Trabajo práctico 0: Procesamiento Digital de Imágenes

Diego Naranjo
Tecnológico de Costa Rica
l.naranjo.2@estudiantec.cr

Gabriel Bonilla
Tecnológico de Costa Rica
g.bonilla.1@estudiantec.cr

José Godínez
Tecnológico de Costa Rica
rodolfojose1996@estudiantec.cr

31 de agosto de 2025

1. Sistemas lineales

Demuestre si los siguientes sistemas $L\left\{u(t)\right\}$ (con entrada $u(t)$ y salida $g(t) = L\left\{u(t)\right\}$, y $h(t)$ una función cualquiera) son lineales o no lineales.
Para demostrar por contraejemplo programe la función que rechace la propiedad para 100 entradas generadas aleatoriamente:

- $g\left(t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)$
- $g\left(t\right) = \begin{cases} 1 & u(t) > 0 \\ 0 & u(t) \leq 0 \end{cases}$
- $g\left(t\right) = \ln\left(u(t)\right)$
- $g\left(t\right) = \cos\left(u(t)\right)$
- $g\left(t\right) = \ln\left(5^{u(t)}\right)$

1.1. $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)$

- **Homogeneidad** ($L\{\alpha u(t)\} = \alpha L\{u(t)\}$):

$$\begin{aligned} L\{u(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \\ L\{\alpha u(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha u(t) \\ L\{\alpha u(t)\} &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \\ L\{\alpha u(t)\} &= \alpha L\{u(t)\} \end{aligned}$$

  - **Aditividad** ($L\{u_1(t) + u_2(t)\} = L\{u_1(t)\} + L\{u_2(t)\}$)

$$\begin{aligned} L\{u(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \\ L\{u_1(t) + u_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) + u_2(t) \\ L\{u_1(t) + u_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) + \int_{-\infty}^{\infty} u_2(t) \\ L\{u_1(t) + u_2(t)\} &= L\{u_1(t)\} + L\{u_2(t)\} \end{aligned}$$

- **Conclusión:** $g(t)$ cumple las condiciones para ser un sistema lineal.

1.2. $g(t) = \begin{cases} 1 & u(t) > 0 \\ 0 & u(t) \leq 0 \end{cases}$

- **Homogeneidad** ($L\{\alpha u(t)\} = \alpha L\{u(t)\}$): Analizando los casos:
  - caso $u(t) > 0$, $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} L\{\alpha u(t)\} &= 1 \\ L\{\alpha u(t)\} &\neq \alpha L\{u(t)\} \end{aligned}$$

  Y evaluando un contraejemplo con $u(t) = 1$ y $\alpha = 2$

$$\begin{aligned} L\{\alpha u(t)\} &\stackrel{?}{=} \alpha L\{u(t)\} \\ L\{2\} &\stackrel{?}{=} 2L\{1\} \\ 1 &\neq 2 \end{aligned}$$

  Y se pueden ver con más detalle en la sección 1.6

- **Aditividad** ($L\{u_1(t) + u_2(t)\} = L\{u_1(t)\} + L\{u_2(t)\}$): Analizamos el caso donde $u_1(t), u_2(t) > 0$

$$\begin{aligned} L\{u_1(t) + u_2(t)\} &\stackrel{?}{=} L\{u_1(t)\} + L\{u_2(t)\} \\ 1 &\neq 1 + 1 \end{aligned}$$

- **Conclusión:** $g(t)$ no cumple con las condiciones para ser un sistema lineal.

