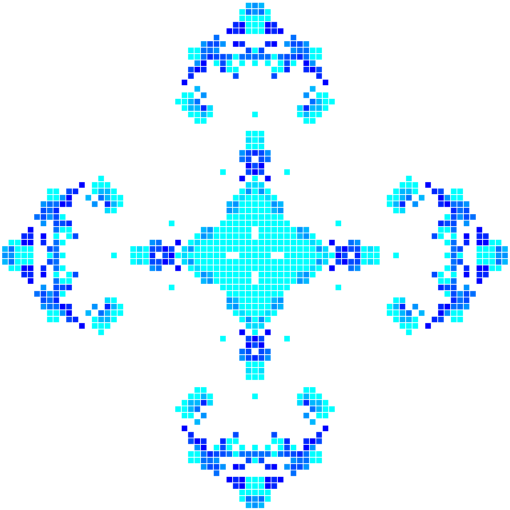
Monades, Comonades et Automates cellulaires

Jérémy S. Cochoy

INRIA Paris-Saclay

Octobre 2015

1. Monades
   - Types
   - Fonctions
   - Foncteurs
   - Monades
2. Automates Cellulaires
3. Comonades



Les types

Qu'est-ce qu'un type ?

C'est un *ensemble* de valeurs.

Examples :

- $Int = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $Bool = \{True, False\}$
- $Char = \{'a', 'b', 'c', \ldots\}$
- $[Bool] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$
- $[a]$

Les types

Qu'est-ce qu'un type ?

C'est un *ensemble* de valeurs.

Examples :

- $Int = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $Bool = \{True, False\}$
- $Char = \{'a', 'b', 'c', \ldots\}$
- $[Bool] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$
- $[a]$

Les types

Qu'est-ce qu'un type ?

C'est un *ensemble* de valeurs.

Examples :

- $Int = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $Bool = \{True, False\}$
- $Char = \{'a', 'b', 'c', \ldots\}$
- $[Bool] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$
- $[a]$

Les types

Qu'est-ce qu'un type ?

C'est un *ensemble* de valeurs.

Examples :

- $Int = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $Bool = \{True, False\}$
- $Char = \{'a', 'b', 'c', \ldots\}$
- $[Bool] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$
- $[a]$

Les types

Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing
- Either a b = Left a | Right b

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les types

Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing
- Either a b = Left a | Right b

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les types

Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing
- Either a b = Left a | Right b

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les types

Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing
- Either a b = Left a | Right b

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les types

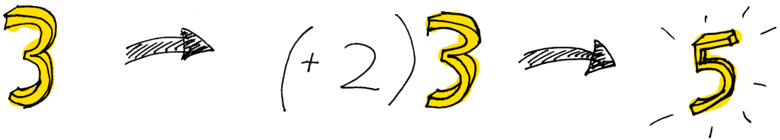
Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing
- Either a b = Left a | Right b

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les fonctions

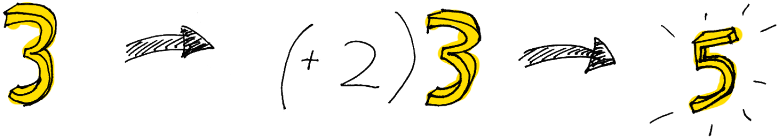
Ce sont les traitements que l'on peut implémenter.



Une fonction ne lance pas de fusé.

Les fonctions

Ce sont les traitements que l'on peut implémenter.



Une fonction ne lance pas de fusé.

Les fonctions

Une fonction a aussi un type : *a* -> *b*

- floor : : Float -> Int
- (+2) : : Int -> Int
- id : : a -> a
- map : : (a -> b) -> [a] -> [b]

Les fonctions

Une fonction a aussi un type : *a -> b*

- floor : : Float -> Int
- (+2) : : Int -> Int
- id : : a -> a
- map : : (a -> b) -> [a] -> [b]

Les fonctions

Ça se compose

- f1 : : a -> b
- f2 : : b -> c
- f2 . f1 : : a -> c
- . : : (a -> b) -> (b -> c) -> (a -> c)

La collection de tous les types forme une catégorie. Les flèches sont les fonctions implémentables. On l'appelle la catégorie des types.

