6$	双正四面体群 $\mathbb{B}T$	$x^2 + y^3 + z^4$
$E_7$	双正八面体群 $\mathbb{B}\mathbb{O}$	$x^2 + y^3 + yz^3$
$E_8$	双正二十面体群 $\mathbb{B}\mathbb{D}$	$x^2 + y^3 + z^5$

换句话说,不变量代数 $\mathbb{C}[z_1, z_2]^G$ 与由方程 $R(x, y, z) = 0$ 定义的 $\mathbb{A}^3$ 中的仿射簇的坐标环是同构的,即:

$$\mathbb{C}[z_1, z_2]^G \cong \mathbb{C}[x, y, z]/(R(x, y, z))$$

我们使用第2.4节中的技术来证明这一定理.

*Proof.* 设 $G$ 为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的有限子群,并记 $S = \mathbb{C}[z_1, z_2]$ ,那么 $G$ 在 $S$ 上有如下作用:

$$g \cdot z_1 = dz_1 - bz_2, \quad g \cdot z_2 = -cz_1 + az_2, \quad \text{其中 } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

设 $f \in S$ 为 $G$ 的一个半不变量(参考第2.4.4节),并设 $f$ 为 $d$ 次齐次多项式.我们可以将 $f$ 分解为线性因子的乘积

$$f(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^d (a_i z_1 - b_i z_2)$$

并记 $p_i = \frac{b_i}{a_i}$ ,那么 $p_i$ 是复射影直线 $\mathbb{CP}^1$ 上的点.我们使用与3.1节中相同的符号,用 $\Lambda$ 表示 $G$ 在 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ 中的像.那么 $\Lambda$ 在全体 $p_i$ 构成的集合上有一个置换作用.反过来,如果 $\{p_i\}$ 是 $\mathbb{CP}^1$ 中的一个 $\Lambda$ -轨道,那么显然这样定义的 $f$ 是 $G$ 的一个半不变量.所以在 $G$ 的半不变量与 $\mathbb{CP}^1$ 中的 $\Lambda$ -轨道之间存在对应关系,这使得我们可以利用 $\Lambda$ 在 $\mathbb{CP}^1$ 上的作用来构造 $G$ 的半不变量.事实上,我们还看到,半不变量的次数等于其对应的 $\Lambda$ -轨道中的元素个数.

以下我们以 $G$ 为双正四面体群的情形为例来展示这一过程是如何进行的,其余的情形均可类似证明.

设 $G$ 为双正四面体群,则 $\Lambda$ 为四面体群,我们在3.1节中已经看到,这种情况下 $\mathbb{CP}^1$ 中被 $\Lambda$ 中某些非平凡元素固定的元素被划分为三个轨道,其中的元素个数分别为6,4,4.由上面我们得到的结论可知,这说明 $G$ 共有三个半不变量 $\varphi_6, \varphi_4, \varphi'_4$ ,其次数分别为6,4,4.

下面我们利用 $\mu_n$ 表示 $n$ 次单位根群,用 $\epsilon_3$ 表示3次单位根.记 $H = \mu_3 G$ ,则 $H$ 是一个72阶群.注意到,如果 $g$ 是 $G$ 中的一个3阶元,那么 $g$ 的特征值为 $\epsilon_3, \epsilon_3^{-1}$ ,从而 $\epsilon_3 g$ 与 $\epsilon_3^{-1} g$ 均为3阶的反射.因为 $g \in G$ 为3阶元当且仅当它在 $\Lambda$ 中的像固定轨道 $\Lambda \cdot p_2$ 或 $\Lambda \cdot p_3$ 中的一个点,所以 $H$ 中共有16个3阶反射.

现在设它们生成的反射群的度数(推论2.58)为 $d_1 \leq d_2$ ,那么由推论2.58可知 $d_1 + d_2 = 18$ ,且 $d_1 d_2$ 整除72,由此可以解得 $d_1 = 6, d_2 = 12$ ,因此 $H$ 本身是一个反射群,且不变量代

数 $S^H$ 由两个次数分别为6和12的齐次多项式 $\psi_6, \psi_{12}$ 生成.因为由 $\psi_6$ 定义的 $\mathbb{CP}^1$ 中的六个点均被 $\Lambda$ 中的2阶元固定,所以在相差一个常数因子的意义下有 $\psi_6 = \varphi_6$ .