1.3. $g(t) = \ln(u(t))$

- **Homogeneidad** ($L\{\alpha u(t)\} = \alpha L\{u(t)\}$)

$$\begin{aligned} L\{u(t)\} &= \ln(u(t)) \\ L\{\alpha u(t)\} &= \ln(\alpha u(t)) \\ L\{\alpha u(t)\} &= \ln(\alpha) + \ln(u(t)) \\ L\{\alpha u(t)\} &\neq \alpha L\{u(t)\} \end{aligned}$$

Y evaluando un contraejemplo con $u(t) = 1$ y $\alpha = 2$

$$\begin{aligned} L\{\alpha u(t)\} &\stackrel{?}{=} \alpha L\{u(t)\} \\ \ln(2) &\stackrel{?}{=} 2\ln(1) \\ 0{,}69 &\neq 0 \end{aligned}$$

- **Aditividad** ($L\{u_1(t) + u_2(t)\} = L\{u_1(t)\} + L\{u_2(t)\}$): Directamente por contra ejemplo

$$\begin{aligned} L\{u_1(t) + u_2(t)\} &\stackrel{?}{=} L\{u_1(t)\} + L\{u_2(t)\} \\ \ln(1 + 1) &\stackrel{?}{=} \ln(1) + \ln(1) \\ \ln(2) &\neq 0 \end{aligned}$$

- **Conclusión:** $g(t)$ no cumple con las condiciones para ser un sistema lineal y se pueden ver con más detalle los contraejemplos en la sección 1.6

1.4. $g(t) = \cos(u(t))$

- **Homogeneidad** ($L\{\alpha u(t)\} = \alpha L\{u(t)\}$): Directamente por contra-ejemplo:

$$L\{\alpha u(t)\} \stackrel{?}{=} \ln(\alpha u(t))$$
$$\cos(2\pi) \stackrel{?}{=} 2\cos(\pi)1 \neq -2$$

- **Aditividad** ($L\{u_1(t) + u_2(t)\} = L\{u_1(t)\} + L\{u_2(t)\}$)

$$\begin{aligned} L\{u(t)\} &= \cos(u(t)) \\ L\{u_1(t) + u_2(t)\} &= \cos(u_1(t) + u_2(t)) \\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ L\{u_1(t) + u_2(t)\} &= \cos(u_1(t))\cos(u_2(t)) - \sin(u_1(t))\sin(u_2(t)) \\ L\{u_1(t) + u_2(t)\} &\neq L\{u_1(t)\} + L\{u_2(t)\} \end{aligned}$$

  Y verificando lo obtenido con un contrajemplo:

$$L\{u_1(t) + u_2(t)\} \stackrel{?}{=} L\{u_1(t)\} + L\{u_2(t)\}$$
$$\cos(1+2) \stackrel{?}{=} \cos(1) + \cos(2)$$
$$-0{,}99 \neq 0{,}54 + -0{,}41$$

- **Conclusión:** $g(t)$ no cumple con las condiciones para ser un sistema lineal y se pueden ver con más detalle los contraejemplos en la sección 1.6

1.5. $g(t) = \ln(5^{u(t)})$

- **Homogeneidad** ($L\{\alpha u(t)\} = \alpha L\{u(t)\}$)

$$\begin{aligned} g(t) &= \ln(5^{u(t)}) \\ g(t) &= u(t)\ln(5), \text{con} \ln(a^b) = b\ln(a) \\ L\{u(t)\} &= u(t)\ln(5) \\ L\{\alpha u(t)\} &= \alpha u(t)\ln(5) \\ L\{\alpha u(t)\} &= \alpha L\{u(t)\} \end{aligned}$$

- **Aditividad** ($L\{u_1(t) + u_2(t)\} = L\{u_1(t)\} + L\{u_2(t)\}$)

$$\begin{aligned} L\{u(t)\} &= u(t)\ln(5) \\ L\{u_1(t) + u_2(t)\} &= (u_1(t) + u_2(t))\ln(5) \\ L\{u_1(t) + u_2(t)\} &= \ln(5)u_1(t) + \ln(5)u_2(t) \\ L\{u_1(t) + u_2(t)\} &= L\{u_1(t)\} + L\{u_2(t)\} \end{aligned}$$

- **Conclusión**: $g(t)$ sí cumple con los criterios para ser un sistema lineal.

