

Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики

В.В. Григорьев, Г.В. Лукьянова, К.А. Сергеев

АНАЛИЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Санкт-Петербург — 2009

1 Основные понятия

Центральными понятиями курса «Теория автоматического управления» являются термины „управление“ и „система управления“.

Определение 1. Управление — это целенаправленное воздействие на объект (управляющий процесс), приводящее к заданному изменению (или поддержанию) его состояния.

Определение 2. Система управления — это комплекс (или система) взаимосвязанных элементов, участвующих в процессе управления.

Каждая система управления управляет объектом. Состояние этого объекта характеризуется некоторыми количественными величинами, изменяющимися во времени, которые будем называть переменными состояния или вектором состояния. В естественных процессах в роли таких переменных могут выступать механические перемещения (линейные или угловые); их скорости; электрические переменные; температура; плотность; содержание определённого вещества; объем выпускаемой продукции, курс ценных бумаг и т.п. [2]

Система управления управляет объектом в соответствии с целью управления.

Определение 3. Цель управления — это изменение состояния объекта в соответствии с заданным законом управления.

Определение 4. Закон управления — это правило, которое определяет способ управления.

Любая система управления может быть представлена в виде функциональной совокупности элементов, которая изображена на рисунке 1.1.

На этом рисунке представлена типовая функциональная схема системы управления. В ее состав входят следующие элементы:

- Технический объект (ТО) — объект, которым следует управлять в соответствии с его функциональным назначением.

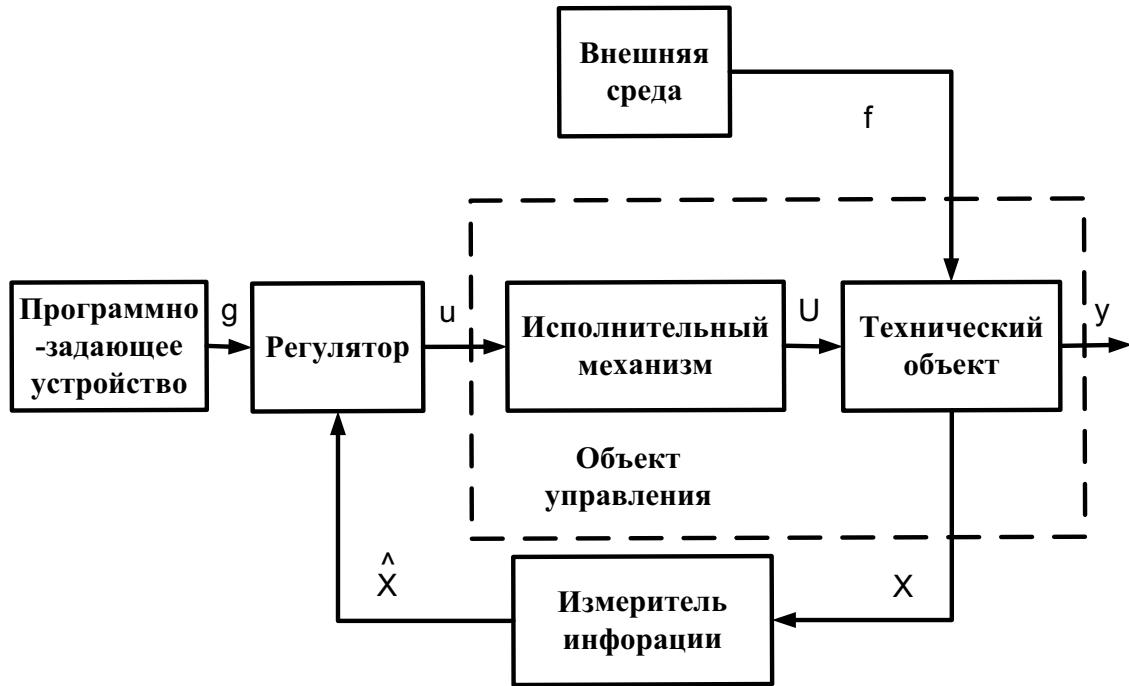


Рисунок 1.1 — Функциональная схема системы управления

- Исполнительный механизм (ИМ) — механизм, который воздействует на технический объект с целью изменения его поведения в среде функционирования (U).
- Измеритель информации (ИИ) — устройство, вырабатывающее в каждый момент времени текущую информацию о поведении технического объекта (\hat{x}).
- Программно-задающее устройство (ПрЗУ) — устройство, предназначенное для выработки на сигнальном уровне требуемого поведения технического объекта в соответствии с целью его функционирования (g).
- Регулятор (Р) — устройство, предназначенное для выработки управляющих воздействий на основе сравнения текущей информации о поведении технического объекта и его желаемого поведения, задаваемого программно-задающим устройством (u).
- Внешняя среда (ВС) — отражает влияние внешней среды на работу отдельных элементов (функциональных блоков) системы управления. Воздействие, которое оказывает внешняя среда на систему управления, называют возмущающим воздействием (f).

Совокупность технического объекта, исполнительного управляющего механизма и преобразователя информации в дальнейшем будем называть объектом управления (ОУ).

Большинство систем автоматического управления (САУ) использует принцип отрицательной обратной связи для сведения к минимуму отклонения технического объекта от желаемого поведения.

Классификация систем управления

1 По характеру протекающих процессов (принципу действия)

При функциональном изображении элементов системы выделяют входные (g) и выходные (y) переменные, причем считается, что элемент одностороннего принципа действия, т.е. выходная переменная (следствие) может изменяться только в результате изменения входной переменной (причины).

Все системы автоматического управления в зависимости от их описания подразделяются на системы непрерывного и дискретного действия.

Определение 5. К системам непрерывного действия относятся системы, в которых для каждого элемента системы непрерывному изменению входного сигнала соответствует непрерывное изменение выходного сигнала (см. рисунок 1.2).

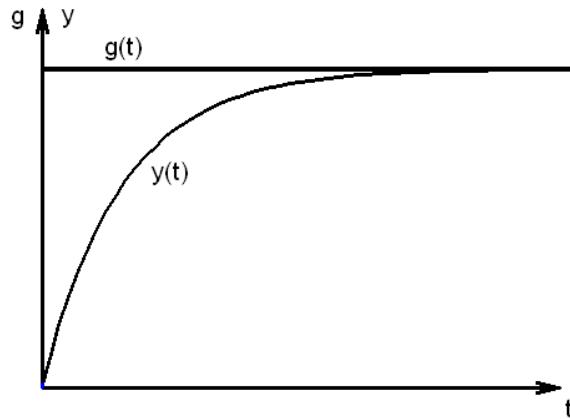


Рисунок 1.2 — Входной (g) и выходной (y) сигналы непрерывной системы

Определение 6. К системам дискретного действия относятся системы, в которых имеется хотя бы один элемент, у которого

непрерывному изменению входного сигнала соответствует дискретное по времени изменение выходного сигнала. (см. рисунок 1.3).

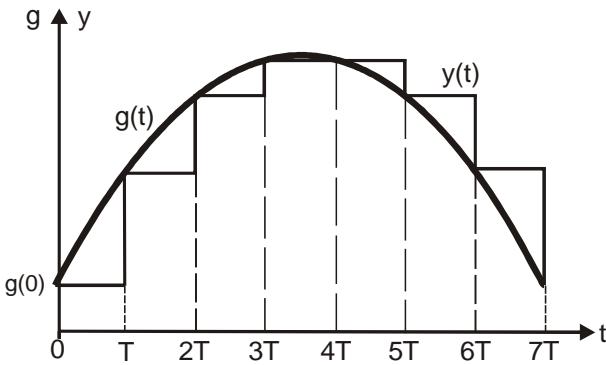


Рисунок 1.3 — Входной (g) и выходной (y) сигналы дискретной системы

На рисунке 1.3 обозначены: T — интервал дискретности; t — моменты времени, в которые происходит изменение сигнала, $t = mT$, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ — номер интервала дискретности.

Для любого $t = mT$ рассматривается промежуток времени $t \in [mT, (m+1)T]$, тогда для любых значений $0 \leq \tau < T$ выходное значение принимает вид $y(mT + \tau) = g(mT)$.

Определение 7. Элемент, описание которого задается подобным уравнением, называется экстраполятором нулевого порядка.

Определение 8. Экстраполяция — операция замены непрерывной функции кусочно-непрерывной функцией.

2 По способу описания элементов системы

Каждую САУ можно представить в виде элементарных блоков. В зависимости от принципа действия и тех физических законов, на которых основана работа таких блоков, составляется уравнение связи между входной и выходной переменными. Эти уравнения могут быть алгебраическими, дифференциальными, разностными и уравнениями в частных производных.

В зависимости от описания элементов система подразделяется на следующие типы: детерминированная и недетерминированная система.

Непрерывной детерминированной (определенной) — когда все элементы системы задаются линейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями.

В свою очередь этот класс систем подразделяется на линейные и нелинейные.

Если в системе имеется хотя бы один элемент, описание которого задается нелинейным алгебраическим или дифференциальным уравнением, то система относится к классу непрерывных нелинейных детерминированных систем.

Если все элементы системы описываются линейными уравнениями, то система относится к классу непрерывных линейных детерминированных систем.

Если все параметры уравнения движения системы не меняются во времени, то такая система называется стационарной.

Если хотя бы один параметр уравнения движения системы меняется во времени, то такая система называется нестационарной или с переменными параметрами.

Системы, в которых определены внешние (задающие) воздействия и описываются непрерывными или дискретными функциями времени, относятся к классу детерминированных систем.

Системы, в которых имеют место случайные сигнальные или параметрические воздействия и описываются стохастическими дифференциальными или разностными уравнениями, относятся к классу стохастических систем.

Если в системе есть хотя бы один элемент, описание которого задается уравнением в частных производных, то система относится к классу систем с распределенными переменными.

2 Математические модели непрерывных систем

2.1 Преобразование Лапласа и его свойства

Определение 9. Функция вещественной переменной $f(t)$ называется *оригиналом*, если она удовлетворяет следующим условиям [1]:

- a) $f(t)$ — непрерывная для любого $t \geq 0$;
- б) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
- в) существуют числа C_1, C_2 такие, что $|f(t)| < C_1 e^{C_2 t}$.

Определение 10. Преобразованием Лапласа $F(s)$ оригинала $f(t)$ называется интеграл вида

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt,$$

где s — комплексная переменная (оператор Лапласа).

Определение 11. Обратным преобразованием Лапласа, с помощью которого находится оригинал по известному изображению, называется интеграл вида

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} e^{st} ds,$$

где $j = \sqrt{-1}$,

c — вещественная постоянная, абсцисса абсолютной сходимости.

Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность

$$\mathcal{L}\left\{\sum_i f_i(t)\right\} = \sum_i \mathcal{L}_i F_i(s)$$

и для любого $c = \text{const}$

$$\mathcal{L}\{cf(t)\} = c\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Верно так же и обратное

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_i F_i(s)\right\} = \sum_i \mathcal{L}_i f_i(t).$$

Преобразование суммы равно сумме преобразований.

2. Дифференцирование оригинала

Если $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, то $\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0)$.

Таким образом, аналитическая операция дифференцирования заменена арифметической операцией умножения, поэтому иногда s называют оператором дифференцирования.

Если $f(0) = \dot{f}(0) = \dots = f^{k-1}(0) = 0$, то $\mathcal{L}\{f^k(t)\} = s^k F(s)$.

3. Интегрирование оригинала

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s),$$

где $\frac{1}{s}$ — оператор интегрирования.

4. Начальные и конечные значения оригинала

Начальное значение -

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s).$$

Конечное значение -

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$$

Вычисление обратного преобразования Лапласа с помощью теоремы вычетов

Определение 12. Комплексное число s_0 называется полюсом функции комплексного аргумента $\varphi(s)$, если $\varphi(s) \xrightarrow[s \rightarrow s_0]{} \infty$.

Различают кратные полюсы.

Пример 2.1 1. Функция комплексного аргумента

$$\varphi(s) = \frac{1}{s+5}$$

имеет полюс $s_0 = -5$ кратности $k = 1$.

2. Функция комплексного аргумента

$$\varphi(s) = \frac{1}{(s+5)^3}$$

имеет полюс $s_0 = -5$ кратности $k = 3$.

Теорема 2.1 (**Теорема вычетов**). Обратное преобразование Лапласа равно сумме вычетов функции

$F(s)e^{st}$ в полюсе s_{0i} , т.е.

$$\mathcal{L}\{F(s)\} = \sum_i Res_{s_0i} F(s) s^{st},$$

$Res_{s_0i} F(s) s^{st}$ – означает функции $F(s)e^{st}$ в полюсе s_0i .

Правило вычисления вычетов

1. Случай, когда кратность $k = 1$:

$$Res_{s_0} \varphi(s) = \lim_{s \rightarrow s_0} \varphi(s)(s - s_0).$$

2. Случай, когда $k > 1$:

$$Res_{s_0} \varphi(s) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left(\varphi(s)(s - s_0)^k \right).$$

2.2 Уравнения движений непрерывных стационарных систем

Уравнение движения системы управления записано в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases}, \quad (2.1)$$

где $x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{vmatrix}$ – n -мерный вектор состояния, состоящий из n переменных. ($x \in R^n$)

$u = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_k \end{vmatrix}$ – k -мерный вектор задающих внешних (возмущающих) воздействий. ($u \in R^k$)

$y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_l \end{vmatrix}$ – l -мерный вектор выходных или регулируемых

переменных. ($y \in R^l, l \leq n$)

$f(x, g)$ - n -мерная векторозначная нелинейная функция относительно вторых аргументов x, f такая, что решение уравнения движения является единственным.

Чаще всего в качестве переменной состояния x_i будем выбирать реальные физические переменные, которые характеризуют движение объекта и системы (положение координат, скорость изменения, ускорение). Под вектором состояния понимается такой минимальный набор переменных, который дает полную информацию о поведении объекта или системы (знание вектора состояния в текущий момент времени t_0 ($x(t_0)$) и внешних воздействий ($u(t)$) при $t \geq t_0$ позволяет однозначно предсказать поведение объекта или системы для любого t при $t \geq t_0$).

$x(t_0)$ и $f(t), t \geq t_0$

$x(t)$ и $y(t), t \geq t_0$

Фактически состояние — это память о том, что действовало на систему до текущего момента времени.

В уравнении движения (2.1) функция $h(x)$ — это функция связи регулируемых переменных с переменными состояния и является l -мерной нелинейной вектор-функцией векторного аргумента. Реакция системы (переходный процесс) при заданном внешнем воздействии и фиксированных начальных значениях может быть получена (проанализирована) на основе решения исходного уравнения движения при заданных начальных условиях $x(0)$ и заданной вынужденной функции $u(x)$, определенной для любых $t \geq 0$.

Параметры переходной характеристики:

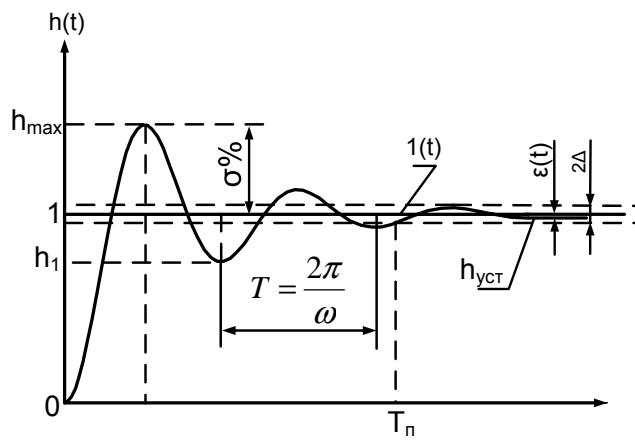
1) время переходного процесса $T_{\text{п}}$ — минимальное время, по истечении которого выходная величина будет оставаться близко к установленвшемуся значению с заданной точностью.

2) перерегулирование (σ)

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100\%$$

обычно значение перерегулирования лежит в пределах $\sigma = (10 - 30)\%$;

3) статическое отклонение



$$\varepsilon(t) = 1(t) - h_{y\text{ст}};$$

4) частота колебаний процесса

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

где Т – период колебаний;

5) декремент затухания

$$x = \left| \frac{h_{\max} - h_{y\text{ст}}}{h_1 - h_{y\text{ст}}} \right|;$$

6) число колебаний (n – число максимумов переходной характеристики).

Пусть на основе физических законов получены уравнения связи между входными и выходными переменными и составлена система уравнений, описывающая взаимосвязь входных переменных с выходными.

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, g) \\ y = C(x) \end{cases},$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – \$n\$-мерный вектор состояния, состоящий из \$n\$ переменных ($x \in R^n$),

$$g = \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ g_k \end{vmatrix} - k\text{-мерный вектор задающих воздействий (или входных переменных) } (g \in R^k),$$

$$y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_k \end{vmatrix} - k\text{-мерный вектор выходных или регулируемых переменных } (y \in R^k, k \leq n),$$

$F(x, g)$ — n -мерная нелинейная векторозначная функция векторного аргумента, непрерывная по каждому из аргументов, определяет связь между вектором состояния системы и входным (задающим) воздействием.

Функция $C(x)$ определяет связь между выходными (регулируемыми) переменными с вектором состояния системы. Уравнение 2.2 называют „Вход-Состояние-Выход“ (B-C-B).

Чаще всего, в качестве переменной состояния x_i выбираются реальные физические переменные, которые характеризуют движение объекта или системы (положение координат, скорость изменения, ускорение).

Под вектором состояния системы понимается тот минимальный набор переменных, который позволяет по текущему значению состояния и значению изменения входных переменных однозначно предсказать будущее поведение регулируемых переменных.

Предполагается, что правая часть исходного дифференциального уравнения такова, что при произвольных начальных условиях $x(0) \in R^n$ и вектор-функции $g(t)$ решение дифференциального уравнения $x(t)$ существует и единственное для любых моментов времени $t \geq 0$.

Решения дифференциальных уравнений определяют поведение процессов в системе.

Решения, порождённые ненулевыми начальными условиями $x(0) \in R^n$ при $g(t) \equiv 0$ для любого момента времени $t = 0$, определяют свободную составляющую переходных процессов системы.

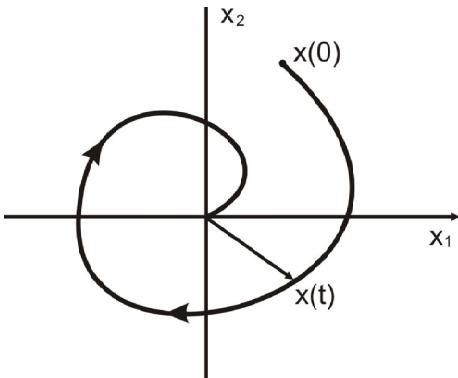


Рисунок 2.1 — Фазовая траектория движения системы

Эта составляющая определяет качество процессов в системе и характеризует свойства системы, такие как инерционность, быстродействие.

Решение уравнения при нулевых начальных условиях $x(0) = 0$ и при заданной вектор-функции $g(t)$ для любого времени $t > 0$ определяет вынужденную составляющую переходных процессов.

Вынужденная составляющая характеризует точностные свойства системы (точность стабилизации, слежения, воспроизведения программой задающих воздействий).

Изображение поведения вектора состояния $x(t)$ в пространстве состояний R^n называют траекториями движения системы. Если в качестве переменных вектора состояния x_1, x_2, \dots, x_n выбрано положение, скорость изменения и т.п. вплоть до n^{-1} производной от положения до пространств состояний, то изображение называют фазовым пространством, а траектории движения системы — фазовыми траекториями.

Пример фазовой траектории приведен на рисунке 2.1.

Линейные уравнения вход-состояние-выход

Линейные уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)g \\ y = C(x) \end{cases} \quad (2.2)$$

где x — n -мерный вектор состояния ($x \in R^n$),

g — k -мерный вектор внешних воздействий ($g \in R^k$),

y — k -мерный вектор выходных или регулируемых переменных ($y \in R^k$),

$A(t) = [a_{ij}(t)]_{i=1,n;j=1,n}$ — квадратная матрица $n \times n$, элементы которой в общем случае могут зависеть от времени. Эта

матрица определяет динамические свойства системы — свободную составляющую переходных процессов.

$B(t) = [b_{ij}(t)]_{i=\overline{1,n};j=\overline{1,k}}$ — прямоугольная матрица $n \times k$, определяющая точки приложения внешних воздействий и называемая матрицей входа.

$C(t) = [c_{ij}(t)]_{i=\overline{1,k};j=\overline{1,n}}$ — прямоугольная матрица $k \times n$, определяющая связь переменных вектора состояния с выходными переменными и называемая матрицей выхода.

Рассмотрим уравнение движения линейной стационарной системы, описываемое соотношениями (2.2). Определим $x(t)$ при нулевых начальных условиях $x(0) \in R^n$ и действии внешнего воздействия $g(t)$ для любых $t \geq 0$:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bg(\tau)d\tau = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A\tau}Bg(t-\tau)d\tau.$$

Первое слагаемое решения первого уравнения системы (2.2), порожденное ненулевыми начальными условиями, определяет свободную составляющую переходных процессов линейной системы. Второе слагаемое, порожденное вынуждающей функцией $g(t)$, определяет вынужденную составляющую переходных процессов.

Вычисление переходной функции по уравнению вход-состояние-выход для системы с одним входом и одним выходом

Определение 13. Переходная функция $h(t)$ — это реакция системы $y(t)$ при нулевых начальных условиях и единичном ступенчатом задающем воздействии, т.е. $h(t) = y(t)$ при $x(0) = 0$ и

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим систему, описываемую уравнениями движения

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(x) \end{cases}. \quad (2.3)$$

Определим траекторию движения $x(t)$ при нулевых начальных условиях:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{\tau}Bg(t-\tau)d\tau = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A\tau}Bg(t-\tau)d\tau.$$

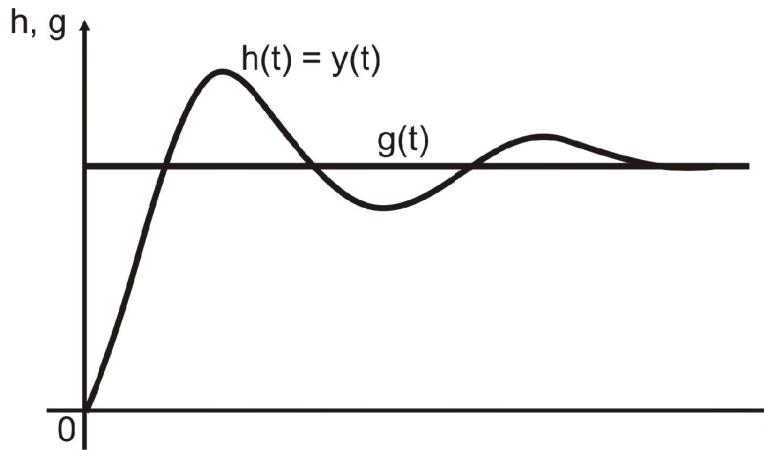


Рисунок 2.2 — Переходная функция

Рассмотрим отдельно вынужденную составляющую:

$$x(t) = \int_0^t e^{A\tau} B d\tau = \left(\int_0^t e^{A\tau} d\tau \right) B = \exists_{A^{-1}} A^{-1} e^{A\tau} \Big|_0^t \cdot B = A^{-1} (e^{At} - I) B.$$

Если A – неособая, то

$$h(t) = y(t) = C A^{-1} (e^{At} - I) B.$$

Подставив в полученное выражение разложение матричной экспоненты в бесконечный ряд

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!},$$

получим

$$h(t) = C A^{-1} \left(\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} - I \right) B \right) = C A^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} B = C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^{i-1} t^i}{i!} B. \quad (2.4)$$

Пример 2.2 *Дано: система, описываемая матрицами*

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Найти: $h(t)$.