现在 $H$ 中的反射所固定的超平面是直线,它们对应轨道 $\Lambda \cdot p_2, \Lambda \cdot p_3$ 中的点,所以定理2.60中的 $f_\sigma$ 可以取为 $\varphi_4, \varphi'_4$ .所以 $\varphi_4^3$ 是 $H$ 的一个不变量,它与 $\varphi_6^2$ 线性无关,并且我们可以取 $\psi_{12} = \varphi_4^3$ .因为 $(\varphi'_4)^3$ 是 $H$ 的一个12次的不变量,我们有关系

$$(\varphi'_4)^3 + a\varphi_4 + b\varphi_6^2 = 0, \quad a \neq 0, b \neq 0$$

显然, $G$ 的齐次不变量必为 $H$ 的半不变量,由定理2.60可知 $G$ 的任意不变量 $f$ 可以唯一得写成

$$\varphi_4^h (\varphi'_4)^j F(\varphi_6, \varphi_4^3), \quad F \in \mathbb{C}[z_1, z_2], \quad 0 \leq h, j < 3$$

进而对于 $g \in H$ ,我们有

$$g \cdot (\varphi_4 \varphi'_4) = (\det g)^{-1} \varphi_4 \varphi'_4$$

这说明 $\varphi_4 \varphi'_4$ 为 $G$ 的一个不变量.类似的,我们可以看到 $\varphi_4$ 不是 $G$ -不变量.

所以,我们得到 $S^G = \mathbb{C}[\varphi_4 \varphi'_4, \varphi_6, \varphi_4^3]$ ,亦即

$$S^G \cong \mathbb{C}[f_6, f_8, f_{12}] / (f_6^4 + f_8^3 + f_{12}^2)$$

其中 $f_6, f_8, f_{12}$ 分别为 $\varphi_6, \varphi_4 \varphi'_4, \varphi_4^3 + \frac{b}{2a} \varphi_6^2$ 的常数倍.

□

通过计算 $R(x, y, z)$ 的Jacobi矩阵可以发现 $X/G$ 的唯一奇点是原点 $O$ ,我们称这个奇点为**Du Val奇点**,在下一节中我们将使用第2.3节中的技术来对它进行解消.

## 4.2 Du Val奇点的解消

在1934年,Du Val首先对 $\mathbb{C}^2/G$ 的奇点的极小解消

$$\pi : \tilde{X} \rightarrow X$$

进行了研究.他发现,在这个解消中的例外除子(即 $\pi^{-1}(O)$ )是有限条复射影直线的并:

$$\pi^{-1}(O) = E_1 \cup \cdots \cup E_n, \quad E_i \cong \mathbb{CP}^1, \quad i = 1, \dots, n$$

并且任意两条的交 $E_i \cap E_j$ 或者为空集,或者是一个单点集.然后构造一个图,这个图中的每个顶点对应一条复射影直线 $E_i$ ,两个顶点相连当且仅当它们对应的射影直线相交.Du Val发现,这样得到的图恰好与 $A, D, E$ 型有限型Dynkin图之间存在一一对应.

以下我们以 $A_3, D_4$ 为例来演示如何进行这一操作,其他的情形均可通过类似的方法进行验证.虽然这个过程非常的冗长,但我们还是给出绝大部分计算细节.



### 4.2.1 $A_3$ 及其解消

**例子4.5.** 首先来看  $A_3$ , 我们记  $X = Z(x^2 + y^2 + z^4) \subseteq \mathbb{A}^3$ . 容易看到点  $O$  为  $X$  上唯一的奇点. 以下我们采用与例2.36中类似的记号.

#### 第一次爆破

我们来考虑

$$x^2 + y^2 + z^4 = 0$$

我们将  $X$  在  $O$  处的爆破记为  $\pi_1 : X_1 \rightarrow X$ , 分别考虑它在三个仿射坐标卡中的局部方程:  
第一个坐标卡: 在  $B_1$  中, 我们有  $y = xv, z = xw$ . 所以  $X_1 \cap B_1$  的局部方程为

$$1 + v^2 + x^2 w^4 = 0$$

其 *Jacobi* 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2xw^4 & 2v & 4x^2w^3 \end{pmatrix}$$

所以在  $B_1$  中  $X_1$  非奇异. 为了得到例外除子的局部方程, 我们只需要在  $X_1 \cap B_1$  的方程中令  $x = 0$ . 注意到  $x = 0$  蕴含  $v = \pm i$ , 所以本次爆破产生了两条在  $B_1$  中交于点  $(0, 0, 0)$  的例外曲线, 分别记为  $E_1, E_2$  (注意, 虽然在此时  $E_1$  与  $E_2$  相交, 但是因为它们的方向不同, 在下面会看到第二次爆破之后它们会被“拉开”, 在那之后  $E_1$  与  $E_2$  不再相交). 所以在这个坐标卡中,  $E_1$  和  $E_2$  的局部方程为  $(0, \pm i, *)$  (或  $x = 0, v = \pm i$ ), 整体方程为  $((0, 0, 0), (1 : \pm i : *))$

第二个坐标卡: 在  $B_2$  中, 我们有  $x = yu, z = yw$ . 所以  $X_1 \cap B_2$  的局部方程为

$$u^2 + 1 + y^2 w^4 = 0$$

其 *Jacobi* 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2u & 2yw^4 & 4y^2w^3 \end{pmatrix}$$

所以在  $B_2$  中  $X_1$  非奇异. 因为  $y = 0$  蕴含  $u = \pm i$ , 所以例外曲线的局部方程为  $(\pm i, 0, *)$ , 整体方程为  $((0, 0, 0), (\pm i : 1 : *))$ .

