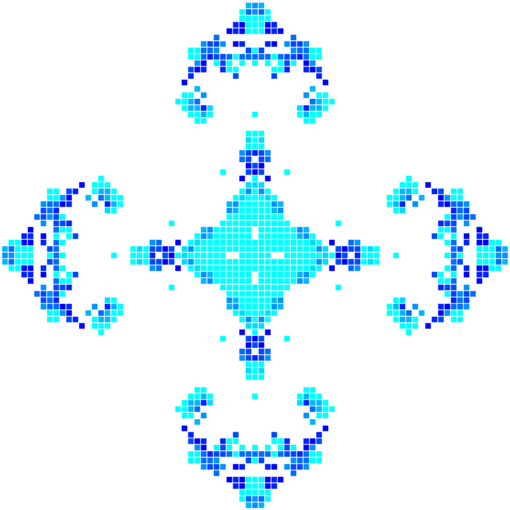
Monades, Comonades et Automates cellulaires

Jérémy S. Cochoy

INRIA Paris-Saclay

Octobre 2015

1. Monades
   - Types
   - Fonctions
   - Foncteurs
   - Monades
2. Automates Cellulaires
   - Qu'est-ce que c'est ?
   - Le jeu de la vie
   - Algorithme 1D
3. Comonades
4. Évaluer un automate est comonadique
   - Un univers
   - Un foncteur
   - Une comonade
   - Evaluation



Les types

Exemples :

- $Int = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $[Bool] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$

Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les types

Exemples :

- $Int = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $[Bool] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$

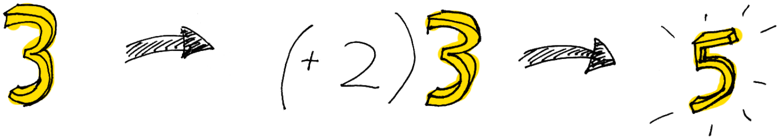
Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les fonctions

Ce sont les traitements que l'on peut implémenter.



Les fonctions

Une fonction a aussi un type : *a* -> *b*

- floor : : Float -> Int
- (+2) : : Int -> Int
- map : : (a -> b) -> [a] -> [b]

Les fonctions

Ça se compose

- f1 : : a -> b
- f2 : : b -> c
- f2 . f1 : : a -> c
- . : : (a -> b) -> (b -> c) -> (a -> c)

La collection de tous les types forme une catégorie. Les flèches sont les fonctions implémentables. On l'appelle la catégorie des types.

Les fonctions

Ça se compose

- f1 : : a -> b
- f2 : : b -> c
- f2 . f1 : : a -> c
- . : : (a -> b) -> (b -> c) -> (a -> c)

La collection de tous les types forme une catégorie. Les flèches sont les fonctions implémentables. On l'appelle la catégorie des types.

Les fonctions

Ça se compose

- f1 : : a -> b
- f2 : : b -> c
- f2 . f1 : : a -> c
- . : : (a -> b) -> (b -> c) -> (a -> c)

La collection de tous les types forme une catégorie. Les flèches sont les fonctions implémentables. On l'appelle la catégorie des types.

Les foncteurs

Un foncteur F agit sur les types ...

- a => F a

- a => Maybe a
- a => [a]

... et sur les fonctions

- a -> b => F a -> F b

- fmap (+2) : : F Int -> F Int
- fmap id : : F a -> F a

Les foncteurs

Un foncteur F agit sur les types ...

- a => F a

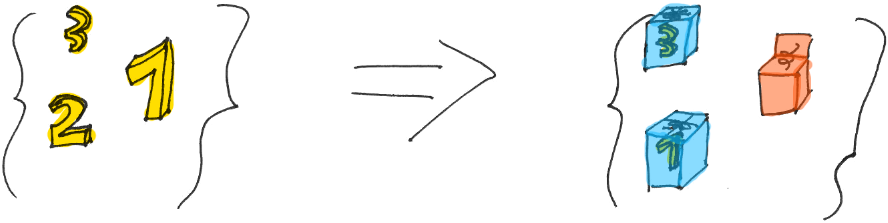
- a => Maybe a
- a => [a]

... et sur les fonctions

- a -> b => F a -> F b

- fmap (+2) : : F Int -> F Int
- fmap id : : F a -> F a

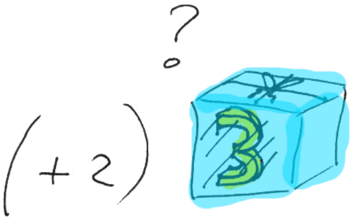
Donnée dans un contexte



Un foncteur permet de passer d'un monde (les types a) vers un autre (les types F a).