1.6. Verificaciones de contraejemplos

Para cada uno de los sistemas que se determinaron como no lineales (b, c y d), se realizó:

- Generación de conjuntos u_1, u_2 con tamaño 100 cada uno y un escalar α. Para la función del ln, se acotaron los valores menores a 0 como 0,00001 por terminos de indefinición.
- Vectorialmente con torch se revisó la aditividad $L\{u_1(t) + u_2(t)\} \stackrel{?}{=} L\{u_1(t)\} + L\{u_2(t)\}$.
- Vectorialmente se revisó la homogeneidad $L\{\alpha u(t)\} = \alpha L\{u(t)\}$

Los resultados obtenidos en la figura 1

	func_descr	found_counter_example_additive	found_counter_example_multiplicative	is_linear
0	b_gt	True	True	False
1	c_gt	True	True	False
2	d_gt	True	True	False

Figura 1: Resultados de la prueba automatizada de búsqueda de contraejemplos en el análisis de los posibles sistemas lineales, donde los sistemas b, c y d se les encontró que no cumplen lo necesario para ser considerados lineales.

2. Interpolación bilineal

2.1. Proceso matemático

Para interpolar bilinealmente el valor de la coordenada z para cada uno de los puntos de una submatriz, se requiere identificar un plano que pasa por 3 puntos ya conocidos, en este caso de las esquinas. Para ello, tenemos que recordar que un plano está definido por la ecuación $ax + by + cz + d = 0$, siendo a, b y c los coeficientes del plano, d su offset y x, y y z las coordenadas de un punto en R^3.

Dicho esto, para calcular la ecuación del plano en cada una de las submatrices, vamos tomar 3 de sus puntos conocidos. Los vamos a denominar P_1, P_2 y P_3. Con ellos, vamos a calcular 2 vectores directores plano:

$$(P_1 \vec{-} P_2) = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2]$$
$$(P_2 \vec{-} P_3) = [x_2 - x_3, y_2 - y_3, z_2 - z_3]$$

Al estos vectores estar en el plano, sirven para obtener un vector normal del mismo, y así mismo, sus coeficientes. Esto se hace mediante el producto cruz de los vectores:

$$(P_1 \vec{-} P_2) \times (P_2 \vec{-} P_3) = \vec{n}$$

Una vez obtenido el vector normal $\vec{n}$, podemos definir la ecuación del plano de la siguiente manera:

$$n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$$

Para determinar el valor de d, simplemente se sustituyen, en la ecuación, los valores de x, y y z por las coordenadas de un punto conocido del plano y se despeja d. En este caso, el punto escogido puede ser cualquiera de P_1, P_2 y P_3:

$$d = -(n_1P_{1_x} + n_2P_{1_y} + n_3P_{1_z})$$

Ya se tienen todos los valores necesarios para poder despejar y encontrar la coordenada z de un punto utilizando la ecuación del plano, en casos que se conozcan sus coordenadas x, y:

$$z = \frac{(-d - n_1x - n_2y)}{n_3}$$

2.2. Ejemplo

La siguiente matriz U representa una submatriz de una imagen a la que se le aplicó un aumento con $\alpha = 2$:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & ? & 2 \\ ? & ? & ? \\ 3 & ? & 4 \end{bmatrix}$$

Dada la submatriz U, se tienen los puntos conocidos:

$$P_1 = [0, 0, 1], P_2[2, 0, 3], P_3 = [2, 2, 4]$$

Se definen los 2 vectores directores como:

$$P_1 \vec{-} P_2 = [-2, 0 - 2], P_2 \vec{-} P_3 = [2, 2, 4]$$

Se calcula el vector normal:

$$P_1 \vec{-} P_2 \times P_2 \vec{-} P_3 = [-4, -2, 4]$$

Se utiliza P_1 para obtener el valor de d:

$$d = -((-4 \cdot 0) + (-2 \cdot 0) + (4 \cdot 1)) = -4$$

Por último, se calcula la coordenada z para cada uno de los valores faltantes de la submatriz:

$$\begin{aligned}
Para\ (0,1,z),\ z &= \frac{(4 + (4 \cdot 0) + (2 \cdot 1))}{4} = 1{,}5 \\
Para\ (1,0,z),\ z &= \frac{(4 + (4 \cdot 1) + (2 \cdot 0))}{4} = 2 \\
Para\ (1,1,z),\ z &= \frac{(4 + (4 \cdot 1) + (2 \cdot 1))}{4} = 2{,}5 \\
Para\ (1,2,z),\ z &= \frac{(4 + (4 \cdot 1) + (2 \cdot 2))}{4} = 3 \\
Para\ (2,1,z),\ z &= \frac{(4 + (4 \cdot 2) + (2 \cdot 1))}{4} = 3{,}5
\end{aligned}$$

