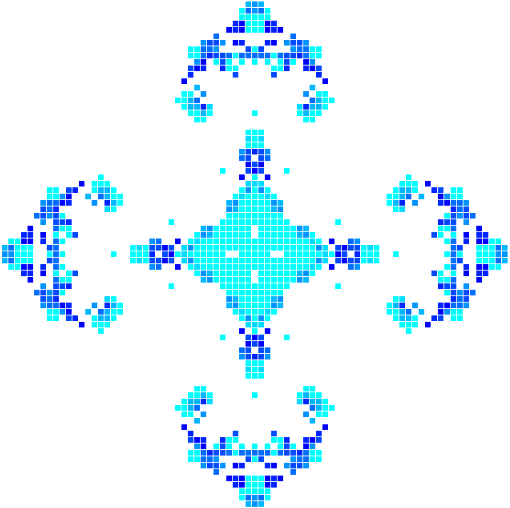
Monades, Comonades et Automates cellulaires

Jérémy S. Cochoy

INRIA Paris-Saclay

Octobre 2015



Les types

Qu'est-ce qu'un type ?

C'est un *ensemble* de valeurs.

Examples :

- $Int = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $Bool = \{True, False\}$
- $Char = \{'a', 'b', 'c', \ldots\}$
- $[Bool] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$
- $[a]$

Les types

Qu'est-ce qu'un type ?

C'est un *ensemble* de valeurs.

Examples :

- $Int = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $Bool = \{True, False\}$
- $Char = \{'a', 'b', 'c', \ldots\}$
- $[Bool] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$
- $[a]$

Les types

Qu'est-ce qu'un type ?

C'est un *ensemble* de valeurs.

Examples :

- $Int = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $Bool = \{True, False\}$
- $Char = \{'a', 'b', 'c', \ldots\}$
- $[Bool] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$
- $[a]$

Les types

Qu'est-ce qu'un type ?

C'est un *ensemble* de valeurs.

Examples :

- $Int = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $Bool = \{True, False\}$
- $Char = \{'a',' b',' c', \ldots\}$
- $[Bool] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$
- $[a]$

Les types

Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing
- Either a b = Left a | Right b

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les types

Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing
- Either a b = Left a | Right b

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les types

Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing
- Either a b = Left a | Right b

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les types

Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing
- Either a b = Left a | Right b

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les types

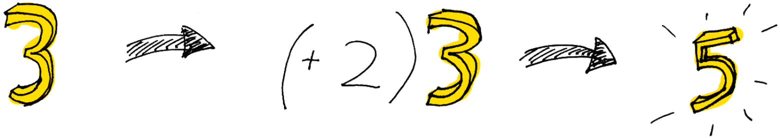
Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing
- Either a b = Left a | Right b

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les fonctions

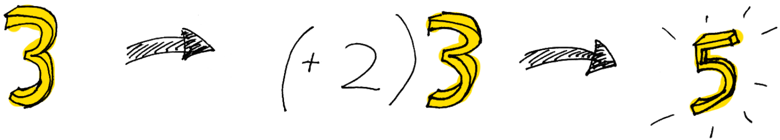
Ce sont les traitements que l'on peux implémenter.



Une fonction ne lance pas de fusé.

Les fonctions

Ce sont les traitements que l'on peux implémenter.



Une fonction ne lance pas de fusé.

Les fonctions

Une fonction a aussi un type : a -> b

- floor : : Float -> Int
- (+2) : : Int -> Int
- id : : a -> a
- map : : (a -> b) -> [a] -> [b]

Les fonctions

Une fonction a aussi un type : *a -> b*

- floor : : Float -> Int
- (+2) : : Int -> Int
- id : : a -> a
- map : : (a -> b) -> [a] -> [b]

Les fonctions

Ça se compose

- f1 : : a -> b
- f2 : : b -> c
- f2 . f1 : : a -> c
- . : : (a -> b) -> (b -> c) -> (a -> c)

Pour l'anecdote, la collection de tous les types forme une catégorie où les flèches sont les fonctions implémentables. On l'appelle la catégorie des types.

Les fonctions

Ça se compose

- f1 : : a -> b
- f2 : : b -> c
- f2 . f1 : : a -> c
- . : : (a -> b) -> (b -> c) -> (a -> c)

Pour l'anecdote, la collection de tous les types forme une catégorie où les flèches sont les fonctions implémentables. On l'appelle la catégorie des types.

Les fonctions

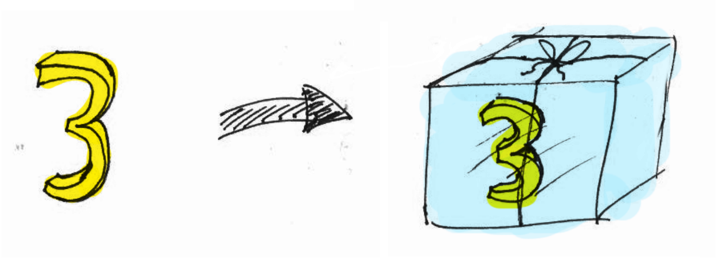
Ça se compose

- f1 : : a -> b
- f2 : : b -> c
- f2 . f1 : : a -> c
- . : : (a -> b) -> (b -> c) -> (a -> c)

Pour l'anecdote, la collection de tous les types forme une catégorie où les flèches sont les fonctions implémentables. On l'appelle la catégorie des types.

