개념원리 이해

01 두 점 사이의 거리

1 수직선 위의 두 점 사이의 거리

(1) 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는

$$\overline{\mathbf{AB}}=|x_2-x_1|$$

(2) 수직선 위의 원점 $\mathrm{O}(0)$과 점 $\mathrm{A}(x_1)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{OA}}$는

$$\overline{\mathbf{OA}}=|x_1|$$

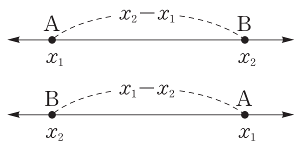
› $|x_2-x_1|=|x_1-x_2|$

설명 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여

$x_1\le x_2$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}=x_2-x_1$

$x_1>x_2$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}=x_1-x_2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=|x_2-x_1|$



보기 ▸ 두 점 $\mathrm{A}(-2)$, $\mathrm{B}(3)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=|3-(-2)|=|5|=5$$

2 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

필수 01~03

(1) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는

$$\overline{\mathbf{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

(2) 좌표평면 위의 원점 $\mathrm{O}(0, 0)$과 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{OA}}$는

$$\overline{\mathbf{OA}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

› $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

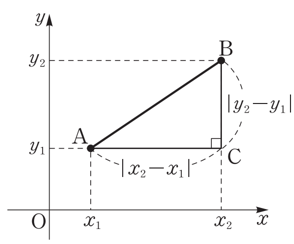
설명 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나면서 x축에 평행한 직선과 점 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 지나면서 y축에 평행한 직선의 교점을 C라 하면 점 C의 좌표는 (x_2, y_1)이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=|x_2-x_1|$, $\overline{\mathrm{BC}}=|y_2-y_1|$

이때 삼각형 ABC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}^2&=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2\\&=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$



보기 ▸ 두 점 $\mathrm{A}(1, -3)$, $\mathrm{B}(6, 9)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(6-1)^2+\{9-(-3)\}^2}=\sqrt{169}=13$$

더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 8쪽

필수 01 두 점 사이의 거리

다음 물음에 답하시오.

(1) 두 점 $A(3,\ a)$, $B(-1,\ 2)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, a의 값을 모두 구하시오.

(2) 세 점 $A(3,\ -2)$, $B(2,\ a)$, $C(6,\ 1)$에 대하여 $\overline{AB}=\overline{BC}$일 때, a의 값을 구하시오.

풀이

(1) $\overline{AB}=2\sqrt{5}$이므로

$$\sqrt{(-1-3)^2+(2-a)^2}=2\sqrt{5}$$

양변을 제곱하면

$$16+(2-a)^2=20$$

$$a^2-4a=0, \qquad a(a-4)=0$$

$$\therefore\ a=\mathbf{0} \text{ 또는 } a=\mathbf{4}$$

(2) $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$$\sqrt{(2-3)^2+\{a-(-2)\}^2}=\sqrt{(6-2)^2+(1-a)^2}$$

양변을 제곱하면

$$1+(a+2)^2=16+(1-a)^2$$

$$a^2+4a+5=a^2-2a+17, \qquad 6a=12$$

$$\therefore\ a=\mathbf{2}$$

KEY Point

- **좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리**
  ⇨ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

정답 및 풀이 2쪽

확인 체크

1 두 점 $A(a,\ 3)$, $B(1,\ 2-a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{3}$일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

2 세 점 $A(4,\ -5)$, $B(10,\ 1)$, $C(a,\ 4)$에 대하여 $\overline{AB}=2\overline{BC}$일 때, a의 값을 모두 구하시오.

3 두 점 $A(-1,\ a)$, $B(a,\ 5)$에 대하여 선분 AB의 길이가 최소가 되도록 하는 a의 값을 구하시오.

더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 8쪽

필수 02 같은 거리에 있는 점의 좌표 – 좌표축 위의 점

두 점 A$(-1,\ 2)$, B$(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점 Q의 좌표를 구하시오.

설명 x축 위의 점의 좌표는 $(a,\ 0)$, y축 위의 점의 좌표는 $(0,\ b)$로 놓는다.

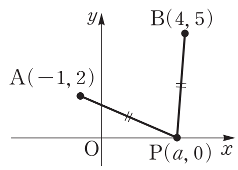
풀이 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$라 하자.

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+1)^2+(0-2)^2=(a-4)^2+(0-5)^2$

$a^2+2a+5=a^2-8a+41,\qquad 10a=36$

$\therefore\ a=\dfrac{18}{5}\qquad \therefore\ \mathbf{P}\left(\dfrac{18}{5},\ 0\right)$

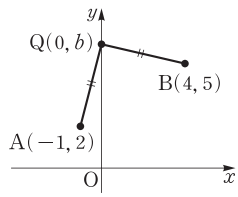


또 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(0+1)^2+(b-2)^2=(0-4)^2+(b-5)^2$

$b^2-4b+5=b^2-10b+41,\qquad 6b=36$

$\therefore\ b=6\qquad \therefore\ \mathbf{Q(0,\ 6)}$



더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 8쪽

필수 03 같은 거리에 있는 점의 좌표 – 직선 위의 점

두 점 A$(5,\ -2)$, B$(-7,\ 2)$에서 같은 거리에 있는 직선 $y=2x+7$ 위의 점 P의 좌표를 구하시오.

설명 $y=f(x)$의 그래프 위의 점의 좌표는 $(a,\ f(a))$로 놓는다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a,\ 2a+7)$이라 하자.

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-5)^2+(2a+7+2)^2=(a+7)^2+(2a+7-2)^2$

$5a^2+26a+106=5a^2+34a+74,\qquad -8a=-32\qquad \therefore\ a=4$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathbf{(4,\ 15)}$이다.

정답 및 풀이 2쪽

확인 체크

4 두 점 A$(1,\ 4)$, B$(-2,\ 3)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오.

5 두 점 A$(2,\ 3)$, B$(6,\ -1)$에서 같은 거리에 있는 직선 $y=-x+2$ 위의 점 P$(a,\ b)$에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

6 세 점 A$(2,\ 1)$, B$(2,\ 7)$, C$(4,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 9쪽

필수 04 삼각형의 세 변의 길이와 모양

세 점 A$(9, 7)$, B$(2, 3)$, C$(8, -1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하시오.

설명 삼각형의 모양 ⇨ 세 변의 길이 사이의 관계로 파악한다.

풀이 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(2-9)^2+(3-7)^2}=\sqrt{65}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(8-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(9-8)^2+(7+1)^2}=\sqrt{65}$$
$$\therefore\ \overline{AB}=\overline{CA}$$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{\mathbf{AB}}=\overline{\mathbf{CA}}$**인 이등변삼각형**이다.

KEY Point

- 삼각형 ABC에서
  ① $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$ ⇨ △ABC는 정삼각형
  ② $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$ ⇨ △ABC는 $\angle C=90°$인 직각삼각형
  ③ $\overline{AB}=\overline{BC}$ 또는 $\overline{BC}=\overline{CA}$ 또는 $\overline{CA}=\overline{AB}$ ⇨ △ABC는 이등변삼각형

● 정답 및 풀이 3쪽

확인 체크

7 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하시오.

(1) A$(1, 0)$, B$(2, -2)$, C$(5, 2)$

(2) A$(-\sqrt{3}, 1)$, B$(0, -2)$, C$(\sqrt{3}, 1)$

8 세 점 A$(-1, 1)$, B$(3, 4)$, C$(a, 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\angle C=90°$인 직각삼각형일 때, a의 값을 구하시오.

9 세 점 A$(0, 1)$, B$(1, -2)$, C$(3, 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

• 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 10쪽

필수 05 거리의 제곱의 합의 최솟값

두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 6)$과 y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값과 그때의 점 P의 좌표를 구하시오.

설명 점 P의 좌표를 $(0,\ a)$로 놓고 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$을 a에 대한 이차식으로 나타낸다.

풀이 점 P의 좌표를 $(0,\ a)$라 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2&=(1^2+a^2)+\{(-4)^2+(a-6)^2\}\\&=2a^2-12a+53\\&=2(a-3)^2+35\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 $a=3$일 때 **최솟값 35**를 갖고, 그때의 **점 P의 좌표는 $(0,\ 3)$**이다.

참고 $y=a(x-p)^2+q\ (a>0)$ ⇨ $x=p$일 때 최솟값 q를 갖는다.

KEY Point

• 두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 점 P의 좌표를 a를 사용하여 나타낸다.
(ii) $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$을 a에 대한 이차식으로 나타내어 최솟값을 구한다.

• 정답 및 풀이 3쪽

확인 체크

10 두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 3)$, $\mathrm{B}(2,\ -3)$과 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값과 그때의 점 P의 좌표를 구하시오.

11 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 5)$와 직선 $y=x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 구하시오.

12 세 점 $\mathrm{A}(1,\ -4)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$, $\mathrm{C}(-1,\ -1)$과 직선 $y=-x+2$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$의 최솟값을 구하시오.

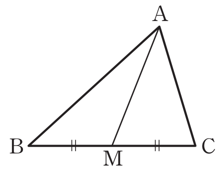
● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 10쪽

필수 06 좌표를 이용한 도형의 성질의 증명

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때,

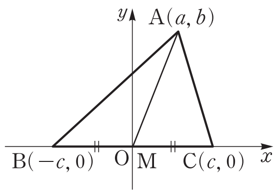
$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

이 성립함을 좌표평면을 이용하여 증명하시오.



설명 도형을 좌표평면으로 옮기면 좌표를 이용하여 변의 길이를 간단하게 나타낼 수 있기 때문에 도형의 성질을 쉽게 증명할 수 있다. 이때 주어진 도형의 한 변을 x축 또는 y축 위에 놓고 주어진 점을 원점 또는 좌표축 위의 점이 되도록 하면 계산이 간단해진다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 M을 지나고 $\overline{BC}$에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이 된다.



$A(a,\ b)$, $C(c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면 점 B의 좌표는 $(-c,\ 0)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2+\overline{AC}^2&=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}\\&=2(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

또 $\overline{AM}^2=a^2+b^2$, $\overline{BM}^2=c^2$이므로

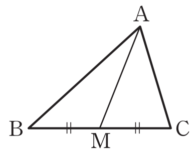
$$2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)=2(a^2+b^2+c^2)$$

따라서 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이 성립한다.

참고 **파푸스 정리 (중선 정리)**

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, 중선 AM에 대하여

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$



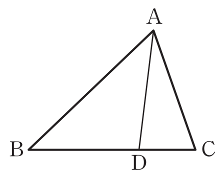
● 정답 및 풀이 3쪽

확인 체크

13 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{BD}=2\overline{CD}$일 때,

$$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2)$$

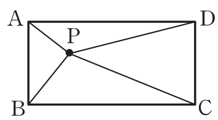
이 성립함을 좌표평면을 이용하여 증명하시오.



14 직사각형 ABCD와 점 P가 한 평면 위에 있을 때,

$$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$$

이 성립함을 좌표평면을 이용하여 증명하시오.



연습 문제

STEP 1

생각해 봅시다!

15 두 점 A$(a, 4)$, B$(2, a)$ 사이의 거리가 2 이하가 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오.

$\overline{AB} \le 2$
$\Rightarrow \overline{AB}^2 \le 4$

교육청 기출

16 좌표평면 위에 두 점 A$(2t, -3)$, B$(-1, 2t)$가 있다. 선분 AB의 길이를 l이라 할 때, 실수 t에 대하여 l^2의 최솟값을 구하시오.

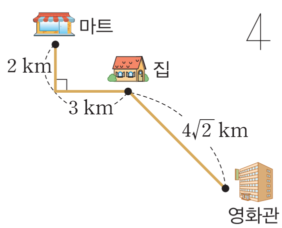
17 두 점 A$(3, -2)$, B$(2, -1)$에서 같은 거리에 있는 점 P가 직선 $y=2x-1$ 위의 점일 때, 두 점 A, P 사이의 거리를 구하시오.

$y=f(x)$의 그래프 위의 점의 좌표 $\Rightarrow (a, f(a))$

18 두 점 A$(-2, 0)$, B$(2, 0)$과 직선 $y=x+3$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값을 구하시오.

STEP 2

19 오른쪽 그림과 같이 집에서 서쪽으로 3 km, 북쪽으로 2 km 떨어진 지점에 마트가 있고, 집에서 남동쪽으로 $4\sqrt{2}$ km 떨어진 지점에 영화관이 있을 때, 마트와 영화관 사이의 직선 거리를 구하시오. (단, 남동쪽은 북쪽을 기준으로 시계 방향으로 135° 회전한 방향이다.)



4

집을 원점으로 하는 좌표평면을 생각한다.

20 세 점 A$(a, 1)$, B$(0, 6)$, C$(12, -3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. $\angle$A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점 D의 좌표가 $(8, 0)$일 때, 모든 a의 값의 합을 구하시오.

$\overline{AD}$는 $\angle$A의 이등분선이므로
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

생각해 봅시다!

21 세 점 $A(-2,\ 1)$, $B(1,\ 4)$, $C(3,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 구하시오.

22 세 점 $A(-1,\ 2)$, $B(1,\ -2)$, $C(a,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, ab의 값을 구하시오.

정삼각형이면 세 변의 길이가 모두 같다.
⇨ $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

23 다음은 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD에 대하여

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)$$

이 성립함을 증명하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 것을 구하시오.

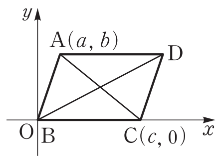
증명

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 B를 지나고 $\overline{BC}$에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡고 $A(a,\ b)$, $C(c,\ 0)$이라 하면 $D(\boxed{\text{(가)}},\ b)$

$\therefore\ \overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\boxed{\text{(나)}}$

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\boxed{\text{(다)}}$이므로

$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)$

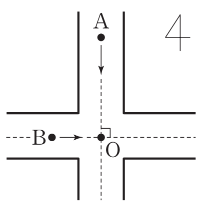


실력 UP

24 x, y가 실수일 때, $\sqrt{(x-5)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}$의 최솟값을 구하시오.

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$
⇨ 두 점 $(x,\ y)$, $(a,\ b)$ 사이의 거리

25 오른쪽 그림과 같이 지점 O에서 수직으로 만나는 두 직선 도로가 있다. A와 B가 지점 O로부터 각각 북쪽으로 10 km, 서쪽으로 5 km 떨어진 지점에서 동시에 출발하여 A는 남쪽으로 시속 3 km, B는 동쪽으로 시속 4 km의 일정한 속력으로 걸어간다. 이때 A와 B 사이의 거리의 최솟값을 구하시오.

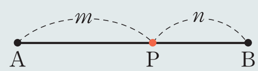


A와 B의 출발점의 위치를 각각 $(0,\ 10)$, $(-5,\ 0)$으로 놓는다.

개념원리 이해

02 선분의 내분점

1 선분의 내분점



선분 AB 위의 점 P에 대하여

$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n \ (m>0,\ n>0)$

일 때, 점 P는 선분 AB를 $m : n$으로 **내분**한다고 하고, 점 P를 선분 AB의 **내분점**이라 한다.

2 수직선 위의 선분의 내분점

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $m : n \ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P라 하면

$$\mathbf{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB의 중점을 M이라 하면

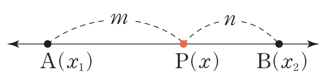
$$\mathbf{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

› 선분 AB의 중점은 선분 AB를 $1 : 1$로 내분하는 점이다.

설명 (1) 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점 P의 좌표 x를 구해 보자.

(i) $x_1<x_2$일 때

오른쪽 그림에서 $\overline{AP}=x-x_1$, $\overline{PB}=x_2-x$이므로



$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$에서 $\quad (x-x_1) : (x_2-x) = m : n$

$m(x_2-x)=n(x-x_1), \quad (m+n)x = mx_2+nx_1$

$\therefore\ x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$

(ii) $x_1>x_2$일 때

같은 방법으로 하면 $\quad x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$

(i), (ii)에서 $\quad x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$

(2) 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB의 중점은 선분 AB를 $1 : 1$로 내분하는 점이므로 중점 M의 좌표 x는

$$x=\frac{1\times x_2+1\times x_1}{1+1}=\frac{x_1+x_2}{2}$$

예제 ▸ 두 점 $A(-3)$, $B(5)$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 선분 AB를 $1 : 3$으로 내분하는 점 P의 좌표

(2) 선분 AB의 중점 M의 좌표

풀이 (1) $\dfrac{1\times5+3\times(-3)}{1+3}=-1 \qquad \therefore\ P(-1)$

(2) $\dfrac{-3+5}{2}=1 \qquad \therefore\ M(1)$

3 좌표평면 위의 선분의 내분점

필수 07~09

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여

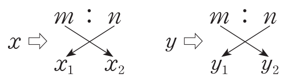
(1) 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점을 P라 하면

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

> 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점의 좌표를 구할 때에는



와 같이 대각선 방향으로 곱하여 더한다.

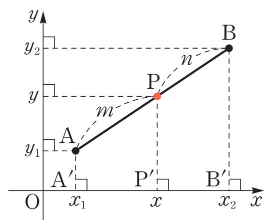
$\Rightarrow \left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

설명 (1) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하자.

세 점 A, P, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, P′, B′이라 하면 평행선 사이의 선분의 길이의 비에 의하여

$\overline{\mathrm{A'P'}} : \overline{\mathrm{P'B'}} = \overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}} = m : n$

이므로 점 P′은 선분 A′B′을 $m : n$으로 내분하는 점이다.