Les fonctions

Ça se compose

- f1 : : a -> b
- f2 : : b -> c
- f2 . f1 : : a -> c
- . : : (a -> b) -> (b -> c) -> (a -> c)

La collection de tous les types forme une catégorie. Les flèches sont les fonctions implémentables. On l'appelle la catégorie des types.

Les fonctions

Ça se compose

- f1 : : a -> b
- f2 : : b -> c
- f2 . f1 : : a -> c
- . : : (a -> b) -> (b -> c) -> (a -> c)

La collection de tous les types forme une catégorie. Les flèches sont les fonctions implémentables. On l'appelle la catégorie des types.

Les foncteurs

Un foncteur F agit sur les types ...

- a => F a

- a => Maybe a
- a => [a]

... et sur les fonctions

- a -> b => F a -> F b

- fmap (+2) : : F Int -> F Int
- fmap id : : F a -> F a

Les foncteurs

Un foncteur F agit sur les types ...

- a => F a

- a => Maybe a
- a => [a]

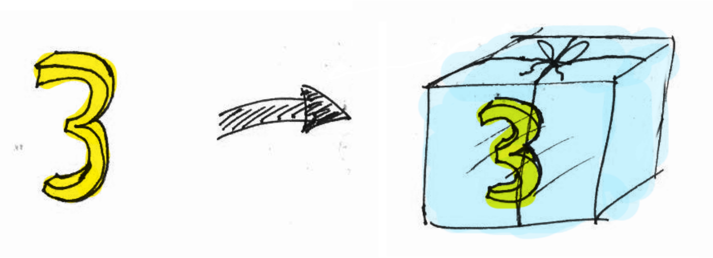
... et sur les fonctions

- a -> b => F a -> F b

- fmap (+2) : : F Int -> F Int
- fmap id : : F a -> F a

Donnée dans un contexte

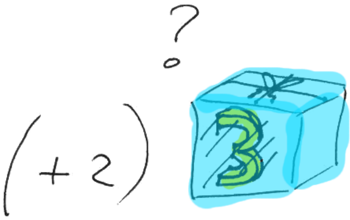
Un foncteur permet de passer d'un monde (les types a) vers un autre (les types F a).



TODO : Remplacer l'image par a -> F a

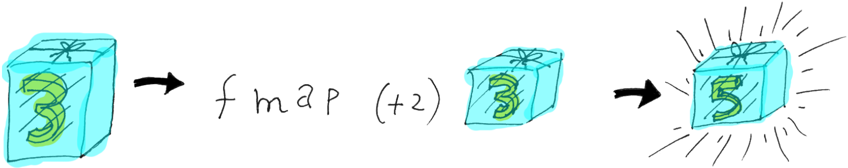
Functorial mapping

On ne peut plus appliquer la fonction telle quelle les diagrammes suivant commutent :



Functorial mapping

Mais le foncteur nous donne une nouvelle flèche.



Dura lex sed lex

Un foncteur doit respecter des lois

- fmap id = id
- fmap (p . q) = (fmap p) . (fmap q)

Un foncteur est un endofoncteur de la catégorie des types.

Dura lex sed lex

Un foncteur doit respecter des lois

- fmap id = id
- fmap (p . q) = (fmap p) . (fmap q)

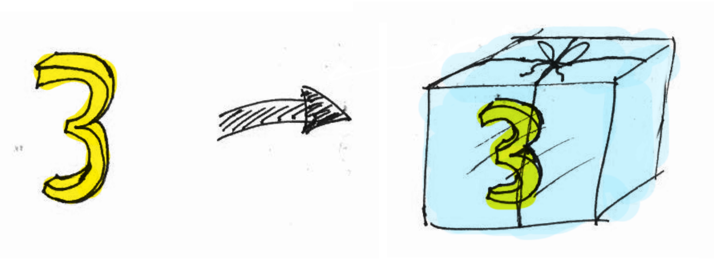
Un foncteur est un endofoncteur de la catégorie des types.