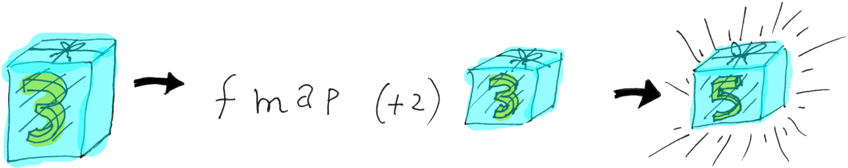
Functorial mapping

On ne peut plus appliquer la fonction telle qu'elle les diagrammes suivant commutent :



Functorial mapping

Mais le foncteur nous donne une nouvelle flèche.

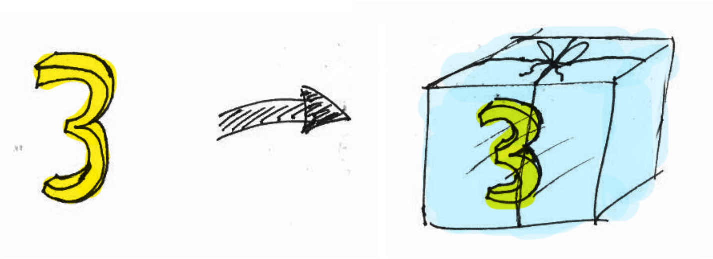


Monades


A MONAD IS JUST A MONOID
IN THE CATEGORY OF
ENDOFUNCTORS.
WHAT'S THE PROBLEM ?

Donnée dans un contexte

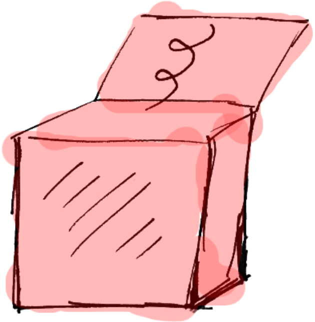
Une monade place une valeur dans un contexte.



L'exemple de Maybe : `Just 3`

Donnée dans un contexte

Un contexte peut aussi ne pas contenir de valeur.



L'exemple de Maybe : `Nothing`

Placer une donnée dans un contexte

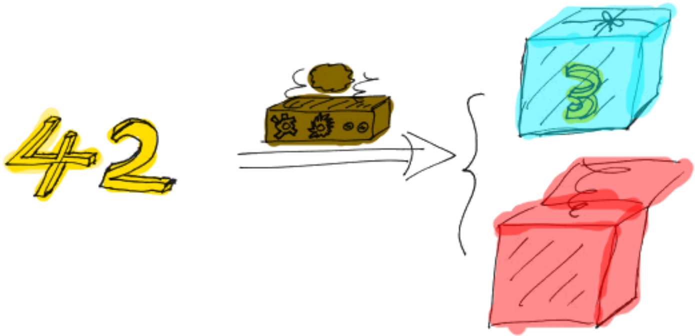
L'opérateur *pure*

```
pure :: a -> F a
```

Quelques cas particuliers

- Just
- (: [])
- Right

Un traitement qui peut échouer



Une fonction de type *Int -> Maybe Int*.

Composer des traitements avec échec

Comment composer `f :: a -> M b` et `g :: b -> M c` ?

Si *M* est un foncteur, on peut composer `f :: a -> M b` avec `fmap g :: M b -> M (M c)`.

Que faire d'un `M (M c)` ?

Composer des traitements avec échec

Comment composer `f :: a -> M b` et `g :: b -> M c` ?

Si M est un foncteur, on peut composer `f :: a -> M b` avec `fmap g :: M b -> M (M c)`.

Que faire d'un `M (M c)` ?

Composer des traitements avec échec

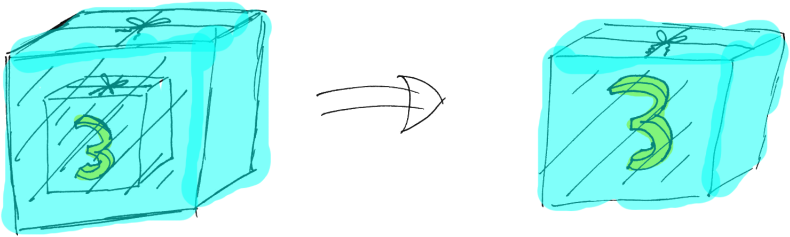
Comment composer `f :: a -> M b` et `g :: b -> M c` ?