La submatriz U quedaría de la siguiente manera:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}5 & 2 \\ 2 & 2{,}5 & 3 \\ 3 & 3{,}5 & 4 \end{bmatrix}$$

2.3. Benchmark para cuantificar el error en el cambio de tamaño bilineal

2.3.1. Definición del conjunto de imágenes

Se seleccionó un conjunto de 10 imágenes variadas para poner a prueba el algoritmo de cambio de tamaño bilineal en distintos escenarios. Estas imágenes permiten evaluar el rendimiento del método en contextos diversos.

2.3.2. Proceso experimental

El flujo experimental consistió en los siguientes pasos:

1. Cargar cada imagen y normalizarla al rango $[0, 1]$.

2. Redimensionar la imagen original a un tamaño reducido (ej. mitad de la resolución).

3. Volver a expandir la imagen reducida al tamaño original utilizando interpolación bilineal.

4. Calcular métricas de error comparando la imagen original y la reconstruida.

Además, se implementaron las métricas **PSNR** y una métrica de **similitud porcentual** derivada del MSE, con el fin de contar con medidas tanto absolutas como relativas de calidad.

2.3.3. Métricas de evaluación

Se utilizaron las siguientes métricas:

- **MSE (Mean Squared Error):** mide el error promedio al cuadrado entre la imagen original y la reconstruida. Valores bajos indican mayor similitud.

- **PSNR (Peak Signal-to-Noise Ratio):** mide la relación señal-ruido en decibelios. Valores altos indican mejor calidad.

- **Similitud porcentual:** métrica definida en el rango $[0, 100]$, donde 100 representa similitud máxima.

2.3.4. Resultados del benchmark

La tabla 1 muestra los resultados obtenidos para las 15 imágenes procesadas en el experimento y el factor de cambio aplicado (escalado a la mitad y posterior reescalado al tamaño original).

Cuadro 1: Resultados del benchmark de interpolación bilineal.

Imagen	MSE	PSNR (dB)	Similitud (%)
0	0.001813	27.416	99.8187
1	0.001829	27.377	99.8171
2	0.001506	28.221	99.8494
3	0.000733	31.348	99.9267
4	0.000872	30.597	99.9128
5	0.002168	26.640	99.7832
6	0.000563	32.493	99.9437
7	0.000555	32.559	99.9445
8	0.000550	32.597	99.9450
9	0.002302	26.379	99.7698
10	0.001837	27.359	99.8163
11	0.000502	32.991	99.9498
12	0.001599	27.963	99.8401
13	0.001257	29.005	99.8743
14	0.001680	27.746	99.8320
Media	0.001318	29.379	99.8682
Desv. Est.	0.000636	2.437	0.0636

2.3.5. Discusión de resultados

Se observa que el error cuadrático medio (MSE) se mantiene en el orden de 10^{-3}, lo cual indica que la interpolación bilineal preserva la información de manera aceptable. Las métricas PSNR se encuentran en un rango de 26 a 33 dB, lo cual es consistente con una calidad percibida adecuada en aplicaciones de visión por computadora.

En cuanto a la similitud porcentual, todos los valores superan el 99,7 %, lo cual refuerza la idea de que el cambio de tamaño bilineal introduce un error bajo. La desviación estándar reportada es pequeña, lo cual demuestra estabilidad del método frente a diferentes imágenes.

En conclusión, el algoritmo de cambio de tamaño bilineal presenta un desempeño sólido en la preservación de calidad visual, aunque se aprecia que en imágenes con más detalle fino (ej. índices 5 y 9) el error tiende a ser mayor debido a la pérdida de información en el proceso de reducción.