第三个坐标卡: 在  $B_3$  中, 我们有  $x = zu, y = zv$ . 所以  $X_1 \cap B_3$  的局部方程为

$$u^2 + v^2 + z^2 = 0$$

其 *Jacobi* 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2u & 2v & 2z \end{pmatrix}$$

所以  $X_1$  在  $B_3$  中有一个奇点  $(u, v, z) = (0, 0, 0)$ , 其整体坐标为  $((0, 0, 0), (0 : 0 : 1))$  因为  $z = 0$  蕴含  $u \pm iv = 0$ , 所以两条例外曲线的局部方程为  $(\mp iv, v, 0)$ , 整体方程为  $((0, 0, 0), (\mp iv : v : 1))$ . 需要注意的是, 通过观察以上三组整体方程可以看出在这三个坐标卡中得到的例外曲线实际上是一样的. 另外, 可以看到在  $B_3$  中  $E_1, E_2$  交于点  $(0, 0, 0)$ , 而这个点恰好为  $X_1$  的奇点.

#### 第二次爆破

我们已经看到,  $X_1$  在  $B_3$  中有一个奇点, 所以我们使用  $B_3$  中的局部坐标来对  $X_1$  进行爆破, 将本次爆破记为  $\pi_2 : X_2 \rightarrow X_1$ . 为了避免混淆, 我们将  $B_3$  中的局部坐标  $(u, v, z)$  改记为  $(x_{(2)}, y_{(2)}, z_{(2)})$ , 并用  $B_1^{(2)}, B_2^{(2)}, B_3^{(2)}$  来表示新的三个仿射坐标卡. 我们来考虑

$$\boxed{x_{(2)}^2 + y_{(2)}^2 + z_{(2)}^2 = 0}$$

第一个坐标卡:在 $B_1^{(2)}$ 中,我们有 $y_{(2)} = x_{(2)}v_{(2)}, z_{(2)} = x_{(2)}w_{(2)}$ .所以 $X_1 \cap B_1$ 的局部方程为

$$1 + v_{(2)}^2 + w_{(2)}^2 = 0$$

其Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 2v_{(2)} & 2w_{(2)} \end{pmatrix}$$

所以在 $B_1$ 中 $X_2$ 非奇异.容易看出,第二次爆破产生的例外曲线 $E_2$ 在这个坐标卡中的局部方程为 $x_{(2)} = 0, 1 + v_{(2)}^2 + w_{(2)}^2 = 0$ .

第二个坐标卡:在 $B_2^{(2)}$ 中,我们有 $x_{(2)} = y_{(2)}u_{(2)}, z_{(2)} = y_{(2)}w_{(2)}$ .所以 $X_2 \cap B_2^{(2)}$ 的局部方程为

$$u_{(2)}^2 + 1 + w_{(2)}^2 = 0$$

其Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2u_{(2)} & 0 & 2w_{(2)} \end{pmatrix}$$

所以在 $B_2$ 中 $X_2$ 非奇异.例外曲线在这个坐标卡中的局部方程为 $y = 0, u^2 + 1 + w^2 = 0$ .

第三个坐标卡:在 $B_3^{(2)}$ 中,我们有 $x_{(2)} = z_{(2)}u_{(2)}, y_{(2)} = z_{(2)}v_{(2)}$ .所以 $X_2 \cap B_3^{(2)}$ 的局部方程为

$$u_{(2)}^2 + v_{(2)}^2 + 1 = 0$$

其Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2u_{(2)} & 2v_{(2)} & 0 \end{pmatrix}$$

所以在 $B_3^{(2)}$ 中 $X_2$ 非奇异.例外曲线在这个坐标卡中的局部方程为 $z_{(2)} = 0, u_{(2)}^2 + v_{(2)}^2 + 1 = 0$ .

同样地,通过写出这三个局部方程对应的整体方程可以看出,它们实际上是同一条曲线.记之为 $E_3$ .

为了确定第一次爆破中产生的例外曲线 $E_1, E_2$ 与第二次爆破产生的 $E_3$ 的相交情况,我们需要确定 $E_1, E_2$ 在坐标卡 $B_1^{(2)}, B_2^{(2)}, B_3^{(2)}$ 中的局部方程.这是非常容易的,我们首先来看 $E_1$ .在上面我们已经看到, $E_1$ 在坐标卡 $B_3$ 中的方程为 $(-iv, v, 0)$ ,更换记号后成为 $(-iy_{(2)}, y_{(2)}, 0)$ ,或 $(x_{(2)} + iy_{(2)} = 0, z_{(2)} = 0)$ .在坐标卡 $B_1^{(2)}$ 中,成为