Si *M* est un foncteur, on peut composer `f :: a -> M b` avec `fmap g :: M b -> M (M c)`.

Que faire d'un `M (M c)` ?

L'opérateur join

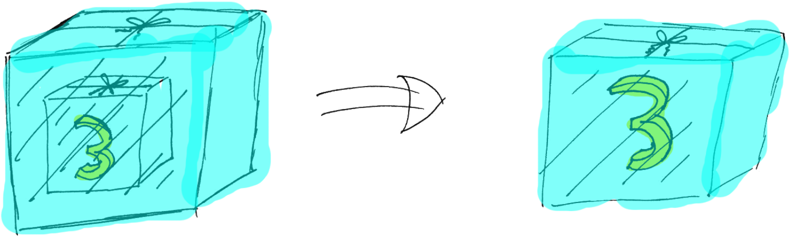
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join $ Just (Just 3).
```

L'opérateur join

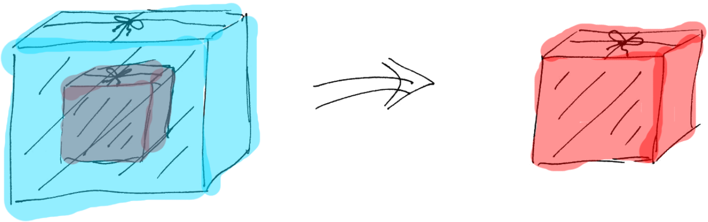
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join $ Just (Just 3).
```

L'opérateur join

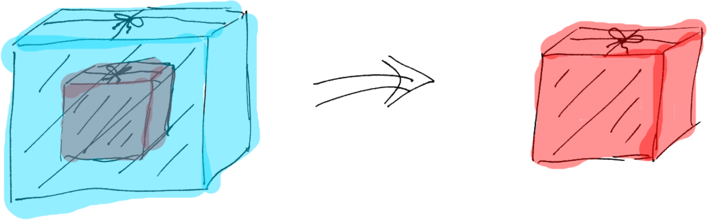
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join $ Just (Nothing).
```

L'opérateur join

```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join $ Just (Nothing).
```

L'opérateur *bind*

On cherche à définir la composition.

`(>=>) :: (a -> M b) -> (b -> M c) -> (a -> M c)`

Nous avons :

- `(fmap g) . f :: a -> M (M c)`
- `join :: M (M a) -> M a`

On peut maintenant composer *f* et *g*.

`f >=> g` $\equiv$ `join . (fmap g) . f`.

L'opérateur *bind*

On cherche à définir la composition.

```
(>=>) :: (a -> M b) -> (b -> M c) -> (a -> M c)
```

Nous avons :

- `(fmap g) . f :: a -> M (M c)`
- `join :: M (M a) -> M a`

On peut maintenant composer f et g.

`f >=> g` ≡ `join . (fmap g) . f`.

L'opérateur *bind*

On cherche à définir la composition.