Решение. Разложение в ряд в общем виде записывается как

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^{i-1}t^i}{i!} = It + \frac{At^2}{2} + \frac{A^2t^3}{3!} + \dots$$

Найдем квадрат и куб матрицы A :

$$A^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, A^3 = 0,$$

следовательно, в ряде используются только первые два

члена:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^{i-1}t^i}{i!} = It + \frac{At^2}{2} = \begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0,5t^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 0,5t^2 \\ 0 & t \end{vmatrix}.$$

Окончательно получаем

$$h(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t & 0,5t^2 \\ 0 & t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,5t^2 \\ t \end{vmatrix} = 0,5t^2.$$

График переходной функции представлен на рисунке 2.3.

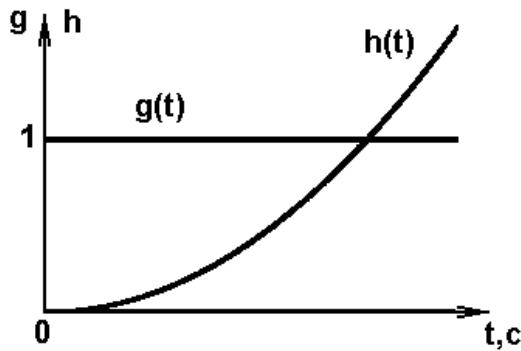


Рисунок 2.3 — Переходная функция $h(t)$ для примера 2.2

2.3 Линеаризация уравнений движения

Линеаризация нелинейных уравнений движения с гладкими непрерывными нелинейными зависимостями основана:

а) на физическом принципе действия любой системы автоматического управления, а именно, на стремлении системы свести отклонения от требуемых траекторий движения к малым значениям (к нулю), т.е. система управления, как правило, работает в области малых отклонений от требуемых траекторий движения, а,

следовательно, при малых отклонениях замена нелинейной функции дает малые погрешности;

б) на разложении нелинейных функций в ряд Тейлора в окрестности точек, определённых требуемыми траекториями движения и учтете только линейных членов разложения в предположении, что высшие члены разложения, начиная с квадратичного, дают более высокий порядок малости.

Рассмотрим нелинейное уравнение движения системы вход-состояние-выход

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, g) \\ y = C(x) \end{cases},$$

$$F(x, g) = \begin{bmatrix} f_1(x, g) \\ f_2(x, g) \\ \vdots \\ f_n(x, g) \end{bmatrix} \text{ – вектор-функция,}$$

где $f_i(x, g)$ – скалярная, нелинейная непрерывная функция векторных аргументов.

$$C(x) = \begin{bmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \\ \vdots \\ C_k(x) \end{bmatrix},$$

где $C_i(x)$ – скалярная, нелинейная непрерывная функция векторного аргумента.

Задача линеаризации нелинейных уравнений движения состоит из двух подзадач:

- 1) программирование желаемых траекторий движения;
- 2) линеаризация с помощью уравнений относительно желаемых траекторий движения.

Задача программирования заключается в определении желаемых траекторий движения $x^*(t)$ и $g^*(t)$ таких, что, во-первых, эти траектории движений должны обращать исходное уравнение в тождество, т.е. удовлетворять исходным уравнениям движения, а, во-вторых, должны обеспечивать требуемую цель (назначение функционирования) системы, т.е. $x^*(t)$ и $g^*(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = A(x^*(t), g^*(t)) \\ y^* = C(x^*(t)) \end{cases} \quad (2.5)$$

Задача программирования, как правило, решается с помощью численных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений [1].

Разложим в ряд Тейлора нелинейные функции $A(x, g)$ и $C(x)$ в окрестности найденных желаемых траекторий движения $x^*(t)$, $g^*(t)$ и $y^*(t)$

$$A(x, g) = A(x^*, g^*) + \frac{\partial A(x, g)}{\partial x} \Big|_{x^*, g^*} (x - x^*) + \frac{\partial A(x, g)}{\partial g} \Big|_{x^*, g^*} (g - g^*) +$$

+ члены более высокого порядка малости.

$$C(x) = C(x^*) + \frac{\partial C(x)}{\partial x} \Big|_{x^*, g^*} (x - x^*) +$$

+ члены более высокого порядка малости.

Введём обозначения:

$\Delta x = x - x^*$ – приращение по вектору состояния,

$\Delta g = g - g^*$ – приращение по внешним воздействиям,

$\Delta y = y - y^*$ – приращение по выходным переменным.

$$\frac{\partial A(x, g)}{\partial x} \Big|_{x^*, g^*} = A(t) – матрица размерности $n \times n$.$$

$$\frac{\partial A(x, g)}{\partial g} \Big|_{x^*, g^*} = B(t) – матрица размерности $n \times k$.$$

$$\frac{\partial C(x)}{\partial x} \Big|_{x^*, g^*} = C(t) – матрица размерности $k \times n$.$$

Запишем приближенное выражение функций с использованием вышеприведенных уравнений

$$A(x, g) = A(x^*, g^*) + A(t)\Delta x + B(t)\Delta g,$$

$$C(x) = C(x^*) + C(t)\Delta x.$$

Вычтем из исходного уравнения движения уравнение движения (2.5), которому удовлетворяют желаемые траектории движения:

$$\begin{cases} \dot{x} - \dot{x}^* = A(x, g) - A(x^*, g^*) \\ y - y^* = C(x) - C(x^*) \end{cases}$$

Получим линеаризованные уравнения в приращениях:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = A(t) \Delta x + B(t) \Delta g \\ \Delta y = C(t) \Delta x \end{cases}$$

2.4 Формы задания линеаризованных уравнений движения с постоянными коэффициентами для систем с одним входом и одним выходом

1 Уравнения движения в виде дифференциального уравнения n -го порядка.

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j g(t)}{dt^j}, \quad (2.6)$$

где y — выходная (регулируемая) переменная,
 g — входное (внешнее) воздействие,
 $a_i, i = \overline{0, n}; b_j, j = \overline{1, m}$ — постоянные коэффициенты, зависящие от параметров системы,
 n — порядок левой части, определяет порядок системы,
 m — порядок правой части, причём $m \leq n$ — условие физической реализуемости.

Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

и может быть получено из исходного уравнения заменой в левой части уравнений i -й производной выходной величины на алгебраическую переменную s в степени i . Корни этого уравнения s_1, s_2, \dots, s_n называют корнями системы.

2 Уравнения движения в операторной форме могут быть получены из уравнения (2.5) путем замены операции дифференцирования оператором дифференцирования, т.е. вводится оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$ такой, что

$$y(t) \implies py(t) = \frac{dy(t)}{dt}.$$

При

$$p^i = \frac{d^i}{dt^i}$$

получим

$$p^i y(t) = \frac{d^i y(t)}{dt^i}.$$

Тогда уравнение (2.6) можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i y(t) = \sum_{j=0}^m b_j p^j g(t).$$

Задание в виде передаточной функции, основанной на применении изображения Лапласа.

Рассмотрим систему, на вход которой поступает $g(t)$, а на выходе — $y(t)$. Определим изображение Лапласа входной и выходной переменной.

Введем обозначения:

$Y(s)$ — преобразование Лапласа выходной переменной.

$$Y(s) = \int_0^\infty e^{st} y(t) dt.$$

$G(s)$ — преобразование Лапласа входной переменной.

$$G(s) = \int_0^\infty e^{st} g(t) dt,$$

где s — оператор Лапласа.

Определение 14. Передаточная функция ($\Pi\Phi$) системы (объекта) — это отношение изображения Лапласа выходной переменной к изображению Лапласа входной переменной при нулевых начальных условиях, т.е.

$$W(s) = \frac{Y(s)}{G(s)}.$$

Вычисление передаточной функции по уравнению движения, заданному в виде дифференциального уравнения n -го порядка

Возьмём преобразование Лапласа от левой и правой частей уравнения (2.6) при нулевых начальных условиях, т.е.

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(0) = 0, g(0) = 0, \dot{g}(0) = 0, \dots, g^{(m-1)}(0) = 0.$$

$$\mathcal{L} \left[\sum_n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} \right] = \mathcal{L} \left[\sum_m b_j \frac{d^j g(t)}{dt^j} \right]. \quad (2.7)$$

используя свойство линейности, непрерывное преобразование Лапласа, выражение (2.7) приобретает вид:

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{L}\left[\frac{d^i y(t)}{dt^i}\right] = \sum_{j=0}^m b_j \mathcal{L}\left[\frac{d^j g(t)}{dt^j}\right]$$

Обозначим через $Y(s)$ изображение Лапласа от выходной функции $y(t)$ и через $G(s)$ — изображение Лапласа от входной функции $g(t)$, т.е.

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)], G(s) = \mathcal{L}[g(t)].$$

Преобразование Лапласа от производной функции имеет вид:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] = sY(s) - y(0)$$

При нулевых начальных условиях изображение Лапласа i -ой производной определяется как

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i y(t)}{dt^i}\right] = s^i Y(s)$$

Тогда, с учетом введенных обозначений, уравнение (2.7) можно записать в виде

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i s^i\right) Y(s) = \left(\sum_{j=0}^m b_j s^j\right) G(s).$$

В результате передаточная функция системы описывается уравнением

$$W(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (2.8)$$

Учитывая, что:

$$B(s) = \sum_{j=0}^m b_j s^j, \quad A(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i,$$

уравнение (2.8) можно переписать в виде

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

Приравняем числитель $B(s)$ уравнения (2.8) к нулю, тогда корни этого полинома $s_{10}, s_{20}, \dots, s_{m0}$ называют нулями передаточной функции.

Приравняем знаменатель $A(s)$ уравнения (2.8) к нулю. Корни характеристического полинома числителя s_1, s_2, \dots, s_n называют полюсами передаточной функции.

Замечание 1. Исходное дифференциальное уравнение (2.6) задает наиболее полное описание системы. Передаточная функция взаимно однозначно связана с дифференциальным уравнением, если у нее нет одинаковых нулей и полюсов. Если имеет место равенство нулей и полюсов, то порядок ПФ понижается на число равных нулей и полюсов и ПФ уже неоднозначно связана с исходным дифференциальным уравнением, что не проявляется при анализе процессов в системе при нулевых начальных условиях. Только ненулевые начальные условия могут породить различия в характере переходных процессов, полученных в результате решения дифференциального уравнения.

Если система полностью управляема и полностью наблюдаема, то ПФ и исходное дифференциальное уравнение связаны взаимно однозначно.

4. Задание уравнения движения в форме вход-состояние-выход

Система описывается уравнением

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Bg \\ y = Cx \end{cases},$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния,

$g \in R^1$ — внешнее воздействие,

$y \in R^1$ — выходная (регулируемая) переменная,

F — $(n \times n)$ матрица, определяющая динамические свойства системы,

B — $(n \times 1)$ матрица входов,

C — $(1 \times n)$ матрица выходов.

Связь уравнения вход-состояние-выход с передаточной функцией системы

Для нахождения передаточной функции вычислим преобразование Лапласа от левых и правых частей уравнения при

нулевых начальных условиях:

$$\begin{aligned}x(0) &= 0 \\Y(s) &= \mathcal{L}[y(t)] \\G(s) &= \mathcal{L}[g(t)] \\X(s) &= \mathcal{L}[x(t)]\end{aligned}$$

Применим преобразование Лапласа к правой части

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\dot{x}(t)] &= \mathcal{L}[Fx(t) + Bg(t)] \\ \mathcal{L}[y(t)] &= \mathcal{L}[Cx(t)]\end{aligned},$$

где

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0)|_{x(0)=0} = sX(s)$$

Тогда преобразование Лапласа уравнения вход-состояние-выход примет вид:

$$\begin{cases} X(s) = FX(s) + BG(s) \\ Y(s) = CX(s) \end{cases}.$$

В первом уравнении перенесём слагаемые при $X(s)$ в левую часть и выразим $X(s)$:

$$(sI - F)X(s) = BG(s).$$

$$X(s) = (sI - F)^{-1}BG(s).$$

Выходная переменная системы описывается уравнением:

$$Y(s) = C(sI - F)^{-1}BG(s).$$

2.5 Эквивалентные преобразования моделей вход-состояние-выход (BCB), канонические преобразования, управляемость и наблюдаемость

1 Рассмотрим уравнение движения системы в нормальной форме Коши [1], [2], [3]:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad (2.9)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^k$, $y \in R^l$;

A — $(n \times n)$ — матрица, определяющая динамические свойства

системы;

$B - (n \times k)$ — матрица входов;

$C - (l \times n)$ — матрица выходов.

Под эквивалентными преобразованиями (или преобразованиями подобия) будем понимать трансформацию первоначальной модели ВСВ посредством изменения базиса (или системы координат).

Введем в рассмотрение новый (преобразованный) вектор состояния:

$$x_{\text{пп}} = Px, \quad (2.10)$$

где P — матрица преобразования (подобия), удовлетворяющая условию невырожденности, т.е. $\det P \neq 0$.

Тогда существует обратное преобразование:

$$x = P^{-1}x_{\text{пп}} \quad (2.11)$$

Продифференцируем выражение (2.10) по времени и подставим (2.9) в (2.11), тогда получим:

$$\dot{x}_{\text{пп}} = P\dot{x} = PAx + BPu = PAP^{-1}x_{\text{пп}} + PBu,$$

Выходная переменная имеет вид:

$$y = CP^{-1}x_{\text{пп}}.$$

Введем обозначения: $A_{\text{пп}} = PAP^{-1}$; $B_{\text{пп}} = PB$; $C_{\text{пп}} = CP^{-1}$ — подобные матрицы.

Тогда преобразованная модель имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_{\text{пп}} = A_{\text{пп}}x_{\text{пп}} + B_{\text{пп}}u \\ y = C_{\text{пп}}x_{\text{пп}} \end{cases}, \quad (2.12)$$

Подобные матрицы имеют следующие свойства:

- 1) $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A_{\text{пп}}) = a(\lambda)$, т.е. подобные матрицы обладают одинаковым полиномом;
- 2) $\lambda_i A = \lambda_i A_{\text{пп}} = \lambda_i^*$, где λ_i — собственные числа, т.е. у подобных матриц совпадают собственные числа;
- 3) $W(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_{\text{пп}}(sI - A_{\text{пп}})B_{\text{пп}}$, т.е. у подобных матриц одинаковые передаточные функции.

Таким образом для подобных систем сохраняются связи выходных и входных переменных, а, следовательно, и модели вход-выход.

2 Канонические представления моделей ВСВ.

Под каноническими представлениями будем понимать наиболее простые модели ВСВ, соответствующие исходным уравнениям системы (2.9).

Определение 15. Диагональной формой называется модель, представленная уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + b_2 u \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_n x_n + b_n u \\ y = x_1 + x_2 + \dots + x_n \end{cases}$$

или

$$A_{\Delta} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}; \quad b_{\Delta} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix}; \quad C_{\Delta} = |1 \ 1 \dots 1|$$

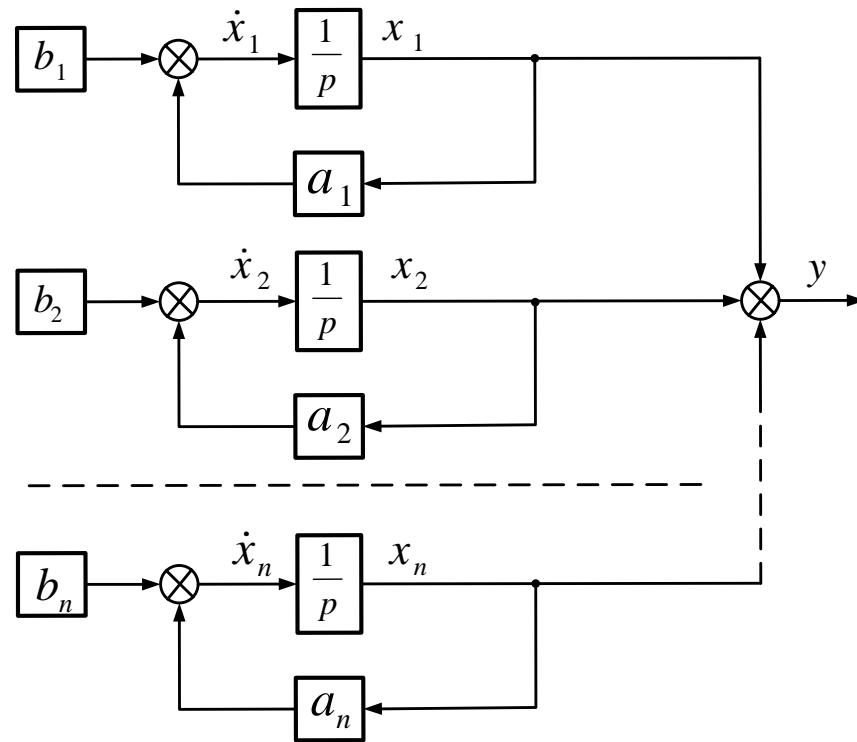


Рисунок 2.4 — Диагональная модель системы

К диагональному виду приводятся системы с различными полюсами. При этом матрицы основной и преобразованной системы

связаны соотношением $A = TA_{\text{д}}T^{-1}$, т.е. матрица преобразования находится как $P = T^{-1}$.

Модель полностью управляемой системы может быть приведена к канонической управляемой форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u \\ y = b_0x_1 + b_1x_2 + \dots \end{array} \right.$$

$$A_y = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{vmatrix}; \quad B_y = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix};$$

$$C_y = |b_0 : b_1 : \dots : 0 : 0|$$

Матрица преобразования к канонической управляемой форме находится как

$$P = U^*U^{-1}$$

,

где U и U^* — матрицы управляемости исходной и канонической моделей соответственно.

Модель полностью наблюдаемой системы может быть приведена к канонической наблюдаемой форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -a_0x_n + b_0u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_1x_n + b_1u \\ \dots \\ \dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1}x_n \\ y = x_n \end{array} \right.$$

$$A_{\text{n}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \end{vmatrix}; \quad B_{\text{n}} = \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ b_0 \end{vmatrix};$$

$$C_{\text{н}} = |0 : \dots : 0 : 1|$$

Матрица преобразований находится $P = (Q^*)^{-1}Q$, где Q и Q^* — матрицы наблюдаемости исходной и канонической моделей.

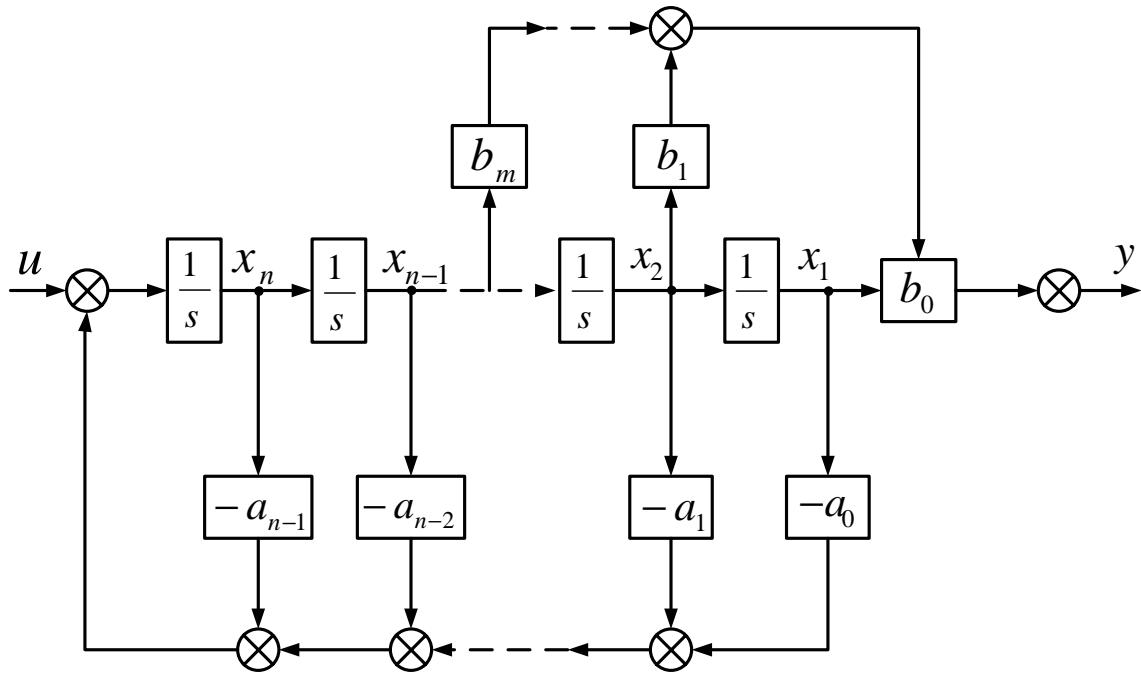


Рисунок 2.5 — Каноническая управляемая модель

3 Управляемость линейных систем

Рассмотрим уравнение движения системы (2.9). Линейная система (2.9) полностью управляема, если для любых $t_o \geq 0$ и $x_f \in R^n$ существует $t_f \geq t_o$ и ограниченное управление $u(t)$, $t \in [t_o, t_f]$ такое, что для $x(t_o) = x_o$ выполняется $x(t_f) = x_f$.

Замечание 2. 1 Для линейных систем это означает, что любое состояние достижимо из любого другого.

2 Если управляемая линейная система стационарна, то попадание в x_f можно обеспечить за любое заданное время $T > 0$ ($T = t_f - t_o$)

3 Свойство управляемости не зависит от выходной переменной y и поэтому может быть определено как свойство модели (2.9).

Для анализа управляемости линейных систем используется матрица управляемости размерности $n \times n$

$$U = |B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B|$$

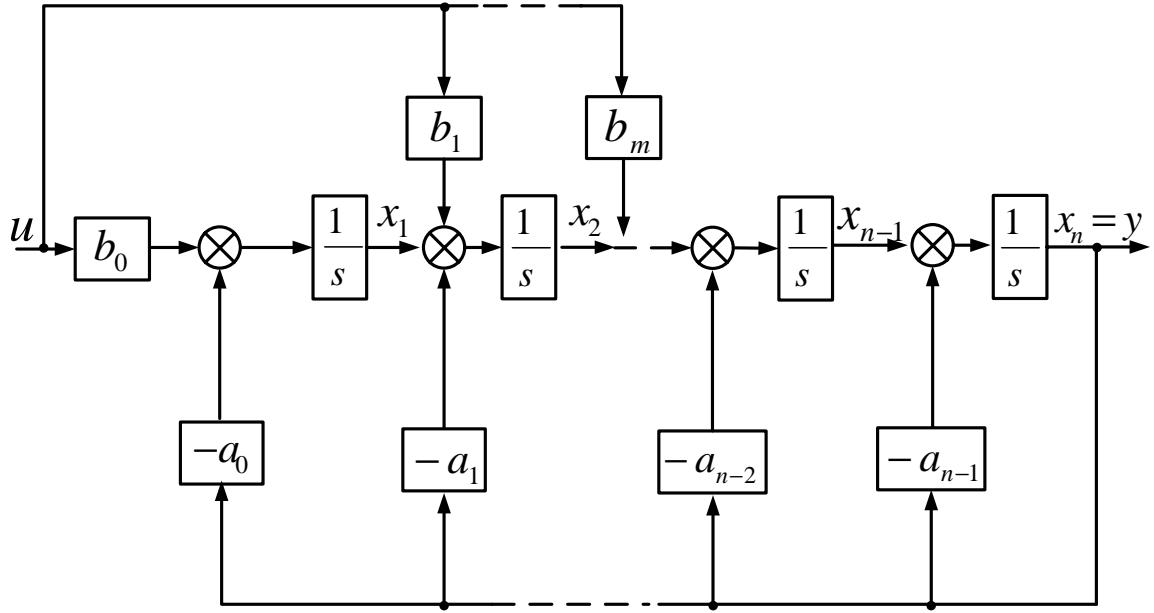


Рисунок 2.6 — Канонической наблюдаемой модель

Теорема 2.2 Система (2.9) полностью управляема тогда и только тогда, когда ранг матрицы управляемости равен порядку системы, т.е. $\text{rank}U = n$.