Monades

TODO : Funny picture here.

Donnée dans un contexte

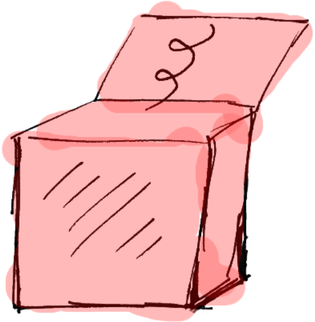
Une monade place une valeur dans un contexte.



L'exemple de Maybe : `Just 3`

Donnée dans un contexte

Un contexte peut aussi ne pas contenir de valeur.



L'exemple de Maybe : `Nothing`

Placer une donnée dans un contexte

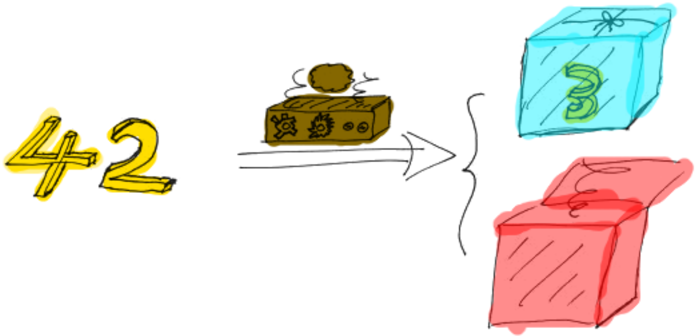
L'opérateur *pure*

```
pure :: a -> F a
```

Quelques cas particuliers

- Just
- (: [])
- Right

Un traitement qui peut échouer



Une fonction de type *Int -> Maybe Int*.

Composer des traitements avec échec

Comment composer `f :: a -> M b` et `g :: b -> M c` ?

Si M est un foncteur, on peut composer `f :: a -> M b` avec `fmap g :: M b -> M (M c)`.

Que faire d'un `M (M c)` ?

Composer des traitements avec échec

Comment composer `f :: a -> M b` et `g :: b -> M c` ?

Si *M* est un foncteur, on peut composer `f :: a -> M b` avec `fmap g :: M b -> M (M c)`.

Que faire d'un `M (M c)` ?

Composer des traitements avec échec

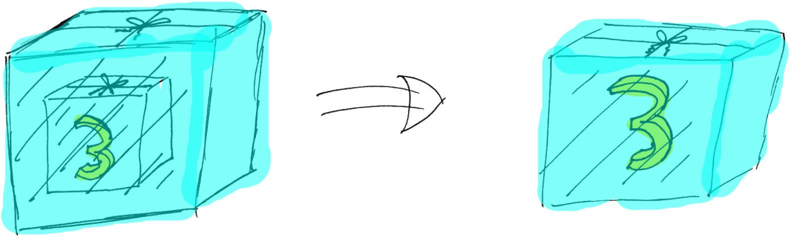
Comment composer `f :: a -> M b` et `g :: b -> M c` ?

Si M est un foncteur, on peut composer `f :: a -> M b` avec `fmap g :: M b -> M (M c)`.

Que faire d'un `M (M c)` ?