```
(>=>) :: (a -> M b) -> (b -> M c) -> (a -> M c)
```

Nous avons :

- `(fmap g) . f :: a -> M (M c)`
- `join :: M (M a) -> M a`

On peut maintenant composer f et g.

`f >=> g` $\equiv$ `join . (fmap g) . f.`

Récapitulatif

Une monade, c'est

- fmap : : (a -> b) -> (M a -> M b)
- pure : : a -> M a
- join : : M (M a) -> M a

Automates cellulaires

Toison d'or

Qu'est-ce qu'un automate cellulaire ?

Un automate cellulaire, c'est :

- Un nombre fini d'états S,
- Une grille de cellules,
- La notion de voisinage d'une cellule V_c,
- Une fonction de transition qui à une cellule associe son nouvel état.

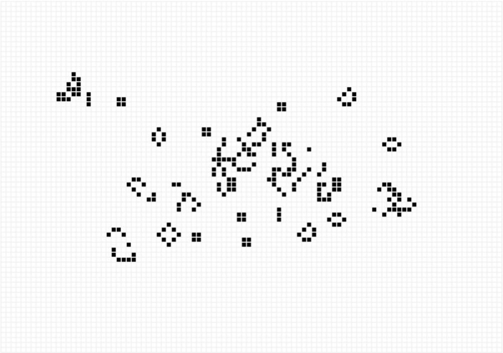
Combien d'automates cellulaires différents ?

On a le choix :

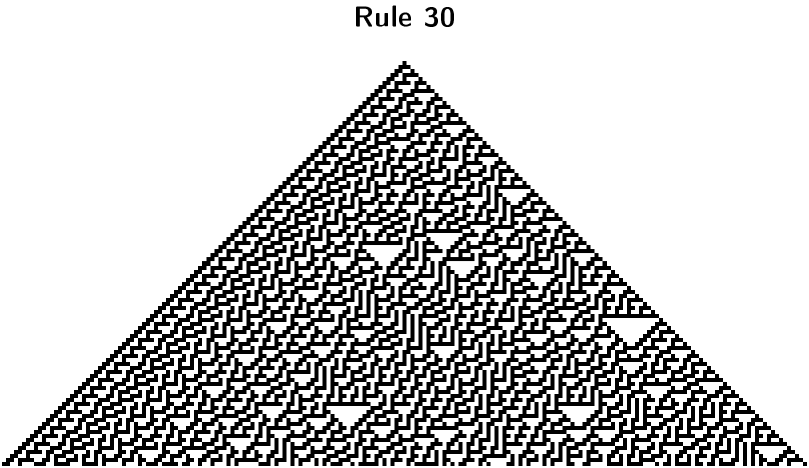
- De la dimension de la grille,
- Des lois,
- Du nombres d'états (couleurs),
- De la forme du voisinages (boules de rayon r, etc.),
- De ne pas être déterministe.

The "Game of Life"

Jeu de la vie (J. H. Conway)



Étude d'un cas : Rule 30



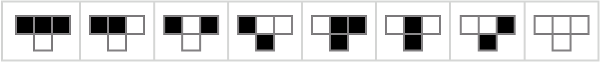
La grille

La grille de l'automate

- Une grille 1D
- Deux états (Blanc / Noir)

Un voisinage de 3 cellules.

Les règles

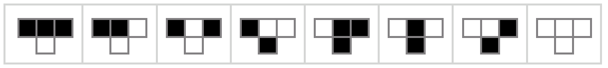


On peut aussi écrire :

Ancien état	111	110	101	100	011	010	001	000
Nouvel état	0	0	0	1	1	1	1	0

Un voisinage de 3 cellules.

Les règles

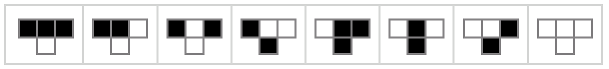


On peut aussi écrire :

Ancien état	111	110	101	100	011	010	001	000
Nouvel état	0	0	0	1	1	1	1	0

Un voisinage de 3 cellules.

Les règles



On peut aussi écrire :

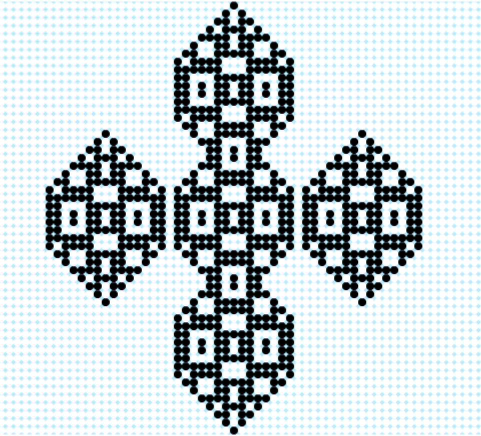
Ancien état	111	110	101	100	011	010	001	000
Nouvel état	0	0	0	1	1	1	1	0

Comonades

C'est le dual d'une monade

- C'est un foncteur M
- extract (copure) (co uinit) : : M a -> a
- duplicate (cojoin) (co product δ) : : M a -> M (M a)

Evaluer un automate est comonadique



L'univers

Un ruban

On représente l'univers dans lequel vie notre automate par un ruban, que l'on voit comme trois parties :

- La partie infinie à gauche
- La case observée
- La partie infinie à droite

data Universe a = Universe [a] a [a]