Теорема 2.3 Система (2.9) (или пара A, B) полностью управляема тогда и только тогда, когда матрица управляемости не вырождена, т.е. $\det U \neq 0$.

Теорема 2.4 Система (2.9) (или пара A, B) полностью управляема тогда и только тогда, когда она может быть преобразована к канонической управляемой форме.

Пример 2.3 Пусть ОУ описывается следующими уравнениями:

Требуется пределить, полностью управляема система или нет?

Решение. Исходя из размера матрицы A , порядок ОУ равен 2. Тогда матрица управляемости примет вид:

$$U = \begin{vmatrix} B & AB \end{vmatrix}.$$

Найдем произведение матриц A и B в виде:

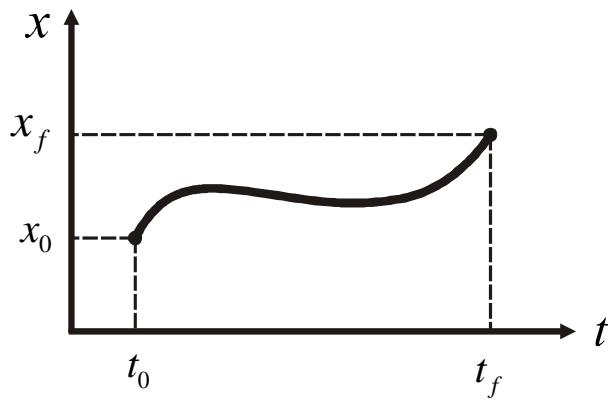


Рисунок 2.7 — Управляемость

$$AB = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда матрица управляемости формируется в виде:

$$U = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Определитель матрицы управляемости вычисляется в следующем виде:

$$\det U = 0 - 1 = -1,$$

следовательно, система полностью управляема. ■

Замечание 3. Системы, в которых матрица входа равна нулю ($B = 0$) с очевидностью являются неуправляемыми, т.к. управляющее действие „\$u\$“ не оказывает влияния на их переменные состояния. В более общем виде система может быть представлена в виде двух подсистем, на одну из которых не поступает управление, а на другую действует управляющее действие. Такая система является лишь частично (не полностью) управляемой.

4 Наблюдаемость линейных систем

Система (2.9) называется полностью наблюдаемой, если для любых $t_o \geq 0$ существует $t_1 > t_o$ такое, что выходной переменной $y = y(t)$, $t \in [t_o, t_1]$ полученной для входного сигнала $u(t)$, соответствует единственное значение $x(t_o) = x_o$.

Замечание 4.

1 Для стационарной наблюдаемой линейной системы значение $x(t_0)$ можно определить за любое заданное время $T > 0$ ($T = t_1 - t_0$). 2 Т.к. наблюдаемость, если она есть, должна быть при нулевом входе, можно считать, что система наблюдаема, если для неё по $y_{[t_0, t_1]}$ можно однозначно определить $x(t_0)$ при $u(t) = 0$.

Для анализа наблюдаемости линейных систем используется матрица наблюдаемости размерности $n \times n$:

$$Q = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{vmatrix}$$

Теорема 2.5 Система (2.9) (или пара C, A) полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда матрица наблюдаемости не вырождена, т.е. $\det Q \neq 0$.

Теорема 2.6 Система (2.9) полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда матрица наблюдаемости имеет ранг, который совпадает с порядком OY , т.е. $\text{rank } Q = n$.

Теорема 2.7 Система (2.9) (или пара C, A) полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда она может быть преобразована к канонической наблюдаемой форме.

Пример 2.4 Пусть OY описывается следующими уравнениями:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u; \quad y = |1 : 0| \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}.$$

Требуется определить, является ли система полностью наблюдаемой?

Решение. Исходя из размерности матрицы A , определяем порядок системы, равный 2. Тогда матрица наблюдаемости примет вид:

$$Q = \begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix}.$$

Получим произведение матриц C и A в следующем виде:

$$CA = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тогда матрица наблюдаемости формируется как:

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Определитель матрицы наблюдаемости вычисляется как

$$\det Q = 1 - 0 = 1,$$

следовательно, система полностью наблюдаема. ■

Система, в которой матрица выходов равна нулю ($C = 0$), является ненаблюдаемой, т.к. переменная состояния не оказывает влияния на выходную переменную $y(t)$. В более общем случае система может быть представлена в виде двух подсистем, одна из которых не влияет на выходную переменную, а вторая - вдляет, тогда её переменная состояния не может быть восстановлена, а система в целом является лишь частично (неполностью) наблюдаемой.

Существует еще ряд понятий, таких как стабилизируемая линейная система, обнаруживаемая линейная система. Дадим определения этим понятиям.

Определение 16. Линейная система стабилизируема, если у нее подпространство управляемых состояний принадлежит подпространству устойчивых состояний.

Замечание 5. Стабилизируемость означает принципиальную возможность получения устойчивой замкнутой системы.

Определение 17. Линейная система называется обнаруживаемой (детектируемой), если у нее пространство неуправляемых состояний принадлежит подпространству устойчивых состояний.

Определение 18. Полностью управляемая и полностью наблюдаемая система называется невырожденной.

Замечание 6. Полностью наблюдаемые, а также устойчивые системы обнаруживаются.

2.6 Структурные схемы систем управления. Структурные преобразования

Под структурной схемой системы управления понимается графическое изображение системы управления, в которой каждый из элементов системы изображается в виде блока с указанием входной и выходной переменных. Внутри блока записывается передаточная функция, связывающая входную и выходную переменные и указываются все связи между элементами системы.

Используемые графические обозначения на структурных схемах:

1 Элемент.

Элемент описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1,$$

где k — коэффициент передачи элемента,

T — постоянная времени.

Передаточная функция, описывающая отношение выходной переменной к входной переменной, записывается в виде:

$$W(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{k}{Ts + 1},$$

где k — коэффициент передачи элемента,

T — постоянная времени.

Тогда на структурной схеме элемент будет изображаться как показано на рисунке 2.8

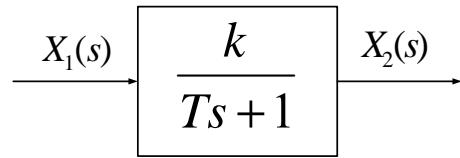


Рисунок 2.8 — Графическое обозначение элемента

2 Элемент сравнения.

Обозначение элемента сравнения представлено на рисунке 2.9

$$X_3(s) = X_1(s) - X_2(s).$$

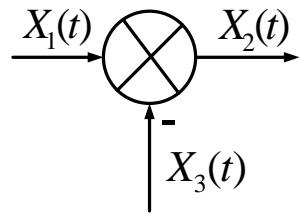


Рисунок 2.9 — Графическое обозначение элемента сравнения

3 Сумматор.

Обозначение сумматора представлено на рисунке 2.10.

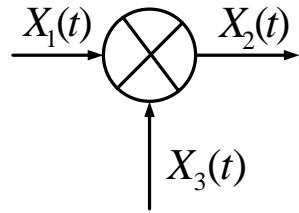


Рисунок 2.10 — Графическое обозначение сумматора

$$X_3(s) = X_1(s) + X_2(s).$$

Структурные преобразования

Структурные преобразования предназначены для упрощения изображения сложных структур систем управления, следовательно, и упрощения анализа прохождения сигналов через систему управления.

1 Структурные преобразования последовательного соединения элементов.

Даны два последовательно соединенных элемента с передаточными функциями $W_1(s)$ и $W_2(s)$ (см. рисунок 2.11).

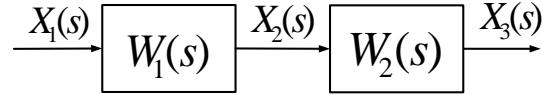


Рисунок 2.11 — Последовательное соединение элементов

Необходимо найти эквивалентную передаточную функцию $W_3(s)$, описывающую отношение выходного сигнала $X_3(s)$ к входному сигналу $X_1(s)$ как показано на рисунке 2.12.

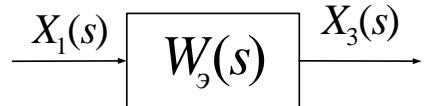


Рисунок 2.12 — Эквивалентная передаточная функция при последовательном соединении элементов

Запишем уравнения связи входных и выходных переменных для каждого из элементов:

$$\begin{cases} X_2(s) = W_1(s)X_1(s) \\ X_3(s) = W_2(s)X_2(s). \end{cases}$$

Исключим промежуточную переменную $X_2(s)$ подстановкой первого уравнения во второе соотношение:

$$X_3(s) = W_2(s)W_1(s)X_1(s).$$

В результате эквивалентная передаточная функция в случае последовательно соединенных элементов описывается выражением:

$$W_3(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = W_1(s)W_2(s).$$

Вывод 2.1 Если имеет место k последовательно соединенных элементов с передаточными функциями $W_i(s), i = \overline{1, k}$, то эквивалентная передаточная функция $W_{\circ}(s)$ есть произведение всех передаточных функций отдельных элементов, т.е.

$$W_{\circ}(s) = \prod_{i=1}^k W_i(s).$$

2 Структурные преобразования параллельного соединения элементов

Даны два параллельно соединенных элемента как показано на рисунке 2.13.

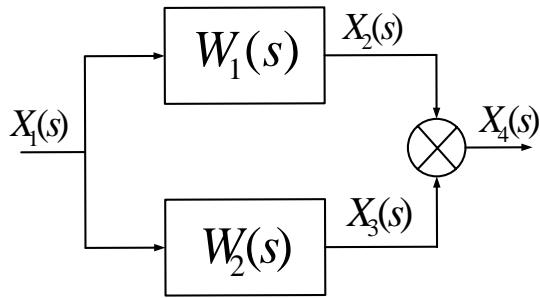


Рисунок 2.13 — Параллельное соединение элементов

Необходимо найти эквивалентную передаточную функцию $W_{\circ}(s)$, описывающую отношение выходного сигнала $X_4(s)$ к входному сигналу $X_1(s)$ (см. рисунок 2.14).

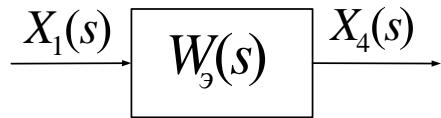


Рисунок 2.14 — Эквивалентная ПФ для случая двух параллельно соединенных элементов

Запишем уравнения связи входных и выходных переменных для каждого из элементов:

$$\begin{cases} X_2(s) = W_1(s)X_1(s) \\ X_3(s) = W_2(s)X_1(s) \\ X_4(s) = X_2(s) + X_3(s). \end{cases}$$

Подставим в последнее уравнение первые два, тогда имеет место следующее уравнение:

$$X_4(s) = (W_1(s) + W_2(s))X_1(s).$$

В результате эквивалентная передаточная функция определяется выражением

$$W_e(s) = \frac{X_4(s)}{X_1(s)} = W_1(s) + W_2(s).$$

Вывод 2.2 Для параллельного соединения k элементов с передаточными функциями $W_i(s), i = \overline{1, k}$ эквивалентная передаточная функция $W_e(s)$ равна сумме передаточных функций отдельных элементов, т.е.

$$W_e(s) = \sum_{i=1}^k W_i(s).$$

3 Элементы с обратными связями.

Дана система с отрицательной обратной связью как показано на рисунке 2.15

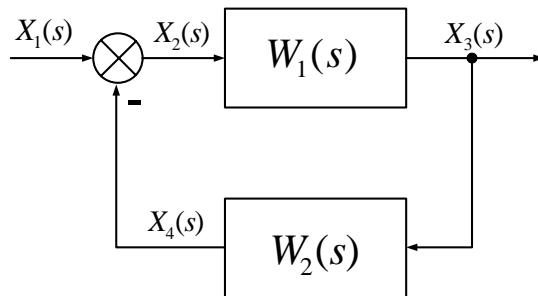


Рисунок 2.15 — Система с отрицательной обратной связью

Необходимо найти эквивалентную передаточную функцию $W_e(s)$, описывающую отношение выходного сигнала $X_3(s)$ к входному сигналу $X_1(s)$ (см. рисунок 2.16)

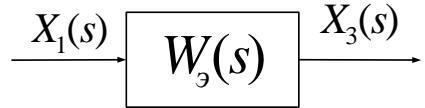


Рисунок 2.16 — Эквивалентная передаточная функция для случая двух элементов, соединенных при помощи отрицательной обратной связи

Запишем уравнения связи входных и выходных переменных для каждого из элементов:

$$\begin{cases} X_2(s) = X_1(s) - X_4(s) \\ X_3(s) = W_1(s)X_2(s) \\ X_4(s) = W_2(s)X_3(s). \end{cases}$$

Подставим первое и третье уравнения во второе и получим:

$$X_3(s) = W_1(s)X_1(s) - W_1(s)W_2(s)X_3(s).$$

Перенося член $W_1(s)W_2(s)X_3(s)$ в правую часть последней формулы и выражая из него $X_3(s)$, получаем

$$X_3(s) = \frac{W_1(s)X_1(s)}{W_1(s)W_2(s) + 1}.$$

Тогда эквивалентная передаточная функция системы с отрицательной обратной связью определяется выражением:

$$W_9(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}.$$

Получим эквивалентную передаточную функцию для системы с положительной обратной связью (см. рисунок 2.17).

Исходя из структурной схемы, изображенной на рисунке 2.17, запишем уравнения связи входных и выходных переменных для каждого из элементов:

$$\begin{cases} X_2(s) = X_1(s) + X_4(s) \\ X_3(s) = W_1(s)X_2(s) \\ X_4(s) = W_2(s)X_3(s). \end{cases}$$

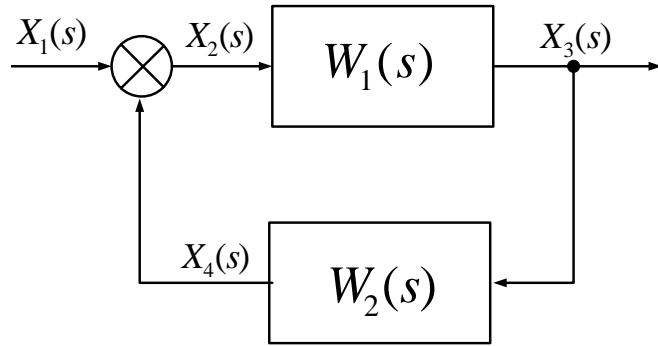


Рисунок 2.17 — Структурная схема системы, замкнутой положительной обратной связью

Подставим первое и третье уравнения во второе и получим:

$$X_3(s) = W_1(s)X_1(s) + W_1(s)W_2(s)X_3(s),$$

Перенося из правой части член с $X_3(s)$ в левую часть последнего соотношения и выражая из получившегося уравнения $X_3(s)$, находится результирующая формула в виде:

$$X_3(s) = \frac{W_1(s)X_1(s)}{-W_1(s)W_2(s) + 1}.$$

Тогда эквивалентная передаточная функция системы с положительной обратной связью выражается как:

$$W_{\text{э}}(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)}.$$

Пример 2.5 Рассмотрим систему, представленную на рисунке 2.18

Необходимо найти эквивалентную передаточную функцию, описывающую отношение выходной переменной $Y(s)$ к $G(s)$.

Решение. Запишем уравнение связи для каждого структурного элемента:

$$\begin{cases} E(s) = G(s) - Y(s)X_1(s) = W_1(s)E \\ X_2(s) = W_2(s)X_1(s) \\ X_3(s) = X_2(s) - X_5(s) \\ X_4(s) = W_3(s)X_3(s) \\ X_5(s) = W_5(s)X_4(s) \\ Y(s) = W_4(s)X_4(s) \end{cases}$$

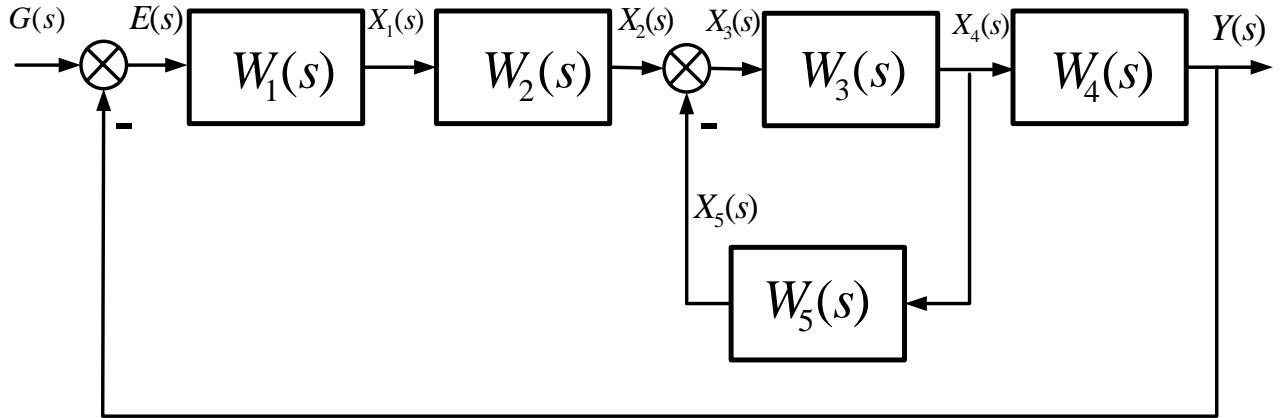


Рисунок 2.18 — Пример системы управления

Выразим переменную X_4 .

$$\begin{aligned} X_4(s) &= W_3(s)(X_2(s) - X_5(s)) = W_3(s)(W_2(s)X_1(s) - W_5(s)X_4(s)) = \\ &= W_3(s)(W_2(s)W_1(s)E(s) - W_5(s)X_4(s)) = \\ &= W_1(s)W_2(s)W_3(s)E(s) - W_3(s)W_5(s)X_4(s). \end{aligned}$$

Перенесем слагаемые при X_4 в левую часть:

$$X_4(s) + W_3(s)W_5(s)X_4(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s)E(s).$$

Найдем X_4 :

$$X_4(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)E(s)}{1 + W_3(s)W_5(s)}.$$

Подставляем полученное выражение в уравнение выходной переменной $Y(s)$ и находим

$$Y(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)E(s)}{1 + W_3(s)W_5(s)}.$$

Определим чему равно задающее воздействие $G(s)$.

$$G(s) = E(s) + Y(s) = E(s) + \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)E(s)}{1 + W_3(s)W_5(s)} = \\ = \frac{E(s)(1 + W_3(s)W_5(s)) + W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)E(s)}{1 + W_3(s)W_5(s)}.$$

Тогда эквивалентная передаточная функция $\Phi(s)$, являющаяся отношением выходной переменной $Y(s)$ к задающему воздействию $G(s)$ равна

$$\Phi(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)E(s)}{1 + W_3(s)W_5(s)} \cdot \frac{1 + W_3(s)W_5(s)}{\cdot \frac{E(s)(1 + W_3(s)W_5(s)) + W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)E(s)}{1 + W_3(s)W_5(s) + W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)}} = \\ = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)}{1 + W_3(s)W_5(s) + W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)}.$$

Последовательность структурных преобразований

1 На структурной схеме для каждого элемента вводятся обозначения входных и выходных переменных.

2 Для каждого из элементов структурной схемы составляется уравнение связи между выходной и входной переменными. Полученная система уравнений задаёт описание всей структурной схемы. Число уравнений соответствует числу структурных элементов.

3 Последовательной подстановкой одного уравнения в другое исключаются промежуточные переменные, пока не останется уравнение связи между интересующими нас переменными, по которому и отыскивается искомая передаточная функция.

2.7 Передаточные функции замкнутых систем

Обобщенная структурная схема системы с одним входом и одним выходом, представлена на рисунке 2.19

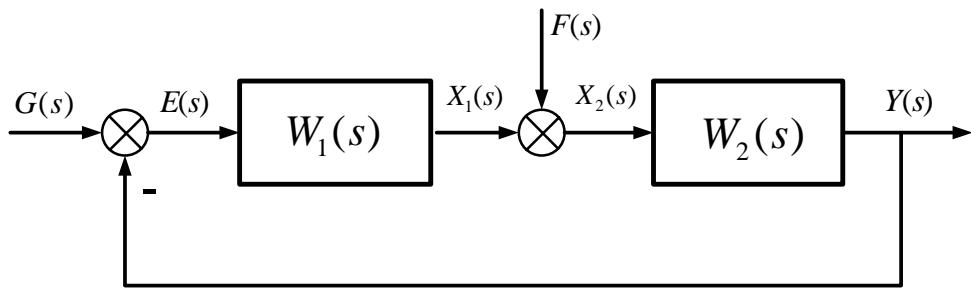


Рисунок 2.19 — Структурная схема системы с одним входом и одним выходом

Получим описание замкнутой системы

$$\begin{cases} E(s) = G(s) - Y(s) \\ X_1(s) = W_1(s)E(s) \\ X_2(s) = X_1(s) + F(s) \\ Y(s) = W_2(s)X_2(s) \end{cases}$$

Выразим выходную переменную $Y(s)$:

$$Y(s) = W_2(s)W_1(s)(G(s) - Y(s)) + F(s).$$

Раскроем скобки:

$$Y(s) = W_1(s)W_2(s)G(s) - W_1(s)W_2(s)Y(s) + W_2(s)F(s).$$

Перенесем слагаемое при выходной переменной $Y(s)$ в левую часть:

$$Y(s) + W_1(s)W_2(s)Y(s) = W_1(s)W_2(s)G(s) + W_2(s)F(s).$$

Окончательно находим $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{W_2(s)W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}G(s) + \frac{W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}F(s).$$

Обозначим $W_{\text{п.к.}}(s) = W_1(s)W_2(s)$ — передаточная функция размокнутого контура системы.

Тогда с учетом введенного обозначения выходная переменная системы выражается как

$$Y(s) = \frac{W_{\text{п.к.}}(s)}{1 + W_{\text{п.к.}}(s)}G(s) + \frac{W_2(s)}{1 + W_{\text{п.к.}}(s)}F(s).$$

Введем обозначения:

$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)}$ — передаточная функция замкнутой системы

по регулируемой переменной относительно задающего воздействия.

$\Phi_f(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W(s)}$ — передаточная функция замкнутой системы

по регулируемой переменной относительно возмущающего воздействия.

Тогда в новых обозначениях, регулируемая переменная запишется как

$$Y(s) = \Phi(s)G(s) + \Phi_f(s)F(s).$$

Найдем передаточную функцию по ошибке относительно задающего воздействия.

Ошибка определяется выражением

$$E(s) = G(s) - Y(s).$$

Подставим значение $Y(s)$, получим

$$E(s) = (1 - \Phi(s))G(s) - \Phi_f(s)F(s).$$

Отсюда найдем передаточную функцию по ошибке относительно задающего воздействия

$$\Phi_e(s) = 1 - \Phi(s) = \frac{1}{1 + W(s)}.$$

Передаточные матрицы замкнутых систем

Положим, что $g(t) \in R^k$ — k -мерный вектор задающих воздействий, $y(t) \in R^k$ — k -мерный вектор регулируемых переменных, $f(t) \in R^l$ — l -мерный вектор возмущающих воздействий, $x_1(t)$ и $x_2(t) \in R^l$ — l -мерные вектора состояния, $W_1(s)$ — передаточная матрица первого элемента размерности $l \times k$, $W_2(s)$ — передаточная матрица второго элемента размерности $k \times l$,

$$W_{\text{п.к.}}(s) = W_1(s)W_2(s)$$

— передаточная матрица разомкнутого контура системы размерности $k \times k$.