$\therefore x = \frac{mx_2+nx_1}{m+n}$

또 세 점 A, P, B에서 y축에 내린 수선의 발을 이용하여 같은 방법으로 점 P의 y좌표를 구하면

$y = \frac{my_2+ny_1}{m+n}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

(2) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB의 중점 M은 선분 AB를 $1 : 1$로 내분하는 점이므로

$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

예제 두 점 $\mathrm{A}(-3, 5)$, $\mathrm{B}(2, -5)$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 선분 AB를 $3 : 2$로 내분하는 점 P의 좌표

(2) 선분 AB를 $2 : 3$으로 내분하는 점 Q의 좌표

(3) 선분 AB의 중점 M의 좌표

풀이 (1) $\mathrm{P}\left(\frac{3\times2+2\times(-3)}{3+2}, \frac{3\times(-5)+2\times5}{3+2}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(0, -1)$

(2) $\mathrm{Q}\left(\frac{2\times2+3\times(-3)}{2+3}, \frac{2\times(-5)+3\times5}{2+3}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{Q}(-1, 1)$

(3) $\mathrm{M}\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{5-5}{2}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{M}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

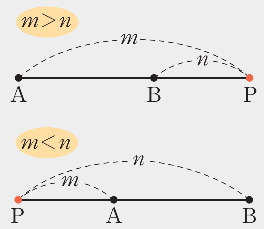
특강 선분의 외분점 _ 교육과정 外

1 선분의 외분점

선분 AB의 연장선 위의 점 P에 대하여

$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$

일 때, 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 **외분**한다고 하고, 점 P를 선분 AB의 **외분점**이라 한다.



› 선분 AB를 1 : 1로 외분하는 점은 존재하지 않으므로 $m\neq n$인 경우만 생각한다.

2 수직선 위의 선분의 외분점

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점을 P라 하면

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$$

보기 ▸ 두 점 $\mathrm{A}(-3)$, $\mathrm{B}(5)$에 대하여 선분 AB를 1 : 3으로 외분하는 점의 좌표는

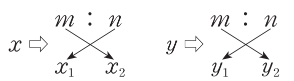
$$\left(\frac{1\times5-3\times(-3)}{1-3}\right),\ 즉\ (-7)$$

3 좌표평면 위의 선분의 외분점

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점을 P라 하면

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

› 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점의 좌표를 구할 때에는



와 같이 대각선 방향으로 곱하여 뺀다.

$$\Rightarrow \left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

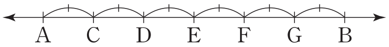
보기 ▸ 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 5)$, $\mathrm{B}(2,\ -5)$에 대하여 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\times2-2\times(-3)}{3-2},\ \frac{3\times(-5)-2\times5}{3-2}\right),\ 즉\ (12,\ -25)$$

알아 둡시다!

선분 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = m : n$이면 점 P는 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m : n$으로 내분하는 점이다.

26 다음 그림과 같이 수직선 위에 있는 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 6등분하는 점을 각각 C, D, E, F, G라 할 때, □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.



(1) 점 D는 선분 AB를 □ : □로 내분하는 점이다.

(2) 점 G는 선분 AB를 □ : □로 내분하는 점이다.

(3) 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점은 □이다.

(4) 선분 AB의 중점은 □이다.

두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m : n$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$$

27 두 점 A(2), B(6)에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P의 좌표

(2) 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 Q의 좌표

(3) 선분 AB의 중점 M의 좌표

두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m : n$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

28 두 점 A(−1, 6), B(3, 2)에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점 P의 좌표

(2) 선분 BA를 1 : 3으로 내분하는 점 Q의 좌표

(3) 선분 AB의 중점 M의 좌표

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 11쪽

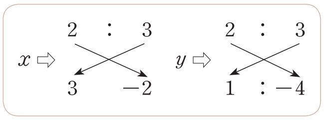
필수 07 선분의 내분점

세 점 A$(3,\ 1)$, B$(-2,\ -4)$, C$(8,\ 6)$에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점을 P, 선분 BC를 $3:2$로 내분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오.

설명 선분의 내분점을 구하는 공식을 이용하여 두 점 P, Q의 좌표를 구한 후 선분 PQ의 길이를 구한다.

풀이 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\times(-2)+3\times3}{2+3},\ \frac{2\times(-4)+3\times1}{2+3}\right),\text{ 즉 }(1,\ -1)$$



선분 BC를 $3:2$로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3\times8+2\times(-2)}{3+2},\ \frac{3\times6+2\times(-4)}{3+2}\right),\text{ 즉 }(4,\ 2)$$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\sqrt{(4-1)^2+(2+1)^2}=\mathbf{3\sqrt{2}}$$

KEY Point

- 두 점 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표

  ⇨ $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

● 정답 및 풀이 6쪽

확인 체크

29 세 점 A$(-1,\ 4)$, B$(5,\ -2)$, C$(1,\ 6)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, 선분 BC를 $1:3$으로 내분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 중점의 좌표를 구하시오.

30 두 점 A$(-1,\ -2)$, B$(x,\ y)$에 대하여 선분 AB 위의 점 P$(5,\ -5)$가 $\overline{\text{AP}}=3\overline{\text{PB}}$를 만족시킬 때, xy의 값을 구하시오.

31 두 점 A$(1,\ -5)$, B$(6,\ a)$에 대하여 선분 AB를 $2:b$로 내분하는 점의 좌표가 $(3,\ -1)$일 때, 선분 AB를 $b:1$로 내분하는 점의 좌표를 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 11쪽

필수 08 선분의 내분점의 활용 (1)

두 점 $A(-4,\ 2)$, $B(5,\ -6)$에 대하여 선분 AB를 $t : (1-t)$로 내분하는 점이 제3사분면 위에 있도록 하는 실수 t의 값의 범위를 구하시오.

풀이 선분 AB를 $t : (1-t)$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t\times5+(1-t)\times(-4)}{t+(1-t)},\ \frac{t\times(-6)+(1-t)\times2}{t+(1-t)}\right),\ \text{즉 } (9t-4,\ -8t+2)$$

이 점이 제3사분면 위에 있으므로

$$9t-4<0,\ -8t+2<0 \qquad \therefore \frac{1}{4}<t<\frac{4}{9} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $t>0$, $1-t>0$이므로 $0<t<1$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\mathbf{\frac{1}{4}<t<\frac{4}{9}}$

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 11쪽

필수 09 선분의 내분점의 활용 (2)

두 점 $A(2,\ 3)$, $B(-3,\ 5)$에 대하여 선분 AB를 $k : 2$로 내분하는 점이 직선 $y=x+6$ 위에 있을 때, 양수 k의 값을 구하시오.

풀이 선분 AB를 $k : 2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{k\times(-3)+2\times2}{k+2},\ \frac{k\times5+2\times3}{k+2}\right),\ \text{즉 } \left(\frac{-3k+4}{k+2},\ \frac{5k+6}{k+2}\right)$$

이 점이 직선 $y=x+6$ 위에 있으므로

$$\frac{5k+6}{k+2}=\frac{-3k+4}{k+2}+6, \qquad 5k+6=-3k+4+6(k+2)$$

$$2k=10 \qquad \therefore k=\mathbf{5}$$

● 정답 및 풀이 7쪽

확인 체크

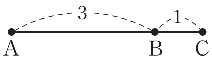
32 두 점 $A(-2,\ 4)$, $B(1,\ -1)$에 대하여 선분 AB를 $(1-t) : t$로 내분하는 점이 제1사분면 위에 있도록 하는 실수 t의 값의 범위가 $\alpha<t<\beta$일 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$의 값을 구하시오.

33 두 점 $A(-3,\ 0)$, $B(0,\ 12)$에 대하여 선분 AB를 $1 : k$로 내분하는 점이 직선 $y=-x+2$ 위에 있을 때, 양수 k의 값을 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 12쪽

발전 10 등식을 만족시키는 선분의 연장선 위의 점

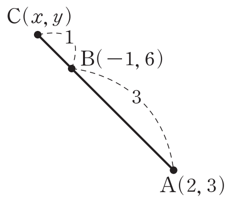
두 점 A$(2,\ 3)$, B$(-1,\ 6)$을 이은 선분 AB의 연장선 위의 점 C에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{BC}}$일 때, 점 C의 좌표를 구하시오.

설명 

⇨ 점 B는 $\overline{\mathrm{AC}}$를 $3:1$로 내분하는 점이다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1$

이를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같으므로 점 B는 $\overline{\mathrm{AC}}$를 $3:1$로 내분하는 점이다.



점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}$를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(-1,\ 6)$이므로

$$\frac{3\times x+1\times 2}{3+1}=-1,\quad \frac{3\times y+1\times 3}{3+1}=6$$

$3x+2=-4,\ 3y+3=24$

$\therefore\ x=-2,\ y=7$

따라서 점 C의 좌표는 $\mathbf{(-2,\ 7)}$이다.

KEY Point

- $m\overline{\mathrm{AB}}=n\overline{\mathrm{BC}}\ (m>0,\ n>0)$를 만족시키는 점 C의 좌표는 다음과 같은 순서로 구한다.
  (i) 비례식으로 만든다. ⇨ $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=n:m$
  (ii) 점 C의 좌표를 미지수로 놓고 내분점을 구하는 공식에 대입한다.

● 정답 및 풀이 7쪽

확인 체크

34 두 점 A$(-2,\ -1)$, B$(3,\ 1)$을 이은 선분 AB의 연장선 위의 점 C$(a,\ b)$에 대하여 $3\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{BC}}$일 때, ab의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

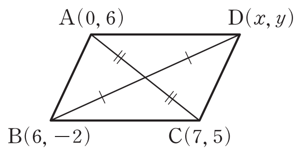
35 두 점 A$(-1,\ -2)$, B$(3,\ 6)$을 이은 선분 AB의 연장선 위의 점 C에 대하여 $2\overline{\mathrm{AC}}=3\overline{\mathrm{BC}}$일 때, 점 C의 좌표를 구하시오.

36 두 점 A$(-3,\ -2)$, B와 선분 AB의 연장선 위의 점 C$(18,\ 7)$에 대하여 $2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$를 만족시키는 점 B의 좌표를 모두 구하시오.

더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 12쪽

필수 11 평행사변형에서 중점의 활용

평행사변형 ABCD에서 세 꼭짓점이 A$(0,\ 6)$, B$(6,\ -2)$, C$(7,\ 5)$일 때, 꼭짓점 D의 좌표를 구하시오.



풀이 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점이 일치한다.

$\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+7}{2},\ \frac{6+5}{2}\right),\ \text{즉}\ \left(\frac{7}{2},\ \frac{11}{2}\right) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 D의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{6+x}{2},\ \frac{-2+y}{2}\right) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$\frac{7}{2}=\frac{6+x}{2},\ \frac{11}{2}=\frac{-2+y}{2}$$

$\therefore\ x=1,\ y=13$

따라서 점 D의 좌표는 $\mathbf{(1,\ 13)}$이다.

KEY Point

- 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.
  ⇨ 두 대각선의 중점이 일치한다.

정답 및 풀이 8쪽

확인 체크

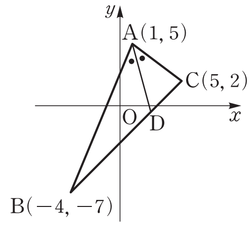
37 좌표평면 위의 네 점 A$(-1,\ 0)$, B$(a,\ 1)$, C$(0,\ 3)$, D$(-3,\ b)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, ab의 값을 구하시오.

38 네 점 A$(2,\ 1)$, B$(b,\ 5)$, C$(a,\ 7)$, D$(-2,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 마름모일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $a<0$)

• 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 14쪽

필수 12 삼각형의 내각의 이등분선

오른쪽 그림과 같이 세 점 $A(1, 5)$, $B(-4, -7)$, $C(5, 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D의 좌표를 구하시오.



설명 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여 점 D가 선분 BC를 $\overline{AB} : \overline{AC}$로 내분하는 점임을 이용한다.

풀이 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$\overline{AB} = \sqrt{(-4-1)^2+(-7-5)^2} = 13$, $\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2+(2-5)^2} = 5$이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = 13 : 5$$

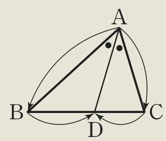
따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 $13 : 5$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{13\times5+5\times(-4)}{13+5}, \frac{13\times2+5\times(-7)}{13+5}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

KEY Point

- 삼각형의 내각의 이등분선의 성질
  ⇨ 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하면

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$
$$= \triangle ABD : \triangle ACD$$



• 정답 및 풀이 8쪽

확인 체크

39 세 점 $A(4, 9)$, $B(0, 1)$, $C(6, 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점 D의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

40 두 점 $A(-3, 0)$, $B(3, 4)$를 이은 선분 AB 위의 점 P가 $\angle AOP = \angle BOP$를 만족시킬 때, 직선 OP의 방정식을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

개념원리 이해

03 삼각형의 무게중심

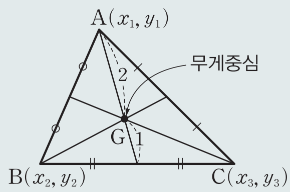
1 삼각형의 무게중심

필수 13

(1) **삼각형의 무게중심**

① 삼각형의 세 중선의 교점을 무게중심이라 한다.

② 삼각형의 무게중심은 세 중선을 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 내분한다.



(2) **삼각형의 무게중심의 좌표**

세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

› 삼각형의 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분을 삼각형의 중선이라 한다.

설명 (2) 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

이때 무게중심 $G(x, y)$는 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점이므로

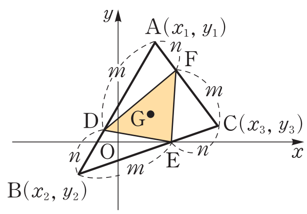
$$x=\frac{2\times\frac{x_2+x_3}{2}+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y=\frac{2\times\frac{y_2+y_3}{2}+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

보기 ▶ 세 점 $A(1, 2)$, $B(0, 4)$, $C(-4, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+0+(-4)}{3}, \frac{2+4+3}{3}\right),\ 즉\ (-1, 3)$$

보충 학습 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 각각 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점을 연결한 삼각형의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다.

증명 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 $m : n$으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 하고, 이 세 점의 x좌표를 각각 구하면



$$\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{mx_3+nx_2}{m+n}, \frac{mx_1+nx_3}{m+n}$$

이므로 삼각형 DEF의 무게중심의 x좌표는

$$\frac{\frac{mx_2+nx_1}{m+n}+\frac{mx_3+nx_2}{m+n}+\frac{mx_1+nx_3}{m+n}}{3}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

즉 삼각형 DEF의 무게중심의 x좌표는 삼각형 ABC의 무게중심의 x좌표와 일치한다.
같은 방법으로 삼각형 DEF의 무게중심의 y좌표를 구하면 삼각형 ABC의 무게중심의 y좌표와 일치한다.
따라서 삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다.

• 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 13쪽

필수 13 삼각형의 무게중심

삼각형 ABC에서 두 꼭짓점이 A$(1, 5)$, B$(6, 1)$이고 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(5, 5)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하시오.

풀이 점 C의 좌표를 (x, y)라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+6+x}{3}, \frac{5+1+y}{3}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{7+x}{3}, \frac{6+y}{3}\right)$$

이때 무게중심의 좌표가 $(5, 5)$이므로

$$\frac{7+x}{3}=5, \ \frac{6+y}{3}=5$$

$$\therefore x=8, \ y=9$$

따라서 점 C의 좌표는 **(8, 9)**이다.

KEY Point

• 세 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표

$$\Rightarrow \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

• 정답 및 풀이 9쪽

확인 체크

41 세 점 A$(a, 5)$, B$(-1, b)$, C$(5, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(2, 3)$일 때, a, b의 값을 구하시오.

42 삼각형 ABC에서 꼭짓점 A의 좌표는 $(-5, 6)$이고, 변 BC의 중점의 좌표는 $(1, 0)$일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하시오.

43 삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA의 중점의 좌표가 각각 $(-4, 5)$, $(-1, -2)$, $(5, 6)$일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 13쪽

발전 14 삼각형의 무게중심의 활용

세 점 A$(-2,\ 7)$, B$(6,\ -1)$, C$(8,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 임의의 점 P에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값과 그때의 점 P의 좌표

(2) 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표

설명 (1) 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$을 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 (1) 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$\overline{AP}^2=(x+2)^2+(y-7)^2=x^2+4x+y^2-14y+53$$
$$\overline{BP}^2=(x-6)^2+(y+1)^2=x^2-12x+y^2+2y+37$$
$$\overline{CP}^2=(x-8)^2+(y-3)^2=x^2-16x+y^2-6y+73$$
$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2&=3x^2-24x+3y^2-18y+163\\&=3(x^2-8x+16)+3(y^2-6y+9)+88\\&=3(x-4)^2+3(y-3)^2+88\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 $x=4$, $y=3$일 때 **최솟값 88**을 갖고, 그때의 **점 P의 좌표는 $(4,\ 3)$**이다.

(2) 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+6+8}{3},\ \frac{7-1+3}{3}\right),\ \text{즉 } \mathbf{(4,\ 3)}$$

KEY Point

- 삼각형 ABC와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

● 정답 및 풀이 9쪽

확인 체크

44 세 점 A$(-2,\ 1)$, B$(3,\ 4)$, C$(5,\ 4)$에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

45 세 점 A$(-5,\ -2)$, B$(2,\ 3)$, C$(6,\ -7)$과 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값과 그때의 점 P의 좌표를 구하시오.

연습 문제

STEP 1

생각해 봅시다!

46 두 점 $A(-4,\ a)$, $B(b,\ 1)$을 이은 선분 AB 위의 점 $P(0,\ 1)$에 대하여 $3\overline{AP}=4\overline{PB}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

$3\overline{AP}=4\overline{PB}$이면 $\overline{AP}:\overline{PB}=4:3$

47 두 점 $A(1,\ -3)$, $B(-4,\ 6)$에 대하여 선분 AB를 $k:(1-k)$로 내분하는 점이 제2사분면 위에 있도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

점 $(x,\ y)$가 제2사분면 위의 점이다. ⇨ $x<0$, $y>0$

48 두 점 $A(-3,\ 1)$, $B(1,\ 6)$을 이은 선분 AB가 y축에 의하여 $m:n$으로 내분될 때, $m+n$의 값을 구하시오.

(단, m, n은 서로소인 자연수이다.)

49 네 점 $A(a,\ 3)$, $B(3,\ 1)$, $C(b,\ c)$, $D(4,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 마름모일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.

마름모는 두 대각선의 중점이 일치하고 이웃하는 두 변의 길이가 같다.

50 세 점 $A(a,\ 2)$, $B(-1,\ 0)$, $C(5,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 하자. 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표가 $(2,\ 1)$일 때, ab의 값을 구하시오.

51 세 점 $A(1,\ 3)$, $B(-3,\ -2)$, $C(2,\ 2)$가 있다. $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P에 대하여 $\overline{PA}$의 길이를 구하시오.