L'opérateur join

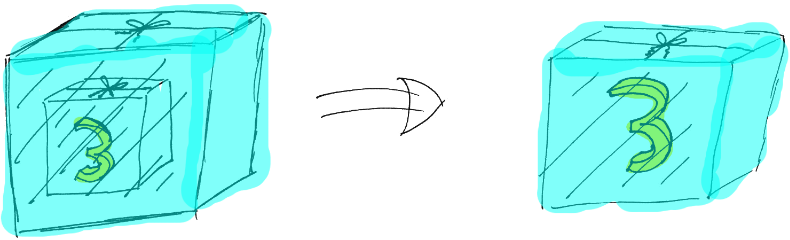
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join $ Just (Just 3).
```

L'opérateur join

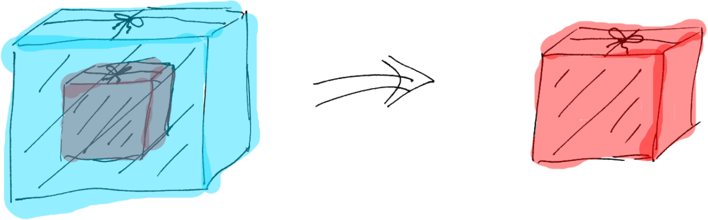
```
join :: M (M a) -> M a
```




```
join $ Just (Just 3).
```

L'opérateur join

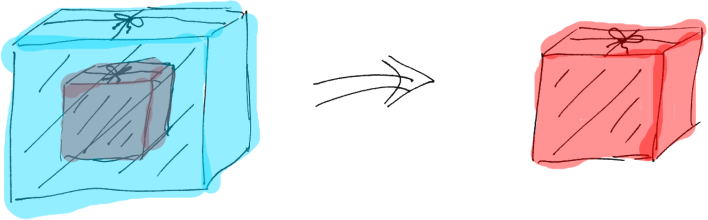
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join $ Just (Nothing).
```

L'opérateur join

```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join $ Just (Nothing).
```

L'opérateur *bind*

On cherche à définir la composition.

```
(>=>) :: (a -> M b) -> (b -> M c) -> (a -> M c)
```

Nous avons :

- `(fmap g) . f :: a -> M (M c)`
- `join :: M (M a) -> M a`

On peut maintenant composer *f* et *g*.

`f >=> g` $\equiv$ `join . (fmap g) . f.`

L'opérateur *bind*

On cherche à définir la composition.

`(>=>) :: (a -> M b) -> (b -> M c) -> (a -> M c)`

Nous avons :

- `(fmap g) . f :: a -> M (M c)`
- `join :: M (M a) -> M a`

On peut maintenant composer f et g.

`f >=> g` $\equiv$ `join . (fmap g) . f.`

L'opérateur *bind*

On cherche à définir la composition.

```
(>=>) :: (a -> M b) -> (b -> M c) -> (a -> M c)
```

Nous avons :

- `(fmap g) . f :: a -> M (M c)`
- `join :: M (M a) -> M a`

On peut maintenant composer f et g.

`f >=> g` $\equiv$ `join . (fmap g) . f.`

Récapitulatif

Une monade, c'est

- fmap : : (a -> b) -> (M a -> M b)
- pure : : a -> M a
- join : : M (M a) -> M a

Dura lex sed lex

Une monade doit respecter des lois

- `pure . f ≡ (fmap f) . pure`
- `join . fmap (fmap f) ≡ (fmap f) . join`

- `join . fmap join ≡ join . join`
- `join . fmap pure ≡ join . pure = id`

Monades - Catégories

Une monade (T, μ, η) est la donné d'un endofoncteur $T : C \to C$ et de deux transformations naturelles $\mu : T \circ T \to T$ et $\eta : 1_C \to T$ telles que :

$$\begin{tikzcd}
T(T(T(X))) \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{T(X)}"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\eta_{T(X)}"] \arrow[d, "T(\eta_X)"'] \arrow[dr, equal] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X)
\end{tikzcd}$$

c'est à dire $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu_T$ et $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta_T = id_T$.

Dans notre cas, C est la catégorie des types.

Monades - Catégories

Une monade (T, μ, η) est la donné d'un endofoncteur $T : C \to C$ et de deux transformations naturelles $\mu : T \circ T \to T$ et $\eta : 1_C \to T$ telles que :

$$\begin{tikzcd} T(T(T(X))) \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{T(X)}"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\ T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "\eta_{T(X)}"] \arrow[d, "T(\eta_X)"'] \arrow[dr, equal] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\ T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X) \end{tikzcd}$$

c'est à dire $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu_T$ et $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta_T = id_T$.
Dans notre cas, C est la catégorie des types.