$$x_{(2)} + ix_{(2)}v_{(2)} = 0, \quad x_{(2)}w_{(2)} = 0$$

首先设 $x_{(2)} \neq 0$ ,那么由以上两式可得 $v_{(2)} = i, w_{(2)} = 0$ ,所以 $\pi_2^{-1}(E_1 - O)$ 的方程为 $x_{(2)} \neq 0, v_{(2)} = i, w_{(2)} = 0$ ,而为了得到它的闭包只需要去掉 $x_{(2)} \neq 0$ .将 $v_{(2)} = i, w_{(2)} = 0$ 代入 $y_{(2)} = x_{(2)}v_{(2)}, z_{(2)} = x_{(2)}w_{(2)}$ 可得 $y_{(2)} = ix_{(2)}, z_{(2)} = 0$ ,所以 $E_1$ 在 $B_1^{(2)}$ 中的局部方程为 $(*, i, 0)$ ,整体方程为 $((x_{(2)}, ix_{(2)}, 0), (1 : i : 0))$ .同样地可以得到 $E_2$ 在 $B_1^{(2)}$ 中的整体方程为 $((x_{(2)}, -ix_{(2)}, 0), (1 : -i : 0))$ ,因为它们在 $\mathbb{P}^2$ 上的分量不相等,所以 $E_1$ 与 $E_2$ 不相交.另外,我们注意到,在第一次爆破之后 $E_1$ 与 $E_2$ 相交于 $X_1$ 的奇点,所以在第二次爆破之后 $E_1, E_2$ 被拉开而不相交,但 $E_1, E_2$ 都与 $E_3$ 相交.所以我们得到

$$E_1E_2 = 0, \quad E_1E_3 = E_2E_3 = 1$$

为了得到这种情形下的相交矩阵,我们还需要来计算 $E_1, E_2, E_3$ 的自相交数.为此,我们来考虑 $X$ 上的有理函数 $f = z$ .为了方便,我们同样使用 $f$ 来表示它在第一、二次爆破下的拉回.在坐标卡 $B_3^{(1)}$ 中,其局部方程为 $f = z$ ,在坐标卡 $B_1^{(2)}$ 中,成为 $f = x_{(2)}w_{(2)}$ .注意到在 $B_1^{(2)}$ 中 $x_{(2)} = 0$ 对应例外曲线 $E_3, w_{(2)} = 0$ 蕴含 $v_{(2)} = \pm i$ ,其对应的整体方程为 $((x_{(2)}, \pm i x_{(2)}, 0), (1, \pm i, 0))$ ,其对应 $E_1$ 与 $E_2$ ,所以我们有

$$\operatorname{div} f = E_1 + E_2 + E_3$$

所以我们有

$$0 = \operatorname{div} f \cdot E_3 = (E_1 + E_2 + E_3)E_3 = 1 + 1 + E_3^2$$

所以 $E_3^2 = -2$ .用完全类似的方法可以计算得到 $E_1^2 = E_2^2 = -2$ .所以我们得到了这种情形下的相交矩阵 $(E_i E_j)$ 为:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

注意,为了与通常的习惯相符,我们在这里将 $E_2$ 与 $E_3$ 的记号交换.我们发现,这个矩阵乘以 $-1$ 后恰好为 $A_3$ 型Dynkin图对应的Cartan矩阵.所以此情形下的解消图为 $A_3$ 型有限Dynkin图.

#### 4.2.2 $D_4$ 及其解消

**例子4.6.** 然后我们来看 $D_4$ ,记 $X = Z(x^2 + y^2 z + z^3) \subseteq \mathbb{A}^3$ .

**第一次爆破**

我们来考虑

$$x^2 + y^2 z + z^3 = 0$$

将 $X$ 在 $O$ 处的爆破记为 $\pi_1 : X_1 \rightarrow X$ ,分别考虑它在三个仿射坐标卡中的局部方程:

第一个坐标卡:在 $B_1$ 中, $X_1 \cap B_1$ 的局部方程为

$$1 + xv^2w + xw^3 = 0$$

其Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} v^2w + w^3 & 2xvw & xv^2 + 3xw^2 \end{pmatrix}$$

所以在 $B_1$ 中 $X_1$ 非奇异.注意到 $x = 0$ 蕴含 $1 = 0$ ,所以本次爆破产生产生的例外曲线 $E_1$ 不在这个坐标卡中,即 $E_1 \cap B_1 = \emptyset$ .

第二个坐标卡:在 $B_2$ 中,我们有 $x = yu, z = yw$ .所以 $X_1 \cap B_2$ 的局部方程为

$$u^2 + yw + yw^3 = 0$$

其Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2u & w + w^3 & y + 3yw^2 \end{pmatrix}$$

所以在 $B_2$ 中 $X_1$ 有三个不同的奇点 $(0, 0, 0)$ 与 $(0, 0, \pm i)$ , 它们的整体坐标分别为 $((0, 0, 0), (0 : 1 : 0))$ 和 $((0, 0, 0), (0 : 1 : \pm i))$ . 因为 $y = 0$ 蕴含 $u = 0$ , 所以 $E_1 \cap B_2$ 的局部方程为 $(0, 0, *)$ , 整体方程为 $((0, 0, 0), (0 : 1 : *))$ , 所以 $E_1$ 不经过任何一个奇点, 从而在下一次爆破中 $E_1$ 不会受到影响.