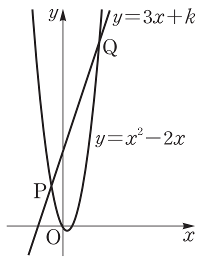
STEP 2

생각해 봅시다!

52 선분 AB의 중점을 M_1, 선분 AM_1의 중점을 M_2, 선분 AM_2의 중점을 M_3이라 하자. 같은 방법으로 점 M_4, 점 M_5, …를 정할 때, 점 M_{10}은 선분 AB를 $1:k$로 내분하는 점이다. 이때 k의 값을 구하시오.

교육청 기출

53 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=3x+k$ $(k>0)$이 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점의 x좌표가 1일 때, 상수 k의 값을 구하시오.
(단, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 작다.)



함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같다.

54 평행사변형 ABCD의 세 꼭짓점이 $A(-1, 3)$, $B(-5, 1)$, $C(-3, k)$이고 평행사변형 ABCD의 둘레의 길이가 $6\sqrt{5}$일 때, 점 D의 좌표를 구하시오.

평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같음을 이용하여 k의 값을 구한다.

55 삼각형 ABC에서 꼭짓점 A의 좌표가 $(7, 5)$이고 변 AB의 중점의 좌표가 $(3, 0)$이다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(3, 1)$일 때, 변 BC를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 구하시오.

교육청 기출

56 좌표평면에서 이차함수 $y=x^2-8x+1$의 그래프와 직선 $y=2x+6$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

정답 및 풀이 12쪽

실력 UP+

57 다음 그림과 같이 수직선 위에 두 점 $P(\sqrt{2})$, $Q(\sqrt{3})$이 있다.

세 점 $A\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}\right)$, $C\left(\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{4}\right)$을 수직선 위에 나타낼 때, 위치가 왼쪽인 점부터 순서대로 나열하시오.

생각해 봅시다!

세 점 A, B, C의 좌표를 $\dfrac{m\times\sqrt{3}+n\times\sqrt{2}}{m+n}$의 꼴로 나타낸다.

58 두 점 $A(2, 3)$, $B(0, 4)$에 대하여 직선 AB 위의 점 C가 $\overline{AB}=3\overline{BC}$를 만족시킨다. 점 C의 좌표가 (a, b) 또는 (p, q)일 때, $ab+pq$의 값을 구하시오.

점 C가 $\overline{AB}$ 위에 있는 경우와 $\overline{AB}$의 연장선 위에 있는 경우로 나누어 생각한다.

59 세 점 $O(0, 0)$, $A(0, 6)$, $B(4, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB에서 $\angle A$의 외각의 이등분선과 $\overline{OB}$의 연장선의 교점을 $D(a, b)$라 할 때, $a-b$의 값을 구하시오.

60 좌표평면 위의 세 점 $A(1, 0)$, $B(4, 0)$, $C(1, a)$와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값이 30일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

I 도형의 방정식

이 단원에서는

중학교에서 학습한 직선의 방정식을 바탕으로 두 직선의 평행과 수직 조건에 대하여 학습합니다. 또 점과 직선 사이의 거리를 구하는 방법을 배우고, 이를 활용한 다양한 문제를 풀어 봅니다.

개념원리 이해

01 직선의 방정식

1 직선의 방정식

필수 01~03

(1) **기울기와 y절편이 주어진 직선의 방정식**

기울기가 m이고 y절편이 n인 직선의 방정식은

$$\boldsymbol{y=mx+n}$$

(2) **한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식**

점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$\boldsymbol{y-y_1=m(x-x_1)}$$

(3) **두 점을 지나는 직선의 방정식**

서로 다른 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

① $x_1 \neq x_2$일 때, $\quad \boldsymbol{y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$

② $x_1=x_2$일 때, $\quad \boldsymbol{x=x_1}$

(4) **x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식**

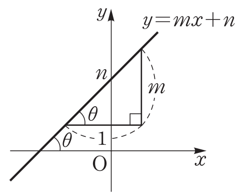
x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

$$\boldsymbol{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}\ (\text{단, } a \neq 0,\ b \neq 0)$$

① $y=mx+n$의 꼴을 **직선의 방정식의 표준형**이라 한다.

② 직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$(\text{기울기})=\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}=\frac{m}{1}=\tan\theta$$



설명 (2) **점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식**

구하는 직선의 방정식을

$y=mx+n \quad \cdots\cdots$ ㉠

이라 하면 직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나므로

$y_1=mx_1+n \qquad \therefore n=y_1-mx_1$

㉠에 이것을 대입하면 $\quad y=mx+y_1-mx_1$

$\therefore y-y_1=m(x-x_1)$

(3) **서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식**

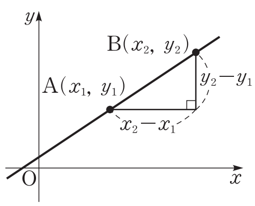
① $x_1 \neq x_2$일 때

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

이고 이 직선은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나므로

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$



② $x_1=x_2$일 때

직선 AB는 y축에 평행하므로 직선 위의 모든 점의 x좌표는 x_1이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\quad x=x_1$

(4) $\boldsymbol{x}$**절편이** $\boldsymbol{a}$**,** $\boldsymbol{y}$**절편이** $\boldsymbol{b}$**인 직선의 방정식**

직선이 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$를 지나므로

$$y-0=\frac{b-0}{0-a}(x-a) \qquad \therefore\ \frac{b}{a}x+y=b$$

양변을 b로 나누면 $\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

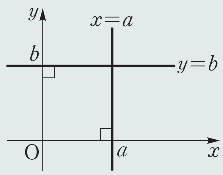
2 좌표축에 평행 또는 수직인 직선의 방정식

(1) x절편이 $a\,(a\neq0)$이고 **y축에 평행**한 (x축에 수직인) 직선의 방정식은

$\boldsymbol{x=a}$

(2) y절편이 $b\,(b\neq0)$이고 **x축에 평행**한 (y축에 수직인) 직선의 방정식은

$\boldsymbol{y=b}$



› 직선 $x=0$은 y축, 직선 $y=0$은 x축을 나타낸다.

보기 ① 점 $(6,\ 5)$를 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식은 $\quad x=6$

② 점 $(4,\ -5)$를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $\quad y=-5$

3 일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형

직선의 방정식은 x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0\,(a\neq0$ 또는 $b\neq0)$의 꼴로 나타낼 수 있다. 거꾸로 x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0\,(a\neq0$ 또는 $b\neq0)$이 나타내는 도형은 직선이다.

› $ax+by+c=0$의 꼴을 **직선의 방정식의 일반형**이라 한다.

설명 x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형은

(i) $a\neq0$, $b\neq0$이면 $\quad y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ $\quad$ ⇨ 기울기가 $-\frac{a}{b}$, y절편이 $-\frac{c}{b}$인 직선

(ii) $a\neq0$, $b=0$이면 $\quad ax+c=0$, 즉 $x=-\frac{c}{a}$ ⇨ y축에 평행한 직선

(iii) $a=0$, $b\neq0$이면 $\quad by+c=0$, 즉 $y=-\frac{c}{b}$ ⇨ x축에 평행한 직선

이상에서 x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0\,(a\neq0$ 또는 $b\neq0)$이 나타내는 도형은 항상 직선임을 알 수 있다.

필수 09

보충 학습 **두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식**

한 점에서 만나는 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선 중 직선 $a'x+b'y+c'=0$을 제외한 직선의 방정식은

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0\ (k\text{는 실수}) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

참고 ㉠에서 k가 어떤 값을 갖더라도 직선 $a'x+b'y+c'=0$을 나타낼 수 없다.

61 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(1, 3)$을 지나고 기울기가 2인 직선

(2) 점 $(-2, 1)$을 지나고 기울기가 -3인 직선

(3) 점 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$인 직선

62 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 두 점 $(1, 2)$, $(3, -4)$를 지나는 직선

(2) 두 점 $(-3, 5)$, $(2, -1)$을 지나는 직선

(3) 두 점 $(2, 4)$, $(0, -2)$를 지나는 직선

(4) 두 점 $(1, 0)$, $(4, 3)$을 지나는 직선

63 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) x절편이 4이고 y절편이 -1인 직선

(2) x절편이 -1이고 점 $(0, 5)$를 지나는 직선

(3) 두 점 $(2, 0)$, $(0, 3)$을 지나는 직선

64 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(2, 8)$을 지나고 x축에 평행한 직선

(2) 점 $(3, -2)$를 지나고 y축에 평행한 직선

(3) 점 $(-5, 6)$을 지나고 x축에 수직인 직선

(4) 두 점 $(-2, -3)$, $(1, -3)$을 지나는 직선

알아 둡시다!

점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식
⇨ $y-y_1=m(x-x_1)$

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식
⇨ $y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$
(단, $x_1 \neq x_2$)

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식
⇨ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
(단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

점 (a, b)를 지나고
① x축에 평행한(y축에 수직인) 직선의 방정식은 $y=b$
② y축에 평행한(x축에 수직인) 직선의 방정식은 $x=a$

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 20쪽

필수 **01** **한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식**

두 점 $(-4,\ 2)$, $(6,\ 8)$을 이은 선분의 중점을 지나고 기울기가 -3인 직선의 방정식을 구하시오.

풀이 두 점 $(-4,\ 2)$, $(6,\ 8)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+6}{2},\ \frac{2+8}{2}\right),\ \text{즉 } (1,\ 5)$$

따라서 점 $(1,\ 5)$를 지나고 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$$y-5=-3(x-1) \qquad \therefore\ \boldsymbol{y=-3x+8}$$

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 20쪽

필수 **02** **두 점을 지나는 직선의 방정식**

두 점 $\mathrm{A}(7,\ -3)$, $\mathrm{B}(2,\ -8)$을 이은 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점과 점 $(5,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

풀이 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\times2+2\times7}{3+2},\ \frac{3\times(-8)+2\times(-3)}{3+2}\right),\ \text{즉 } (4,\ -6)$$

따라서 두 점 $(4,\ -6)$, $(5,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-6)=\frac{2-(-6)}{5-4}(x-4) \qquad \therefore\ \boldsymbol{y=8x-38}$$

● 정답 및 풀이 14쪽

확인 체크

65 직선 $\sqrt{3}x+ay+b=0$은 점 $(2,\ -1)$을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$이다. 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

66 점 $(-4,\ 3)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

67 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(-3,\ -1)$, $\mathrm{C}(7,\ -6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G와 점 C를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 21쪽

필수 03 x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식

x절편이 6이고 y절편이 -2인 직선 위에 두 점 $(a,\ -1)$, $(4,\ b)$가 있을 때, ab의 값을 구하시오.

풀이 x절편이 6이고 y절편이 -2인 직선의 방정식은 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{-2}=1$ …… ㉠

점 $(a,\ -1)$이 직선 ㉠ 위에 있으므로 $\dfrac{a}{6}+\dfrac{-1}{-2}=1$ $\quad\therefore\ a=3$

점 $(4,\ b)$가 직선 ㉠ 위에 있으므로 $\dfrac{4}{6}+\dfrac{b}{-2}=1$ $\quad\therefore\ b=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ ab=\mathbf{-2}$

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 21쪽

필수 04 세 점이 한 직선 위에 있을 조건

세 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ -a)$, $\mathrm{C}(a,\ 5)$가 한 직선 위에 있도록 하는 양수 a의 값을 구하시오.

풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 (직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)이어야 하므로

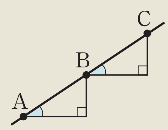
$\dfrac{-a-2}{1-3}=\dfrac{5-2}{a-3}$, $\quad (a+2)(a-3)=6$

$a^2-a-12=0$, $\quad (a+3)(a-4)=0$

$\therefore\ a=\mathbf{4}\ (\because\ a>0)$

KEY Point

- **세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다.**
  ⇨ (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)=(직선 AC의 기울기)



● 정답 및 풀이 15쪽

확인 체크

68 직선 $4x+3y=6$이 x축과 만나는 점을 P, 직선 $3x-2y=12$가 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, 직선 PQ의 방정식을 구하시오.

69 점 $(6,\ -4)$를 지나는 직선의 x절편이 y절편의 2배일 때, 이 직선의 방정식을 구하시오. (단, y절편은 0이 아니다.)

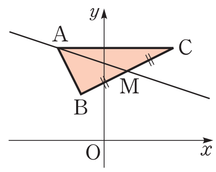
70 세 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$, $\mathrm{B}(2,\ k)$, $\mathrm{C}(-k,\ -10)$이 한 직선 위에 있도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 21쪽

필수 05 도형의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식

세 점 $A(-2, 4)$, $B(-1, 2)$, $C(3, 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하시오.

풀이 점 A를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{BC}$의 중점을 지나야 한다.



$\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

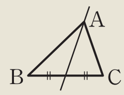
$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$, 즉 $(1, 3)$

따라서 두 점 $A(-2, 4)$, $M(1, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{3-4}{1-(-2)}\{x-(-2)\}$ $\therefore$ $\boldsymbol{y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}}$

KEY Point

- **삼각형 ABC의 꼭짓점 A를 지나면서 그 넓이를 이등분하는 직선**
  ⇨ $\overline{BC}$의 중점을 지난다.
- **직사각형, 마름모, 정사각형의 넓이를 이등분하는 직선**
  ⇨ 두 대각선의 교점을 지난다.

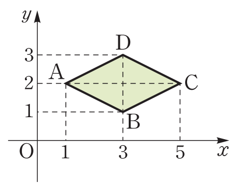


● 정답 및 풀이 15쪽

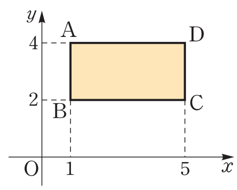
확인 체크

71 직선 $y=ax$가 세 점 $O(0, 0)$, $A(4, 4)$, $B(8, -6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이를 이등분할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

72 오른쪽 그림과 같이 마름모 ABCD가 좌표평면 위에 놓여 있다. 점 $(-1, 1)$을 지나고 마름모 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하시오.



73 직선 $kx-4y+3=0$이 오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분할 때, 상수 k의 값을 구하시오.



● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 22쪽

필수 06 계수의 부호와 그래프의 개형

상수 a, b, c가 다음을 만족시킬 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나는 사분면을 모두 구하시오.

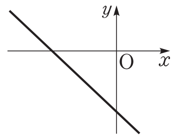
(1) $ac>0$, $bc>0$ (2) $ab<0$, $bc>0$ (3) $ac>0$, $b=0$

설명 직선의 개형 ⇨ x절편과 y절편의 부호 또는 기울기와 y절편의 부호를 조사한다.

풀이 (1) $ax+by+c=0$에서 $(x\text{절편})=-\dfrac{c}{a}$, $(y\text{절편})=-\dfrac{c}{b}$

$ac>0$, $bc>0$에서 $\dfrac{c}{a}>0$, $\dfrac{c}{b}>0$ $\therefore -\dfrac{c}{a}<0$, $-\dfrac{c}{b}<0$

따라서 x절편과 y절편이 모두 음수인 직선은 오른쪽 그림과 같으므로 **제2, 3, 4사분면**을 지난다.

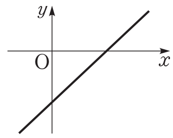


(2) $ax+by+c=0$에서 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$이므로

$(\text{기울기})=-\dfrac{a}{b}$, $(y\text{절편})=-\dfrac{c}{b}$

$ab<0$, $bc>0$에서 $\dfrac{a}{b}<0$, $\dfrac{c}{b}>0$ $\therefore -\dfrac{a}{b}>0$, $-\dfrac{c}{b}<0$

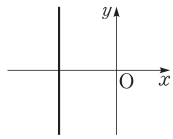
따라서 기울기가 양수, y절편이 음수인 직선은 오른쪽 그림과 같으므로 **제1, 3, 4사분면**을 지난다.



(3) $ax+by+c=0$에서 $b=0$이므로 $x=-\dfrac{c}{a}$

$ac>0$에서 $\dfrac{c}{a}>0$ $\therefore -\dfrac{c}{a}<0$

따라서 y축에 평행하고 x절편이 음수인 직선은 오른쪽 그림과 같으므로 **제2, 3사분면**을 지난다.



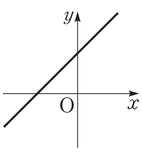
● 정답 및 풀이 16쪽

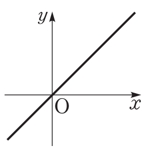
확인 체크

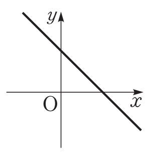
74 상수 a, b, c가 다음을 만족시킬 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나는 사분면을 모두 구하시오.

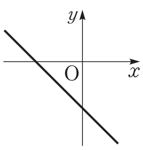
(1) $a=0$, $bc<0$ (2) $ab<0$, $bc<0$ (3) $c=0$, $ab<0$

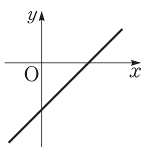
75 상수 a, b, c에 대하여 $ab>0$, $ac<0$일 때, 다음 중 직선 $ax+by+c=0$의 개형은?

①


②


③


④


⑤


더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 22쪽

필수 07 직선이 항상 지나는 점

직선 $(2-k)x+(3k-1)y-5=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하시오.

풀이 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$$(2x-y-5)+k(-x+3y)=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 항등식의 성질에 의하여

$$2x-y-5=0,\ -x+3y=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=3,\ y=1$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\mathbf{(3,\ 1)}$이다. ← 점 $(3,\ 1)$은 두 직선 $2x-y-5=0$, $-x+3y=0$의 교점이다.

참고 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 한 점에서 만날 때, 직선

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$$

은 실수 k의 값에 관계없이 항상 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지난다.

KEY Point

- k의 값에 관계없이 ⇨ k에 대한 항등식
  ⇨ $(\quad)+k(\quad)=0$의 꼴로 정리하여 항등식의 성질을 이용한다.

정답 및 풀이 16쪽

확인 체크

76 직선 $(2k-1)x-(k-1)y-3=0$은 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 P를 지난다. 이때 점 P의 좌표를 구하시오.