A chaque loi son diagramme

pure est une T.N.

```
pure . f ≡ (fmap f) . pure
```

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\ T(X) \arrow[r, "T(f)"'] & T(Y) \end{tikzcd}$$

A chaque loi son diagramme

join est une T.N.

`join . fmap (fmap f)` $\equiv$ `(fmap f) . join`

$$\begin{tikzcd} T(T(X)) \arrow[r, "T(T(f))"] \arrow[d, "\mu_X"'] & T(T(Y)) \arrow[d, "\mu_Y"] \\ T(X) \arrow[r, "T(f)"'] & T(Y) \end{tikzcd}$$

A chaque loi son diagramme

Associativité

`join . fmap join` $\equiv$ `join . join`

$$
\begin{tikzcd}
T(T(T(X))) \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{T(X)}"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X)
\end{tikzcd}
$$

$$\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu_T$$

A chaque loi son diagramme

Existence d'un neutre

`join . fmap pure` $\equiv$ `join . pure = id`

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "\eta_{T(X)}"] \arrow[d, "T(\eta_X)"'] \arrow[dr, equal] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\ T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X) \end{tikzcd}$$

$$\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta_T = id_T$$

Automates cellulaires

Toison d'or

Qu'est-ce qu'un automate cellulaire ?

Un automate cellulaire, c'est :

- Un nombre fini d'états S,
- Une grille de cellules,
- La notion de voisinage d'une cellule V_c,
- D'une fonction de transition qui à une cellule associe sont nouvelle état.

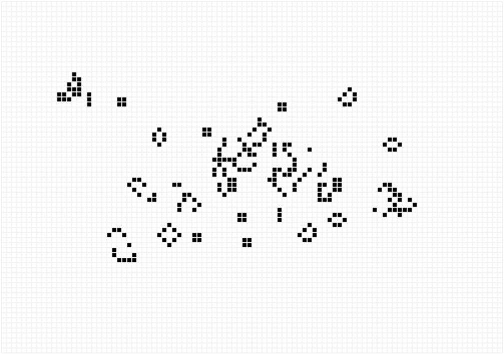
Combien d'automates cellulaires différents ?

On a le choix :

- De la dimension de la grille,
- Des lois,
- Du nombres d'états (couleurs),
- De la forme du voisinages (boules de rayon r, etc.),
- De ne pas être déterministe.

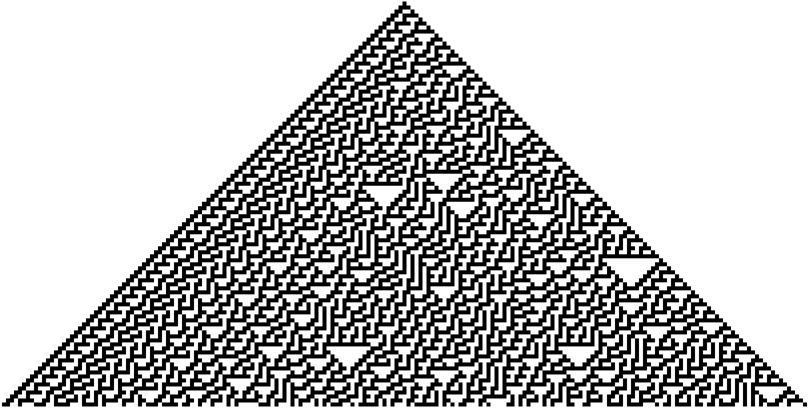
The "Game of Life"

Jeu de la vie (J. H. Conway)



Étude d'un cas : Rule 30

Rule 30



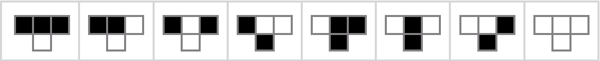
La grille

La grille de l'automate

- Une grille 1D
- Deux états (Blanc / Noir)

Un voisinage de 3 cellules.