Регулируемая переменная $Y(s)$ определяется выражением

$$Y(s) = (I + W(s))^{-1}W(s)G(s) + (I + W(s))^{-1}W_2(s)F(s).$$

Тогда передаточная матрица замкнутой системы по регулируемой переменной относительно задающего воздействия находится как

$$\Phi(s) = (I + W(s))^{-1}W(s),$$

передаточная матрица замкнутой системы по регулируемой переменной относительно возмущающего воздействия выражается в виде:

$$\Phi_f(s) = (I + W(s))^{-1}W_2(s),$$

передаточная матрица замкнутой системы по ошибке относительно задающего воздействия определяется как

$$\Phi_e(s) = (I + W(s))^{-1}.$$

Пример 2.6 Рассмотрим систему с двумя входами и двумя выходами, представленную на рисунке 2.20

Требуется найти передаточную матрицу $\Phi(s)$ такую, что

$$Y(s) = \Phi(s)G(s),$$

где

$$Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix};$$

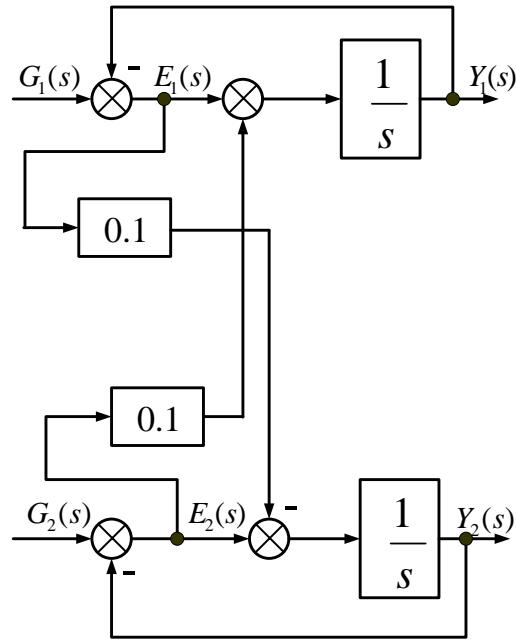


Рисунок 2.20 — Структурная схема ОУ с двумя входами и двумя выходами

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix}.$$

$$\Phi(s) = \left(I + W_{p.k.}(s) \right)^{-1} W_{p.k.}(s).$$

Решение. Найдем передаточную матрицу разомкнутого контура системы

$$W_{p.k.}(s).$$

$$W_{p.k.}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{0,1}{s} \\ -\frac{0,1}{s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}.$$

Если обратная связь разомкнута, то

$$Y_1(s) = \frac{1}{s} E_1(s) + \frac{0,1}{s} E_2(s),$$

$$Y_2(s) = \frac{-0,1}{s} E_1(s) + \frac{1}{s} E_2(s),$$

$$I + W(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{0,1}{s} \\ \frac{s}{s} & \frac{s}{s} \\ \frac{-0,1}{s} & \frac{s+1}{s} \\ \frac{s}{s} & \frac{s}{s} \end{bmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу $(I + W(s))^{-1}$

$$\begin{aligned} (I + W(s))^{-1} &= \frac{1}{\frac{(s+1)^2}{s^2} + \frac{0,01}{s^2}} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{-0,1}{s} \\ \frac{s}{s} & \frac{s}{s} \\ \frac{0,1}{s} & \frac{s+1}{s} \\ \frac{s}{s} & \frac{s}{s} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{s}{s^2 + 2s + 1,01} \begin{bmatrix} s+1 & -0,1 \\ 0,1 & s+1 \end{bmatrix}. \quad (2.13) \end{aligned}$$

Найдем передаточную функцию замкнутой системы $\Phi(s)$

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{s}{s^2 + 2s + 1,01} \begin{bmatrix} s+1 & -0,1 \\ 0,1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{0,1}{s} \\ \frac{s}{s} & \frac{s}{s} \\ \frac{-0,1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{s}{s} & \frac{s}{s} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{s}{s^2 + 2s + 1,01} \begin{bmatrix} \frac{s+1,01}{s} & \frac{0,1}{s} \\ \frac{-0,1s}{s} & \frac{s+1,01}{s} \end{bmatrix}. \quad (2.14) \end{aligned}$$

Окончательно получаем передаточную матрицу замкнутой системы

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1,01}{s^2 + 2s + 1,01} & \frac{0,1}{s^2 + 2s + 1,01} \\ \frac{-0,1s}{s^2 + 2s + 1,01} & \frac{s+1,01}{s^2 + 2s + 1,01} \end{bmatrix}.$$

3 Устойчивость систем управления

3.1 Виды устойчивости непрерывных систем управления

Под устойчивостью системы управления понимается её способность возвращаться в исходное положение равновесия после окончания действия на эту систему внешнего воздействия. Если система обладает свойствами устойчивости, то такая система является работоспособной [1], [3].

Рассмотрим систему управления с уравнениями движения, заданными в нормальной форме Коши:

$$\dot{x} = F(x), \quad (3.1)$$

где $x \in R^n$ — n -мерный вектор состояния;

$F(x)$ — n -мерная нелинейная векторозначная функция векторного аргумента такая, что решение данного уравнения существует и единственno при заданных начальных условиях.

Понятие устойчивости чаще всего определяется относительно невозмущенных движений, когда уравнения описания движения зависят от вектора состояния (или рассматривается свободное движение автономной системы при ненулевых начальных условиях).

3.1.1 Устойчивость по Ляпунову (нейтральная устойчивость)

Определение 19. Положение равновесия $x = 0$ устойчиво по Ляпунову, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$, зависящего от δ существует такое положительное число $\delta > 0$ такое, что для всех начальных значений $\|x_0\| < \delta$ выполняется условие $\|x(t)\| < \varepsilon$ в любой момент времени $t > 0$,

где $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ — евклидова норма.

Замечание 7. Определение предусматривает, что траектория $x(x_0, t)$ системы (3.1) начинающаяся в некоторой (может быть достаточно малой) δ -окрестности положения равновесия не покидает заданную ε -окрестность (см. рисунок 3.1).

Замечание 8. Устойчивость по Ляпунову для класса линейных стационарных систем означает ограниченность движений системы.

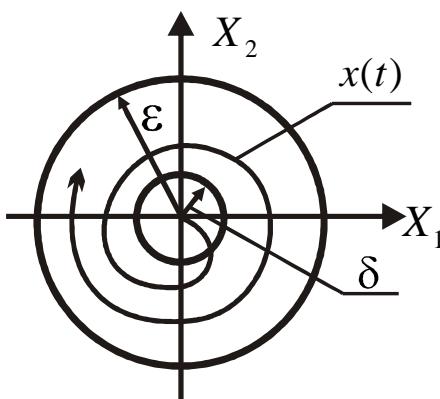


Рисунок 3.1 — Устойчивость по Ляпунову

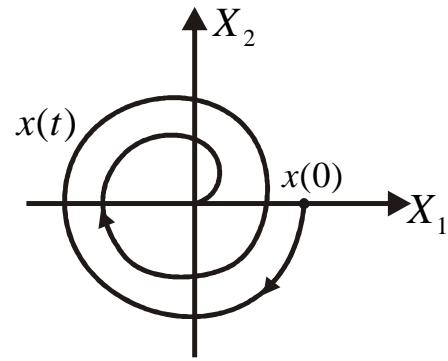


Рисунок 3.2 — Асимптотическая устойчивость

3.1.2 Асимптотическая устойчивость

Определение 20. Положение равновесия $x = 0$ называется асимптотически устойчивым, если система устойчива по Ляпунову и при любых начальных условий ($\forall x_0 \in R^n$) для всех траекторий движения выполняется предельное соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \text{ или } \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \quad (3.2)$$

Замечание 9. Для класса линейных стационарных систем условие (3.2) автоматически ведет к ограниченности решений, следовательно, к устойчивости по Ляпунову. Поэтому для проверки асимптотической устойчивости достаточно убедиться в условии притяжения (3.2).

Графическая интерпретация асимптотической устойчивости приведена на рисунке 3.2.

3.1.3 Экспоненциальная устойчивость

Определение 21. Положение равновесия $x = 0$ называется экспоненциально устойчивым, если для при любых начальных условиях $x_0 \in R^n$ и положительных чисел $\beta \geq 1$ и $\alpha > 0$

выполняется условие:

$$\|x(t)\| \leq \beta e^{-\alpha t} \|x_0\| \quad (3.3)$$

Замечание 10. Формула 3.3 показывает, что для экспоненциально устойчивой системы все траектории, начинающиеся в произвольной Δ_0 -окрестности, т.е. $\|x_0\| < \Delta_0$ экспоненциально затухают, т.е. сходятся к началу координат, оставаясь в каждый момент времени t в пределах сужающейся области:

$$\|x(t)\| < x_m(t) = \beta e^{-\alpha t} \Delta_0.$$

Функция $x_m(t)$, ограничивающая сверху текущее значение нормы вектора, называется мажорантой.

Графическая интерпретация экспоненциальной устойчивости приведена на рисунке 3.3.

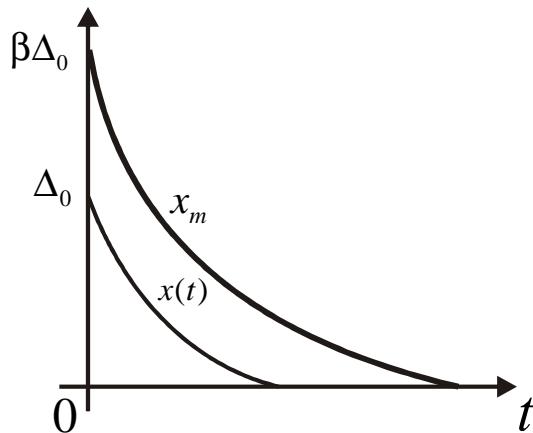


Рисунок 3.3 — Экспоненциальная устойчивость

Замечание 11. Для класса линейных стационарных систем условие экспоненциальной устойчивости (3.3) автоматически влечет выполнение условия притяжения (3.2) и, следовательно, условие асимптотической устойчивости. Обратное также справедливо, поэтому асимптотическая и экспоненциальная устойчивости эквивалентны для данного класса.

Замечание 12. Параметр α в условии (3.3) характеризует скорость сходимости процессов к положению равновесия и его называют степенью сходимости.

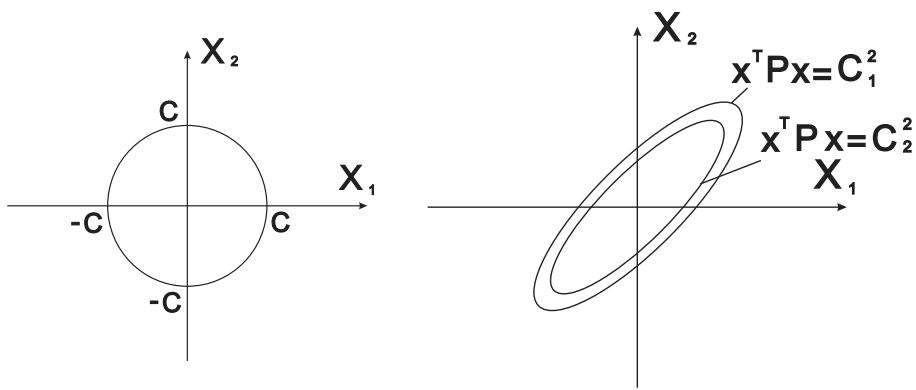


Рисунок 3.4 — Функция Ляпунова

3.2 Метод Ляпунова для анализа устойчивости движения

Введем в рассмотрение функцию Ляпунова, которая n -мерному вектору $x \in R^n$ сопоставляет число $V(x) > 0$, т.е. $R^n \xrightarrow{V(x)} R^+$, где R^+ — множество положительных чисел. Для того, чтобы $V(x)$ была функцией Ляпунова требуется выполнение следующих свойств:

1 Функция $V(x)$ должна быть положительно определенной, т.е. $\forall x \in R^n \ V(x) > 0$, а из того, что $V(x) = 0$ должно следовать $x = 0$ и наоборот.

2 Функция $V(x)$ должна монотонно возрастать (убывать) с ростом (уменьшением) нормы вектора x .

3 Поверхность постоянного уровня $V(x) = c$, где c — положительное число, должна охватывать начало координат.

Графическая интерпретация функции Ляпунова представлена на рисунке 3.4.

Рассмотрим в качестве примера функции $V(x)$, задаваемые квадратичными формами, т.е. $V(x) = x^T Px$, где P — $(n \times n)$ — симметрическая, весовая матрица. Для выполнения положительной определенности $V(x)$ матрица P должна быть положительно определенной, т.е. все её собственные числа строго положительны и для нее справедлив критерий Сильвестра, который заключается в том, что все главные миноры этой матрицы должны быть строго положительными.

Иногда квадратичные формы используются для задания обобщенной нормы $\|x\|_p = \sqrt{x^T Px}$. Такое задание удовлетворяет всем аксиомам нормы.

Рассмотрим систему управления, описание которой задается уравнением движения

$$\dot{x} = F(x),$$

где $x \in R^n$,

$F(x)$ — n -мерная нелинейная векторозначная функция такая, что решение уравнения однозначно существует и единственno, если $x = 0$, $F(x) = 0$.

Рассмотрим Функцию $V(x)$, которая удовлетворяет всем свойствам функции Ляпунова и $R^n \xrightarrow{V(x)} R^+$ (отображает R^n в R^+): $\forall t : x(t) \in V(x(t)) > 0$.

Для исследования поведения функции Ляпунова во времени на траектории движения системы рассмотрим скорость её изменения. Для чего вычислим производную по времени от функции Ляпунова:

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x}$$

Дадим геометрическую интерпретацию

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \text{grad}^T V(x) < 0$$

Теорема 3.1 Теорема Ляпунова

Для того, чтобы положение $x = 0$ было асимптотически устойчивым требуется, чтобы существовала такая функция Ляпунова $V(x)$, что на всех траекториях движения системы $x(t)$ для произвольного момента времени t производная по времени от функции Ляпунова была строго меньше нуля

$$\frac{dV(x)}{dt} < 0.$$

Перепишем условие теоремы Ляпунова с помощью уравнений движения системы

$$\frac{dV(x)}{dt} < 0 : \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} F(x) < 0$$

Из данного неравенства следует, что условие теоремы Ляпунова выполняется, если $\forall x \in R^n \frac{\partial V}{\partial x} F(x) < 0$ (для $x \neq 0$). Графическая интерпретация градиента функции Ляпунова представлена на рисунке 3.5.

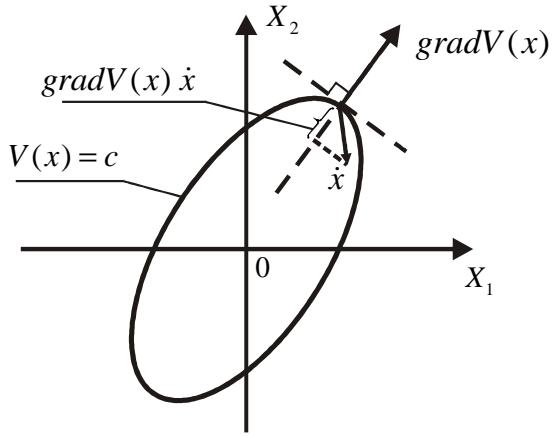


Рисунок 3.5 — Графическая интерпретация градиента функции Ляпунова

Пример 3.1 $\dot{x} = -x^3$ Выберем функцию Ляпунова в виде $V(x) = x^2$ и исследуем на устойчивость.

Решение: Вычислим $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (x(t))^2 = 2x(t) \cdot \dot{x}(t) = -2x^4(t) < 0$$

причем $x = 0$ — асимптотически устойчиво. $-x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$. ■

Использование метода Ляпунова для анализа экспоненциальной устойчивости систем управления

В данном пункте в качестве функций Ляпунова будем использовать квадратичные положительно определенные формы: $V(x) = x^T P x$, где $P - (n \times n)$ — положительно определенная ($P > 0$).

Следствие 3.1 теоремы Ляпунова

Для того, чтобы положение равновесия $x = 0$ было экспоненциально устойчиво достаточно, чтобы существовала такая функция Ляпунова $V(x)$ в классе квадратичных форм и такое положительное число $\alpha > 0$, что на всех траекториях

движения системы $x(t)$, исходящих из произвольных начальных условий $x(0) \in R^n$, в любой момент времени ($\forall t$) для производной по времени от функции Ляпунова на траектории движения выполнялось неравенство:

$$\frac{dV(x)}{dt} \leq -2\alpha V(x),$$

где α — положительное число, характеризующее степень сходимости процессов в системе.

Условие экспоненциальной устойчивости — существуют такие $\beta \geq 1$, $\alpha > 0$, что для любого момента времени t выполняется неравенство:

$$\|x(t)\| \leq \beta \cdot e^{-\alpha t} \cdot \|x(0)\|.$$

Заменим в неравенстве знак неравенства на знак равенства, в результате чего получим уравнение поведения функции Ляпунова, мажорирующую (ограничивающую) поведение функции Ляпунова на всех траекториях движения

$$\frac{dV(x)}{dt} = -2\alpha V(x), V_0 = V(x(0)).$$

Интегрируя последнее выражение, функция Ляпунова приобретает вид:

$$V(t) = e^{-2\alpha t} V_0.$$

Для любого момента времени t будет справедливо выполнение неравенства:

$$V(x(t)) \leq e^{-2\alpha t} V(x(0)).$$

Используя соотношение Релея для квадратичной формы, можно записать

$$C_{min} x^T x \leq V(x) = x^T P x \leq C_{max} x^T x,$$

где C_{min} и C_{max} — минимальное и максимальное собственное число матрицы P .

Норма вектора x :

$$\|x\| = \sqrt{x^T x},$$

$$C_{min} \|x^T x\|^2 \leq V(x) = x^T P x \leq C_{max} \|x^T x\|^2.$$

Проведя несложные математические преобразования, получим:

$$\sqrt{C_{min}} \|x(t)\| \leq V^{1/2}(x) \leq \sqrt{C_{max}} \|x(t)\|,$$

$$V^{1/2}(x(t)) \leq e^{-\alpha t} V^{-1/2}(x(0)),$$

$$\|x(t)\| = \sqrt{\frac{C_{max}}{C_{min}}} \cdot e^{-\alpha t} \|x(0)\|,$$

$$\beta = \sqrt{\frac{C_{max}}{C_{min}}} \geq 1.$$

3.3 Уравнения Ляпунова для исследования устойчивости линейных систем

Рассмотрим систему с невозмущенным уравнением движения

$$\dot{x} = Fx, x(0) = x_0,$$

где F — $(n \times n)$ — квадратная матрица с постоянными коэффициентами.

Введём в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V(x) = x^T Px,$$

где P — строго положительно определённая матрица размера $n \times n$.

Воспользуемся условием теоремы Ляпунова для асимптотической устойчивости. Исходя из условия теоремы Ляпунова, положение равновесия $x = 0$ — асимптотически устойчиво, если выполняется неравенство $\frac{dV(x(t))}{dt} < 0$.

Вычислим производную по времени от функции Ляпунова по траекториям движения:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t))}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(x^T(t) Px(t) \right) = \dot{x}^T(t) Px(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) = \\ &= x^T(t)(F^T P + PF)x(t) = < 0. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение дополнительную квадратичную форму

$$x^T Q x,$$

где Q — положительно определённая, симметричная матрица, размерности $(n \times n)$.

Потребуем, чтобы для любого вектора состояния $\forall x \in R^n$ выполнялось:

$$x^T(F^T P + P F)x = -x^T Q x \quad (3.4)$$

или

$$F^T P + P F = -Q \quad (3.5)$$

Тогда из выражения (3.4) следует, что первая производная от функции Ляпунова по времени на траекториях движения будет отрицательной. Уравнение (3.4) эквивалентно (3.5) и выражение (3.5) гарантирует выполнение условия асимптотической устойчивости.

Определение 22. Матричное уравнение $F^T P + P F = -Q$, где P, Q — симметричные матрицы, называется уравнением Ляпунова для исследования асимптотической устойчивости.

Теорема 3.2 Ляпунова для асимптотической устойчивости

Для того, чтобы равновесие $x = 0$ линейной системы было асимптотически устойчиво необходимо, чтобы для любой и достаточно, чтобы для какой-либо положительно определенной матрицы Q решение уравнения Ляпунова относительно матрицы P было положительно определенным.

Процедура использования теоремы Ляпунова для анализа устойчивости:

- В качестве положительно определенной матрицы Q , как правило, выбирают единичную (для $Q > 0$, то $Q = I$).

- Для выбранной $Q > 0$ решается уравнение Ляпунова относительно P .

- Осуществляется проверка относительно матрицы P на положительную определенность ($P > 0$):

- а) с помощью детерминированного критерия Сильвестра (все главные миноры должны быть положительными);

- б) вычислением собственных чисел матрицы и проверки их на положительность.

Пример 3.2 Пусть задан объект управления:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}.$$

Необходимо определить устойчивость системы с помощью теоремы Ляпунова.

Решение. Из условия определяем матрицу F как:

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Задаем матрицу Q и записываем уравнение Ляпунова:

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; F^T P + P F = -Q.$$

Найдем произведение $F^T P$:

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix} \Rightarrow F^T P = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -p_3 & -p_2 \\ p_1 - p_3 & p_3 - p_2 \end{vmatrix}.$$

Перемножим матрицы P и F . Получим:

$$P F = \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -p_3 & p_1 - p_3 \\ -p_2 & p_3 - p_2 \end{vmatrix}.$$

Найдем сумму $F^T P + P F$:

$$\begin{aligned} F^T P + P F &= \begin{vmatrix} -p_3 & -p_2 \\ p_1 - p_3 & p_3 - p_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -p_3 & p_1 - p_3 \\ -p_2 & p_3 - p_2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -2p_3 & p_1 - p_2 - p_3 \\ p_1 - p_2 - p_3 & 2(p_3 - p_2) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{cases} -2p_3 = -1 \\ p_1 - p_2 - p_3 = 0 \\ 2(p_3 - p_2) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_3 = 0,5 \\ p_2 = 1 \\ p_1 = 1,5 \end{cases} \Rightarrow p = \begin{vmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{vmatrix}$$

$P > 0 = ?$

$\Delta_1 = 1,5 > 0; \Delta_2 = 1,5 - 0,25 = 1,25 > 0 \Rightarrow$ система асимптотически устойчива (критерий Гурвица)

По собственным числам

$$\begin{aligned} \det[\lambda I - P] &= \det \begin{vmatrix} \lambda - 1,5 & -0,5 \\ -0,5 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1,5)(\lambda - 1) - 0,25 = \\ &= \lambda^2 - 2,5\lambda + 1,5 - 0,25 = \lambda^2 - 2,5\lambda + 1,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{2,5 \pm \sqrt{6,25 - 5}}{2} = \frac{2,5 \pm \sqrt{1,25}}{2} = \frac{\frac{25}{10} \pm \frac{1}{10}\sqrt{125}}{2} = \frac{5(5 \pm \sqrt{5})}{2 \cdot 10} = \\ &= \frac{1}{4}(5 \pm \sqrt{5}) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}\end{aligned}$$

2 Модифицированные уравнения Ляпунова для анализа экспоненциальной устойчивости

Условие экспоненциальной устойчивости по Ляпунову заключается в выполнении следующего неравенства:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leq -2\alpha V(x(t))$$

или

$$x^T(t)[F^T P + PF]x(t) \leq -2\alpha x^T(t)Px(t)$$

Введем дополнительную квадратичную форму $x^T Q x$, где $Q - (n \times n)$ — симметричная полуположительная $x^T Q x(t) \geq \forall x$

$$x^T(t)[F^T P + PF]x(t) = -2\alpha x^T Px(t) - x^T(t)Qx(t).$$

Перенесем $2\alpha x^T Px(t)$ в левую часть. Получим:

$$x^T(t)[F^T P + PF]x(t) + 2\alpha x^T Px(t) = -x^T(t)Qx(t)$$

Так как должно выполняться для любого x , то

$$F^T P + PF + 2\alpha P = -Q$$

— модифицированное уравнение Ляпунова.