77 직선 $(k-2)x+(2k+1)y+7-k=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 P라 할 때, 선분 OP의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 27쪽

발전 08 직선이 항상 지나는 점의 활용

두 직선 $x+y-2=0$, $mx-y+m+1=0$이 제1사분면에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

풀이 $mx-y+m+1=0$을 m에 대하여 정리하면

$$(x+1)m-y+1=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

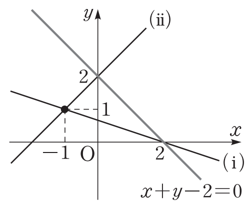
이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+1=0,\ -y+1=0$$

$$\therefore x=-1,\ y=1$$

따라서 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때

$$3m+1=0 \qquad \therefore m=-\frac{1}{3}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때

$$m-1=0 \qquad \therefore m=1$$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$$\boldsymbol{-\frac{1}{3}<m<1}$$

KEY Point

- 직선 $m(x-a)+(y-b)=0$
  ⇨ m의 값에 관계없이 항상 점 $(a,\ b)$를 지난다.

● 정답 및 풀이 16쪽

확인 체크

78 두 직선 $x+y+1=0$, $mx+y-m+1=0$이 제3사분면에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

79 직선 $y=mx+2$가 두 점 $\mathrm{A}(5,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 3)$을 이은 선분 AB와 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 23쪽

필수 09 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

두 직선 $2x-y-1=0$, $x-y-3=0$의 교점과 점 $(2, 2)$를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

풀이 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$2x-y-1+k(x-y-3)=0\ (k\text{는 실수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하자.

직선 ㉠이 점 $(2, 2)$를 지나려면

$$1-3k=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{3}$$

㉠에 $k=\frac{1}{3}$을 대입하면

$$2x-y-1+\frac{1}{3}(x-y-3)=0$$

$$\therefore \mathbf{7x-4y-6=0}$$

다른 풀이 두 식 $2x-y-1=0$, $x-y-3=0$을 연립하여 풀면

$$x=-2,\ y=-5$$

이므로 주어진 두 직선의 교점의 좌표는 $(-2, -5)$

따라서 두 점 $(-2, -5)$, $(2, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y+5=\frac{2-(-5)}{2-(-2)}(x+2)$$

$$\therefore 7x-4y-6=0$$

KEY Point

- **두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식**
  ⇨ $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ (단, k는 실수이다.)

● 정답 및 풀이 17쪽

확인 체크

80 두 직선 $3x+2y=-1$, $2x-y+10=0$의 교점과 원점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

81 두 직선 $4x-3y+5=0$, $x+2y-7=0$의 교점을 지나고 기울기가 -6인 직선의 방정식을 구하시오.

연습 문제

STEP 1

82 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $30°$이고 점 $(3,\ -\sqrt{3})$을 지나는 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.

83 점 $(a-1,\ a+5)$가 두 점 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 8)$을 지나는 직선 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

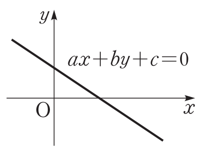
84 x절편과 y절편의 절댓값이 같고 부호가 반대인 직선이 점 $(2,\ -1)$을 지날 때, 이 직선의 y절편을 구하시오.

(단, 직선은 원점을 지나지 않는다.)

85 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(-1,\ -a)$, $\mathrm{C}(a,\ 5)$가 직선 l 위에 있을 때, 직선 l의 방정식을 구하시오. (단, $a>0$)

86 직선 $5x+6y=1$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y=mx$가 이등분할 때, 상수 m의 값을 구하시오.

87 직선 $ax+by+c=0$의 개형이 오른쪽 그림과 같을 때, 직선 $bx+cy+a=0$이 지나지 않는 사분면을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)



생각해 봅시다!

직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이다.
⇨ (기울기)$=\tan\theta$

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식
⇨ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$
(단, $a\neq0$, $b\neq0$)

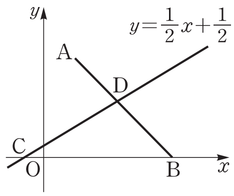
$\triangle\mathrm{ABC}$의 꼭짓점 A를 지나면서 그 넓이를 이등분하는 직선 ⇨ $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 지난다.

STEP 2

생각해 봅시다!

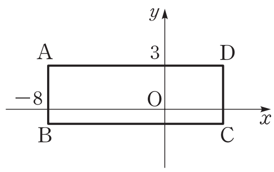
교육청 기출

88 그림과 같이 좌표평면에서 두 점 A$(2,\ 6)$, B$(8,\ 0)$에 대하여 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$의 그래프가 x축과 만나는 점을 C, 선분 AB와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 CBD의 넓이는?

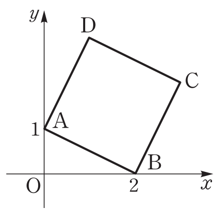


① $\frac{23}{2}$　　② 12　　③ $\frac{25}{2}$　　④ 13　　⑤ $\frac{27}{2}$

89 오른쪽 그림과 같은 직사각형 ABCD에서 점 A의 좌표는 $(-8,\ 3)$이고 직사각형의 둘레의 길이는 32이다. 직사각형의 가로의 길이가 세로의 길이의 3배일 때, 두 점 B, D를 지나는 직선의 y절편을 구하시오.



90 오른쪽 그림과 같이 두 점 A$(0,\ 1)$, B$(2,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD에서 직선 BD의 방정식을 구하시오.
(단, 두 점 C, D는 제1사분면 위에 있다.)

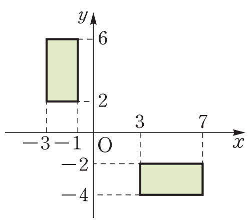


점 D에서 y축에 수선의 발을 내린 후 합동인 도형을 찾는다.

91 세 점 A$(2,\ -5)$, B$(a,\ -2)$, C$(6,\ 2a+1)$이 삼각형을 이루지 않을 때, 선분 BC의 길이를 구하시오. (단, $a>0$)

세 점이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

92 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 놓인 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 방정식을 구하시오.

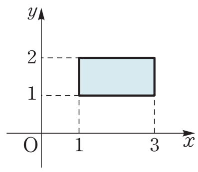


● 정답 및 풀이 20쪽

생각해 봅시다!

93 직선 $2x-y=3$ 위의 점 $(a,\ b)$에 대하여 직선 $ax+by+6=0$이 항상 지나는 점의 좌표를 구하시오.

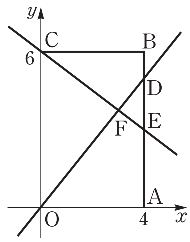
94 직선 $y=mx+2m-1$이 오른쪽 그림의 직사각형과 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위가 $\alpha \le m \le \beta$일 때, $5\alpha\beta$의 값을 구하시오.



직선 $y=mx+2m-1$이 직사각형과 만나도록 직선을 움직여 본다.

실력 UP+

95 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 O$(0,\ 0)$, A$(4,\ 0)$, B$(4,\ 6)$, C$(0,\ 6)$에 대하여 선분 BA의 양 끝 점이 아닌 서로 다른 두 점 D, E가 선분 BA 위에 있다. 직선 OD와 직선 CE가 만나는 점을 F라 하면 사각형 OAEF의 넓이는 사각형 BCFD의 넓이보다 4만큼 크고, 직선 OD와 직선 CE의 기울기의 곱은 $-\dfrac{15}{16}$이다. 이때 직선 CE의 방정식을 구하시오.



$\triangle$OAD
$=\square$OAEF$+\triangle$DFE
$=(\square$BCFD$+4)$
$+\triangle$DFE
$=\triangle$BCE$+4$

96 원점을 지나는 두 직선 m, n이 직선 $x+3y-3=0$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 삼등분할 때, 두 직선 m, n의 기울기의 합을 구하시오.

97 세 점 A$(1,\ 2)$, B$(-1,\ 1)$, C$(3,\ -1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 직선 $y=kx-2k+2$와 만나지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

좌표평면 위에 삼각형 ABC를 나타내고 조건을 만족시키도록 직선 $y=kx-2k+2$를 움직여 본다.

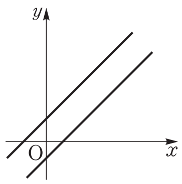
개념원리 이해

02 직선의 위치 관계

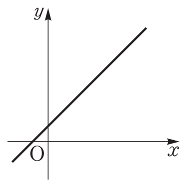
1 두 직선의 위치 관계

한 평면 위에서 두 직선 사이의 위치 관계는 다음과 같다.

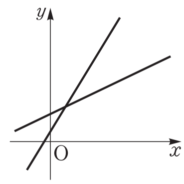
(1) **평행하다.**



(2) **일치한다.**



(3) **한 점에서 만난다.**



2 두 직선의 평행과 수직 조건

필수 10, 11

(1) **두 직선의 평행 조건**

두 직선 $y=mx+n$과 $y=m'x+n'$에서

① 두 직선이 평행하면 $m=m'$, $n\neq n'$이다.

② $m=m'$, $n\neq n'$이면 두 직선은 평행하다.

(2) **두 직선의 수직 조건**

두 직선 $y=mx+n$과 $y=m'x+n'$에서

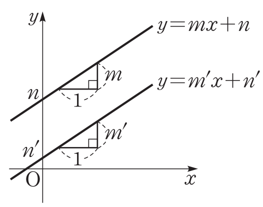
① 두 직선이 수직이면 $\boldsymbol{mm'=-1}$이다.

② $mm'=-1$이면 두 직선은 수직이다.

설명 (1) 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 평행하면 두 직선의 기울기는 같고 y절편은 다르므로

$$m=m',\ n\neq n'$$

또 $m=m'$이고 $n\neq n'$이면 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$은 평행하다.



증명 (2) 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 수직이면 이 두 직선에 각각 평행하고 원점을 지나는 두 직선 $y=mx$, $y=m'x$도 수직이다.

오른쪽 그림과 같이 수직인 두 직선 $y=mx$, $y=m'x$와 직선 $x=1$의 교점을 각각 P, Q라 하면

$$\mathrm{P}(1,\ m),\ \mathrm{Q}(1,\ m')$$

이때 삼각형 POQ는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

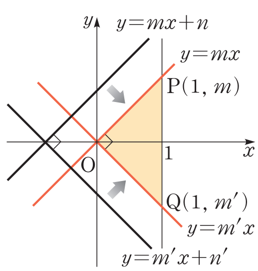
$$\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2$$

$$(1+m^2)+(1+m'^2)=(m-m')^2$$

$$\therefore\ mm'=-1$$

또 $mm'=-1$이면 $\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2$이므로 삼각형 POQ는 $\angle\mathrm{POQ}=90°$인 직각삼각형이다.

따라서 두 직선 $y=mx$, $y=m'x$가 수직이므로 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$도 수직이다.



3 표준형과 일반형으로 표현된 두 직선의 위치 관계

필수 10, 11

표준형 또는 일반형으로 표현된 두 직선의 위치 관계와 두 직선의 방정식을 연립한 연립방정식의 해의 개수는 다음과 같다.

두 직선의 위치 관계	$\begin{cases} y=mx+n \\ y=m'x+n' \end{cases}$	$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$	두 직선의 교점	연립방정식의 해
평행하다.	$m=m'$, $n\neq n'$ ⇨ 기울기가 같고 y절편이 다르다.	$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$	없다.	없다.
일치한다.	$m=m'$, $n=n'$ ⇨ 기울기와 y절편이 각각 같다.	$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$	무수히 많다.	무수히 많다.
한 점에서 만난다.	$m\neq m'$ ⇨ 기울기가 다르다.	$\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$	한 개	한 쌍
수직이다.	$mm'=-1$ ⇨ (기울기의 곱)$=-1$	$aa'+bb'=0$		

› 수직인 두 직선은 한 점에서 만나는 두 직선의 특수한 경우이다.

설명 두 직선의 방정식 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 x, y의 계수가 모두 0이 아닐 때, 각각을

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b},\ y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$$

의 꼴로 변형하면 두 직선의 기울기는 각각 $-\dfrac{a}{b}$, $-\dfrac{a'}{b'}$이고, y절편은 각각 $-\dfrac{c}{b}$, $-\dfrac{c'}{b'}$이다.

(1) 두 직선이 평행하면 $-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{a'}{b'}$, $-\dfrac{c}{b}\neq-\dfrac{c'}{b'}$에서 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

(2) 두 직선이 일치하면 $-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{a'}{b'}$, $-\dfrac{c}{b}=-\dfrac{c'}{b'}$에서 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

(3) 두 직선이 한 점에서 만나면 $-\dfrac{a}{b}\neq-\dfrac{a'}{b'}$에서 $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$

(4) 두 직선이 수직이면 $-\dfrac{a}{b}\times\left(-\dfrac{a'}{b'}\right)=-1$에서 $aa'+bb'=0$

예제 ▶ 다음 두 직선의 위치 관계를 말하시오.

(1) $x-y+2=0$, $2x-2y+4=0$

(2) $2x+y-1=0$, $x-2y+3=0$

(3) $x-3y+1=0$, $-x+3y+1=0$

풀이 (1) $\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{2}{4}$이므로 두 직선은 일치한다.

(2) $\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{1}{-2}$이므로 두 직선은 한 점에서 만난다.

(3) $\dfrac{1}{-1}=\dfrac{-3}{3}\neq\dfrac{1}{1}$이므로 두 직선은 평행한다.

알아둡시다!

98 다음 두 직선이 평행할 때, 상수 a의 값을 모두 구하시오.

(1) $y=ax+2$, $y=-3x-1$

(2) $ax+4y+1=0$, $x+ay-3=0$

두 직선이 평행
⇨ 기울기는 같고 y절편은 다르다.

99 다음 두 직선이 일치할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $y=ax+5$, $y=-x+b$

(2) $ax+3y-2=0$, $3x+by+6=0$

두 직선이 일치
⇨ 기울기와 y절편이 각각 같다.

100 다음 두 직선이 수직일 때, 상수 a의 값을 모두 구하시오.

(1) $y=ax-4$, $y=4x+1$

(2) $(a-2)x+3y-1=0$, $ax-y+3=0$

두 직선이 수직
⇨ (기울기의 곱)$=-1$

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 23쪽

필수 10 두 직선의 평행·수직 조건

두 직선 $x+ay+1=0$, $ax+(a+2)y+2=0$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 두 직선이 평행할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

(2) 두 직선이 수직일 때, 상수 a의 값을 구하시오. (단, $a\neq 0$)

풀이 (1) 두 직선이 평행하므로 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{a}{a+2}\neq\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{a}=\dfrac{a}{a+2}$에서 $a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$ ······ ㉠

$\dfrac{1}{a}\neq\dfrac{1}{2}$에서 $a\neq 2$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\mathbf{-1}$

(2) 두 직선이 수직이므로

$1\times a+a\times(a+2)=0$, $a^2+3a=0$, $a(a+3)=0$

$\therefore a=\mathbf{-3}$ ($\because a\neq 0$)

KEY Point

- **두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이**

  ① 평행하다. ⇨ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

  ② 수직이다. ⇨ $aa'+bb'=0$

● 정답 및 풀이 22쪽

확인 체크

101 두 직선 $(a+1)x+y-1=0$, $2x-(a-2)y-1=0$이 평행할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

102 직선 $ax-6y=5$가 직선 $x-2y=3$과 평행하고 직선 $2x-by+1=0$과 수직이다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

103 두 직선 $(a-2)x+y+1=0$과 $ax-3y+b=0$이 점 $(-2,\ c)$에서 수직으로 만난다. 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 24쪽

필수 11 한 직선에 평행 또는 수직인 직선의 방정식

다음 물음에 답하시오.

(1) 두 점 $(2,\ -1)$, $(4,\ 3)$을 지나는 직선에 평행하고 x절편이 4인 직선의 방정식을 구하시오.

(2) 점 $(-1,\ 2)$를 지나고 직선 $3x-2y+4=0$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

설명 평행 또는 수직 조건을 만족시키는 직선의 기울기를 구한 후 이 직선이 지나는 점의 좌표를 이용하여 직선의 방정식을 구한다.

풀이 (1) 두 점 $(2,\ -1)$, $(4,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{3-(-1)}{4-2}=2$$

따라서 기울기가 2이고 x절편이 4인 직선의 방정식은 ← x절편이 4이면 점 $(4,\ 0)$을 지난다.

$y=2(x-4)$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{y=2x-8}$

(2) $3x-2y+4=0$에서 $\quad y=\frac{3}{2}x+2$

이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$\frac{3}{2}\times m=-1$ $\quad\therefore$ $m=-\frac{2}{3}$

따라서 기울기가 $-\frac{2}{3}$이고 점 $(-1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{2}{3}(x+1)$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}}$

KEY Point

- 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이
  - ① 평행하다. ⇨ $m=m'$, $n\neq n'$
  - ② 수직이다. ⇨ $mm'=-1$

● 정답 및 풀이 22쪽

확인 체크

104 직선 $y=4x-12$에 평행하고 점 $(-2,\ 5)$를 지나는 직선이 점 $(6,\ k)$를 지날 때, k의 값을 구하시오.

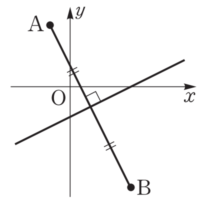
105 두 점 $(1,\ 3)$, $(5,\ -7)$을 이은 선분의 중점을 지나고 직선 $3x+5y-12=0$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 24쪽

필수 12 선분의 수직이등분선의 방정식

두 점 A$(-1,\ 3)$, B$(3,\ -5)$를 이은 선분 AB의 수직이등분선의 방정식이 $x+ay+b=0$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

설명 선분 AB의 수직이등분선은 선분 AB와 수직이고 선분 AB의 중점을 지난다. 따라서 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기와 선분 AB의 중점의 좌표를 이용하여 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 구한다.



풀이 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{3-5}{2}\right),\ \text{즉 } (1,\ -1)$$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-5-3}{3-(-1)}=-2$$

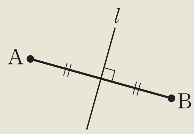
따라서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $(1,\ -1)$을 지나는 직선이므로 그 방정식은

$$y+1=\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore\ x-2y-3=0$$

즉 $a=-2$, $b=-3$이므로 $\quad ab=\mathbf{6}$

KEY Point

- 선분 AB의 수직이등분선을 l이라 하면
  ① 수직 조건 ⇨ (직선 l의 기울기)×(직선 AB의 기울기)$=-1$
  ② 이등분 조건 ⇨ 직선 l이 선분 AB의 중점을 지난다.