第三个坐标卡: 在 $B_3$ 中, 我们有 $x = zu, y = zv$ . 所以 $X_1 \cap B_3$ 的局部方程为

$$u^2 + zv^2 + z = 0$$

其Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2u & 2zv & 1 + v^2 \end{pmatrix}$$

所以 $X_1$ 在 $B_3$ 中有两个奇点 $(u, v, z) = (0, \pm i, 0)$ , 其整体坐标为 $((0, 0, 0), (0 : \pm i : 1))$ , 将其与我们在 $B_2$ 中得到的奇点比较可知它们实际上是我们在那里已经找到的奇点. 因为 $z = 0$ 蕴含 $u = 0$ , 所以 $E_1 \cap B_3$ 的局部方程为 $(0, *, 0)$ , 整体方程为 $((0, 0, 0), (0 : * : 1))$ . 需要注意的是, 通过观察以上三组整体方程可以看出在这三个坐标卡中得到的例外曲线实际上是一样的, 在每个坐标卡中均同构于仿射直线, 从而由对称性可知 $E_1$ 同构于射影直线 $\mathbb{CP}^1$ .

### 第二次爆破

我们已经看到,  $X_1$ 在 $B_2$ 中有三个奇点, 所以我们使用 $B_2$ 中的局部坐标 $u^2 + yw + yw^3$ 来对 $X_1$ 在这三点处逐个进行爆破, 即考虑

$$x_{(2)}^2 + y_{(2)}z_{(2)} + y_{(2)}z_{(2)}^3 = 0$$

首先来看 $(0, 0, 0)$ .

第一个坐标卡: 在 $B_1^{(2)}$ 中, 我们有 $y_{(2)} = x_{(2)}v_{(2)}, z_{(2)} = x_{(2)}w_{(2)}$ . 所以 $X_1 \cap B_1$ 的局部方程为

$$1 + v_{(2)}w_{(2)} + x_{(2)}^2v_{(2)}w_{(2)}^3 = 0$$

其Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2x_{(2)}v_{(2)}w_{(2)}^3 & w_{(2)} + x_{(2)}^2w_{(2)}^3 & v_{(2)} + 3x_{(2)}^2v_{(2)}w_{(2)}^2 \end{pmatrix}$$

所以在 $B_1^{(2)}$ 中 $X_2$ 非奇异. 因为 $x_{(2)} = 0$ 蕴含 $1 + v_{(2)}w_{(2)} = 0$ , 所以例外曲线在此坐标卡中的局部方程为 $(0, v_{(2)}, -1/v_{(2)})$ , 整体方程为 $((0, 0, 0), (1 : v_{(2)} : -1/v_{(2)}))$ . 因为 $E_1$ 在 $B_2$ 中的局部方程为 $y_{(2)} = x_{(2)} = 0$ , 而 $x_{(2)} = 0$ 蕴含例外曲线的方程, 但我们在上面看到 $E_1$ 在 $B_2$ 中不经过奇点, 所以这种情形不可能发生, 即 $E_1$ 在 $X_2$ 中的拉回不在坐标卡 $B_1^{(2)}$ 中.

第二个坐标卡: 在 $B_2^{(2)}$ 中, 我们有 $x_{(2)} = y_{(2)}u_{(2)}, z_{(2)} = y_{(2)}w_{(2)}$ . 所以 $X_2 \cap B_2^{(2)}$ 的局部方程为

$$u_{(2)}^2 + w_{(2)} + y_{(2)}^2w_{(2)}^3 = 0$$

其Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2u_{(2)} & 2y_{(2)}w_{(2)}^3 & 1 + 3y_{(2)}^2w_{(2)}^2 \end{pmatrix}$$

所以在 $B_2^{(2)}$ 中 $X_2$ 非奇异. 因为 $y_{(2)} = 0$ 蕴含 $u_{(2)}^2 + w_{(2)} = 0$ , 所以例外曲线在此坐标卡中的局部方程为 $(u_{(2)}, 0, -u_{(2)}^2)$ , 整体方程为 $((0, 0, 0), (u_{(2)} : 1 : -u_{(2)}^2))$ . 与 $B_1^{(2)}$ 的情形类似,  $E_1$ 的拉回也不在 $B_2^{(2)}$ 中.

第三个坐标卡: 在 $B_3^{(2)}$ 中, 我们有 $x_{(2)} = z_{(2)}u_{(2)}, y_{(2)} = z_{(2)}v_{(2)}$ . 所以 $X_2 \cap B_3$ 的局部方程为

$$u_{(2)}^2 + v_{(2)} + z_{(2)}^2 v_{(2)} = 0$$

其 *Jacobi* 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2u_{(2)} & 1 + z_{(2)}^2 & 2z_{(2)}v_{(2)} \end{pmatrix}$$

所以在  $B_3^{(2)}$  中  $X_2$  有两个奇点  $(0, 0, \pm i)$  (实际上, 这两个奇点就是上面的那两个奇点). 因为  $z_{(2)} = 0$  蕴含  $u_{(2)}^2 + v_{(2)} = 0$ , 所以例外曲线在此坐标卡中的局部方程为  $(u_{(2)}, -u_{(2)}^2, 0)$ , 整体方程为  $((0, 0, 0), (u_{(2)} : -u_{(2)}^2 : 1))$ .