Quelques opérations sur notre univers

Voyageons

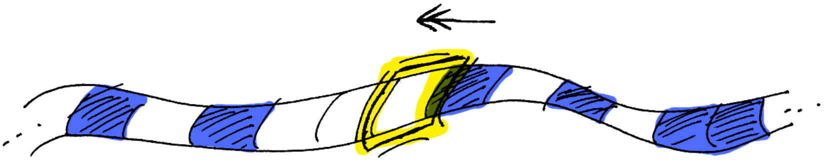
On s'autorise à effectuer quelques opérations raisonnables sur notre univers :

- Regarder à gauche (left shift)
- Regarder à droite (right shift)

Moralement, on *translate* notre ruban.

left, right : : Universe a -> Universe a

Quelques opérations sur notre univers



Voyageons

On s'autorise à effectuer quelques opérations raisonnables sur notre univers :

- Regarder à gauche (left shift)
- Regarder à droite (right shift)

Moralement, on *translate* notre ruban.

left, right : : Universe a -> Universe a

Quelques opérations sur notre univers

Voyageons

On s'autorise à effectuer quelques opérations raisonnables sur notre univers :

- Regarder à gauche (left shift)
- Regarder à droite (right shift)

Moralement, on *translate* notre ruban.

left, right : : Universe a -> Universe a

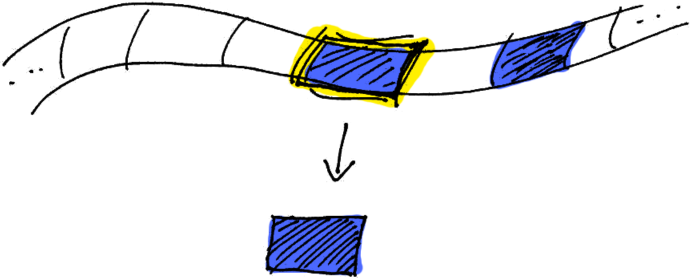
L'univers est fonctoriel

Un foncteur

Notre ruban est naturellement un foncteur : il suffit d'appliquer à notre `Universe a` une fonction `a -> b` sur chacune des cellules pour obtenir un `Universe b`.

fmap : : (a -> b) -> Universe a -> Universe b

Comonades, nous voilà : extract

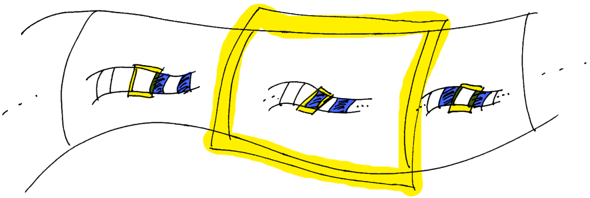


Extraire une information

Depuis notre univers, on peut extraire une valeur : celle de la case que l'on est en train d'observer !

extract : : Universe a -> a

Comonades, nous voilà : duplicate

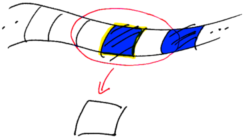


L'opération duplicate

On veut construire un univers où chaque case du ruban contient elle-même... un univers. Il s'agit de contenir tous les shift possible de notre univers de départ.

duplicate : : Universe a -> Universe (Universe a)

Loi de convolution



La loi de notre automate

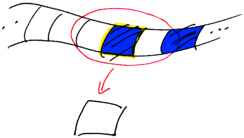
Notre automate est décrit par une fonction qui, à un univers, associe l'état de la cellule observé à la prochaine itération. On a donc accès à tout l'univers.

Rule 30

Pour Rule 30, on a besoin de la cellule couramment observée, et de ses voisines de droite et de gauche.