● 정답 및 풀이 23쪽

확인 체크

106 두 점 A$(-1,\ 2)$, B$(5,\ -4)$를 이은 선분 AB의 수직이등분선이 점 $(a,\ -2)$를 지날 때, a의 값을 구하시오.

107 두 점 A$(-5,\ -4)$, B$(a,\ 8)$을 이은 선분 AB의 수직이등분선의 방정식이 $2x+3y+b=0$일 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, b는 상수이다.)

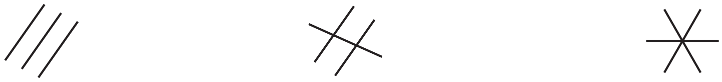
더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 25쪽

발전 13 세 직선의 위치 관계

세 직선 $x-y=0$, $x+y=2$, $5x-ky=15$가 삼각형을 이루지 않도록 하는 상수 k의 값을 모두 구하시오.

설명 서로 다른 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 세 직선이 평행할 때　　(ⅱ) 두 직선이 평행할 때　　(ⅲ) 세 직선이 한 점에서 만날 때



풀이

$x-y=0$ ...... ㉠

$x+y=2$ ...... ㉡

$5x-ky=15$ ...... ㉢

(ⅰ) 세 직선이 평행한 경우

두 직선 ㉠, ㉡의 기울기가 각각 1, -1이므로 두 직선 ㉠, ㉡은 평행하지 않다.

따라서 세 직선이 평행할 수는 없다.

(ⅱ) 두 직선이 평행한 경우

두 직선 ㉠, ㉢이 평행하려면

$\frac{1}{5}=\frac{-1}{-k}\neq\frac{0}{-15}$　　$\therefore k=5$

두 직선 ㉡, ㉢이 평행하려면

$\frac{1}{5}=\frac{1}{-k}\neq\frac{-2}{-15}$　　$\therefore k=-5$

(ⅲ) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

직선 ㉢이 두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 지나야 한다.

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　$x=1$, $y=1$

따라서 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(1, 1)$이다.

직선 ㉢이 점 $(1, 1)$을 지나려면

$5-k=15$　　$\therefore k=-10$

이상에서 상수 k의 값은 $\mathbf{-10}$, $\mathbf{-5}$, $\mathbf{5}$이다.

KEY Point

- 서로 다른 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우

① 세 직선이 평행할 때　② 두 직선이 평행할 때　③ 세 직선이 한 점에서 만날 때

정답 및 풀이 23쪽

확인 체크 108 세 직선 $2x+y+1=0$, $x-y+2=0$, $ax-y=0$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오.

연습 문제

STEP 1

생각해 봅시다!

109 직선 $x+ay+1=0$이 직선 $2x-by+1=0$과 수직이고 직선 $x-(b-3)y-1=0$과 평행하다. 이때 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

110 두 직선 $2x+ay+3=0$, $bx+2y+c=0$이 점 $(1,\ 1)$에서 수직으로 만날 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오.

두 직선은 모두 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

111 두 직선 $x-y+5=0$, $2x-y+3=0$의 교점을 지나고 직선 $3x-2y+1=0$과 평행한 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

교육청 기출

112 점 $(2,\ 5)$를 지나고 직선 $3x+2y-4=0$에 수직인 직선의 방정식이 $2x+ay+b=0$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

113 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$, $\mathrm{B}(9,\ -4)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 C라 하자. 점 C를 지나고 직선 AB에 수직인 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

114 서로 다른 세 직선 $ax+y+5=0$, $2x+by-4=0$, $x+2y+3=0$에 의하여 좌표평면이 네 부분으로 나누어질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

조건을 만족시키는 세 직선의 위치 관계를 생각한다.

STEP 2

115 점 $(2,\ 0)$을 지나는 직선과 직선 $(3k-2)x-y+5=0$이 y축에서 수직으로 만날 때, 상수 k의 값을 구하시오.

두 직선이 y축에서 만나면 두 직선의 y절편이 같다.

생각해 봅시다!

직선 밖의 한 점에서 직선에 그은 수선과 그 직선의 교점을 수선의 발이라 한다.

116 점 A(1, 4)에서 직선 $y=x-3$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H의 좌표를 구하시오.

117 두 점 A(1, -4), B에 대하여 직선 $x+3y+1=0$이 선분 AB의 수직이등분선일 때, 점 B의 좌표를 구하시오.

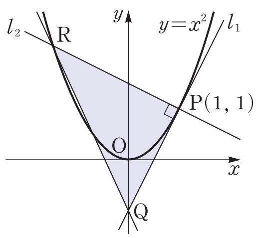
118 세 직선 $x+2y=3$, $2x-3y-12=0$, $ax+y=1$로 둘러싸인 삼각형이 직각삼각형이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오.

119 세 직선 $2x-y=4$, $3x+2y=-1$, $x-ay=0$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 상수 a의 값의 곱을 구하시오.

실력 UP

교육청 기출

120 그림과 같이 좌표평면에서 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점 P(1, 1)에서의 접선을 l_1, 점 P를 지나고 직선 l_1과 수직인 직선을 l_2라 하자. 직선 l_1이 y축과 만나는 점을 Q, 직선 l_2가 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 R라 하자. 삼각형 PRQ의 넓이를 S라 할 때, $40S$의 값을 구하시오.



이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하면 방정식 $f(x)=g(x)$가 중근을 갖는다.

121 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A(3, -1), B(8, 4), C(2, 6)에서 각각의 대변에 그은 세 수선의 교점의 좌표를 구하시오.

삼각형의 각 꼭짓점에서 대변에 그은 세 수선은 한 점에서 만난다.

개념원리 이해

03 점과 직선 사이의 거리

1 점과 직선 사이의 거리

필수 14

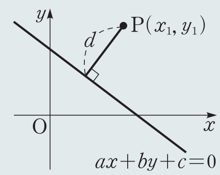
좌표평면 위의 점 P에서 점 P를 지나지 않는 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 PH의 길이를 점 P와 직선 l 사이의 거리라 한다.

점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

특히 원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



증명 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서 직선 $l: ax+by+c=0$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x_2, y_2)$라 하자.

$a\neq0$, $b\neq0$일 때, 직선 l의 기울기가 $-\frac{a}{b}$이고 직선 PH와 직선 l은 수직이므로

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times\left(-\frac{a}{b}\right)=-1 \qquad \therefore \frac{x_2-x_1}{a}=\frac{y_2-y_1}{b}$$

이때 $\frac{x_2-x_1}{a}=\frac{y_2-y_1}{b}=k$로 놓으면

$$x_2-x_1=ak,\ y_2-y_1=bk \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore \overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{k^2(a^2+b^2)}=|k|\sqrt{a^2+b^2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

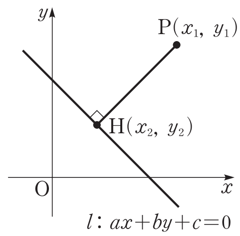
또 점 $\mathrm{H}(x_2, y_2)$가 직선 l 위의 점이므로 $ax_2+by_2+c=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠에서 $x_2=x_1+ak$, $y_2=y_1+bk$이므로 ㉢에 이것을 대입하면

$$a(x_1+ak)+b(y_1+bk)+c=0 \qquad \therefore k=-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2} \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉡에 ㉣을 대입하면 $\overline{\mathrm{PH}}=\left|-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}\right|\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

이는 $a=0$, $b\neq0$ 또는 $a\neq0$, $b=0$일 때에도 성립한다.



보기 ▶ 점 $(2, 1)$과 직선 $3x-4y+3=0$ 사이의 거리는

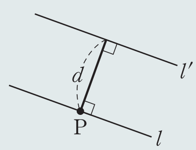
$$\frac{|3\times2-4\times1+3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{5}{5}=1$$

2 평행한 두 직선 사이의 거리

필수 15

두 직선 l, l'이 평행할 때, 직선 l 위의 임의의 점 P와 직선 l' 사이의 거리 d를 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리라 한다.

따라서 평행한 두 직선 사이의 거리는 한 직선 위의 임의의 점을 택하고 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 구한다.



› 한 직선 위의 임의의 점은 x축과의 교점, y축과의 교점 등과 같이 계산이 간단한 점을 택한다.

● 정답 및 풀이 27쪽

122 다음 점과 직선 사이의 거리를 구하시오.

(1) 점 $(-1,\ 4)$, 직선 $2x-y+1=0$

(2) 점 $(3,\ -2)$, 직선 $3x+4y-2=0$

(3) 점 $(-5,\ 3)$, 직선 $4x-3y+4=0$

(4) 점 $(2,\ -6)$, 직선 $y=3x-2$

123 원점과 다음 직선 사이의 거리를 구하시오.

(1) $2x+3y-13=0$

(2) $3x-y+10=0$

(3) $2x-4y-5=0$

(4) $y=2x-4$

124 다음 평행한 두 직선 사이의 거리를 구하시오.

(1) $2x-y+2=0$, $2x-y-3=0$

(2) $x+3y-1=0$, $x+3y+4=0$

(3) $3x-4y=0$, $3x-4y+5=0$

(4) $x-2y+1=0$, $2x-4y-3=0$

알아둡시다!

점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리
⇨ $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리
⇨ 직선 l 위의 임의의 점 P와 직선 l' 사이의 거리

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 25쪽

필수 14 점과 직선 사이의 거리

점 $(2,\ 3)$과 직선 $y=\frac{3}{4}x+\frac{k}{2}$ 사이의 거리가 2일 때, 모든 상수 k의 값의 합을 구하시오.

설명 주어진 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$의 꼴로 고친 후 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 점 $(2,\ 3)$과 직선 $y=\frac{3}{4}x+\frac{k}{2}$, 즉 $3x-4y+2k=0$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|3\times2-4\times3+2k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$$

$|2k-6|=10,\qquad 2k-6=\pm10$

$\therefore\ k=-2$ 또는 $k=8$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$-2+8=\mathbf{6}$

KEY Point

- 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리
  $\Rightarrow \dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

● 정답 및 풀이 28쪽

확인 체크

125 제1사분면 위의 점 $(1,\ a)$와 직선 $3x+y-5=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$일 때, a의 값을 구하시오.

126 점 $(-2,\ 3)$에서 두 직선 $x+2y-1=0$, $2x+y+k=0$까지의 거리가 같도록 하는 모든 상수 k의 값의 곱을 구하시오.

127 직선 $3x+4y+1=0$에 수직이고 원점으로부터의 거리가 1인 직선의 방정식을 모두 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 26쪽

필수 15 평행한 두 직선 사이의 거리

평행한 두 직선 $2x-y+5=0$, $2x-y+k=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값을 모두 구하시오.

설명 한 직선 위의 임의의 점을 택하여 그 점과 다른 직선 사이의 거리를 구한다. 이때 임의의 점은 x축과의 교점, y축과의 교점 등과 같이 계산이 간단한 점을 택한다.

풀이 두 직선 $2x-y+5=0$, $2x-y+k=0$ 사이의 거리는 직선 $2x-y+5=0$ 위의 점 $(0,\ 5)$와 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-5+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$$

$|-5+k|=10,\qquad -5+k=\pm10$

$\therefore\ k=\mathbf{-5}$ 또는 $k=\mathbf{15}$

KEY Point

- **평행한 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ 사이의 거리**
  ⇨ 직선 $ax+by+c=0$ 위의 한 점과 직선 $a'x+b'y+c'=0$ 사이의 거리를 구한다.

● 정답 및 풀이 28쪽

확인 체크

128 평행한 두 직선 $x+y-3=0$, $x+y+m=0$ 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$일 때, 양수 m의 값을 구하시오.

129 두 직선 $3x-y+12=0$, $ax+2y-4=0$이 평행할 때, 상수 a의 값과 두 직선 사이의 거리를 구하시오.

130 평행한 두 직선 $3x+4y-5=0$, $3x+ay+b=0$ 사이의 거리가 3일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. (단, $b<0$)

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 26쪽

필수 16 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이

세 점 $A(2,\ 5)$, $B(-3,\ 2)$, $C(1,\ -4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

설명 삼각형의 높이는 한 꼭짓점과 그 꼭짓점의 대변 사이의 거리와 같다.
⇨ 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 구한다.

풀이 선분 BC의 길이는

$$\sqrt{(1+3)^2+(-4-2)^2}=2\sqrt{13}$$

직선 BC의 방정식은

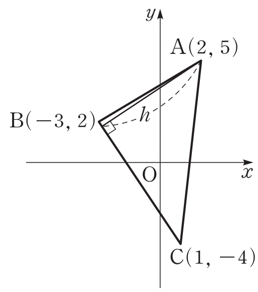
$$y-2=\frac{-4-2}{1-(-3)}(x+3) \qquad \therefore\ 3x+2y+5=0$$

점 $A(2,\ 5)$와 직선 BC 사이의 거리를 h라 하면

$$h=\frac{|3\times2+2\times5+5|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{21}{\sqrt{13}}$$

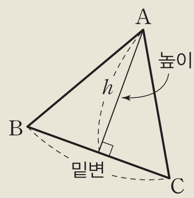
따라서 △ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times h=\frac{1}{2}\times2\sqrt{13}\times\frac{21}{\sqrt{13}}=\mathbf{21}$$



KEY Point

- 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는 다음과 같은 순서로 구한다.
  (i) $\overline{BC}$의 길이 구하기
  (ii) 직선 BC의 방정식 구하기
  (iii) 점 A와 직선 BC 사이의 거리 h 구하기
  (iv) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times h$



● 정답 및 풀이 28쪽

확인 체크

131 원점 O와 두 점 $A(2,\ 2)$, $B(-3,\ 6)$에 대하여 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오.

132 세 점 $A(1,\ 2)$, $B(3,\ -1)$, $C(a,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이가 8이 되도록 하는 a의 값을 모두 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 27쪽

발전 17 각의 이등분선의 방정식

두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$이 이루는 각의 이등분선의 방정식을 구하시오.

설명 각의 이등분선 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에서 두 직선에 이르는 거리가 같음을 이용하여 각의 이등분선의 방정식을 구한다.

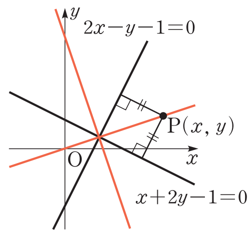
풀이 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

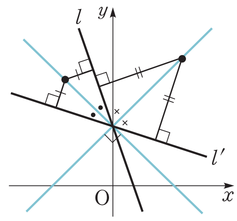
$$|2x-y-1|=|x+2y-1|$$

$$2x-y-1=\pm(x+2y-1) \quad \leftarrow |A|=|B|\text{에서 } A=\pm B$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x-3y=0}$ **또는** $\boldsymbol{3x+y-2=0}$



참고 두 직선 l, l'이 한 점에서 만날 때, 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점에서 두 직선 l, l'에 이르는 거리가 같다.
이때 두 직선이 한 점에서 만나면 두 쌍의 맞꼭지각이 생기므로 각의 이등분선도 두 개이며 서로 수직이다.



KEY Point

- 두 직선이 이루는 각의 이등분선
  ⇨ 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 도형

● 정답 및 풀이 29쪽

확인 체크

133 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$, $y=2x-5$로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하시오.

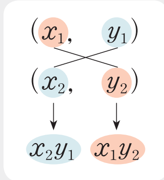
134 두 직선 $x-3y+4=0$, $3x-y-2=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 중에서 기울기가 음수인 직선의 방정식을 구하시오.

특강 한 꼭짓점이 원점인 삼각형의 넓이

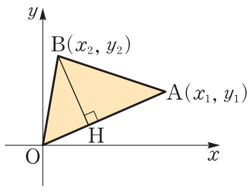
1 삼각형 OAB의 넓이

원점 O(0, 0)과 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{2}$$



증명 오른쪽 그림과 같이 세 점 O(0, 0), $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB에서



$$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

직선 OA의 방정식은

$$y=\frac{y_1}{x_1}x \qquad \therefore\ y_1x-x_1y=0$$

이때 $\overline{OA}$를 삼각형 OAB의 밑변으로 생각하면 삼각형 OAB의 높이는 점 B와 직선 OA 사이의 거리와 같다.

점 B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{BH}=\frac{|y_1x_2-x_1y_2|}{\sqrt{y_1^2+(-x_1)^2}}=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{x_1^2+y_1^2}\times\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

$$=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{2}$$

참고 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3|}{2}$$

예제 ▶ 원점 O와 두 점 A(2, 2), B(−3, 6)에 대하여 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오.

풀이 $\triangle OAB=\frac{|2\times6-2\times(-3)|}{2}=\frac{18}{2}=9$

● 정답 및 풀이 29쪽

확인 체크 **135** 원점 O와 두 점 A(−3, 5), B(1, −3)에 대하여 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오.

STEP 1

생각해 봅시다!

136 x축 위의 점 P에서 두 직선 $x+3y-2=0$, $3x-y+3=0$까지의 거리가 같을 때, 점 P의 좌표를 모두 구하시오.

점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$으로 놓는다.

137 직선 $y=3x+2$에 평행하고 이 직선과의 거리가 $\sqrt{10}$인 두 직선의 y절편의 합을 구하시오.

138 두 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(-1,\ 3)$과 직선 $3x+y-6=0$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 AOP의 넓이를 구하시오.

139 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 3)$, $\mathrm{C}(1,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC의 넓이를 구하시오.

(평행사변형의 넓이)
=(밑변의 길이)×(높이)

140 두 직선 $3x+y=0$, $x+3y+4=0$이 이루는 각 중에서 예각을 이등분하는 직선의 방정식을 구하시오.

STEP 2

141 직선 $(a+1)x-(a-3)y+a-15=0$은 실수 a의 값에 관계없이 항상 점 A를 지난다. 점 A와 직선 $2x-y+p=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$일 때, 모든 상수 p의 값의 합을 구하시오.