同样地, 通过写出这三条曲线对应的整体方程可以看出 (事实上, 这三条曲线的整体方程均为  $x = y = z = 0, u^2 + vw = 0$ ), 它们实际上是同一条曲线. 记之为  $E_2$ .

因为  $E_1$  在  $B_2$  中的局部方程为  $y_{(2)} = x_{(2)} = 0$ , 在这个坐标卡中, 这蕴含  $u_{(2)} = v_{(2)} = 0$ , 所以  $E_1$  在  $B_3^{(2)}$  中的整体方程为  $((0, 0, z_{(2)}), (0 : 0 : 1))$ , 从而  $E_1$  与  $E_2$  交于点  $((0, 0, 0), (0 : 0 : 1))$ , 因为交点不是奇点, 所以在之后的爆破中  $E_1$  与  $E_2$  始终交于这一点, 不会被拉开.

### 第三次爆破

我们已经看到,  $X_2$  在  $B_3^{(2)}$  中有三个奇点, 所以我们使用  $B_3^{(2)}$  中的局部坐标  $u_{(2)}^2 + v_{(2)} + z_{(2)}^2 v_{(2)} = 0$  来对  $X_2$  在这两点处逐个进行爆破. 首先来看  $(0, 0, i)$ , 因为爆破中心不在原点, 所以我们首先作坐标变换  $z_{(2)} \mapsto z_{(2)} + i$  将爆破中心平移至原点, 方程成为  $u_{(2)}^2 + (z_{(2)}^2 + 2iz_{(2)})v_{(2)} = 0$ ,  $E_1$  的局部方程成为  $u_{(2)} = v_{(2)} = 0$ ,  $E_2$  的局部方程成为  $z_{(2)} = -i, u_{(2)}^2 + v_{(2)} = 0$ . 我们来考虑

$$x_{(3)}^2 + y_{(3)} + y_{(3)}z_{(3)}^2 = 0$$

第一个坐标卡: 在  $B_1^{(3)}$  中, 我们有  $y_{(3)} = x_{(3)}v_{(3)}, z_{(3)} = x_{(3)}w_{(3)}$ . 所以  $X_3 \cap B_1^{(3)}$  的局部方程为

$$1 + x_{(3)}v_{(3)}w_{(3)}^2 + 2iv_{(3)}w_{(3)} = 0$$

其 *Jacobi* 矩阵为

$$\begin{pmatrix} v_{(3)}w_{(3)}^2 & x_{(3)}w_{(3)}^2 + 2iw_{(3)} & 2x_{(3)}v_{(3)}w_{(3)} + 2iv_{(3)} \end{pmatrix}$$

所以在  $B_1^{(3)}$  中  $X_3$  非奇异. 因为  $x_{(3)} = 0$  蕴含  $1 + 2iv_{(3)}w_{(3)} = 0$ , 所以例外曲线在此坐标卡中的局部方程为  $(0, v_{(3)}, -1/2iv_{(3)})$ , 整体方程为  $((0, 0, 0), (1 : v_{(3)} : -1/2iv_{(3)}))$ .

第二个坐标卡: 在  $B_2^{(3)}$  中, 我们有  $x_{(3)} = y_{(3)}u_{(3)}, z_{(3)} = y_{(3)}w_{(3)}$ . 所以  $X_3 \cap B_2^{(3)}$  的局部方程为

$$u_{(3)}^2 + y_{(3)}w_{(3)}^2 + 2iw_{(3)} = 0$$

其 *Jacobi* 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2u_{(3)} & w_{(3)}^2 & 2y_{(3)}w_{(3)} + 2i \end{pmatrix}$$

所以在  $B_2^{(3)}$  中  $X_2$  非奇异. 因为  $y_{(3)} = 0$  蕴含  $u_{(3)}^2 + 2iw_{(3)} = 0$ , 所以例外曲线在此坐标卡中的局部方程为  $(u_{(3)}, 0, -u_{(3)}^2/2i)$ , 整体方程为  $((0, 0, 0), (u_{(3)} : 1 : -u_{(3)}^2/2i))$ .