Les règles

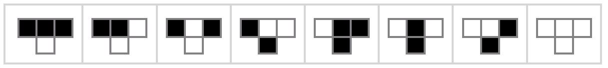


On peux aussi écrire :

Ancien état	111	110	101	100	011	010	001	000
Nouvel état	0	0	0	1	1	1	1	0

Un voisinage de 3 cellules.

Les règles

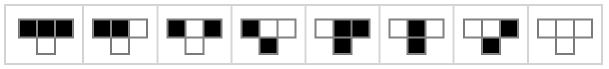


On peux aussi écrire :

Ancien état	111	110	101	100	011	010	001	000
Nouvel état	0	0	0	1	1	1	1	0

Un voisinage de 3 cellules.

Les règles



On peux aussi écrire :

Ancien état	111	110	101	100	011	010	001	000
Nouvel état	0	0	0	1	1	1	1	0

Comonades
TODO : Funny comonad picture

C'est le dual d'une monade

- extract (copure) (co uinit) : : M a -> a
- duplicate (cojoin) (co product δ) : : M (M a)

Dura lex sed lex

Une comonade doit respecter des lois

- `(fmap (fmap f)) . duplicate` ≡ `duplicate . fmap f`
- `duplicate . duplicate = fmap duplicate . duplicate`

- `duplicate . duplicate` ≡ `fmap duplicate . duplicate` (commut)
- `fmap extract . duplicate` ≡ `extract . duplicate` ≡ `id` (co unit)

Comonades - Catégories

Une comonade (T, δ, ϵ) est la donné d'un endofoncteur $T : C \to C$ et de deux transformations naturelles $\Delta : T \to T \circ T$ et $\epsilon : T \to 1_C$ telles que :

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\Delta_X"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\Delta_{T(X)}"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "T(\Delta_X)"'] & T(T(T(X)))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\Delta_X"] \arrow[d, "\Delta_X"'] \arrow[dr, equal] & T(T(X)) \arrow[d, "\epsilon_{T(X)}"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "T(\epsilon_X)"'] & T(X)
\end{tikzcd}$$

c'est à dire $\Delta_T \circ \Delta = T\Delta \circ \Delta$ et $T\epsilon \circ \Delta = \epsilon_T \circ \Delta = id$.

A chaque loi son diagramme

extract est une T.N.

```
f . extract ≡ extract . (fmap f)
```

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ T(X) \arrow[u, "\epsilon_X"'] \arrow[r, "T(f)"'] & T(Y) \arrow[u, "\epsilon_Y"] \end{tikzcd}$$

A chaque loi son diagramme

duplicate est une T.N.

`(fmap (fmap f)) . duplicate` $\equiv$ `duplicate . fmap f`

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "T(f)"'] \arrow[d, "\Delta_X"'] & T(Y) \arrow[d, "\Delta_Y"] \\ T(T(X)) \arrow[r, "T(T(f))"] & T(T(Y)) \end{tikzcd}$$

A chaque loi son diagramme

Coassociativité

```
duplicate . duplicate = fmap duplicate . duplicate
```

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "\Delta_X"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\Delta_{T(X)}"] \\ T(T(X)) \arrow[r, "T(\Delta_X)"'] & T(T(T(X))) \end{tikzcd}$$

$$\Delta_T \circ \Delta = T\Delta \circ \Delta$$

A chaque loi son diagramme

Existence d'une counité

```
extract . duplicate = fmap extract . duplicate = id
```

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "\Delta_X"] \arrow[d, "\Delta_X"'] \arrow[dr, equal] & T(T(X)) \arrow[d, "\epsilon_{T(X)}"] \\ T(T(X)) \arrow[r, "T(\epsilon_X)"'] & T(X) \end{tikzcd}$$

$$\epsilon_T \circ \Delta = T\epsilon \circ \Delta = id_T$$