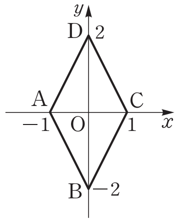
a의 값에 관계없이
⇨ a에 대한 항등식

142 실수 k에 대하여 점 $(1,\ -2)$와 직선 $x-2y-4+k(2x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$라 할 때, $f(k)$의 최댓값을 구하시오.

$f(k)=\dfrac{|a|}{g(k)}$ (a는 상수)
에서 $g(k)$가 최소일 때
$f(k)$가 최댓값을 갖는다.
(단, $g(k)>0$)

생각해 봅시다!

143 오른쪽 그림과 같은 마름모 ABCD에 대하여 점 P$(-3,\ 3)$과 마름모 ABCD 위의 점 Q 사이의 거리의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, M^2-m^2의 값을 구하시오.



144 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$의 교점을 지나고 원점으로부터의 거리가 1인 직선의 방정식을 모두 구하시오.

145 세 직선 $2x-y-1=0$, $x-2y+1=0$, $x+y-5=0$으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.

먼저 두 직선씩 짝을 지어 교점의 좌표를 구한다.

실력 UP+

교육청 기출

146 좌표평면 위의 세 점 A$(6,\ 0)$, B$(0,\ -3)$, C$(10,\ -8)$에 대하여 삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 P라 할 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① $2\sqrt{7}$　② $\sqrt{30}$　③ $4\sqrt{2}$　④ $\sqrt{34}$　⑤ 6

147 이차함수 $y=x^2+3$의 그래프 위의 점과 직선 $y=-2x+k$ 사이의 거리의 최솟값이 $\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

주어진 직선과 평행하고 이차함수의 그래프에 접하는 직선을 생각한다.

148 세 점 A$(1,\ 4)$, B$(0,\ -1)$, C$(2,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 직선 $y=a$가 이등분할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

I 도형의 방정식

이 단원에서는

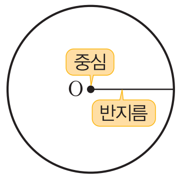
주어진 조건을 만족시키는 원의 방정식을 구하는 방법을 학습합니다. 또 원과 직선의 위치 관계를 학습하고, 특히 접선의 방정식을 구하는 방법을 배웁니다.

개념원리 이해

01 원의 방정식

1 원

평면 위의 한 점 O에서 일정한 거리에 있는 모든 점으로 이루어진 도형을 **원**이라 한다.
이때 점 O는 **원의 중심**이고, 중심에서 원 위의 한 점을 이은 선분은 **원의 반지름**이다.



2 원의 방정식 필수 01~03

중심이 점 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

특히 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$

› $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 꼴을 **원의 방정식의 표준형**이라 한다.

설명 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면
$\overline{\mathrm{CP}}=r$이므로

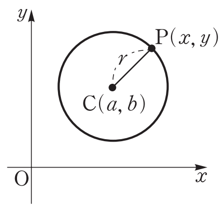
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

양변을 제곱하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

거꾸로 방정식 ㉠을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 $\overline{\mathrm{CP}}=r$이므로 점 P는 중심이 C이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 점이다.
특히 원점 $(0,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 ㉠에서 $a=0,\ b=0$인 경우이므로

$$x^2+y^2=r^2$$



보기 ▶ 중심이 점 $(3,\ -2)$이고 반지름의 길이가 5인 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y+2)^2=25$$

3 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형 필수 04, 05

$x,\ y$에 대한 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0\ (A^2+B^2-4C>0)$은

중심이 점 $\left(-\dfrac{A}{2},\ -\dfrac{B}{2}\right)$, 반지름의 길이가 $\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$

인 원을 나타낸다.

› ① $x^2+y^2+Ax+By+C=0$의 꼴을 **원의 방정식의 일반형**이라 한다.
② 원의 방정식은 x^2의 계수와 y^2의 계수가 같고 xy항이 없는 $x,\ y$에 대한 이차방정식이다.

설명 원의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 전개하여 정리하면

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

이때 $-2a=A$, $-2b=B$, $a^2+b^2-r^2=C$라 하면

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

과 같이 나타낼 수 있다.
또 ㉠을 변형하면

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

이때 $A^2+B^2-4C>0$이면 ㉠이 나타내는 도형은 중심이 점 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$ 인 원이다.

참고 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에서

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $A^2+B^2-4C=0$이면 $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=0$이므로 방정식 ㉠은 점 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$를 나타낸다.

(ii) $A^2+B^2-4C<0$이면 방정식 ㉠을 만족시키는 실수 x, y는 존재하지 않는다.

보기 ▶ 방정식 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$을 변형하면

$$(x-1)^2+(y+2)^2=4$$

따라서 주어진 방정식은 중심이 점 $(1, -2)$이고 반지름의 길이가 2인 원을 나타낸다.

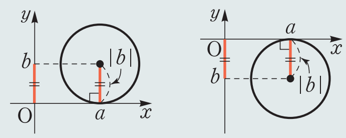
4 좌표축에 접하는 원의 방정식

필수 07, 08

(1) **중심이 점 (a, b)이고 x축에 접하는 원**

⇨ (반지름의 길이) $=|$(중심의 y좌표)$|=|b|$

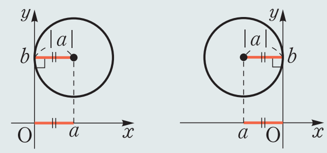
⇨ 원의 방정식: $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$



(2) **중심이 점 (a, b)이고 y축에 접하는 원**

⇨ (반지름의 길이) $=|$(중심의 x좌표)$|=|a|$

⇨ 원의 방정식: $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$



(3) **반지름의 길이가 r $(r>0)$이고 x축, y축에 동시에 접하는 원**

⇨ (반지름의 길이) $=|$(중심의 x좌표)$|=|$(중심의 y좌표)$|$

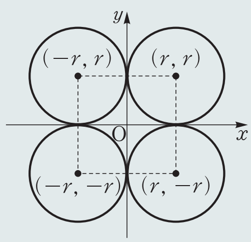
⇨ 원의 방정식

① 제1사분면: $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

② 제2사분면: $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

③ 제3사분면: $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

④ 제4사분면: $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$



정답 및 풀이 34쪽

149 다음 방정식이 나타내는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하시오.

(1) $x^2+y^2=11$

(2) $(x-5)^2+y^2=9$

(3) $(x+2)^2+(y-3)^2=25$

150 다음 원의 방정식을 구하시오.

(1) 중심이 원점이고 반지름의 길이가 3인 원

(2) 중심이 점 $(2,\ -3)$이고 반지름의 길이가 4인 원

(3) 중심이 점 $(-5,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원

151 다음 방정식이 나타내는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하시오.

(1) $x^2+y^2-8x=0$

(2) $x^2+y^2+2x-4y-20=0$

(3) $x^2+y^2-6x+4y+12=0$

152 다음 원의 방정식을 구하시오.

(1) 중심이 점 $(-1,\ 3)$이고 x축에 접하는 원

(2) 중심이 점 $(3,\ 1)$이고 y축에 접하는 원

(3) 중심이 점 $(2,\ -2)$이고 x축, y축에 동시에 접하는 원

알아 둡시다!

중심이 점 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$은 중심이 점 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$, 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$인 원을 나타낸다.
(단, $A^2+B^2-4C>0$)

① x축에 접하는 원의 방정식
⇨ $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
② y축에 접하는 원의 방정식
⇨ $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$
③ x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식
⇨ $(x\pm r)^2+(y\pm r)^2=r^2$

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 34쪽

필수 01 중심과 한 점이 주어진 원의 방정식

중심이 점 $(-4, 3)$이고 점 $(1, 6)$을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

풀이 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$(x+4)^2+(y-3)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 원이 점 $(1, 6)$을 지나므로

$$(1+4)^2+(6-3)^2=r^2 \qquad \therefore r^2=34$$

㉠에 $r^2=34$를 대입하면

$$\boldsymbol{(x+4)^2+(y-3)^2=34}$$

다른 풀이 원의 반지름의 길이는 두 점 $(-4, 3)$, $(1, 6)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(1+4)^2+(6-3)^2}=\sqrt{34}$$

따라서 구하는 원의 방정식은 $\quad (x+4)^2+(y-3)^2=34$

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 34쪽

필수 02 지름의 양 끝 점이 주어진 원의 방정식

두 점 $A(0, 3)$, $B(4, 1)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

풀이 원의 중심은 $\overline{AB}$의 중점이므로 그 좌표는

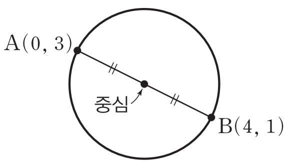
$$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right), \text{ 즉 } (2, 2)$$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(4-0)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-2)^2=5}$$



KEY Point

• 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원 ⇨ $\begin{cases} \text{중심: } \overline{AB}\text{의 중점} \\ \text{반지름의 길이: } \dfrac{1}{2}\overline{AB} \end{cases}$

● 정답 및 풀이 34쪽

확인 체크

153 중심이 점 $(1, -2)$이고 점 $(4, 2)$를 지나는 원이 점 $(a, 1)$을 지날 때, 양수 a의 값을 구하시오.

154 두 점 $A(5, 1)$, $B(-1, 7)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 34쪽

필수 03 중심을 지나는 직선이 주어진 원의 방정식

중심이 직선 $y=3x-5$ 위에 있고 두 점 $(1,\ 2)$, $(5,\ -2)$를 지나는 원의 방정식을 구하시오.

풀이 원의 중심이 직선 $y=3x-5$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 3a-5)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-3a+5)^2=r^2$$

이 원이 두 점 $(1,\ 2)$, $(5,\ -2)$를 지나므로

$$(1-a)^2+(2-3a+5)^2=r^2,\ (5-a)^2+(-2-3a+5)^2=r^2$$

$$\therefore\ 10a^2-44a+50=r^2,\ 10a^2-28a+34=r^2$$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ r^2=16$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2=16}$$

다른 풀이 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 3a-5)$라 하면 이 점에서 두 점 $(1,\ 2)$, $(5,\ -2)$까지의 거리가 같으므로

$$\sqrt{(a-1)^2+(3a-5-2)^2}=\sqrt{(a-5)^2+(3a-5+2)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$10a^2-44a+50=10a^2-28a+34$$

$$-16a=-16 \qquad \therefore\ a=1$$

즉 원의 중심의 좌표는 $(1,\ -2)$이고, 반지름의 길이는 두 점 $(1,\ -2)$, $(1,\ 2)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(1-1)^2+(2+2)^2}=4$$

따라서 구하는 원의 방정식은 $\quad (x-1)^2+(y+2)^2=16$

KEY Point

- 원의 중심이 직선 $y=f(x)$ 위에 있다.
  ⇨ 중심의 좌표를 $(a,\ f(a))$, 반지름의 길이를 r로 놓고 원의 방정식을 세운다.

● 정답 및 풀이 34쪽

확인 체크

155 중심이 x축 위에 있고 두 점 $(4,\ -3)$, $(2,\ 3)$을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

156 중심이 직선 $y=x+5$ 위에 있고 원점과 점 $(1,\ 2)$를 지나는 원의 방정식을 구하시오.

• 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 35쪽

필수 04 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형

원 $x^2+y^2-2x+8y+a=0$의 중심의 좌표가 $(1, b)$이고 반지름의 길이가 3일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

풀이 $x^2+y^2-2x+8y+a=0$에서 $(x-1)^2+(y+4)^2=17-a$
이 원의 중심의 좌표는 $(1, -4)$이므로 $b=-4$
원의 반지름의 길이는 $\sqrt{17-a}$이므로 $\sqrt{17-a}=3$
양변을 제곱하면 $17-a=9$ $\therefore a=8$
$\therefore a+b=8+(-4)=\mathbf{4}$

• 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 35쪽

필수 05 원이 되기 위한 조건

방정식 $x^2+y^2-2x+4y+k+1=0$이 나타내는 도형이 원이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

풀이 $x^2+y^2-2x+4y+k+1=0$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=4-k$
이 방정식이 원을 나타내려면
$4-k>0$ $\therefore \boldsymbol{k<4}$

KEY Point

- **원의 방정식이 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$의 꼴로 주어진 경우**
  ⇨ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 꼴로 변형한다.
- **방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형이 원이다.**
  ⇨ $(x-a)^2+(y-b)^2=c$의 꼴로 변형하였을 때 $c>0$이다.

• 정답 및 풀이 35쪽

확인 체크

157 원 $x^2+y^2+2x-4y-15+k=0$의 반지름의 길이가 5일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

158 원 $x^2+y^2-6x+ay+9=0$의 중심의 좌표가 $(b, -3)$이고 반지름의 길이가 r일 때, $a+b+r$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

159 방정식 $x^2+y^2-2(a+1)x+2ay+3a^2-2=0$이 나타내는 도형이 원이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 35쪽

필수 06 세 점을 지나는 원의 방정식

세 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$, $(-2,\ 6)$을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

풀이 주어진 세 점을 $O(0,\ 0)$, $A(2,\ 2)$, $B(-2,\ 6)$이라 하고, 세 점 O, A, B를 지나는 원의 중심을 $P(a,\ b)$라 하면

$$\overline{OP}=\overline{AP}=\overline{BP}$$

$\overline{OP}=\overline{AP}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{AP}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-2)^2+(b-2)^2$, $\quad 4a+4b-8=0$

$\therefore\ a+b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{OP}=\overline{BP}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$a^2+b^2=(a+2)^2+(b-6)^2$, $\quad 4a-12b+40=0$

$\therefore\ a-3b=-10 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=3$

즉 원의 중심은 점 $P(-1,\ 3)$이고 반지름의 길이는

$$\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$$

따라서 구하는 원의 방정식은 $\quad \boldsymbol{(x+1)^2+(y-3)^2=10}$

다른 풀이 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하면 이 원이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$C=0$

즉 원 $x^2+y^2+Ax+By=0$이 두 점 $(2,\ 2)$, $(-2,\ 6)$을 지나므로

$4+4+2A+2B=0$, $4+36-2A+6B=0$

$\therefore\ A+B=-4$, $A-3B=20$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad A=2,\ B=-6$

따라서 구하는 원의 방정식은 $\quad x^2+y^2+2x-6y=0$

KEY Point

- 세 점을 지나는 원의 방정식 구하기
  - 방법1 원의 중심과 주어진 세 점 사이의 거리가 모두 같음을 이용한다.
  - 방법2 세 점의 좌표를 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에 대입한다.

● 정답 및 풀이 35쪽

확인 체크

160 원점과 두 점 $(-1,\ 2)$, $(3,\ -1)$을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

161 세 점 $A(-3,\ 4)$, $B(1,\ 0)$, $C(3,\ 4)$를 지나는 원의 넓이를 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 36쪽

필수 07 x축 또는 y축에 접하는 원의 방정식

다음 원의 방정식을 구하시오.

(1) 원 $x^2+y^2-10x+4y+20=0$과 중심이 같고 x축에 접하는 원
(2) 두 점 $(1,\ 0)$, $(2,\ -1)$을 지나고 y축에 접하는 원

풀이 (1) $x^2+y^2-10x+4y+20=0$에서 $(x-5)^2+(y+2)^2=9$

중심의 좌표가 $(5,\ -2)$이고 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|-2|=2$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-5)^2+(y+2)^2=4$$

(2) 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 반지름의 길이는 $|a|$이므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

이 원이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 $(1-a)^2+(-b)^2=a^2$

$b^2-2a+1=0 \qquad \therefore a=\dfrac{b^2+1}{2}$ ······ ㉠

또 점 $(2,\ -1)$을 지나므로 $(2-a)^2+(-1-b)^2=a^2$

$\therefore b^2+2b-4a+5=0$ ······ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하여 정리하면

$b^2-2b-3=0,\quad (b+1)(b-3)=0$

$\therefore b=-1$ 또는 $b=3$

㉠에 $b=-1$을 대입하면 $a=1$

㉠에 $b=3$을 대입하면 $a=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y+1)^2=1,\ (x-5)^2+(y-3)^2=25$$

KEY Point

- 중심이 점 $(a,\ b)$이고 x축에 접하는 원 ⇨ (반지름의 길이)$=|$(중심의 y좌표)$|=|b|$
  ⇨ $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
- 중심이 점 $(a,\ b)$이고 y축에 접하는 원 ⇨ (반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|a|$
  ⇨ $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

● 정답 및 풀이 36쪽

확인 체크

162 원 $x^2+y^2-8x+10y+k=0$이 x축에 접할 때, 상수 k의 값을 구하시오.

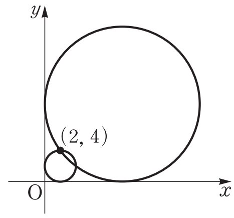
163 중심이 직선 $y=x+2$ 위에 있고 y축에 접하는 원 중에서 점 $(4,\ 4)$를 지나는 원은 두 개 존재한다. 이 두 원의 반지름의 길이의 합을 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 36쪽

필수 08 x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식

점 $(2,\ 4)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 모두 구하시오.

풀이 점 $(2,\ 4)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원은 오른쪽 그림과 같이 원의 중심이 제1사분면 위에 있다.



따라서 원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이므로 원의 방정식은

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$$

이 원이 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$$(2-r)^2+(4-r)^2=r^2, \qquad r^2-12r+20=0$$

$$(r-2)(r-10)=0 \qquad \therefore\ r=2 \text{ 또는 } r=10$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-2)^2=4,\ (x-10)^2+(y-10)^2=100}$$

KEY Point

- **x축, y축에 동시에 접하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식**
  - ⇨ ① 제1사분면: $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$
  - ② 제2사분면: $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$
  - ③ 제3사분면: $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$
  - ④ 제4사분면: $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

● 정답 및 풀이 36쪽

확인 체크

164 점 $(-2,\ 1)$을 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원은 두 개가 있다. 이 두 원의 중심 사이의 거리를 구하시오.

165 원 $x^2+y^2+2ax+6y+7-b=0$이 x축과 y축에 동시에 접할 때, 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

166 중심이 직선 $x+3y+6=0$ 위에 있고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하시오. (단, 원의 중심은 제4사분면 위에 있다.)

필수 09 원 밖의 점과 원 위의 점 사이의 거리

점 P(6, 2)와 원 $x^2+y^2+4x-8y+10=0$ 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하시오.