第三个坐标卡: 在  $B_3^{(3)}$  中, 我们有  $x_{(3)} = z_{(3)}u_{(3)}, y_{(3)} = z_{(3)}v_{(3)}$ . 所以  $X_3 \cap B_3^{(3)}$  的局部方程为

$$u_{(3)}^2 + z_{(3)}v_{(3)} + 2iv_{(3)} = 0$$

其 *Jacobi* 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2u_{(3)} & z_{(3)} + 2i & v_{(3)} \end{pmatrix}$$

所以在  $B_3^{(3)}$  中  $X_2$  有一个奇点  $(0, 0, -2i)$ , 这是最后一个奇点. 因为  $z_{(3)} = 0$  蕴含  $u_{(3)}^2 + 2iv_{(3)} = 0$ , 所以例外曲线在此坐标卡中的局部方程为  $(u_{(3)}, -u_{(3)}^2/2i, 0)$ , 整体方程为  $((0, 0, 0), (u_{(3)} : -u_{(3)}^2/2i : 1))$ .  $E_1$  在  $B_3^{(3)}$  中的局部方程为  $u_{(3)} = v_{(3)} = 0$ ,  $E_2$  在  $B_3^{(3)}$  中的局部方程为  $z_{(3)} = -i, u_{(3)}^2 + iv_{(3)} = 0$ .

同样地, 通过写出这三条曲线对应的整体方程可以看出 (事实上, 这三条曲线的整体方程均为  $x = y = z = 0, u^2/2i + vw = 0$ ), 它们实际上是同一条曲线. 记之为  $E_3$ . 我们现在将之前做的坐标变换还原, 则  $X_3 \cap B_3$  的局部方程成为  $u^2 + (z + i)v = 0$ , 奇点的坐标成为  $(0, 0, -i)$ ,  $E_1$  的局部方程成为  $u_{(3)} = v_{(3)} = 0$ ,  $E_2$  的局部方程成为  $z_{(3)} = 0, u_{(3)}^2 + iv_{(3)} = 0$ ,  $E_3$  的局部方程为  $z_{(3)} = i, u_{(3)}^2 + 2iv_{(3)} = 0$ , 由此可以看出  $E_2$  与  $E_3$  不相交,  $E_1$  与  $E_3$  交于点  $((0, 0, i), (0 : 0 : 1))$ , 交点不是奇点.

#### 第四次爆破

我们已经看到,  $X_3$  在  $B_3^{(3)}$  中有一个奇点, 所以我们使用  $B_3$  中的局部坐标  $u_{(3)}^2 + (z_{(3)} + i)v_{(3)} = 0$  来对点  $(0, 0, -i)$  进行爆破. 作坐标变换  $z_{(3)} \mapsto z_{(3)} - i$  将爆破中心平移至原点, 方程成为  $u_{(3)}^2 + z_{(3)}v_{(3)} = 0$ ,  $E_1$  的局部方程成为  $u_{(3)} = v_{(3)} = 0$ ,  $E_2$  的局部方程成为  $z_{(3)} = i, u_{(3)}^2 + iv_{(3)} = 0$ ,  $E_3$  的局部方程为  $z_{(3)} = 2i, u_{(3)}^2 + 2iv_{(3)} = 0$ . 我们来考虑

$$x_{(4)}^2 + (z_{(4)} + i)y_{(4)} = 0$$

第一个坐标卡: 在  $B_1^{(4)}$  中, 我们有  $y_{(4)} = x_{(4)}v_{(4)}, z_{(4)} = x_{(4)}w_{(4)}$ . 所以  $X_4 \cap B_1^{(4)}$  的局部方程为

$$1 + v_{(4)}w_{(4)} = 0$$

其 *Jacobi* 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & w_{(4)} & v_{(4)} \end{pmatrix}$$

所以在  $B_1^{(4)}$  中  $X_4$  非奇异. 例外曲线在此坐标卡中的局部方程为  $(0, v_{(4)}, -1/v_{(4)})$ , 整体方程为  $((0, 0, 0), (1 : v_{(4)} : -1/v_{(4)}))$ . 容易看出,  $E_1 \cap B_1^{(4)} = \emptyset$ ,  $E_2$  在此坐标卡中的局部方程为  $x_{(4)}w_{(4)} = i, v_{(4)} + 1/w_{(4)} = 0$ ,  $E_3$  在此坐标卡中的局部方程为  $x_{(4)}w_{(4)} = 2i, v_{(4)} + 1/w_{(4)} = 0$ , 故在  $B_1^{(4)}$  中,  $E_1, E_2, E_3$  互不相交.

第二个坐标卡: 在  $B_2^{(4)}$  中, 我们有  $x_{(4)} = y_{(4)}u_{(4)}, z_{(4)} = y_{(4)}w_{(4)}$ . 所以  $X_4 \cap B_2^{(4)}$  的局部方程为

$$u_{(4)}^2 + w_{(4)} = 0$$

其 *Jacobi* 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2u_{(4)} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以在  $B_2^{(4)}$  中  $X_4$  非奇异. 例外曲线在此坐标卡中的局部方程为  $(u_{(4)}, 0, -u_{(4)}^2)$ , 整体方程为  $((0, 0, 0), (u_{(4)} : 1 : -u_{(4)}^2))$ . 容易看出,  $E_1 \cap B_2^{(4)} = \emptyset$ ,  $E_2$  在此坐标卡中的局部方程为  $y_{(4)}w_{(4)} = i, y_{(4)}u_{(4)}^2 = -i$ ,  $E_3$  在此坐标卡中的局部方程为  $y_{(4)}w_{(4)} = 2i, y_{(4)}u_{(4)}^2 = -2i$ , 故在  $B_2^{(4)}$  中,  $E_1, E_2, E_3$  互不相交.