Donnée dans un contexte

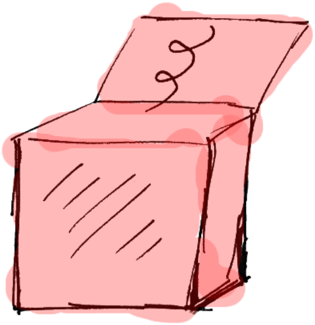
Un foncteur place une valeur dans un contexte.



L'exemple de Maybe : `Just 3`

Donnée dans un contexte

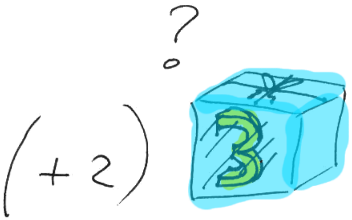
Un contexte peux aussi ne pas contenir de valeur.



L'exemple de Maybe : `Nothing`

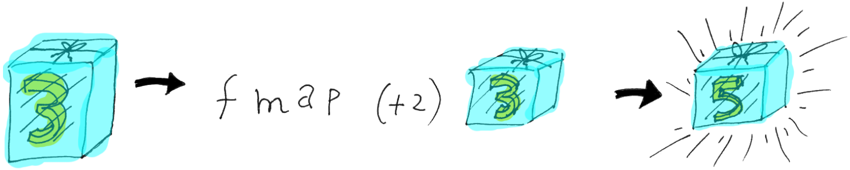
Functorial mapping

On ne peux plus appliquer la fonction telle quelle.



Functorial mapping

Mais le foncteur nous donne une nouvelle flèche.



Les foncteurs

Un foncteur F agit sur les types ...

- a => F a

- a => Maybe a
- a => [a]

... et sur les fonctions

- a -> b => F a -> F b

- fmap (+2) : : F Int -> F Int
- fmap id : : F a -> F a

Les foncteurs

Un foncteur F agit sur les types ...

- a => F a

- a => Maybe a
- a => [a]

... et sur les fonctions

- a -> b => F a -> F b

- fmap (+2) : : F Int -> F Int
- fmap id : : F a -> F a

Dura lex sed lex

Un foncteur doit respecter des lois

- fmap id = id
- fmap (p . q) = (fmap p) . (fmap q)

Un foncteur est un endofoncteur de la catégorie des types.

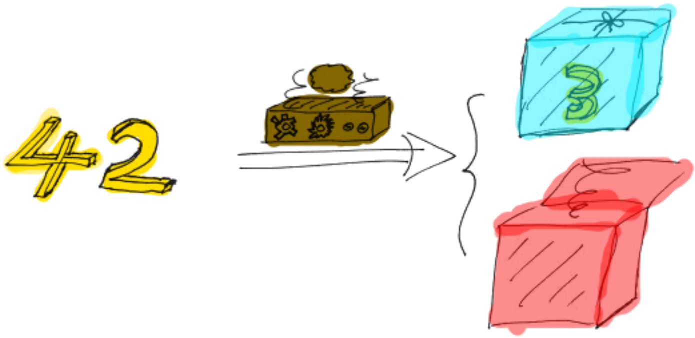
Dura lex sed lex

Un foncteur doit respecter des lois

- fmap id = id
- fmap (p . q) = (fmap p) . (fmap q)

Un foncteur est un endofoncteur de la catégorie des types.

Un traitement qui peux échouer



Une fonction de type *Int -> Maybe Int*.

Combiner des traitements avec échec

L'opérateur bind

L'opérateur join

Monade

Monades - Catégories

Une monade (T, μ, η) est la donné d'un endofoncteur $T : C \to C$ et de deux transformations naturelles $\mu : T \circ T \to T$ et $\eta : 1_C \to T$ telles que :

$$\begin{tikzcd}
T(T(T(X))) \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{T(X)}"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\eta_{T(X)}"] \arrow[d, "T(\eta_X)"'] \arrow[dr, equal] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X)
\end{tikzcd}$$

c'est à dire $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T$ et $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta T = 1_T$.

Dans notre cas, C est la catégorie des types ; les objet sont les

Monades - Catégories

Une monade (T, μ, η) est la donné d'un endofoncteur $T : C \to C$ et de deux transformations naturelles $\mu : T \circ T \to T$ et $\eta : 1_C \to T$ telles que :

$$\begin{tikzcd}
T(T(T(X))) \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{T(X)}"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\eta_{T(X)}"] \arrow[d, "T(\eta_X)"'] \arrow[dr, equal] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X)
\end{tikzcd}$$

c'est à dire $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T$ et $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta T = 1_T$.

Dans notre cas, C est la catégorie des types : les objet sont les