```
rule : : Universe a -> a
```

Loi de convolution



La loi de notre automate

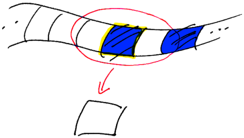
Notre automate est décrit par une fonction qui, à un univers, associe l'état de la cellule observé à la prochaine itération. On a donc accès à tout l'univers.

Rule 30

Pour Rule 30, on a besoin de la cellule couramment observée, et de ses voisines de droite et de gauche.

rule : : Universe a -> a

Loi de convolution



La loi de notre automate

Notre automate est décrit par une fonction qui, à un univers, associe l'état de la cellule observé à la prochaine itération. On a donc accès à tout l'univers.

Rule 30

Pour Rule 30, on a besoin de la cellule couramment observée, et de ses voisines de droite et de gauche.

```
rule :: Universe a -> a
```

L'évaluation est comonadique

Comment obtenir l'itération n+1 depuis l'itération n ?

Nous disposons maintenant de tous les outils pour, en une ligne, décrire l'itération au rang $n+1$ depuis l'univers au rang n.

La pipeline :

- On duplique notre univers :

  duplicate : : Universe a -> Universe (Universe a)
- On map notre règle sur chaque case :

  fmap rule : : Universe (Universe a) -> Universe a

fmap rule . duplicate : : Universe a -> Universe a

L'évaluation est comonadique

Comment obtenir l'itération n+1 depuis l'itération n ?

Nous disposons maintenant de tous les outils pour, en une ligne, décrire l'itération au rang $n + 1$ depuis l'univers au rang n.

La pipeline :

- On duplique notre univers :

  duplicate : : Universe a -> Universe (Universe a)
- On map notre règle sur chaque case :

  fmap rule : : Universe (Universe a) -> Universe a

fmap rule . duplicate : : Universe a -> Universe a

L'évaluation est comonadique

Comment obtenir l'itération n+1 depuis l'itération n ?

Nous disposons maintenant de tous les outils pour, en une ligne, décrire l'itération au rang $n + 1$ depuis l'univers au rang n.

La pipeline :

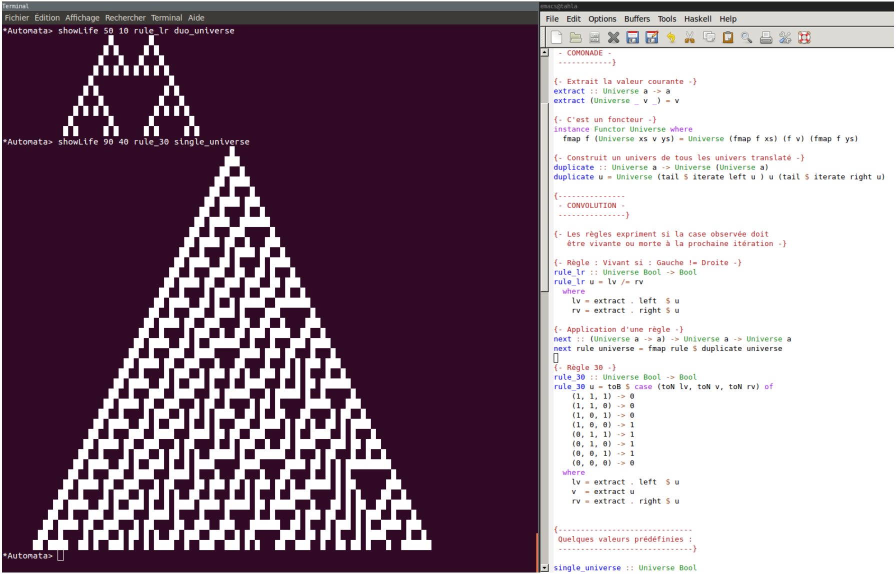
- On duplique notre univers :

  duplicate : : Universe a -> Universe (Universe a)
- On map notre règle sur chaque case :

  fmap rule : : Universe (Universe a) -> Universe a

fmap rule . duplicate : : Universe a -> Universe a

Live démo


Terminal
Fichier Édition Affichage Rechercher Terminal Aide
*Automata> showLife 50 10 rule_lr duo_universe
*Automata> showLife 90 40 rule_30 single_universe
*Automata>
emacs@tahla
File Edit Options Buffers Tools Haskell Help
- COMONADE -
-----------}
{- Extrait la valeur courante -}
extract :: Universe a -> a
extract (Universe _ v _) = v
{- C'est un foncteur -}
instance Functor Universe where
fmap f (Universe xs v ys) = Universe (fmap f xs) (f v) (fmap f ys)
{- Construit un univers de tous les univers translaté -}
duplicate :: Universe a -> Universe (Universe a)
duplicate u = Universe (tail $ iterate left u) u (tail $ iterate right u)
{--------------
- CONVOLUTION -
--------------}
{- Les règles expriment si la case observée doit
être vivante ou morte à la prochaine itération -}
{- Règle : Vivant si : Gauche != Droite -}
rule_lr :: Universe Bool -> Bool
rule_lr u = lv /= rv
where
lv = extract . left $ u
rv = extract . right $ u
{- Application d'une règle -}
next :: (Universe a -> a) -> Universe a -> Universe a
next rule universe = fmap rule $ duplicate universe
{- Règle 30 -}
rule_30 :: Universe Bool -> Bool
rule_30 u = toB $ case (toN lv, toN v, toN rv) of
(1, 1, 1) -> 0
(1, 1, 0) -> 0
(1, 0, 1) -> 0
(1, 0, 0) -> 1
(0, 1, 1) -> 1
(0, 1, 0) -> 1
(0, 0, 1) -> 1
(0, 0, 0) -> 0
where
lv = extract . left $ u
v = extract u
rv = extract . right $ u
{----------------------------
Quelques valeurs prédéfinies :
----------------------------}
single_universe :: Universe Bool

Merci pour votre attention !