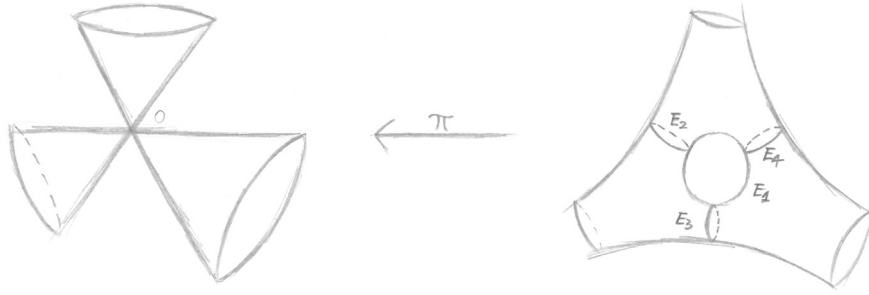
第三个坐标卡: 在  $B_3^{(4)}$  中, 我们有  $x_{(4)} = z_{(4)}u_{(4)}, y_{(4)} = z_{(4)}v_{(4)}$ . 所以  $X_4 \cap B_3^{(4)}$  的局部方程为

$$u_{(4)}^2 + v_{(4)} = 0$$

其 *Jacobi* 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2u_{(4)} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以在  $B_3^{(4)}$  中  $X_4$  非奇异. 例外曲线在此坐标卡中的局部方程为  $(u_{(4)}, -u_{(4)}^2, 0)$ , 整体方程为  $((0, 0, 0), (u_{(4)} : -u_{(4)}^2 : 1))$ . 同样地, 通过写出这三条曲线对应的整体方程可以看出 (事实上, 这三条曲线的整体方程均为  $x_{(4)} = y_{(4)} = z_{(4)} = 0, u_{(4)}^2 + v_{(4)}w_{(4)} = 0$ ), 它们实际上是同一条曲线. 记之为  $E_4$ . 容易看出,  $E_1$  在此坐标卡中的局部方程为  $u_{(4)} = v_{(4)} = 0$ ,  $E_2$  在此坐标卡中的局部方程为  $z = i, u^2 + v = 0$ ,  $E_3$  在此坐标卡中的局部方程为  $z_{(4)} = 2i, u_{(4)}^2 + 2v_{(4)} = 0$ , 故在  $B_3^{(4)}$  中,  $E_2, E_3, E_4$  互不相交,  $E_1$  与  $E_4$  交于点  $((0, 0, 0), (0 : 0 : 1))$ .



现在我们得到了  $E_1, E_2, E_3, E_4$  的相交情况, 即  $E_1$  分别与  $E_2, E_3, E_4$  各有一交点, 而  $E_2, E_3, E_4$  互不相交. 所以我们有

$$E_1 E_2 = E_1 E_3 = E_1 E_4 = 1, \quad E_2 E_3 = E_2 E_4 = E_3 E_4 = 0$$

使用与例 4.5 中完全相同的方法可以计算得到它们的自相交数均为 -2. 所以我们得到这种情形下的相交矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

注意, 为了与通常的习惯相符, 我们在这里将  $E_1$  与  $E_2$  的记号交换. 我们发现, 这个矩阵乘以 -1 后恰好为  $D_4$  型 *Dynkin* 图对应的 *Cartan* 矩阵. 所以此情形下的解消图为  $D_4$  型有限 *Dynkin* 图.

## 参考文献

- [CC05] Roger Carter and Roger William Carter. *Lie algebras of finite and affine type*, volume 96. Cambridge University Press, 2005.
- [DV34] Patrick Du Val. On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction (part i.). In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 30, pages 453–459. Cambridge University Press, 1934.
- [Har13] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Kle56] Felix Klein. *The Icosahedron: and the solution of equations of the fifth degree*. Dover, 1956.
- [McK80] John McKay. Graphs, singularities, and finite groups. In *Proc. Symp. Pure Math*, volume 37, page 61, 1980.
- [McK81] John McKay. Cartan matrices, finite groups of quaternions, and kleinian singularities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 81(1):153–154, 1981.
- [MFK94] David Mumford, John Fogarty, and Frances Kirwan. *Geometric invariant theory*, volume 34. Springer Science & Business Media, 1994.
- [Spr06] Tonny Albert Springer. *Invariant theory*, volume 585. Springer, 2006.
- [SR94] Igor Rostislavovich Shafarevich and Miles Reid. *Basic algebraic geometry*, volume 2. Springer, 1994.