С помощью этого уравнения можно определить устойчивость с заданной степенью.

Теорема 3.3 Ляпунова для асимптотической устойчивости
Для того, чтобы положение равновесия $x = 0$ было экспоненциально устойчивым со степенью α достаточно, чтобы существовала такая положительная полуопределенная матрица $Q (Q \geq 0)$, что решение модифицированного уравнения Ляпунова относительно матрицы P было положительно определено ($P > 0$).

Пример 3.3 Пусть объект управления задан в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Требуется определить будет ли система экспоненциально устойчива, установить значение параметра α и оценить быстродействие.

Решение. 1) Определим матрицы P и Q :

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \geq 0; \quad P = \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}.$$

Найдем произведение матриц $F^T P$ и PF :

$$\begin{aligned} F^T P &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_3 & p_2 \\ p_1 - 2p_3 & p_3 - 2p_2 \end{vmatrix}; \\ PF &= \begin{vmatrix} p_1 & -p_3 \\ p_3 & -p_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -p_3 & p_1 - 2p_3 \\ -p_2 & p_3 - 2p_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

По уравнению Ляпунова получаем:

$$\begin{cases} -2p_3 + 2\alpha p_1 = -1 \\ p_1 - p_2 - 2p_3 + 2\alpha p_3 = 0 \\ p_1 - 2p_3 - p_2 + 2\alpha p_3 = 0 \\ p_3 - 2p_2 + p_3 - 2p_2 + 2\alpha p_2 = 0 \end{cases}$$

Отсюда находим p :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 2\alpha - 1}{2\alpha(2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 3\alpha - 2)} \\ p_2 &= -\frac{1}{2(2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 3\alpha - 2)} \\ p_3 &= \frac{\alpha - 1}{2(2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 3\alpha - 2)} \end{aligned}$$

3.4 Необходимые и достаточные корневые условия устойчивости линейных систем

Будем говорить в дальнейшем, что система устойчива если она асимптотически устойчива (в линейных системах). Рассмотрим уравнение движения объекта управления в следующем виде:

$$\dot{x} = Fx, \tag{3.6}$$

где $x \in R^n$;

F — матрица размерности $(n \times n)$, определяющая свойства системы.

Рассмотрим характеристическое уравнение матрицы F или системы

$$\det[\lambda I - F] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (3.7)$$

Решением этого уравнения являются собственные числа матрицы F ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$).

Рассмотрим частный случай, когда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ собственные числа различны и вещественны. Получим аналитическое решение уравнения движения для анализа сходимости траектории движения:

$$x(t) = e^{Ft}x(0),$$

где $x(0)$ — начальное условие.

Найдем ограничение на собственные числа матрицы F , которое обеспечивает выполнение условия асимптотической устойчивости, т.е.

$$\lambda_i : i = \overline{1, n}; \quad \forall x(0) \in R^n : \lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (3.8)$$

Для исследования поведения на траектории введём новый вектор $z \in R^n$, который связан с исходным вектором линейным преобразованием:

$$x = Mz, \quad (3.9)$$

где M — матрица размариности $(n \times n)$, определяющая линейное преобразование, т.е. матрица M — невырожденная: $\exists M^{-1}$. Подставим в исходное уравнение движения линейное преобразование и получим:

$$\frac{d}{dt}(Mz) = FMz. \quad (3.10)$$

Т.к. матрица M постоянна, то вынесем её за скобки знака дифференцирования

$$M\dot{z} = FMz. \quad (3.11)$$

Домножим обе части уравнения (3.10) на M^{-1} и получим:

$$\dot{z} = M^{-1}FMz. \quad (3.12)$$

Выберем матрицу M таким образом, чтобы эта матрица приводила матрицу F к диагональному виду:

$$F_\partial = M^{-1}FM,$$

где

$$F_\partial = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}, \quad \lambda_i - \text{различное.} \quad (3.13)$$

Рассмотрим в новых координатах уравнение движения:

$$x = Mz \Rightarrow \dot{z} = F_\partial z. \quad (3.14)$$

Тогда решение последнего выражения приобретает вид:

$$z(t) = e^{F_\partial t} z(0),$$

где $z(0)$ — начальные условия для нового вектора z .

Запишем систему уравнений и получим её решение:

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i, \quad z_i(t) = e^{\lambda_i t} z_i(0), \quad i = \overline{1, n} \quad (3.15)$$

Рассмотрим предел вектора z при стремлении времени к бесконечности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} z_i(0) = z_i(0) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} = 0 \text{ при } \lambda_i < 0$$

Таким образом, можно сделать вывод, что собственные числа M должны быть строго отрицательными и вещественными при $i = \overline{1, n}$, чтобы $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$. Из условия полной сходимости следует сходимость по норме и наоборот: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| = 0$. Осуществим обратный переход к исходному базису: $x = Mz \Rightarrow z = M^{-1}x \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|M^{-1}x(t)\| = 0$, т.к. M — постоянна и не зависит от времени, то $M^{-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$, следовательно, система асимптотически устойчива.

Необходимое и достаточное корневое условие устойчивости:

Для того, чтобы линейная система была асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического полинома имели отрицательную вещественную часть, т.е. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — корни системы $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = \overline{1, n}$.

Геометрическая интерпретация этого условия на комплексной плоскости, представлена на рисунке 3.8.

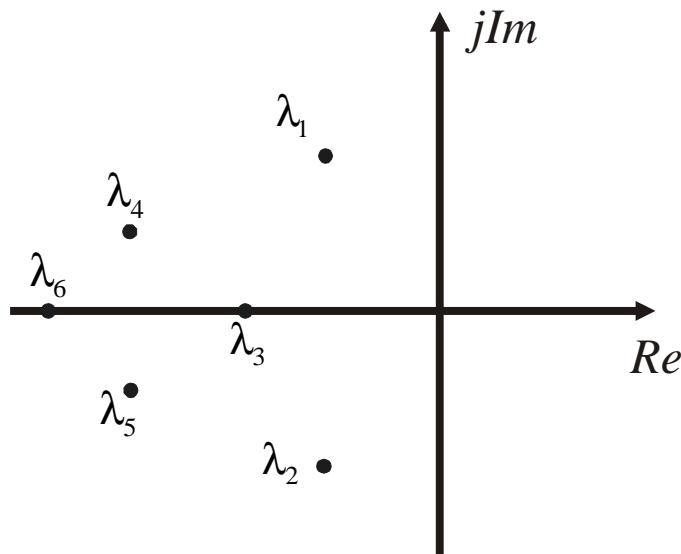


Рисунок 3.6 — Распределение корней характеристического полинома в случае устойчивости динамической системы

Замечание 13. Для того, чтобы линейная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни были расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости корней.

Замечание 14. Мнимая ось определяет границу устойчивости линейной системы.

Замечание 15. Если хотя бы один из корней имеет положительную вещественную часть (расположен в правой полуплоскости комплексной плоскости корней), то система будет неустойчивой.

3.5 Переходные процессы и типы границы устойчивости систем в зависимости от корней

Рассмотрим уравнение движения автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases},$$

где $x \in R^n$ — n -мерный вектор состояния,

A — $(n \times n)$ — матрица динамических свойств ОУ,

C — $(1 \times n)$ — матрица выхода ОУ,

$y \in R^1$ — регулируемая переменная.

Запишем решение уравнения движения для случая различных корней:

$$x(t) = e^{At}x(0); \quad y(t) = Ce^{At}x(0) = \sum_{i=1}^n d_i e^{\lambda_i t},$$

где d_i — коэффициент, зависящий от начальных условий.

Представим поведение регулируемой переменной в виде суммы:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t),$$

где $y_i(t) = d_i e^{\lambda_i t}$.

Рассмотрим поведение этих составляющих в зависимости от расположения корней

1 λ_i — вещественные, тогда $y_i(t) = d_i e^{\lambda_i t}$.

Если в системе есть хотя бы один положительный корень (лежит в правой полуплоскости комплексной плоскости), то система неустойчива — ее траектория движения стремится к бесконечности (см. рисунок 3.7а), если в системе имеется нулевой корень (лежит в начале координат), а остальные корни имеют отрицательную вещественную часть, то имеет место устойчивость по Ляпунову — траектория движения стремится к постоянному значению (см. рисунок 3.7б), если в системе все корни отрицательны (лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости), то система устойчива по Ляпунову и устойчива асимптотически — установившееся значение стремится к нулю (см. рисунок 3.7в).

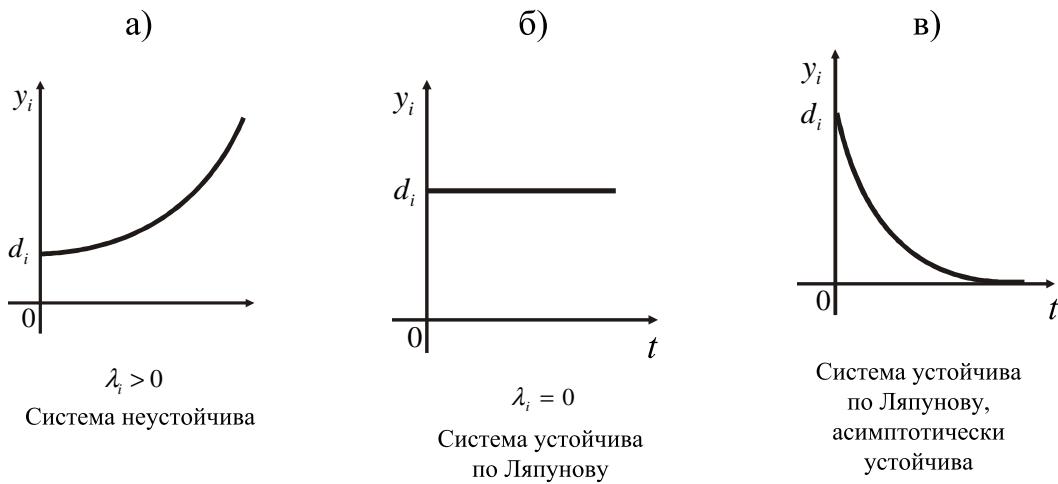


Рисунок 3.7 — Устойчивость системы при различных вещественных корнях

2 Комплексно – сопряженные $\lambda_i, \lambda_{i+1} \Rightarrow \lambda_{i,i+1} = \alpha \pm j\beta$, где

$$j = \sqrt{-1}, \beta > 0.$$

$$y_{i,i+1} = y_i(t) + y_{i+1}(t) = d_i e^{\lambda_i t} + d_i e^{\lambda_{i+1} t} = A_i e^{\alpha t} \sin(\beta t + B_i),$$

где α, β — вещественная и мнимая части соответствующих корней; A_i, B_i — коэффициенты, зависящие от начальных условий.

Если в системе есть хотя бы один корень с положительной вещественной частью (лежит в правой полуплоскости комплексной плоскости), то система неустойчива и в системе присутствует процесс с незатухающими колебаниями (см. рисунок 3.8а), если в системе имеется корень с нулевой вещественной частью (лежит на мнимой оси), а остальные корни имеют отрицательную вещественную часть, то имеет место устойчивость по Ляпунову — колебаний постоянной амплитуды (см. рисунок 3.8б), если в системе все корни с отрицательной вещественной частью (лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости), то система устойчива по Ляпунову и устойчива асимптотически, т.е. в системе присутствует процесс с затухающими колебаниями (см. рисунок 3.8в).

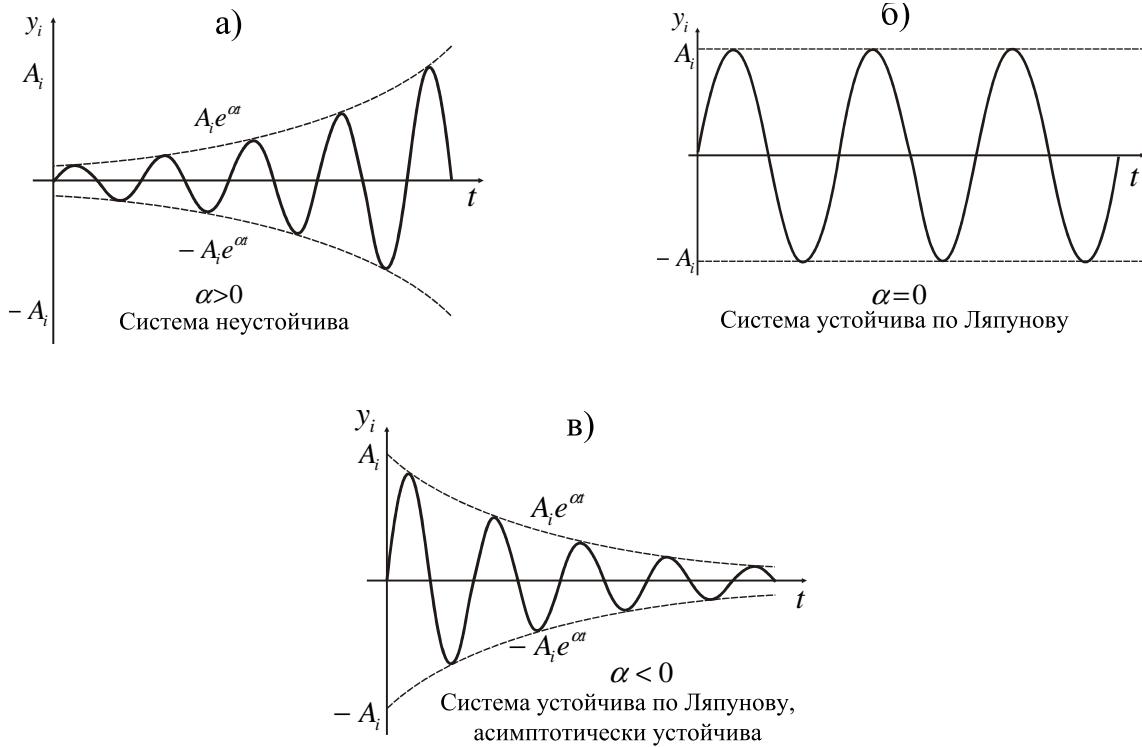


Рисунок 3.8 — Устойчивость системы при различных комплексно-сопряженных корнях

3 Простой вещественный корень λ кратности k .

$$y_i(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} + C_3 t^2 e^{\lambda t} + \dots + C_k t^{k-1} e^{\lambda t}.$$

а) $\lambda > 0 \Rightarrow |y_i(t)| \rightarrow \infty$ — система неустойчива;

- б) $\lambda = 0 \Rightarrow |y_i(t)| \rightarrow \infty$ — система неустойчива;
 в) $\lambda < 0 \Rightarrow |y_i(t)| \rightarrow 0$ — система устойчива по Ляпунову, асимптотически устойчива (в системе наблюдается затухающий переходной процесс).

4 Пара комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm j\beta$ кратности k .

$$y_i(t) = A_1 e^{\alpha t} \sin(\beta t + \psi_1) + A_2 e^{\alpha t} t \sin(\beta t + \psi_2) + \dots + A_k e^{\alpha t} t^{k-1} \sin(\beta t + \psi_k).$$

- а) $\alpha > 0 \Rightarrow |y_i(t)| \rightarrow \infty$ — система неустойчива;
 б) $\alpha = 0 \Rightarrow |y_i(t)| \rightarrow \infty$ — система неустойчива;
 в) $\alpha < 0 \Rightarrow |y_i(t)| \rightarrow 0$ — система устойчива по Ляпунову, асимптотически устойчива (в системе наблюдается затухающий колебательный переходной процесс).

Типы границ устойчивости в зависимости от корней

Говорят, что система находится на границе устойчивости, если один или два корня находятся на мнимой оси, а остальные имеют отрицательную вещественную часть. Различают два типа границ устойчивости:

1 Положим, корни системы n -го порядка — $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Будем говорить, что система находится на границе устойчивости колебательного типа, если имеется пара чисто мнимых корней, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части, т.е. $\lambda_{1,2} = \pm j\beta$ ($\beta > 0$), $Re(\lambda_i) < 0$ $i = 3, 4, \dots, n$.

Пара чисто мнимых корней порождает составляющую переходного процесса незатухающего гармонического вида,

$$y_1(t) = A_1 \sin(\beta t + B_1),$$

а остальные корни порождают затухающие составляющие:

где A_1, B_1 — неопределенные коэффициенты, зависящие от начальных условий и определяющие амплитуду и сдвиг по фазе гармонического сигнала;

β — определяет круговую частоту [рад/с].

2 Граница устойчивости нейтрального типа

Говорят, что система (объект) находится на границе устойчивости нейтрального типа, если один или два корня этого объекта нулевые, а остальные имеют отрицательную вещественную часть, т.е.

2.1 $\lambda_1 = 0$; $Re\lambda_i < 0$ $i = \overline{2, n}$. В этом случае нулевой корень порождает постоянную составляющую процесса, т.е. λ_i :

$$y_1(t) = A_1,$$

где A_1 — зависит от начальных условий и определяет амплитуду

постоянной составляющей.

Рассмотрим характеристический полином:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Если $\lambda_1 = 0$, то $a_0 = 0$, т.е.

$$\lambda_1 = 0 : \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda = \lambda(\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

В полиноме $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda = 0$ $(n - 1)$ -корень должен иметь отрицательную вещественную часть.

2.2 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $Re\lambda_i < 0$ $i = \overline{3, n}$. В этом случае для систем с одним входом пара нулевых корней порождает составляющую процессов:

$$y_{1,2} = A_1 + B_1 t,$$

где A_1, B_1 зависят от начальных условий и определяют амплитуду постоянной составляющей и скорости изменения.

При этом характеристический полином имеет вид:

$$\lambda^2(\lambda^{n-2} + a_{n-1}\lambda^{n-3} + \cdots + a_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

а полином

$$\lambda^{n-2} + a_{n-1}\lambda^{n-3} + \cdots + a_2$$

имеет $(n - 2)$ корней с отрицательной вещественной частью.

Пример 3.4 Пусть задан объект управления с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 1)s} = \frac{Y(s)}{G(s)}.$$

Необходимо определить устойчивость ОУ.

Решение. Запишем ПФ в виде дифференциального уравнения:

$$s(s^2 + 2s + 1)Y(s) = G(s).$$

Перейдем к дифференциальному уравнению:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = g(t).$$

Характеристический полином данного уравнения примет вид:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = \lambda(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Найдем корни λ :

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Следовательно, OY находится на границе устойчивости нейтрального типа. ■

3.6 Критерий устойчивости Рауса

Этот критерий был предложен английским математиком Э. Раусом в 1877 г.

Пусть задан объект управления в виде передаточной функции следующего вида:

$$W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (3.16)$$

Характеристический полином объекта управления имеет вид:

$$D(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (3.17)$$

Таблица Рауса составляется следующим образом (см. таблицу 3.1):

1) в первой строке записываются коэффициенты уравнения, начиная с a_n , и в каждом последующем столбце индекс коэффициента уменьшается на 2 единицы;

2) во второй строке записываются коэффициенты, начиная с a_{n-1} , и в каждом последующем столбце индекс коэффициента уменьшается на 2 единицы;

3) остальные элементы таблицы определяются по формуле: $C_{k,i} = C_{k+1,i-2} - r_i C_{k+1,i-1}$, где $r_i = \frac{C_{1,i-2}}{C_{1,i-1}}$, $i \geq 3$ — номер строки, k — номер столбца.

Критерий устойчивости Рауса формулируется следующим образом.

Теорема 3.4 Для того, чтобы автоматическая система была бы устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты первого столбца были положительны, т.е. для всех коэффициентов r_i было выполнено условие

$$r_i > 0, \quad i = 3, 4, \dots$$

Таблица 3.1 — Таблица Райса

Коэффициенты r_i	Строка i	Столбец k			
		1	2	3	4
—	1	$c_{1,1} = a_n$	$c_{2,1} = a_{n-2}$	$c_{3,1} = a_{n-4}$	$c_{4,1} = a_{n-6}$
—	2	$c_{1,2} = a_{n-1}$	$c_{2,2} = a_{n-3}$	$c_{3,2} = a_{n-5}$	$c_{4,2} = a_{n-7}$
$r_3 = \frac{c_{1,1}}{c_{1,2}}$	3	$c_{1,3} =$ $c_{2,1} - r_3 c_{2,2}$	$c_{2,3} =$ $c_{3,1} - r_3 c_{3,2}$	$c_{3,3} =$ $c_{4,1} - r_3 c_{4,2}$	$c_{4,3} = a_8$
$r_4 = \frac{c_{1,2}}{c_{1,3}}$	4	$c_{1,4} =$ $c_{2,2} - r_4 c_{2,3}$	$c_{2,4} =$ $c_{3,2} - r_4 c_{3,3}$	$c_{3,4} =$ $c_{4,2} - r_4 c_{4,3}$	$c_{4,4} = a_9$
$r_5 = \frac{c_{1,3}}{c_{1,4}}$	5	$c_{1,5} =$ $c_{2,3} - r_5 c_{2,4}$	$c_{2,5} =$ $c_{3,3} - r_5 c_{3,4}$	$c_{3,5} =$ $c_{4,3} - r_5 c_{4,4}$	$c_{4,5} = a_{10}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$r_i = \frac{c_{1,i-2}}{c_{1,i-1}}$	i	$c_{k,i} = c_{k+1,i-2} -$ $r_i c_{k+1,i-1}$	$c_{k,i} = c_{k+1,i-2} -$ $r_i c_{k+1,i-1}$	$c_{k,i} = c_{k+1,i-2} -$ $r_i c_{k+1,i-1}$	c_{4i}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

или, что эквивалентно,

$$c_{1,i} > 0, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad (a_n > 0).$$

Следствие 3.2 *Если хотя бы один из коэффициентов характеристического полинома отрицателен, то система неустойчива.*

Следствие 3.3 *Обращение в ноль одного из коэффициентов характеристического полинома за исключением коэффициента старшего члена свидетельствует о неустойчивости системы или о том, что система находится на границе устойчивости.*

Следствие 3.4 *Число отрицательных коэффициентов c_{1i} равно числу правых полюсов.*

Следствие 3.5 *Обращение a_0 в нуль приводит к появлению нулевого корня. Если $a_1 = a_2 = \dots = 0$ — это приводит к появлению нулевых корней.*

Следствие 3.6 *Обращение промежуточного коэффициента в нуль свидетельствует о появлении пары чисто мнимых корней.*

`Таблица 3.2 — Таблица Раяса

Коэффициенты	Строка i	1	2	3
—	1	$c_{1,1} = 2$	$c_{2,1} = 10$	$c_{3,1} = 6$
—	2	$c_{1,2} = 4$	$c_{2,2} = 8$	$c_{3,2} = 0$
$r_3 = \frac{1}{2}$	3	$c_{1,3} = 6$	$c_{2,3} = 6$	$c_{3,3} = 0$
$r_4 = \frac{1}{12}$	4	$c_{1,4} = 7\frac{1}{2}$	$c_{2,4} = 0$	$c_{3,4} = 0$
$r_5 = \frac{12}{15}$	5	$c_{1,5} = 6$	$c_{2,5} = 0$	$c_{3,5} = 0$

Если в процессе вычислений появляется отрицательный коэффициент в таблице Раяса, то это означает, что система неустойчива и дальнейшие расчеты проводить не следует. Причем число перемен знака коэффициентов $r_i > 0$, $i = \overline{3, n}$ равно числу корней характеристического полинома, расположенных в правой полуплоскости комплексной плоскости корней.

Достоинством данного критерия является удобство реализации для определения устойчивости на ЭВМ систем высокого порядка и возможность исследовать устойчивость отдельных параметров системы.