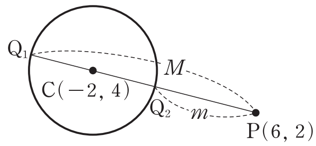
설명 원의 방정식을 표준형으로 변형한 후 점 P와 원의 중심 사이의 거리, 원의 반지름의 길이를 이용하여 M, m의 값을 구한다.

풀이 $x^2+y^2+4x-8y+10=0$에서

$$(x+2)^2+(y-4)^2=10$$

따라서 원의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는 $(-2, 4)$, 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

오른쪽 그림과 같이 직선 CP와 원이 만나는 두 점을 각각 Q_1, Q_2라 하면



$$M=\overline{PQ_1},\ m=\overline{PQ_2}$$

이때 $\overline{CP}=\sqrt{(6+2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{17}$이므로

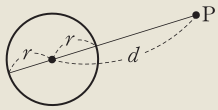
$$M=\overline{PQ_1}=\overline{PC}+\overline{CQ_1}=2\sqrt{17}+\sqrt{10},$$

$$m=\overline{PQ_2}=\overline{PC}-\overline{CQ_2}=2\sqrt{17}-\sqrt{10}$$

$$\therefore\ Mm=(2\sqrt{17}+\sqrt{10})(2\sqrt{17}-\sqrt{10})=\mathbf{58}$$

KEY Point

- 원 밖의 점 P와 원의 중심 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때, 원 위의 점 Q에 대하여
  ① $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값 ⇨ $d+r$
  ② $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값 ⇨ $d-r$



● 정답 및 풀이 37쪽

확인 체크

167 원점 O와 원 $x^2+y^2-2x-10y+10=0$ 위의 점 A에 대하여 $\overline{OA}$의 길이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M^2+m^2의 값을 구하시오.

168 원 $(x+5)^2+(y-4)^2=r^2$ 밖의 점 P$(-1, 1)$과 이 원 위의 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값이 3일 때, 양수 r의 값을 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 43쪽

발전 10 점이 나타내는 도형의 방정식

두 점 $A(-1,\ -1)$, $B(2,\ 2)$에 대하여 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$인 점 P가 나타내는 도형의 넓이를 구하시오.

설명 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 방정식
⇨ 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$에서

$\overline{AP} = 2\overline{BP}$ $\quad\therefore\ \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$에서

$$(x+1)^2+(y+1)^2=4\{(x-2)^2+(y-2)^2\}$$
$$x^2+y^2-6x-6y+10=0$$
$$\therefore\ (x-3)^2+(y-3)^2=8$$

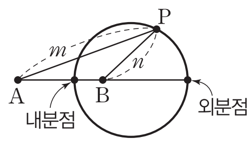
따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(3,\ 3)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi\times(2\sqrt{2})^2=8\pi$$

참고 평면 위의 두 점 A, B에 대하여

$\overline{AP} : \overline{BP} = m : n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$

인 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점과 $m : n$으로 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.
이 원을 **아폴로니오스(Apollonios)의 원**이라 한다.



● 정답 및 풀이 37쪽

확인 체크

169 두 점 $A(0,\ -1)$, $B(2,\ 3)$에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=30$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 넓이를 구하시오.

170 두 점 $A(2,\ 0)$, $B(10,\ 0)$에 대하여 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 3$인 점 P가 나타내는 도형의 길이를 구하시오.

171 두 점 $A(-2,\ 0)$, $B(3,\ 0)$으로부터의 거리의 비가 $3 : 2$인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값을 구하시오.

STEP 1

생각해 봅시다!

172 중심이 점 $(a,\ 1)$이고 반지름의 길이가 5인 원이 점 $(0,\ -2)$를 지날 때, 양수 a의 값을 구하시오.

173 두 점 $A(5,\ 1)$, $B(a,\ -3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$일 때, 이 원의 방정식을 구하시오. (단, $a<5$)

174 두 원 $(x-1)^2+y^2=4$, $x^2+y^2-6x-8y+10=0$의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 y절편을 구하시오.

원의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심을 지난다.

175 방정식 $x^2+y^2+4x-2y+2k-7=0$이 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$ 이하인 원을 나타내도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

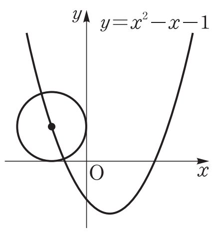
주어진 방정식을
$(x-a)^2+(y-b)^2=c$
의 꼴로 변형한다.

교육청 기출

176 좌표평면 위의 세 점 $(0,\ 0)$, $(6,\ 0)$, $(-4,\ 4)$를 지나는 원의 중심의 좌표를 $(p,\ q)$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

교육청 기출

177 곡선 $y=x^2-x-1$ 위의 점 중 제2사분면에 있는 점을 중심으로 하고, x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식은 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이다. $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)



x축과 y축에 동시에 접하는 원
⇨ (반지름의 길이)
$=|$(중심의 x좌표)$|$
$=|$(중심의 y좌표)$|$

● 정답 및 풀이 39쪽

STEP 2

생각해 봅시다!

178 두 점 $(-2,\ 3)$, $(4,\ -5)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이 x축과 만나는 두 점 사이의 거리를 구하시오.

주어진 원과 x축의 교점의 좌표를 구한다.

179 원 $x^2+y^2-4kx+2ky+10k-15=0$의 넓이가 최소가 될 때, 이 원의 중심의 좌표를 구하시오. (단, k는 상수이다.)

원의 넓이가 최소이다.
⇨ 원의 반지름의 길이가 최소이다.

180 세 직선 $5x+2y+8=0$, $7x-3y-12=0$, $3x+7y-30=0$으로 만들어지는 삼각형의 외접원의 방정식을 구하시오.

세 직선의 교점을 지나는 원의 방정식을 구한다.

181 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P와 원 $x^2+y^2+6x+6y+10=0$ 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이의 최댓값을 구하시오.

실력 UP+

182 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(6,\ 4)$, $\mathrm{B}(-1,\ 5)$에 대하여 삼각형 PAB가 직각삼각형이 되도록 하는 원 위의 점 P는 두 개가 있다. 이 두 점을 이은 선분의 중점의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

원 위의 세 점 A, B, P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}$가 원의 지름이면 $\angle\mathrm{ABP}=90°$이다.

183 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$와 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 AP의 중점이 나타내는 도형의 넓이를 구하시오.

개념원리 이해

02 원과 직선의 위치 관계

1 원과 직선의 위치 관계

필수 11

원과 직선의 위치 관계는

서로 다른 두 점에서 만나는 경우, 한 점에서 만나는 경우, 만나지 않는 경우

의 세 가지가 있다. 이때 다음과 같이 두 가지 방법으로 원과 직선의 위치 관계를 판별할 수 있다.

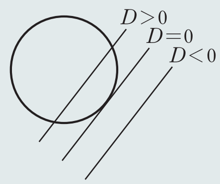
방법 1 판별식 이용

원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 하면

(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ **서로 다른 두 점에서 만난다.**

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ **한 점에서 만난다. (접한다.)**

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ **만나지 않는다.**



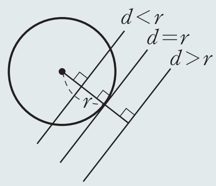
방법 2 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

원의 반지름의 길이를 r, 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라 하면

(1) $d<r \Longleftrightarrow$ **서로 다른 두 점에서 만난다.**

(2) $d=r \Longleftrightarrow$ **한 점에서 만난다. (접한다.)**

(3) $d>r \Longleftrightarrow$ **만나지 않는다.**



예제 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=x+1$의 위치 관계를 말하시오.

풀이 **방법 1** 판별식 이용

$x^2+y^2=4$에 $y=x+1$을 대입하면

$$x^2+(x+1)^2=4 \qquad \therefore\ 2x^2+2x-3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-2\times(-3)=7>0$$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

방법 2 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x+1$, 즉 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

원의 반지름의 길이가 2이고 $\frac{\sqrt{2}}{2}<2$이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

● 정답 및 풀이 41쪽

184 다음은 판별식을 이용하여 원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=x+1$의 교점의 개수를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

> $x^2+y^2=8$에 $y=x+1$을 대입하면
>
> $x^2+(\square)^2=8 \quad \therefore \square=0$
>
> 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
>
> $\frac{D}{4}=1^2-2\times(-7)=15>0$
>
> 따라서 원과 직선의 교점의 개수는 □이다.

185 판별식을 이용하여 다음 원과 직선의 위치 관계를 말하시오.

(1) $x^2+y^2+3x=0,\ y=x-1$

(2) $x^2+y^2-2x+4y-3=0,\ x+y=3$

186 다음은 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 원 $x^2+y^2=5$와 직선 $x-2y+5=0$의 교점의 개수를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

> 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x-2y+5=0$ 사이의 거리를 d라 하면
>
> $d=\frac{|\square|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\square$
>
> 이때 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\square$이므로
>
> $d\ \square\ r$
>
> 따라서 원과 직선의 교점의 개수는 □이다.

187 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 다음 원과 직선의 위치 관계를 말하시오.

(1) $x^2+y^2=7,\ 3x+y-10=0$

(2) $(x+1)^2+(y-2)^2=8,\ 2x+y+5=0$

알아 둡시다!

원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 하면

① $D>0$
$\Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$
$\Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다.

③ $D<0$
$\Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.

원의 반지름의 길이를 r, 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라 하면

① $d<r$
$\Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $d=r$
$\Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다.

③ $d>r$
$\Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 37, 38쪽

필수 11 원과 직선의 위치 관계

원 $x^2+y^2=2$와 직선 $y=x+k$의 위치 관계가 다음과 같도록 하는 실수 k의 값 또는 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 접한다. (3) 만나지 않는다.

풀이 $x^2+y^2=2$에 $y=x+k$를 대입하면

$$x^2+(x+k)^2=2 \qquad \therefore\ 2x^2+2kx+k^2-2=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-2)=-k^2+4$$

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $D>0$에서

$$-k^2+4>0, \qquad (k+2)(k-2)<0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{-2<k<2}$$

(2) 원과 직선이 접하려면 ㉠이 중근을 가져야 하므로 $D=0$에서

$$-k^2+4=0, \qquad k^2=4 \qquad \therefore\ \boldsymbol{k=\pm 2}$$

(3) 원과 직선이 만나지 않으려면 ㉠이 허근을 가져야 하므로 $D<0$에서

$$-k^2+4<0, \qquad (k+2)(k-2)>0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{k<-2} \text{ **또는** } \boldsymbol{k>2}$$

다른 풀이 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이때 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\sqrt{2}$이다.

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이어야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}, \qquad |k|<2 \qquad \therefore\ -2<k<2$$

(2) 원과 직선이 접하려면 $d=r$이어야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}, \qquad |k|=2 \qquad \therefore\ k=\pm 2$$

(3) 원과 직선이 만나지 않으려면 $d>r$이어야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}, \qquad |k|>2 \qquad \therefore\ k<-2 \text{ 또는 } k>2$$

KEY Point

• **원과 직선의 위치 관계 ⇨ 판별식 또는 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용**

● 정답 및 풀이 41쪽

확인 체크

188 원 $x^2+y^2=5$와 직선 $y=2x+k$의 위치 관계가 다음과 같도록 하는 실수 k의 값 또는 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 접한다. (3) 만나지 않는다.

189 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식을 모두 구하시오.

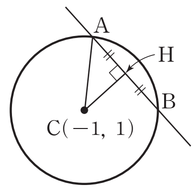
● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 39쪽

필수 12 현의 길이

원 $(x+1)^2+(y-1)^2=8$과 직선 $2x+y-4=0$이 만나서 생기는 현의 길이를 구하시오.

설명 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 수직이등분함을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B, 원의 중심을 C$(-1,\ 1)$이라 하고 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{CH}}$의 길이는 점 C$(-1,\ 1)$과 직선 $2x+y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{|-2+1-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

또 $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{2}$이므로 직각삼각형 ACH에서

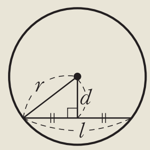
$$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{3}$$

따라서 구하는 현의 길이는

$$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=\mathbf{2\sqrt{3}}$$

KEY Point

- **반지름의 길이가 r인 원의 중심에서 d만큼 떨어진 현의 길이를 l이라 하면**
  $$\boldsymbol{l=2\sqrt{r^2-d^2}}$$



● 정답 및 풀이 42쪽

확인 체크

190 원 $x^2+y^2-6x-8y+21=0$과 직선 $y=x+3$의 두 교점을 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

191 직선 $y=-2x+k$와 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$가 만나서 생기는 현의 길이가 4일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 39쪽

필수 13 접선의 길이

점 P$(3,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2+4x+2y+1=0$에 그은 접선의 접점을 T라 할 때, $\overline{\mathrm{PT}}$의 길이를 구하시오.

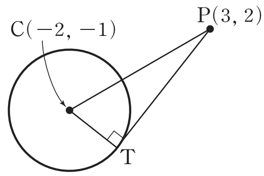
풀이 $x^2+y^2+4x+2y+1=0$에서 $\quad (x+2)^2+(y+1)^2=4$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(-2,\ -1)$이라 하면

$$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(3+2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{34}$$

또 $\overline{\mathrm{CT}}=2$이므로 직각삼각형 CTP에서

$$\overline{\mathrm{PT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CT}}^2}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-2^2}=\boldsymbol{\sqrt{30}}$$



● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 40쪽

필수 14 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최대·최소

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점과 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

풀이 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$에서 $\quad (x-1)^2+(y+2)^2=8$

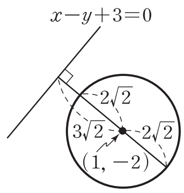
원의 중심 $(1,\ -2)$와 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의

최댓값은 $\quad 3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=\boldsymbol{5\sqrt{2}}$

최솟값은 $\quad 3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$



KEY Point

- 접선의 길이 ⇨ 원의 중심과 접점을 이은 반지름이 접선과 수직임을 이용한다.
- 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r $(d>r)$라 할 때, 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 $d+r$, 최솟값은 $d-r$이다.

● 정답 및 풀이 42쪽

확인 체크

192 점 A$(-2,\ a)$에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}=5$를 만족시키는 양수 a의 값을 구하시오.

193 원 $x^2+y^2+6x-8y+9=0$ 위의 점과 직선 $3x-4y-10=0$ 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

특강 공통접선의 길이

1 공통접선의 길이

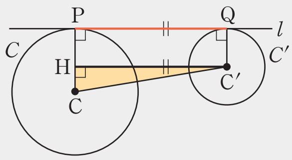
한 직선이 두 원에 동시에 접할 때, 이 직선을 두 원의 **공통접선**이라 하고 직선과 원의 두 접점 사이의 거리를 **공통접선의 길이**라 한다.

직선 l이 두 원 C, C'에 동시에 접할 때, 두 접점을 P, Q라 하자. 이때 공통접선의 길이는 다음과 같이 구한다.

(1) **공통접선에 대하여 두 원이 같은 쪽에 있는 경우**

오른쪽 그림과 같이 점 C′에서 $\overline{\mathrm{CP}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 공통접선의 길이는

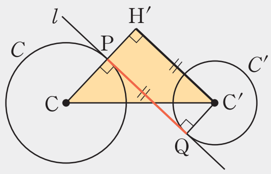
$$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{C'H}}=\sqrt{\underbrace{\overline{\mathrm{CC'}}^2}_{\text{중심 사이의 거리}}-\underbrace{\overline{\mathrm{CH}}^2}_{\text{반지름의 길이의 차}}}$$



(2) **공통접선에 대하여 두 원이 다른 쪽에 있는 경우**

오른쪽 그림과 같이 점 C′에서 $\overline{\mathrm{CP}}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 공통접선의 길이는

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{C'H'}}=\sqrt{\underbrace{\overline{\mathrm{CC'}}^2}_{\text{중심 사이의 거리}}-\underbrace{\overline{\mathrm{CH'}}^2}_{\text{반지름의 길이의 합}}}$$



예제 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-3)^2+(y+2)^2=1$의 공통접선의 길이를 구하시오.

풀이 원 $x^2+y^2=4$의 중심을 O라 하면 O$(0,\ 0)$이고 반지름의 길이는 2이다.

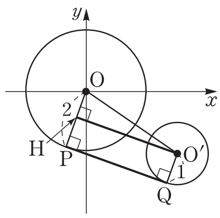
또 원 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$의 중심을 O′이라 하면 O′$(3,\ -2)$이고 반지름의 길이는 1이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{OO'}}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

(i) 공통접선에 대하여 두 원이 같은 쪽에 있는 경우

오른쪽 그림과 같이 공통접선의 두 접점을 각각 P, Q라 하고 점 O′에서 $\overline{\mathrm{OP}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 공통접선의 길이는

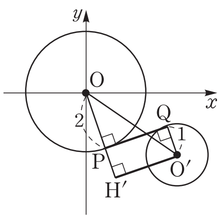
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{O'H}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{13})^2-(2-1)^2}\\&=2\sqrt{3}\end{aligned}$$



(ii) 공통접선에 대하여 두 원이 다른 쪽에 있는 경우

오른쪽 그림과 같이 공통접선의 두 접점을 각각 P, Q라 하고 점 O′에서 $\overline{\mathrm{OP}}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 공통접선의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{O'H'}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{OH'}}^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{13})^2-(2+1)^2}\\&=2\end{aligned}$$



정답 및 풀이 43쪽

STEP 1

194 원 $x^2+y^2-4x-6y+12=0$과 직선 $kx+y-2=0$이 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

195 중심이 점 $(-1, 3)$이고 직선 $2x-y+k=0$에 접하는 원의 넓이가 20π일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

196 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=10$과 직선 $3x+4y-8=0$의 두 교점을 지나는 원 중에서 그 넓이가 최소인 원의 넓이를 구하시오.

197 점 $P(2, 1)$에서 중심이 점 $(4, 5)$인 원에 그은 접선의 길이가 3일 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하시오.

198 원 $x^2+y^2-4x+8y+16=0$ 위의 점 P와 직선 $4x+3y-16=0$ 사이의 거리가 정수가 되도록 하는 점 P의 개수를 구하시오.