Пример 3.5 Пусть задан ОУ со следующей передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{10}{2s^4 + 4s^3 + 10s^2 + 8s + 6}.$$

Определить устойчив ли ОУ по критерию Раяса?

Решение: Характеристический полином ОУ имеет вид:

$$D(\lambda) = 2\lambda^4 + 4\lambda^3 + 10\lambda^2 + 8\lambda + 6.$$

Порядок ОУ равен четырем, т.е. $n = 4$. Поэтому таблица Раяса должна иметь пять строк и три столбца.

Тогда таблица Раяса приобретает вид, представленный в таблице 3.2

Как видно из таблицы, все коэффициенты c_{1i} положительны, т.е. $c_{1i} > 0$ $i = \overline{1, n+1}$ при $a_n > 0$, следовательно, ОУ устойчив.

■

3.7 Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Этот критерий позволяет по коэффициентам характеристического уравнения линейной системы определить устойчивость.

Предположим, что определен характеристический полином: $D(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$. Критерий Гурвица позволяет по коэффициентам a_i ($i = \overline{0, n}$) определить будут ли корни этого полинома λ_i иметь отрицательную вещественную часть ($Re(\lambda_i) < 0$), т.е. что система является асимптотически устойчивой. При использовании критерия Гурвица для проверки системы формируется матрица Гурвица в следующем виде:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 \end{vmatrix} - \text{размерности } (n \times n)$$

Правила формирования матрицы Гурвица

1 По главной диагонали записываются коэффициенты характеристического полинома с " a_{n-1} " до " a_0 ".

2 Справа от главной диагонали ставятся коэффициенты с индексом, уменьшающимся на 2 единицы от предыдущего. Если индекс становится меньше нуля, то ставится 0.

3 Слева от главной диагонали ставятся коэффициенты с индексом, увеличивающимся на 2 единицы от предыдущего. Если индекс становится больше n , то ставится нулевой элемент.

4 Определители Гурвица формируются как главные миноры этой матрицы и получаются отчеркиванием i -ой строки и i -ого столбца.

По матрице Гурвица формируется определитель Гурвица как главный минор этой матрицы. Δ_i — определитель (главный минор) матрицы $i \times i$.

$$\Delta_1 = a_{n-1}; \quad \Delta_2 = \det \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \det \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}; \dots;$$

$$\Delta = \det \Gamma$$

Критерий Гурвица: Для того, чтобы линейная система была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при положительном старшем коэффициенте a_n все определители Гурвица были положительными, т.е. $a_n > 0; \Delta_i > 0; i = \overline{1, n}$.

Частный случай:

1 Система первого порядка, т.е. $n = 1$. Характеристический полином такой системы имеет вид:

$$a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Матрица Гурвица формируется как

$$\Gamma = a_0.$$

Как видно из последнего выражения, первый определитель матрицы Гурвица находится как $a_1 > 0$; $\Delta_1 = a_0 > 0$.

2 Система второго порядка, т.е. $n = 2$. Характеристический полином такой системы имеет вид:

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Матрица Гурвица такой системы формируется как

$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Первый определитель матрицы Гурвица находится как:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; a_2 > 0.$$

3 Система третьего порядка, т.е. $n = 3$. Характеристический полином данной системы имеет вид:

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Матрица Гурвица данной системы формируется как

$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Определители матрицы Гурвица формируются следующим образом:

$$a_3 > 0; \Delta_1 = a_2 > 0$$

$$\Delta_2 = a_2a_1 - a_0a_3 > 0; \Delta_3 = a_0(a_2a_1 - a_0a_3) > 0 \Rightarrow$$

$$a_2a_1 > a_0a_3, a_0 > 0, a > 0.$$

Из рассмотренных выше частных случаев следует, что положительность всех коэффициентов является только

необходимым условием устойчивости систем третьего порядка, т.к. требует добавочного выполнения неравенства $a_2a_1 > a_0a_3$.

В общем случае положительность всех корней характеристического полинома является необходимым условием устойчивости для систем любого порядка и только для систем первого и второго порядка необходимым и достаточным условием устойчивости.

Построение областей допустимых значений параметров, при которых система является устойчивой с использованием критерия Гурвица

Рассмотрим систему, представленную на рисунке 3.9, где y — регулируемая переменная, g — задающее воздействие, e — ошибка ($e = g - y$), K_1, T_y — коэффициент передачи и постоянная времени усилительно-преобразовательного устройства, $K_2, T_{\text{д}}$ — коэффициент передачи и постоянная времени исполнительного двигателя.

Получим по структурной схеме передаточную функцию разомкнутого контура $W_{\text{р.к.}}(s)$

$$W_{\text{р.к.}}(s) = \frac{K}{(T_y s + 1)(T_{\text{д}} s + 1)s},$$

где $K = K_1 \cdot K_2$ — коэффициент передачи разомкнутого контура.

Требуется найти ограничения на параметры разомкнутого контура — K, T_y и $T_{\text{д}}$, при которых разомкнутая система будет устойчивой.

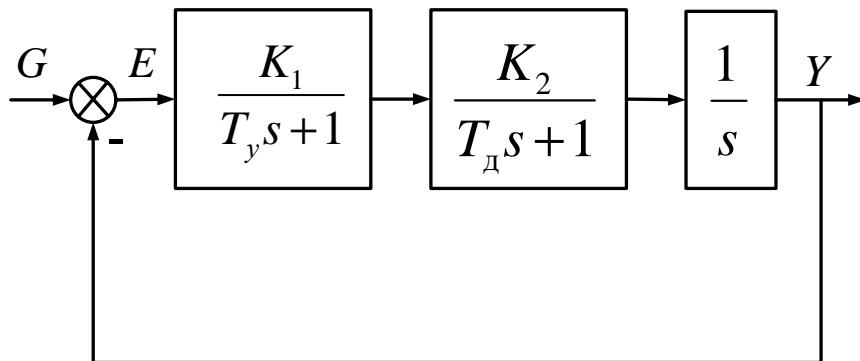


Рисунок 3.9 — Структурная схема замкнутой системы

Получим передаточную функцию замкнутой системы.

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{W_{\text{п.к.}}(s)}{1 + W_{\text{п.к.}}(s)} = \frac{K}{(T_y s + 1)(T_d s + 1)s + K} = \\ &= \frac{K}{T_y T_d s^3 + (T_y + T_d)s^2 + s + K}.\end{aligned}$$

Приравняем характеристический полином системы к нулю

$$T_y T_d s^3 + (T_y + T_d)s^2 + s + K = 0.$$

Воспользуемся критерием Гурвица для данной системы, т.е. сформируем матрицу Гурвица:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} T_y + T_d & K & 0 \\ T_y T_d & 1 & 0 \\ 0 & T_y + T_d & K \end{vmatrix}$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости системы — положительность всех коэффициентов и определителей матрицы Гурвица, т.е. должно выполняться: $T_y > 0, T_d > 0, T_y T_d > 0,$

$$\Delta_1 = T_y + T_d > 0,$$

$$\Delta_2 = T_y + T_d - K T_y T_d > 0,$$

$$\Delta_3 = K \Delta_2 > 0.$$

При $T_y > 0$ и $T_d > 0$ получаем

$\Delta_1 > 0, T_y T_d > 0$. Из условия $\Delta_3 > 0$ следует, что $K > 0$. Из условия $\Delta_2 = T_y + T_d - K T_y T_d > 0$ следует, что

$$\frac{1}{T_d} + \frac{1}{T_y} > K.$$

Заменим в этом неравенстве знак неравенства на знак равенства. В результате получим уравнение границы области устойчивости

$$\frac{1}{T_d} + \frac{1}{T_y} = K.$$

Совокупность уравнений, получаемых из неравенств критерия Гурвица в плоскости параметров T_d, T_y или K, T_d или K, T_y позволяет найти границу области допустимых значений параметров, при которых система будет устойчива. На рисунке 3.10 представлены области устойчивости в плоскости параметров.

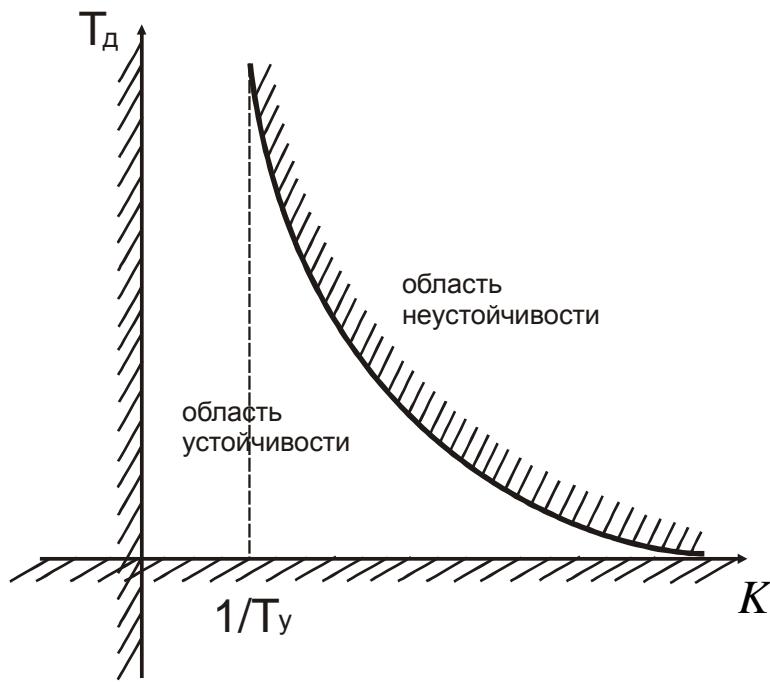


Рисунок 3.10 — Области устойчивости в плоскости параметров

3.8 Критерий устойчивости Лъенара-Шипара

В 1914 г. Лъенаром и Шипаром был предложен критерий устойчивости, упрощающий критерий Гурвица.

Критерий устойчивости Лъенара-Шипара формулируется следующим образом:

Теорема 3.5 Если все коэффициенты характеристического полинома положительны, то необходимо и достаточно, чтобы среди определителей Гурвица были положительными все определители с четными индексами или все определители с нечетными индексами, т.е. $a_i > 0$ и $\Delta_{2j+1} > 0$ или $a_i > 0$ и $\Delta_{2j} > 0$, где $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, n - 1}$.

3.9 Связь необходимых и достаточных корневых условий устойчивости линейных систем с уравнением Ляпунова

Рассмотрим уравнение движения невозмущенного объекта управления:

$$\dot{x} = Ax,$$

где $x \in R^n$, $A - (n \times n)$. По теореме об асимптотической устойчивости следует, что

$$A^T P + PA = -Q,$$

где $Q > 0$, $P > 0$.

По необходимому и достаточному условию устойчивости системы должно выполняться требование отрицательности вещественной части корней.

Переформулируем теорему Ляпунова:

Для того, чтобы матрица A ($n \times n$) имела все корни характеристического уравнения с отрицательной вещественной частью, необходимо для любой и достаточно для какой-либо положительно определенной матрицы Q ($Q > 0$), чтобы решение уравнения Ляпунова относительно матрицы P было положительно определено ($P > 0$).

Теорема Ляпунова является критерием расположения всех корней характеристического полинома матрицы A в левой полуплоскости комплексной плоскости корней и, как следствие, критерием устойчивости линейной системы. Практическое использование данной теоремы заключается в использовании достаточного условия.

3.10 Модифицированное уравнение Ляпунова как критерий расположения корней левее прямой, параллельной мнимой оси, сдвинутой от неё на значение α

При исследовании экспоненциальной устойчивости линейной системы пользуются модифицированным уравнением Ляпунова

$$A^T P + PA + 2\alpha P = -Q,$$

где A — матрица описания системы ($n \times n$);

Q — симметричная матрица ($n \times n$);

P — симметричная матрица ($n \times n$), являющаяся решением уравнения Ляпунова.

$$\lambda \rightarrow \bar{\lambda} \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda + \alpha, \text{ тогда } \bar{A} : \bar{A} = A + \alpha I$$

Воспользуемся теоремой Ляпунова о расположении корней в левой полуплоскости, тогда $\forall Q > 0 \quad \bar{A}^T P + P \bar{A} = -Q \Rightarrow$ дает решение в виде $P > 0$.

$$(A + \alpha I)^T P + P(A + \alpha I)^T = -Q \Rightarrow$$

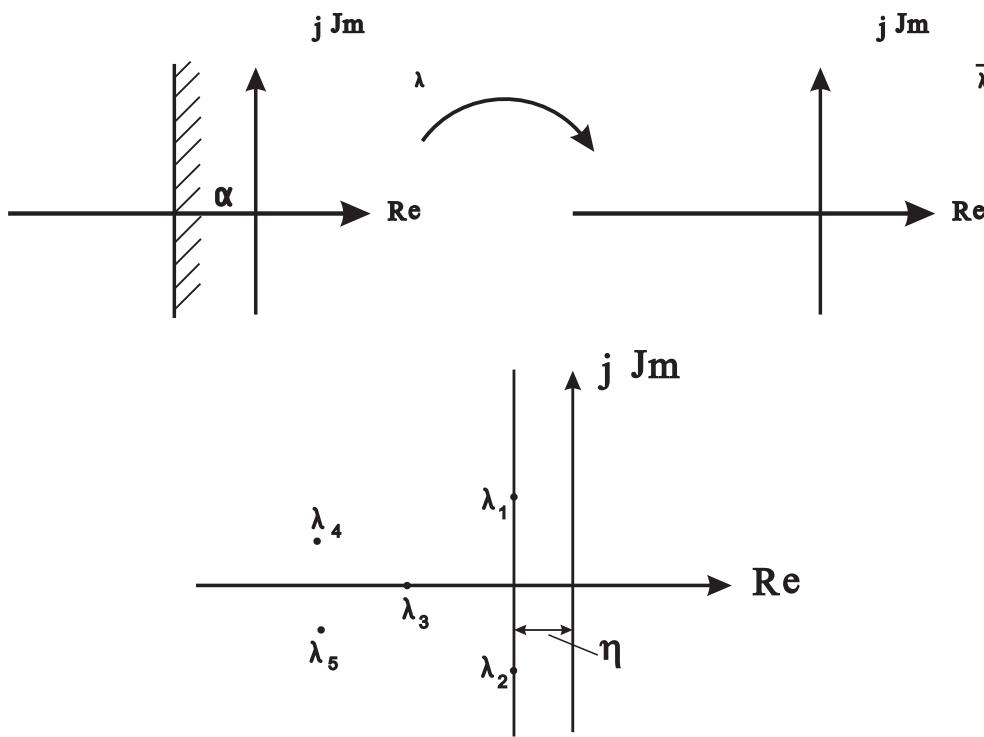


Рисунок 3.11 — Графическая интерпретация степени устойчивости

$$A^T P + \alpha P + PA^T + \alpha P = -Q \Rightarrow A^T P + PA^T + 2\alpha P = -Q$$

Теорема 3.6 Для того, чтобы все корни характеристического полинома матрицы A удовлетворяли условию $\operatorname{Re}(\lambda_i) < -\alpha$ необходимо для любой и достаточно для какой-либо положительно определенной матрицы Q ($Q > 0$), чтобы решение уравнения Ляпунова относительно матрицы P было положительно определено.

Замечание 16. Если решение уравнения Ляпунова дает положительно определенную матрицу P при положительно полуопределенной матрице Q , то область расположения корней включает и границу, т.е. прямую параллельную мнимой оси, проходящую через точку $-\alpha$.

3.11 Степень устойчивости в линейных системах

Степень устойчивости является корневым показателем качества системы и характеризует запас устойчивости. Будем говорить, что корень полинома λ_i или пара корней $\lambda_{i,i+1}$ являются доминирующими корнями, если они расположены ближе к мнимой оси.

Под степенью устойчивости в линейных системах понимается

удаление мнимой оси от доминирующих корней систем и обозначается η (см. рисунок 3.11).

Оценка быстродействия системы по степени устойчивости

Положим, что из корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ доминирует вещественный корень λ_1 . Тогда этот корень порождает переходную составляющую вида

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t},$$

где c_1 — неопределенный коэффициент.

Доминирующий корень порождает в системе наиболее медленно затухающую составляющую процессов в системе, а, следовательно, по этой составляющей можно определить быстродействие системы. Проведем оценку быстродействия системы по наиболее затухающей составляющей. Пусть c_1 — положительное число, т.е. $c_1 > 0$. Обозначим оценку времени переходного процесса в виде \hat{t}_n . Тогда переходная составляющая наиболее медленно затухающего процесса приобретает вид:

$$\hat{t}_n : y_1(\hat{t}_n) = \Delta c_1,$$

где Δ — область нормального функционирования системы. Тогда эта переходная составляющая может быть представлена в виде:

$$\Delta c_1 = c_1 e^{\lambda_1 \hat{t}_n},$$

где λ_1 — вещественный доминирующий корень. Найдем из последнего выражения оценку времени переходного процесса как

$$\frac{1}{\Delta} = e^{\lambda_1 \hat{t}_n} \Rightarrow -\lambda_1 \hat{t}_n = \ln \frac{1}{\Delta},$$

следовательно, оценка времени переходного процесса определяется как

$$\hat{t}_n = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta} \approx \frac{3}{\eta},$$

где $-\lambda_1 = \eta$; $\Delta = 0,05$; $\ln(0,05)^{-1} = \ln 20 \approx 3$.

Связь степени устойчивости с параметром сходимости процессов для экспоненциально устойчивых систем

Модифицированное уравнение типа Ляпунова вида: $A^T P + PA + 2\alpha P = -Q$, где A — $(n \times n)$ — матрица описания

системы; $Q \geq 0 - (n \times n)$; $P > 0 - (n \times n)$ и α — положительный параметр, определяющий степень затухания процессов, является критерием экспоненциальной устойчивости линейной системы со степенью затухания α и критерием расположения корней характеристического полинома матрицы A левее прямой, параллельной мнимой оси и проходящей через точку комплексной плоскости $(-\alpha, 0)$. Отсюда следует, что максимальное значение параметра α равняется степени устойчивости системы.

Для линейных систем справедливо утверждение: если система асимптотически устойчива, т.е. все корни характеристического полинома имеют отрицательную вещественную часть, то она экспоненциально устойчива, т.е. всегда можно определить значение степени устойчивости η и, как следствие, значение параметра степени сходимости процессов в определении экспоненциальной устойчивости.

3.12 Качественная экспоненциальная устойчивость непрерывных систем

Пусть поведение динамической системы описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t)), \quad (3.18)$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния динамической системы,

$F(x)$ — n -мерная нелинейная вектор-функция векторного аргумента, такая, что при любых $x(0) \in R^n$ решение уравнения (3.18) существует и единствено,

$t \geq 0$ — время.

Введём понятие качественной экспоненциальной устойчивости для системы, описываемой уравнением (3.18).

Положение равновесия $x = 0$ непрерывной динамической системы называется качественно экспоненциально устойчивым (КЭУ) "в большом", если для любых траекторий движения системы $x(t)$ системы (3.18), исходящих из произвольных начальных условий $x(0) \in R^n$, существуют такие параметры $r > 0$, $\rho \geq 1$ и $\beta : \beta + r < 0$, что для любого момента времени $t \geq 0$ выполняется следующее неравенство:

$$\|x(t) - e^{\beta t}x(0)\|_{\nu} \leq \rho(e^{(\beta-r)t} - e^{\beta t}) \|x(0)\|_{\nu} \quad (3.19)$$

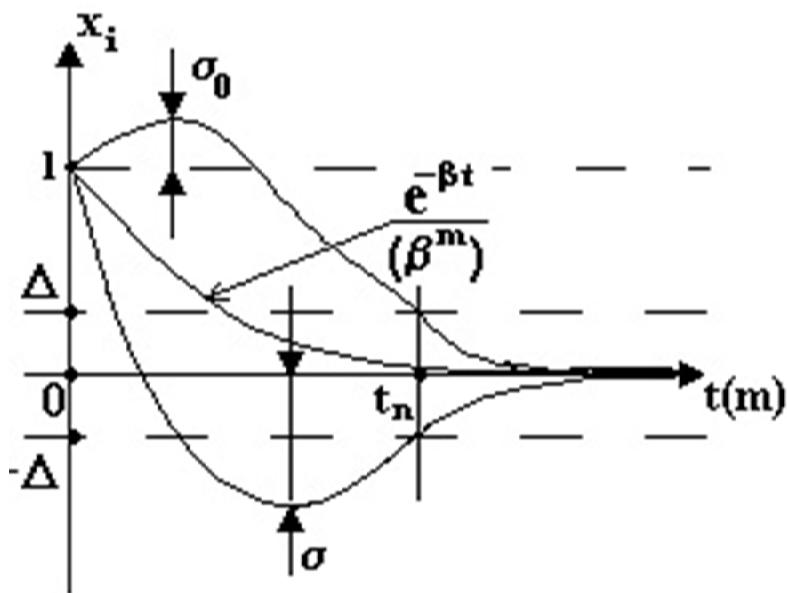


Рисунок 3.12 — Геометрическая интерпретация качественной экспоненциальной устойчивости

В неравенстве (3.19) ν — норма (ν — целое положительное число) определяется выражением:

$$\|x\|_\nu = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^\nu \right]^{\frac{1}{\nu}}. \quad (3.20)$$

Геометрическая интерпретация определение качественной экспоненциальной устойчивости представлена на рисунке 3.12 для $\rho = 1$.

Определение КЭУ в „малом“ может быть введено для ограниченной области, включающей начало координат с использованием аналогичного подхода.

Достаточное условие качественной экспоненциальной устойчивости
(r, β - устойчивость)

Для получения достаточного условия качественной экспоненциальной устойчивости введём функцию Ляпунова как квадратный корень степени ν от положительно однородной функции $\bar{V}(x)$ степени ν :

$$V(x) = [\bar{V}(x)]^{\frac{1}{\nu}}. \quad (3.21)$$

Для того, чтобы положение равновесия $x = 0$ было качественно экспоненциально устойчивым достаточно, чтобы

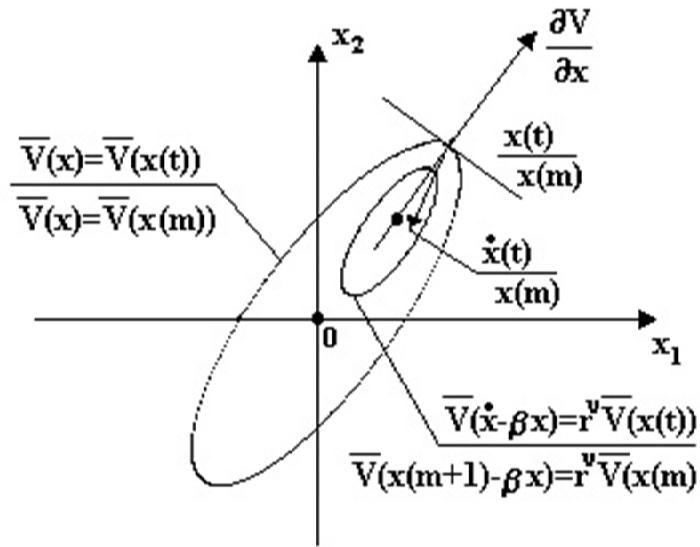


Рисунок 3.13 — Геометрическая интерпретация качественной экспоненциальной устойчивости неравенства (3.22)

существовала такая функция Ляпунова $V(x)$ и такие параметры $r > 0$ и $\beta : \beta + r < 0$, что на всех траекториях движения системы (3.18) для любого момента времени $T \geq 0$ удовлетворялось следующее неравенство:

$$V \left[\frac{d}{dt} x(t) - \beta x(t) \right] \leq r V[x(t)]. \quad (3.22)$$

Геометрическая интерпретация неравенства (3.22) показана на рисунке 3.13 для системы второго порядка $n = 2$.

Модифицированное уравнение Ляпунова как критерий КЭУ (r, β - устойчивости).

Введём функцию Ляпунова вида:

$$Vx = [x^T Px]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.23)$$

где P — симметрическая положительно определённая матрица размерности $n \times n$.

Модифицированное уравнение Ляпунова может быть представлено в следующем виде:

$$(F - \beta I)^T P (F - \beta I) - r^2 P = -Q, \quad (3.24)$$

где Q — положительно полуопределённая $n \times n$ матрица.

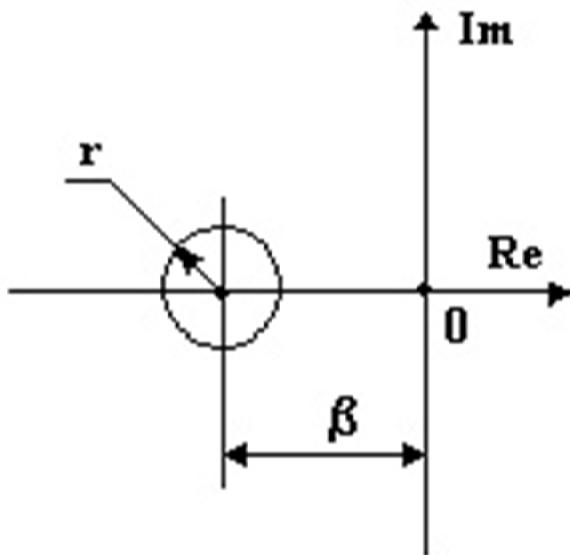


Рисунок 3.14 — Распределение корней

Модифицированное уравнение Ляпунова является критерием расположения собственных значений матрицы F внутри круга радиуса r с центром в точке с координатами $(\beta; j0)$ на комплексной плоскости.

Для того, чтобы собственные значения матрицы F располагались в круге радиуса r с центром в точке с координатами $(\beta; j0)$ комплексной плоскости необходимо, чтобы для любой и достаточно, чтобы для какой-либо положительно полуопределённой матрицы Q решение уравнения (3.24) относительно матрицы Q было бы положительно определённым.

Пусть динамическая система описывается уравнением типа (3.18), где $F(x(t)) = Fx(t)$ и F — квадратная матрица размера $n \times n$.

Если решение уравнения (3.24) есть положительно определённая матрица P и параметры r , β удовлетворяют следующим условиям $r > 0$, $\beta + r < 0$, матрица $Q \geq 0$, тогда исходная непрерывная система — r , β устойчива и корни системы располагаются в круге радиуса r с центром $(\beta; j0)$ комплексной плоскости (см. рисунок 3.14).

Использование достаточных условий КЭУ с формированием локального критерия позволяет получить линейный закон управления, обеспечивающий в замкнутой системе качественную экспоненциальную устойчивость. Другими словами, если линейная непрерывная система описывается уравнением:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (3.25)$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния,

$u \in R^k$ — вектор управления,

$y \in R^l$ — вектор выхода,

A — матрица размерности $n \times n$, определяющая динамические свойства системы,

B — матрица входов размерности $n \times k$,

C — матрица выхода размерности $l \times n$,

то искомый закон управления вида

$$u = -Kx, \quad (3.26)$$

где K — матрица линейных стационарных обратных связей размерности $k \times n$, на основе метода локальной оптимизации есть решение матричного алгебраического уравнения типа Риккати:

$$\begin{cases} (A - BK - \beta I)^T P (A - BK - \beta I) - r^2 P = -Q \\ K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P (A - \beta I) \end{cases} \quad (3.27)$$

относительно положительно определённого решения в виде матрицы P с последующим вычислением матрицы K .

Уравнение (3.27) может быть использовано для синтеза непрерывных с заданием соответствующих значений r и β .

Таким образом, модифицированное уравнение Ляпунова и метод локальной оптимизации [4] на его основе позволяют создавать эффективные численные процедуры анализа и синтеза систем автоматического управления [5].

Пример 3.6 . Рассмотрим процедуру синтеза для непрерывной робото-технической системы, поведение которой описывается следующими соответствующими матрицами:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 50 & 100 \\ 0 & 0 \\ 1.2 & 6 \end{vmatrix}; \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Пусть корни системы должны располагаться внутри круга единичного радиуса $r = 1$, а центр круга — в точке с координатами

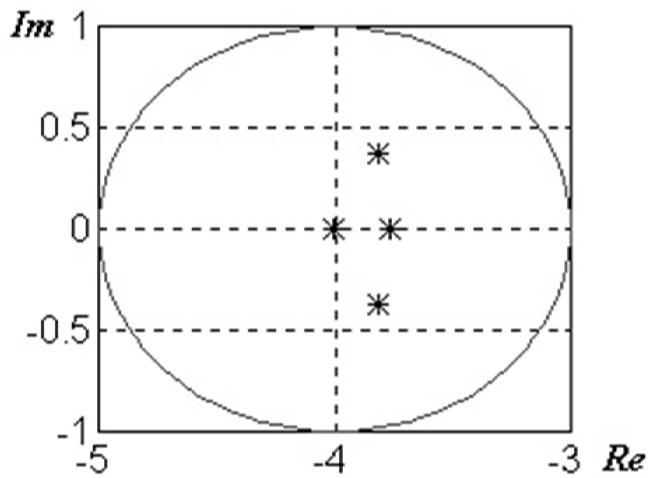


Рисунок 3.15 — Распределение корней для примера 3.6

$(-4; j0)$. Результатом синтеза является матрица линейных стационарных обратных связей

$$K = \begin{vmatrix} 0.5 & -0.07 & -8.16 & -3.13 \\ -0.1 & 0.01 & 4.08 & 1.56 \end{vmatrix}.$$

Расположение корней замкнутой системы со статическим регулятором представлено на рисунке 3.15.

Как можно видеть корни замкнутой системы располагаются в желаемом круге. Переходный процесс представлен рисунке 3.16.

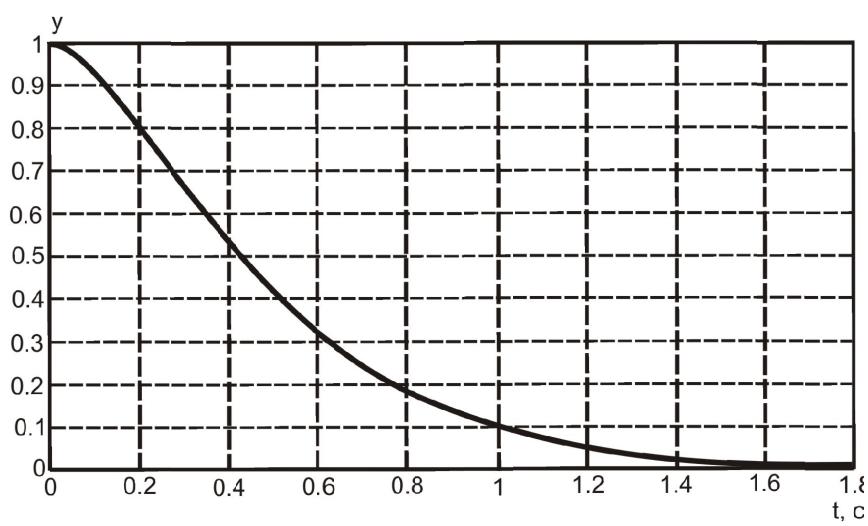


Рисунок 3.16 — Переходной процесс для примера 3.6

4 Частотные методы анализа систем с одним входом и одним выходом

4.1 Понятия о типовых динамических звеньях

В общем случае передаточная функция представляет собой отношение двух полиномов

$$W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0},$$

где $b_j, j = \overline{1, m}$ и $a_i, i = \overline{1, n}$ — постоянные коэффициенты, ($m \leq n$ — условие физической реализуемости),

s_1, s_2, \dots, s_n — корни знаменателя передаточной функции ($\Pi\Phi$), т.е. полюса $\Pi\Phi$,

$s_{10}, s_{20}, \dots, s_{m0}$ корни числителя передаточной функции ($\Pi\Phi$), т.е. нули $\Pi\Phi$.

В общем виде передаточная функция может быть записана

$$W(s) = \frac{b_m \prod_{j=1}^m (s - s_{j0})}{a_n \prod_{i=1}^n (s - s_i)}.$$

Введение типовых динамических звеньев связано с разложением передаточной функции на элементарные сомножители с вещественными коэффициентами. Если коэффициент числителя и знаменателя передаточной функции вещественный, то максимальный порядок сомножителя с вещественными коэффициентами составляет не больше второго порядка, что соответствует паре комплексно-сопряженных корней. Элементарные сомножители первого порядка порождаются вещественными корнями.

Определение 23. Под типовым динамическим звеном понимается такой элемент системы, описание которого задается неразложимой передаточной функцией с вещественными коэффициентами [1].

Рассмотрим наименования типовых динамических звеньев

1. $W(s) = \frac{1}{s}$ – интегрирующее звено.
2. $W(s) = s$ – дифференцирующее звено.
3. $W(s) = \frac{1}{(Ts + 1)}$ ($T > 0$ – постоянная времени, [с]) – апериодическое звено.
4. $W(s) = Ts + 1$ – дифференцирующее звено I порядка ($T > 0$ – постоянная времени, [с]).
5. $W(s) = \frac{1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$ – колебательное звено ($T > 0$ – постоянная времени, [с], ξ – коэффициент затухания, $0 < \xi < 1$).

4.2 Понятия о частотной передаточной функции



Рисунок 4.1 — Элемент

Передаточная функция представленного на рисунке 4.1 элемента определяется выражением

$$W(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} \quad (4.1)$$

при нулевых начальных условиях.

Обозначим через $G(j\omega)$ – изображение Фурье входного сигнала $g(t)$, а $Y(j\omega)$ – преобразование Фурье выходного сигнала $y(t)$.

Определение 24. Частотной передаточной функцией $W(j\omega)$ будем называть отношение изображения Фурье выходного сигнала к изображению Фурье входного сигнала при нулевых начальных условиях, т.е.

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{G(j\omega)}. \quad (4.2)$$

Частотная передаточная функция может быть получена из обычной передаточной функции формальной заменой оператора Лапласа s на $j\omega$, где ω — круговая частота, т.е. $s = j\omega$.

Рассмотрим прохождение гармонических сигналов через линейный элемент. Для этого положим, что входной сигнал является гармоническим, т.е. $g(t) = g_0 \sin \omega_1 t$, где g_0 — амплитуда гармонического сигнала, ω_1 — круговая частота гармонического сигнала.

При прохождении гармонического сигнала через линейный элемент после окончания переходных процессов в установившемся режиме на выходе устанавливается тоже гармонический сигнал той же самой частоты, но отличающийся в общем случае амплитудой и фазой, т.е.

$$y(t) = y_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1),$$

где y_0 — амплитуда выходного гармонического сигнала, φ_1 — сдвиг по фазе.

Перепишем частотную передаточную функцию в комплексной форме

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{G(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (4.3)$$

где $U(\omega)$ — вещественная часть передаточной функции $W(j\omega)$, $V(\omega)$ — мнимая часть передаточной функции $W(j\omega)$.

Запишем

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

где $A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$ — модуль комплексного числа (амплитуда частотной передаточной функции),

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} — фаза частотной передаточной функции.$$

Если зафиксировать частоту $\omega = \omega_1$, то амплитуда $A(\omega_1)$ будет определять соотношение амплитуд входного и выходного сигналов.

$$A(\omega_1) = \frac{y_0}{g_0},$$

$$\varphi(\omega_1) = \varphi_1$$

— определяет сдвиг по фазе выходного сигнала относительно входного. Амплитудно-фазо-частотная характеристика представлена на рис. 4.2.

Определение 25. Под амплитудно-фазо-частотными характеристиками (АФЧХ) элементов системы понимается годограф

изменения частотной передаточной функции $W(j\omega)$ при изменении частоты от нуля до бесконечности на комплексной плоскости.

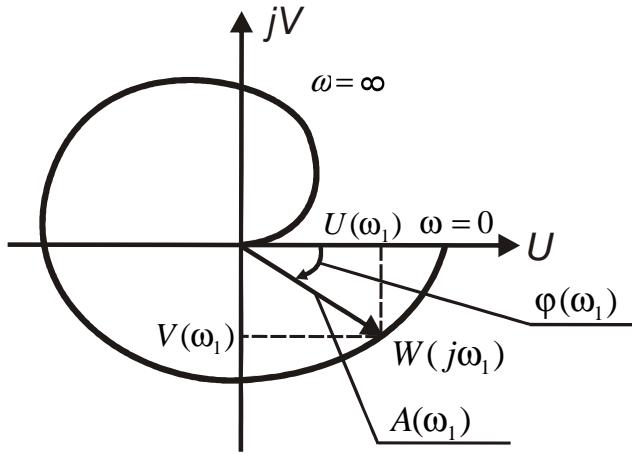


Рисунок 4.2 — Амплитудно-фазо-частотная характеристика

Логарифмические амплитудно-фазочастотные характеристики (ЛАФЧХ)

Рассмотрим элемент системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{Y(s)}{G(s)}.$$

Произведем замену s на $j\omega$, тогда частотная передаточная функция будет записана в виде

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{G(j\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где $A(\omega)$ — амплитуда частотной передаточной функции, $\varphi(\omega)$ — фаза частотной передаточной функции.

ЛАФЧХ строятся по соотношениям:

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg A(\omega) \\ \varphi(\omega) = \varphi(\omega) \end{cases},$$

где $L(\omega)$ — логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ),

$\varphi(\omega)$ — логарифмическая фазо-частотная характеристика (ЛФЧХ).

ЛАФЧХ строятся в координатах:

1. по оси абсцисс откладывается круговая частота $\omega [c^{-1}]$ в логарифмическом масштабе ($\lg\omega$),

2. по оси ординат — значения ЛАЧХ $L(\omega)$ в дБ или значения ЛФЧХ $\varphi(\omega)$ в градусах.

20 дБ соответствует стократному изменению амплитуды между входными и выходными сигналами.

Отрезок оси частот, соответствующий десятикратному изменению частоты, называют декадой (см. рис. 4.3).

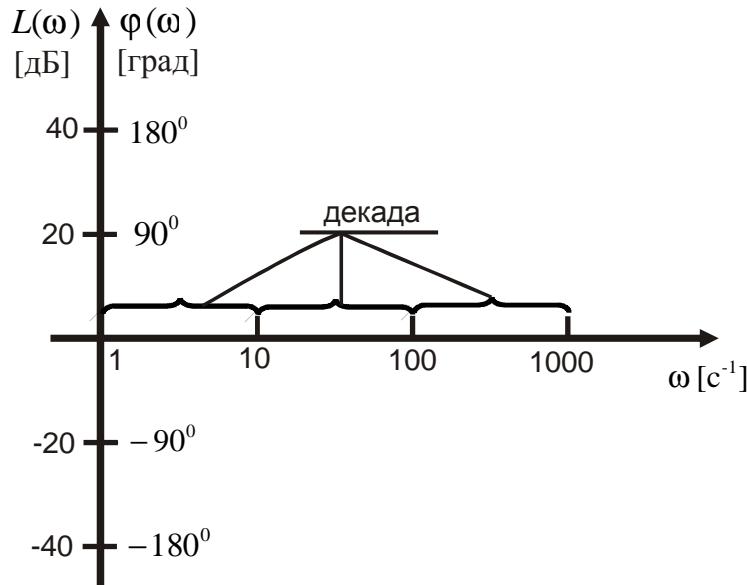


Рисунок 4.3 — Логарифмическая амплитудно-фазо-частотная характеристика

4.3 Типовые динамические звенья и их характеристики

1. Пропорциональное звено

Определение 26. Элемент системы, описание которого задается передаточной функцией

$$W(s) = k,$$

где k — коэффициент передачи этого элемента или алгебраическим уравнением

$$y = kg,$$

где y — выходная переменная этого элемента,

g — входная, называется пропорциональным звеном.

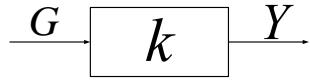


Рисунок 4.4 — Пропорциональное звено

Переходной функцией $h(t)$ называют реакцию системы (элемента) на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях

$$h(t) : y(t) = h(t)$$

при задающем воздействии

$$g(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Весовой функцией $\omega(t)$ называют реакцию системы элемента на входное воздействие в виде δ функции при нулевых начальных условиях.

$$\omega(t) : y(t) = \omega(t)$$

при

$$g(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0, & t > 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

и

$$\int_0^\infty \delta(\tau) d\tau = 1.$$

Переходная и весовая характеристики равны:

$$h(t) = k \cdot 1(t)$$

$$\omega(t) = k \cdot \delta(t)$$

Переходная характеристика пропорционального звена представлена на рисунке 4.5.

Частотная передаточная функция звена описывается выражением

$$W(j\omega) = k$$

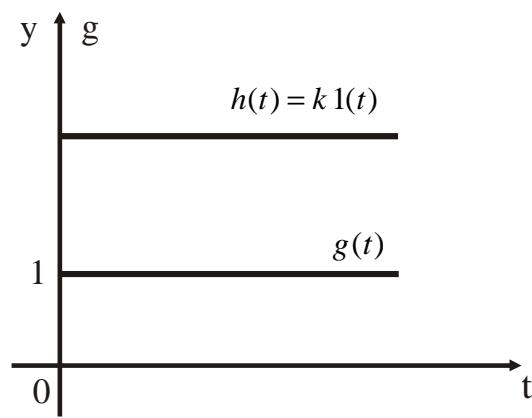


Рисунок 4.5 — Переходная характеристика пропорционального звена

ЛАЧХ и ЛАФЧХ задаются уравнениями

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg k, \\ \varphi(\omega) = 0. \end{cases}$$

Логарифмическая амплитудно-фазо-частотная характеристика звена при $k = 0.1$ представлена на рисунке 4.6

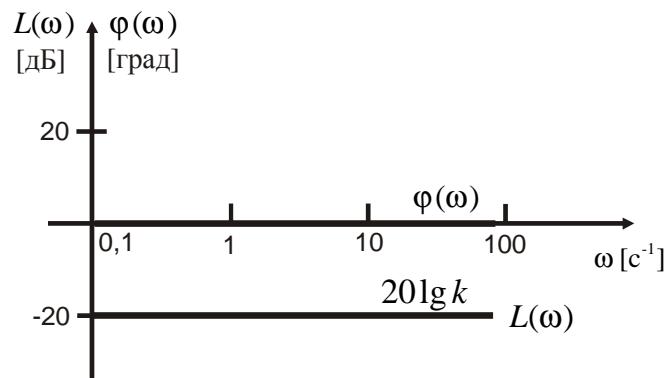


Рисунок 4.6 — ЛАФЧХ пропорционального звена

2. Апериодическое звено

Определение 27. Элемент системы, описание которого задается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1}{Ts + 1},$$

где T — постоянная времени $[c]$ или дифференциальным уравнением

$$T \frac{dy}{dt} + y = g,$$

где y — выходная переменная элемента, g — входная переменная элемента, называется апериодическим звеном.

Переходная функция $h(t) : y(t) = h(t)$ при $g(t) = 1(t)$ и нулевых начальных условиях, т.е. $y(0) = 0$.

Перепишем дифференциальное уравнение

$$Ty' + y = g.$$

Найдем выходную переменную y .

$$\dot{y} = -\frac{1}{T}y + \frac{1}{T}g.$$

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\frac{1}{T}t} \cdot y(0) + \frac{1}{T} \int_0^t e^{-\frac{1}{T}\tau} \cdot g(t-\tau)d\tau = \frac{1}{T} \int_0^t e^{-\frac{1}{T}\tau} \cdot 1d\tau = \\ &= \frac{1}{T} \left(-Te^{-\frac{1}{T}\tau} \Big|_0^t \right) = -\left(e^{-\frac{1}{T}t} - 1 \right) = 1 - e^{-\frac{1}{T}t} \end{aligned}$$

Переходная характеристика апериодического звена представлена на рис. 4.7.

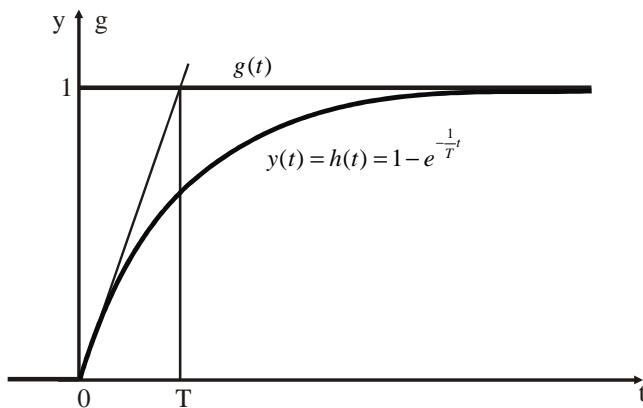


Рисунок 4.7 — Переходная характеристика апериодического звена

Рассмотрим производную от переходной функции

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\frac{1}{T}t}\right) = \frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}.$$

При $t = 0$ получим

$$\frac{d}{dt}h(t) \Big|_{t=0} = \frac{1}{T}.$$

Весовая функция $\omega(t)$ — реакция $y(t)$ при $g(t) = \delta(t)$ и нулевых начальных условиях.

Получим весовую функцию как производную от переходной функции.

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}h(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}.$$

Весовая функция апериодического звена представлена на рис. 4.8

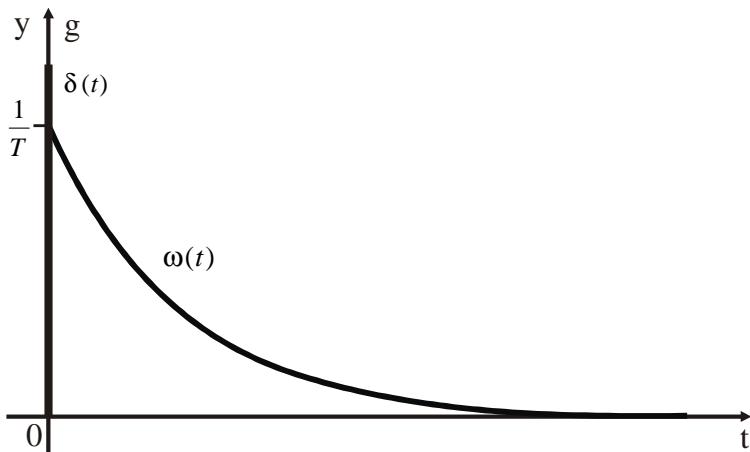


Рисунок 4.8 — Весовая характеристика апериодического звена

Рассмотрим частотные характеристики звена.

1. Амплитудно-фазо-частотная характеристика

Заменим оператор Лапласа s на $j\omega$ и получим частотную передаточную функцию

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1 - j\omega T}{\omega^2 T^2 + 1} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Обозначим вещественную и мнимую части передаточной функции

$$U(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2},$$

$$V(\omega) = -\frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Амплитуда и фаза частотной передаточной функции равны

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\operatorname{arctg} T\omega.$$

Составим таблицу для расчета АФЧХ (таблица 4.1).

Таблица 4.1 — Таблица расчетов АФЧХ апериодического звена I порядка

ω	0	$\frac{1}{T}$	∞
$U(\omega)$	1	$1/2$	0
$V(\omega)$	0	$-1/2$	0
$A(\omega)$	1	$1/\sqrt{2}$	0
$\varphi(\omega)$	0	-45°	-90°

Амплитудно-фазо-частотная характеристика апериодического звена представлена на рис. 4.9

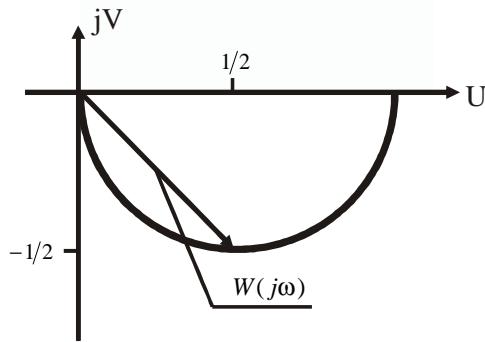


Рисунок 4.9 — Амплитудно-фазо-частотная характеристика апериодического звена

2. Логарифмическая амплитудно-фазо-частотная характеристика

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = -20 \lg \sqrt{1+T^2\omega^2} \\ \varphi(\omega) = -\operatorname{arctan} T\omega \end{cases}$$

Отдельно рассмотрим амплитудно-фазо-частотную характеристику:

1) область низких частот ($\omega \ll 1/T$):

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2} \approx 0;$$

2) Область высоких частот ($\omega \gg 1/T$):

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2} \approx -20 \lg T\omega.$$

Вывод 4.1 Для логарифмической амплитудно-частотной характеристики апериодического звена имеют место асимптоты: в области низких частот — прямая с наклоном 0 дБ/дек, в области высоких частот — прямая с наклоном -20 дБ/дек.

Для апериодического звена часто используются асимптотические ЛАЧХ, которые строятся следующим образом: из точки $\omega = 1/T (L(\omega) = 0)$ влево строится асимптота с наклоном 0 дБ/дек, вправо — асимптота с наклоном -20 дБ/дек.

На рисунке 4.10 представлена ЛАФЧХ апериодического звена.

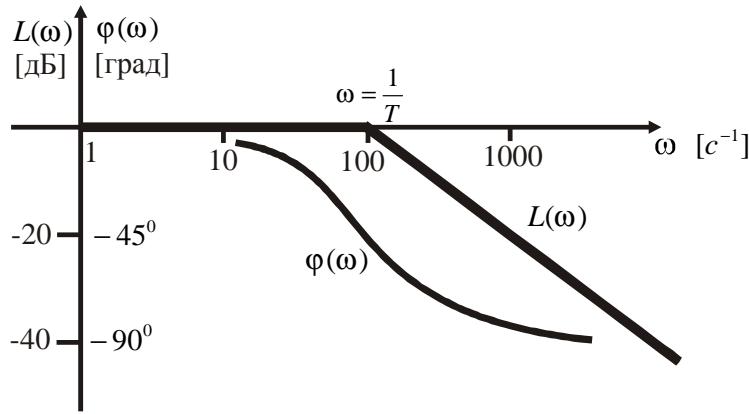


Рисунок 4.10 — ЛАФЧХ апериодического звена

3. Интегрирующее звено.

Определение 28. Интегрирующим звеном называется элемент системы, описание которого задается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1}{s}$$

или дифференциальным уравнением

$$\dot{y} = g.$$

Переходная функция $h(t) : y(t) = h(t)$ при $g(t) = 1(t)$ и нулевых начальных условиях $y(0) = 0$.

$$y(t) = y(0) + \int_0^t g(\tau)d\tau = \int_0^t 1d\tau = t,$$

следовательно,

$$h(t) = t.$$

Весовая функция $\omega(t) = \frac{d}{dt}h(t) = 1$.

Весовая и переходная функции интегрирующего звена представлены на рис. 4.11.

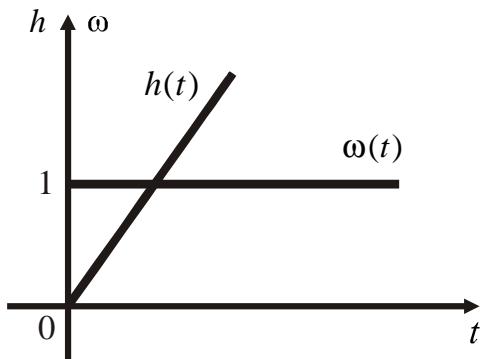


Рисунок 4.11 — Переходная и весовая функции интегрирующего звена

Построим амплитудно-фазо-частотную характеристику.

Частотная передаточная функция звена описывается выражением

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega}.$$

$$U(\omega) = 0, V(\omega) = -\frac{1}{\omega}, A(\omega) = \frac{1}{\omega}, \varphi(\omega) = -90^\circ.$$

АФЧХ интегрирующего звена представлена на рис. 4.12

Логарифмическая амплитудно-фазо-частотная характеристика

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\omega} = -20 \lg \omega \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$$

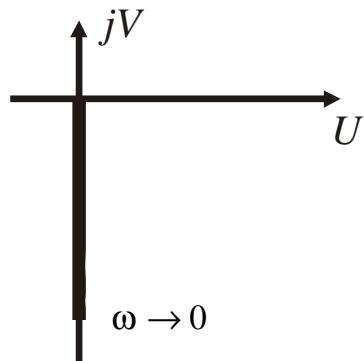


Рисунок 4.12 — АФЧХ интегрирующего звена

ЛАФЧХ (см. рис. 4.13) интегрирующего звена представляет из себя прямую с наклоном -20 дБ/дек , проходящую через точку $\omega = 1$, при этом $L(\omega) = 0$.

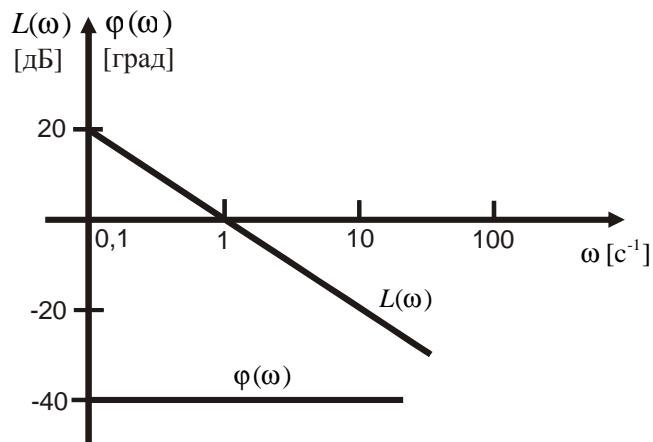


Рисунок 4.13 — ЛАФЧХ интегрирующего звена

4. Колебательное звено

Определение 29. Колебательным звеном называется элемент системы, описание которого задается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1},$$

где $T > 0$ — постоянная времени, [с],

ξ — коэффициент затухания, $0 < \xi < 1$

или дифференциальным уравнением

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = g(t),$$

где y , g — выходная и входная переменные, соответственно.

Найдем полюса передаточной функции колебательного звена.

$$T^2 s^2 + 2\xi T s + 1 = 0.$$

$$s^2 + \frac{2\xi s}{T} + \frac{1}{T^2} = 0.$$

$$s_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm \sqrt{\frac{\xi^2}{T^2} - \frac{1}{T^2}} = -\frac{\xi}{T} \pm j\sqrt{\frac{1-\xi^2}{T^2}} = -\frac{\xi}{T} \pm j\sqrt{\frac{1-\xi^2}{T}}.$$

Обозначим

$$\alpha = -\frac{\xi}{T} < 0, \beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T},$$

тогда $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$.

Переходная функция $h(t)$ при нулевых начальных условиях и задающем воздействии $g(t) = 1(t)$

$$h(t) = 1 - e^{-\alpha t} \left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right).$$

Переходная функция колебательного звена представлена на рис. 4.14.

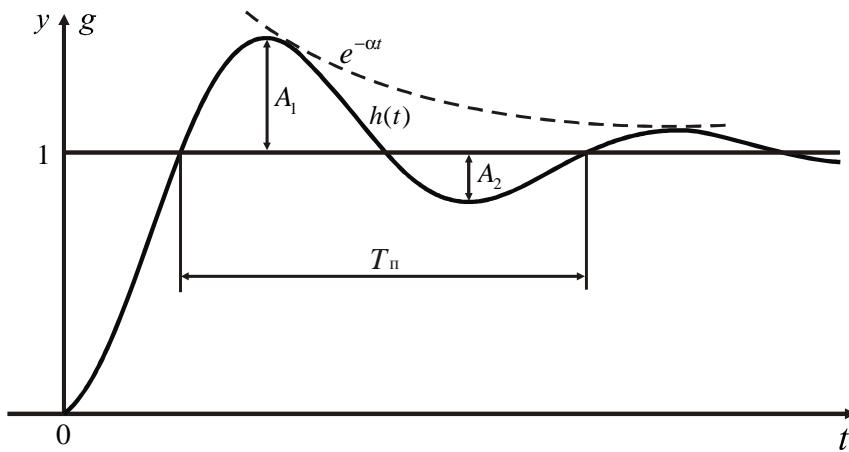


Рисунок 4.14 — Переходная функция колебательного звена

Определение параметров колебательного звена по переходной функции

Период колебаний T_{Π} :

$$T_{\Pi} = \frac{1}{f_{\Pi}},$$

где f_{Π} — частота колебаний.

Круговая частота β :

$$\beta = 2\pi f_{\Pi},$$

$$f_{\Pi} = \frac{\beta}{2\pi},$$

$$T_{\Pi} = \frac{2\pi}{\beta},$$

$$\beta = \frac{2\pi}{T_{\Pi}}.$$

Обозначим значения амплитуд $A_1 = e^{\alpha t}$ в момент времени $t = t_1$ и $A_2 = e^{\alpha t}$ в момент времени $t = t_1 + \frac{T_{\Pi}}{2}$, т.е.

$$A_1 = e^{\alpha t_1}, A_2 = e^{\alpha(t_1 + \frac{T_{\Pi}}{2})}.$$

Найдем соотношение $\frac{A_2}{A_1}$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{e^{\alpha(t_1 + \frac{T_{\Pi}}{2})}}{e^{\alpha t_1}} = e^{\alpha \frac{T_{\Pi}}{2}}.$$

Отсюда находим α

$$\alpha = \frac{2}{T_{\Pi}} \ln \frac{A_2}{A_1}.$$

Весовая функция $\omega(t)$ при задающем воздействии $g(t) = \delta(t)$ и нулевых начальных условиях.

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} h(t) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t.$$

Весовая функция колебательного звена представлена на рис. 4.15

$$\alpha = \frac{\beta}{\pi} \ln \frac{B_1}{B_2}, T = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \xi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Амплитудно-фазо-частотная характеристика колебательного звена.

Частотная передаточная функция описывается выражением

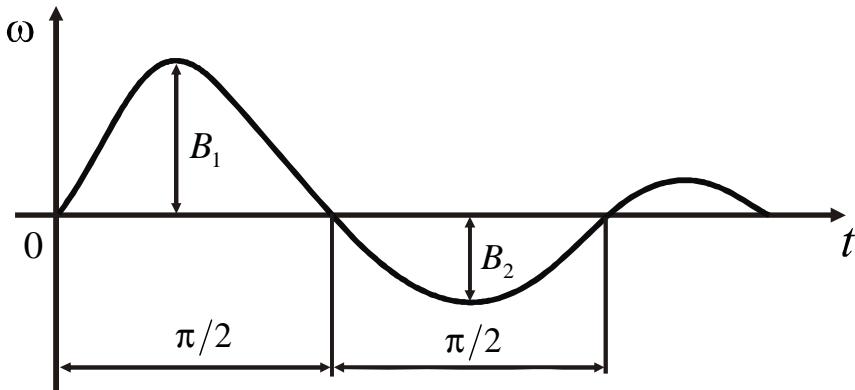


Рисунок 4.15 — Весовая функция колебательного звена

$$W(j\omega) = \frac{1}{-T^2\omega^2 + j2\xi T\omega + 1} = \frac{1 - T^2\omega^2 - j2\xi T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}.$$

Обозначим вещественную и мнимую части передаточной функции

$$U(\omega) = \frac{1 - T^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2},$$

$$V(\omega) = -\frac{2\xi T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}.$$

Амплитуда и фаза частотной передаточной функции определяются выражением

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\arctan \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}.$$

Данные для построения АФЧХ колебательного звена представлены в таблице 4.2. Амплитудно-фазо-частотная характеристика колебательного звена представлена на рис. 4.16.

Построим логарифмическую амплитудно-фазо-частотную характеристику (см. рис. 4.17).

Таблица 4.2 — Данные для построения АФЧХ колебательного звена

ω	0	$\frac{1}{T}$	∞
$U(\omega)$	1	0	0
$V(\omega)$	0	$-1/2\xi$	0
$A(\omega)$	1	$1/2\xi$	0
$\varphi(\omega)$	0	-90°	-180°

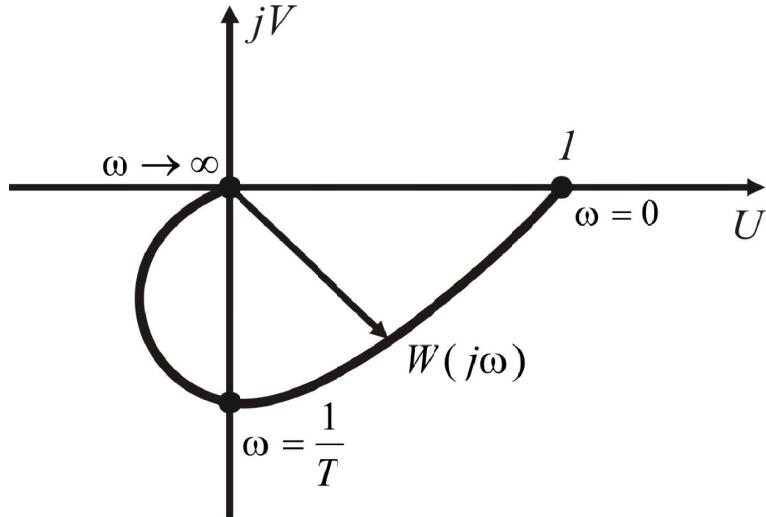


Рисунок 4.16 — Амплитудно-фазо-частотная характеристика колебательного звена

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2T^2\omega^2}} = \\ -20 \lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2T^2\omega^2}.$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2}.$$

Рассмотрим асимптоты ЛАЧХ.

1. Рассмотрим область низких частот, когда $\omega \ll \frac{1}{T}$

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2T^2\omega^2} \approx -20 \lg 1 = 0.$$

2. Рассмотрим область высоких частот, когда $\omega \gg \frac{1}{T}$

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2T^2\omega^2} \approx -20 \lg \sqrt{T^4\omega^4} =$$

$$-20 \lg T^2 \omega^2 = -40 \lg T \omega.$$

Рассмотрим изменение высокочастотной асимптоты при десятикратном изменении частоты

$$\omega_1 : L(\omega_1) \approx -40 \lg T \omega_1$$

$$\omega_2 = 10\omega_1 : L(\omega_2) \approx -40 \lg 10\omega_1 T = -40 - 40 \lg \omega_1 T.$$

Вывод 4.2 Логарифмические асимптотические АФЧХ звена могут быть построены с помощью двух асимптот, исходящих из точки $L(\omega) = 0, \omega = 1/T$ в области низких частот ($\omega \ll 1/T$) — прямая с наклоном 0 дБ/дек, в области высоких частот ($\omega \gg 1/T$) — прямая с наклоном -40 дБ/дек.

ЛАФЧХ колебательного звена представлены на рисунке 4.17.

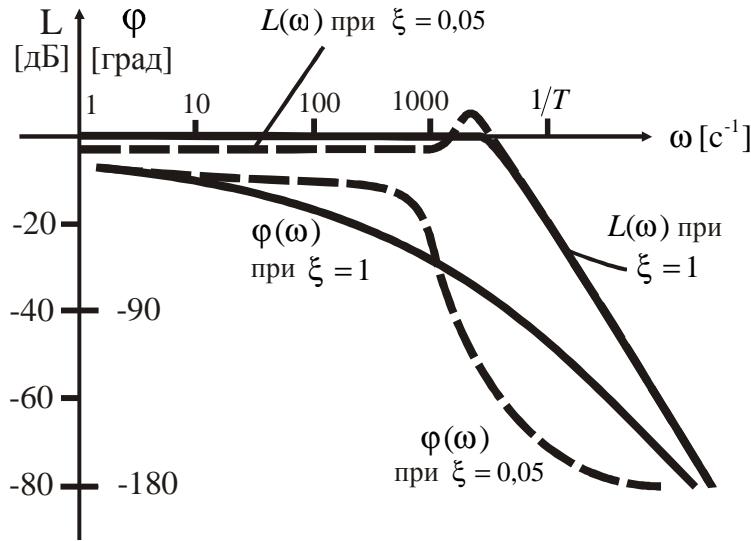


Рисунок 4.17 — ЛАФЧХ колебательного звена

5. Дифференцирующие звенья

5.1. Идеальное дифференцирующее звено

Определение 30. Элемент системы, описание которого задается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = s$$

или дифференциальным уравнением

$$y(t) = \frac{d}{dt}g(t),$$

где y — выходная (регулируемая) переменная, g — входная переменная называется идеальным дифференцирующим звеном.

Переходная функция $h(t)$ определяется как: $h(t) = y(t) = \frac{d}{dt}1(t) = \delta(t)$.

Построим амплитудно-фазо-частотную характеристику.

$$W(j\omega) = j\omega,$$

Отсюда найдем действительную и мнимую части ПФ, амплитуду и фазу частотной ПФ:

$$\begin{aligned} U(\omega) &= 0 \\ V(\omega) &= \omega \\ A(\omega) &= \omega \\ \varphi(\omega) &= 90^\circ \end{aligned}$$

АФЧХ идеального дифференцирующего звена представлена на рисунке 4.18.

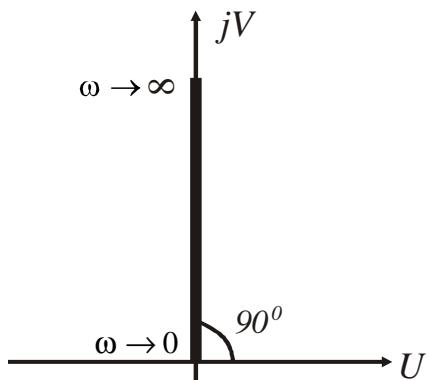


Рисунок 4.18 — ЛАФЧХ идеального дифференцирующего звена

Построим логарифмические амплитудно-фазо-частотные характеристики.

$$L(\omega) = 20 \lg \omega, \\ \varphi(\omega) = 90^\circ.$$

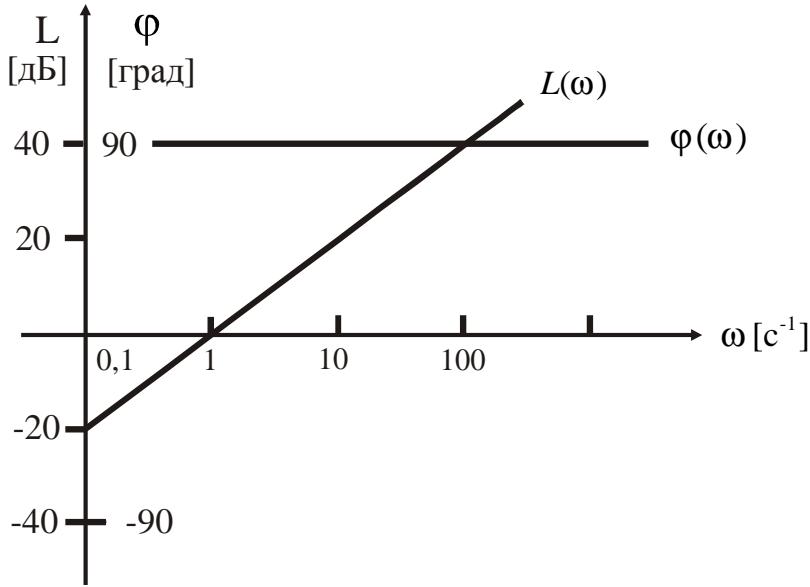


Рисунок 4.19 — ЛАФЧХ колебательного звена

5.2. Дифференцирующее звено I порядка

Определение 31. Элемент системы, описание которого задается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = Ts + 1$$

или дифференциальным уравнением

$$y(t) = T \frac{dg(t)}{dt} + g(t),$$

где T — постоянная времени,

y — выходная (регулируемая) постоянная,

g — задающее воздействие

называется дифференцирующим звеном I порядка.

Переходная функция звена $h(t)$: $h(t) = y(t) = T \frac{d}{dt} 1(t) + 1(t) = T\delta(t) + 1(t)$.

Построим амплитудно-фазо-частотную характеристику звена.

Таблица 4.3 — Данные для построения АФЧХ дифференцирующего звена I порядка

ω	0	$\frac{1}{T}$	∞
$U(\omega)$	1	1	1
$V(\omega)$	0	1ξ	∞
$A(\omega)$	1	$\sqrt{2}\xi$	∞
$\varphi(\omega)$	0	45^0	90^0

Частотная передаточная функция описывается выражением $W(j\omega) = 1 + jT\omega$, следовательно,

$$\begin{aligned} U(\omega) &= 1 \\ V(\omega) &= T\omega \\ A(\omega) &= \sqrt{1 + T^2\omega^2} \\ \varphi(\omega) &= \arctan T\omega \end{aligned}$$

Данные для построения АФЧХ дифференцирующего звена I порядка представлены в таблице 4.3

АФЧХ дифференцирующего звена I порядка представлена на рис. 4.20.

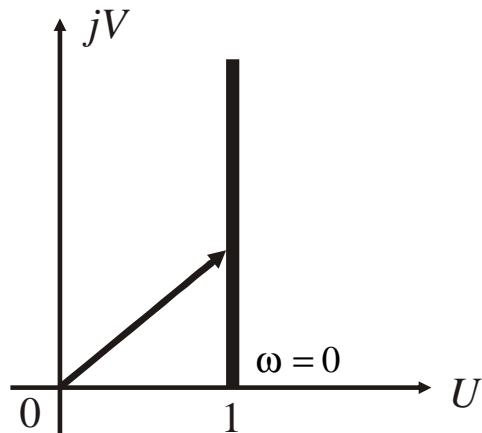


Рисунок 4.20 — АФЧХ дифференцирующего звена I порядка

Построим логарифмическую амплитудно-фазо-частотную характеристику

$$L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2},$$

$$\varphi(\omega) = \arctan T\omega.$$

ЛАФЧХ дифференцирующего звена I порядка представлена на рисунке 4.21.

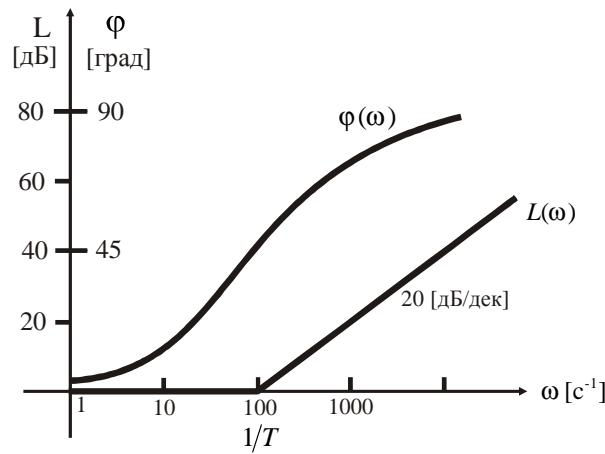


Рисунок 4.21 — ЛАФЧХ дифференцирующего звена I порядка

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. Спб.: Изд-во «Профессия», 2003. — 752 с.
2. Бобцов А.А., Мирошник И.В. Линейные системы автоматического управления. — СПб.: СПбГИТМО (ТУ), 2001, — 245 с.
3. Лямин А.В., Михайлов С.В., Никифоров В.О., Рюхин В.Ю., Чежин М.С. Исследование моделей объектов управления и среды функционирования. — СПб.: СПГИТМО (ТУ), 2000 — 89 с.
4. Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. — М.: Наука, 1978. — 247 с.
5. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ/ В.В. Григорьев, В.Н. Дроздов, В.В. Лаврентьев, А.В. Ушаков — Л: Машиностроение, Ленингр. отделение, 1983. — 245 с.