STEP 2

199 직선 $y=ax+b$가 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-2)^2=4$에 동시에 접할 때, 실수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

교육청 기출

200 직선 $y=x$ 위의 점을 중심으로 하고, x축과 y축에 동시에 접하는 원 중에서 직선 $3x-4y+12=0$과 접하는 원의 개수는 2이다. 두 원의 중심을 각각 A, B라 할 때, $\overline{AB}^2$의 값을 구하시오.

생각해 봅시다!

원과 직선이 만난다.
⇨ 원과 직선이 접하거나 서로 다른 두 점에서 만난다.

두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원
⇨ $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원

원의 중심의 좌표를 (k, k)라 하면 반지름의 길이는 $|k|$이다.

연습 문제

생각해 봅시다!

원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선과 수직이다.

201 원 $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ 위의 점 $(4,\ -1)$에서의 접선이 점 $(-1,\ k)$를 지날 때, k의 값을 구하시오.

202 원 $x^2+y^2+4y+k=0$과 직선 $y=-x-4$의 두 교점을 각각 A, B라 하고, 원의 중심을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 4일 때, 상수 k의 값을 구하시오. (단, $k<4$)

203 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 P와 두 점 A$(-3,\ 0)$, B$(0,\ 6)$에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값을 구하시오.

실력 UP

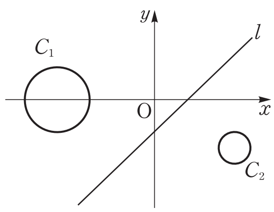
교육청 기출

204 좌표평면 위에 두 원

C_1: $(x+6)^2+y^2=4$,

C_2: $(x-5)^2+(y+3)^2=1$과 직선

l: $y=x-2$가 있다. 원 C_1 위의 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$, 원 C_2 위의 점 Q에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{H_1H_2}$의 길이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, 두 수 M, m의 곱 Mm의 값을 구하시오.



두 원의 중심에서 직선 l에 내린 수선의 발의 좌표를 이용한다.

205 두 점 A$(-1,\ 1)$, B$(2,\ 1)$로부터의 거리의 비가 $2:1$인 점 P에 대하여 $\angle$PAB의 크기가 최대일 때, $\cos(\angle\mathrm{PAB})$의 값을 구하시오.

개념원리 이해

03 원의 접선의 방정식

1 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

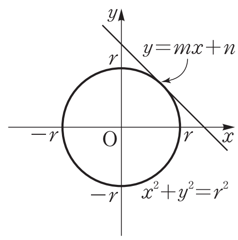
필수 15

원 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$\boldsymbol{y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}}$$

> 한 원에서 기울기가 같은 접선은 두 개이다.

설명 원 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식을 구해 보자.



방법 1 판별식 이용

기울기가 m인 접선의 방정식을

$y=mx+n$ ...... ㉠

이라 하고 $x^2+y^2=r^2$에 이 식을 대입하면

$x^2+(mx+n)^2=r^2$

$\therefore (m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0$ ...... ㉡

원과 직선이 접해야 하므로 이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(mn)^2-(m^2+1)(n^2-r^2)=0$

$m^2r^2-n^2+r^2=0,\quad n^2=r^2(m^2+1)$

$\therefore n=\pm r\sqrt{m^2+1}$

㉠에 이것을 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

방법 2 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

기울기가 m인 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하면 원 $x^2+y^2=r^2$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=mx+n$, 즉 $mx-y+n=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 r와 같아야 하므로

$\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=r\qquad \therefore n=\pm r\sqrt{m^2+1}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

보기 원 $x^2+y^2=9$에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y=2x\pm 3\sqrt{2^2+1}\qquad \therefore y=2x\pm 3\sqrt{5}$

2 원 위의 점에서의 접선의 방정식

필수 16

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

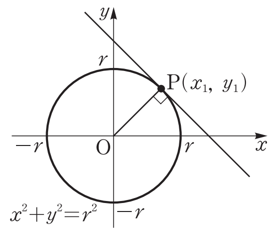
$$\boldsymbol{x_1x+y_1y=r^2}$$

> 원의 방정식에서 x^2 대신 x_1x, y^2 대신 y_1y를 대입한다.

설명 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 위의 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

(i) $x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0$일 때,

오른쪽 그림에서 직선 OP의 기울기는 $\frac{y_1}{x_1}$이고 접선과 직선 OP는 수직이므로 접선의 기울기는 $-\frac{x_1}{y_1}$이다.



따라서 원 위의 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1), \qquad y_1y-y_1^2=-x_1x+x_1^2$$

$$\therefore\ x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$$

그런데 점 $P(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=r^2$$

따라서 원 위의 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

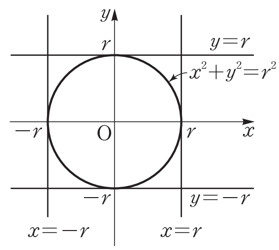
$$x_1x+y_1y=r^2$$

(ii) $x_1=0$ 또는 $y_1=0$일 때,

점 P의 좌표는 $(0,\ \pm r)$ 또는 $(\pm r,\ 0)$이므로 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y=\pm r \text{ 또는 } x=\pm r$$

따라서 이 경우에도 $x_1x+y_1y=r^2$이 성립한다.



보기 ▶ 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 방정식은

$$2\times x-2\times y=8 \qquad \therefore\ x-y-4=0$$

3 원 밖의 점에서 원에 그은 접선의 방정식

발전 17

원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 방법으로 구한다.

방법 1 원 위의 점에서의 접선의 방정식 이용

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 할 때, 이 점에서의 접선이 점 P를 지남을 이용한다.

방법 2 원의 중심과 접선 사이의 거리 이용

접선의 기울기를 m이라 할 때, 기울기가 m이고 점 P를 지나는 접선과 원의 중심 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

방법 3 판별식 이용

접선의 기울기를 m이라 할 때, 기울기가 m이고 점 P를 지나는 접선의 방정식과 원의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 D가 $D=0$임을 이용한다.

› 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선은 두 개이다.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 40쪽

필수 15 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=4$에 접하고 직선 $2x-y+3=0$과 평행한 직선의 방정식을 모두 구하시오.

풀이 직선 $2x-y+3=0$, 즉 $y=2x+3$과 평행한 직선의 기울기는 2이고, 원 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이는 2이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=2x\pm2\sqrt{2^2+1}$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{y=2x\pm2\sqrt{5}}$

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 41쪽

필수 16 원 위의 점에서의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식이 $ax+y+b=0$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

풀이 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$2\times x+1\times y=5$ $\quad\therefore$ $2x+y-5=0$

따라서 $a=2$, $b=-5$이므로 $\quad a+b=\boldsymbol{-3}$

KEY Point

- 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식 ⇨ $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
- 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식 ⇨ $x_1x+y_1y=r^2$

● 정답 및 풀이 46쪽

확인 체크

206 원 $x^2+y^2=9$에 접하고 직선 $y=-3x+5$와 수직인 직선의 방정식을 모두 구하시오.

207 원 $x^2+y^2=3$에 접하고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$인 두 직선의 x절편의 곱을 구하시오.

208 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(-1,\ -3)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

209 원 $x^2+y^2=25$와 직선 $y=x-1$의 교점 중에서 제1사분면 위에 있는 점에서의 접선의 방정식을 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 41쪽

발전 17 원 밖의 점에서 원에 그은 접선의 방정식

점 $(-2,\ 4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

풀이 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은 $\quad x_1x+y_1y=4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 $(-2,\ 4)$를 지나므로 $\quad -2x_1+4y_1=4 \quad \therefore\ x_1=2y_1-2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

또 접점 $(x_1,\ y_1)$, 즉 $(2y_1-2,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 $\quad (2y_1-2)^2+{y_1}^2=4$

$$5{y_1}^2-8y_1=0, \quad y_1(5y_1-8)=0 \quad \therefore\ y_1=0 \text{ 또는 } y_1=\frac{8}{5}$$

㉡에서 $y_1=0$일 때 $x_1=-2$, $y_1=\frac{8}{5}$일 때 $x_1=\frac{6}{5}$이므로 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\boldsymbol{x=-2,\ 3x+4y-10=0}$$

다른 풀이 1 점 $(-2,\ 4)$를 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$$y-4=m(x+2) \quad \therefore\ mx-y+2m+4=0 \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

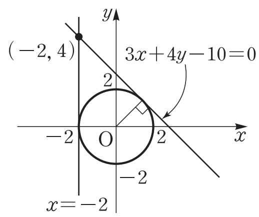
$$\frac{|2m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2 \quad \therefore\ |2m+4|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $\quad 16m+12=0 \quad \therefore\ m=-\frac{3}{4}$

㉢에 이것을 대입하여 정리하면 $\quad 3x+4y-10=0$

그런데 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선은 두 개이므로 오른쪽 그림과 같이 원과 접선을 그려 보면 다른 접선의 방정식은

$$x=-2$$



다른 풀이 2 점 $(-2,\ 4)$를 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$$y-4=m(x+2) \quad \therefore\ y=mx+2m+4 \quad \cdots\cdots \text{㉣}$$

$x^2+y^2=4$에 이 식을 대입하여 정리하면

$$(m^2+1)x^2+4m(m+2)x+4m^2+16m+12=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{2m(m+2)\}^2-(m^2+1)(4m^2+16m+12)=0$$

$$-16m-12=0 \quad \therefore\ m=-\frac{3}{4}$$

㉣에 이것을 대입하여 정리하면 $\quad y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$

그런데 원과 접선을 그려 보면 다른 접선의 방정식은 $\quad x=-2$

주의 접선의 방정식을 $y=mx+n$의 꼴로 놓으면 **다른 풀이**와 같이 접선의 방정식이 한 개만 구해지는 경우도 있다. 이 경우에는 x축에 수직인 접선이 존재하므로 원과 접선을 직접 그려서 다른 접선의 방정식을 구해야 한다.

● 정답 및 풀이 47쪽

확인 체크

210 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

211 점 $(2,\ -1)$에서 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=3$에 그은 두 접선의 기울기의 합을 구하시오.

STEP 1

생각해 봅시다!

212 원 $x^2+y^2=10$에 접하고 직선 $y=3x+2$와 평행한 두 직선이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

213 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선이 원 $x^2+y^2-6x+2y+k=0$에 접할 때, 상수 k의 값을 구하시오.
(단, $k<10$)

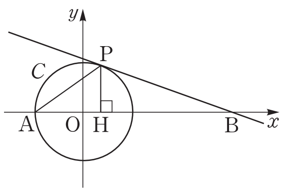
STEP 2

214 원 $x^2+y^2=25$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 3)$, $\mathrm{B}(0,\ -5)$와 원 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 최대일 때, 점 C에서의 접선의 방정식을 구하시오.

△ABC의 넓이가 최대이려면 점 C와 직선 AB 사이의 거리가 최대이어야 한다.

교육청 기출

215 그림과 같이 좌표평면에 원 C: $x^2+y^2=4$와 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$이 있다. 원 C 위의 제1사분면 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $2\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{HB}}$일 때, 삼각형 PAB의 넓이는?



① $\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$　② $4\sqrt{2}$　③ $\dfrac{14\sqrt{2}}{3}$　④ $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$　⑤ $6\sqrt{2}$

점 P에서의 접선이 점 B를 지난다.

216 점 $\mathrm{A}(0,\ a)$에서 원 $x^2+(y-3)^2=8$에 그은 두 접선이 수직일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

두 직선이 수직이다.
⇨ (기울기의 곱) $=-1$

실력 UP+

217 점 $\mathrm{P}(-2\sqrt{3},\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 ABP의 넓이를 구하시오.

개념원리 이해

04 두 원의 교점을 지나는 직선과 원의 방정식

1 두 원의 교점을 지나는 직선과 원의 방정식

필수 18, 19

(1) **두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식**

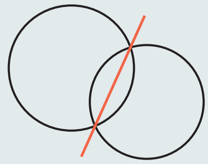
서로 다른 두 점에서 만나는 두 원

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$$

의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$\boldsymbol{x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0},$$

즉 $(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0$



(2) **두 원의 교점을 지나는 원의 방정식**

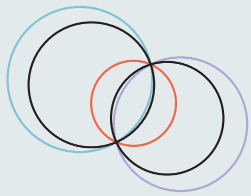
서로 다른 두 점에서 만나는 두 원

$$O:\ x^2+y^2+ax+by+c=0,\ O':\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$$

의 교점을 지나는 원 중에서 원 O'을 제외한 원의 방정식은

$$\boldsymbol{x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0}$$

(단, $k\neq-1$인 실수이다.)



설명 서로 다른 두 점에서 만나는 두 원

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ ...... ㉠

$x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ ...... ㉡

에 대하여 두 원의 교점의 좌표는 방정식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키므로 두 원의 교점을 지나는 도형의 방정식은

$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수) ...... ㉢

의 꼴이다.

(1) $k=-1$이면 방정식 ㉢은 x, y에 대한 일차방정식이므로
두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식이다.

(2) $k\neq-1$이면 방정식 ㉢은 x^2, y^2의 계수가 같고 xy항이 없는 x, y에 대한 이차방정식이므로
두 원의 교점을 지나는 원의 방정식이다.

이때 방정식 ㉢에서 k가 어떤 값을 갖더라도 방정식 ㉡이 될 수 없으므로 원 ㉡을 나타낼 수는 없다.

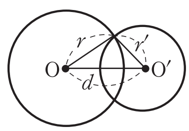
보기 두 원 $x^2+y^2-16=0$, $x^2+y^2-4x+2y=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2-16)-(x^2+y^2-4x+2y)=0$

$4x-2y-16=0$ $\quad\therefore 2x-y-8=0$

참고 두 원 O, O'의 반지름의 길이가 각각 r, r' $(r>r')$이고 중심 사이의 거리가 d일 때, 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$r-r'<d<r+r'$



● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 42쪽

필수 18 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식

두 원 $x^2+y^2-ax+6y+9=0$, $x^2+y^2-2x+2ay+1=0$의 교점을 지나는 직선이 점 $(-1, 2)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오.

풀이 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-ax+6y+9-(x^2+y^2-2x+2ay+1)=0$

$\therefore (-a+2)x+(6-2a)y+8=0$

이 직선이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$-(-a+2)+2(6-2a)+8=0$, $\quad -3a=-18 \quad \therefore \boldsymbol{a=6}$

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 42쪽

필수 19 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

두 원 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6x-2y+4=0$의 교점과 점 $(1, 2)$를 지나는 원의 방정식을 구하시오.

풀이 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-4x+k(x^2+y^2-6x-2y+4)=0\ (k\neq-1) \quad \cdots\cdots$ ㉠

이 원이 점 $(1, 2)$를 지나므로 $\quad 1-k=0 \quad \therefore k=1$

㉠에 $k=1$을 대입하면 $\quad x^2+y^2-4x+x^2+y^2-6x-2y+4=0$

$\therefore \boldsymbol{x^2+y^2-5x-y+2=0}$

KEY Point

- **두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$에 대하여**
  ① 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식
  ⇨ $x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$
  ② 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식
  ⇨ $x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$ **(단, $k\neq-1$)**

● 정답 및 풀이 50쪽

확인 체크

218 두 원 $x^2+y^2-2x+ky-4=0$, $x^2+y^2-4x-2y+4=0$의 교점을 지나는 직선이 직선 $y=3x+4$와 수직일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

219 두 원 $x^2+y^2=5$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$의 교점과 원점을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

220 두 원 $x^2+y^2+ax-2ay=0$, $x^2+y^2-10x-8y+16=0$의 교점과 두 점 $(0, 2)$, $(3, 1)$을 지나는 원의 넓이를 구하시오. (단, a는 상수이다.)

• 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 43쪽

필수 20 공통인 현의 길이

두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-4x-4y=0$의 공통인 현의 길이를 구하시오.

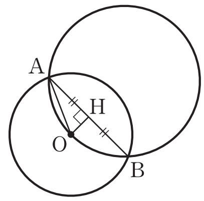
설명 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 수직이등분함을 이용한다.

풀이 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-4x-4y)=0$

$\therefore x+y-1=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 각각 A, B라 하고, 원 $x^2+y^2=4$의 중심 O(0, 0)에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OH}$의 길이는 원점 O와 직선 ㉠ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{OH}=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

또 $\overline{OA}=2$이므로 직각삼각형 AOH에서

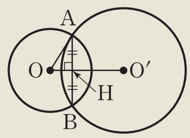
$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

따라서 구하는 공통인 현의 길이는

$$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\times\frac{\sqrt{14}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{14}}$$

KEY Point

- 두 원 O, O'의 공통인 현 AB의 길이는 다음과 같은 순서로 구한다.
  (i) 직선 AB의 방정식을 구한다.
  (ii) $\overline{OH}$의 길이를 구한다.
  (iii) 직각삼각형 AOH에서 $\overline{AH}$의 길이를 구한다.
  (iv) $\overline{AB}=2\overline{AH}$임을 이용한다.



• 정답 및 풀이 51쪽

확인 체크

221 두 원 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$, $x^2+y^2-6x+5=0$의 공통인 현의 길이를 구하시오.

222 두 원 $x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2+4x-3y+a=0$의 공통인 현의 길이가 2일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

STEP 1

223 두 원 $x^2+y^2-6=0$, $x^2+y^2-4x+ky=0$의 교점을 지나는 직선이 직선 $x-y+3=0$과 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하시오.
(단, k는 상수이다.)

224 두 원 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2+3x-4y+k=0$의 공통인 현의 길이가 $2\sqrt{3}$이 되도록 하는 모든 상수 k의 값의 합을 구하시오.

225 두 원 $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2-8x-6y+1=0$의 교점을 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

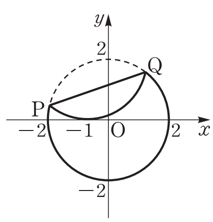
STEP 2

226 두 원 $x^2+y^2+6x+2y+1=0$, $x^2+y^2-2x-3=0$의 교점을 지나는 원 중에서 그 넓이가 최소인 원의 중심의 좌표를 (a, b)라 할 때, $\dfrac{b}{a}$의 값을 구하시오.

227 두 원 $x^2+y^2+4x+4y=0$, $x^2+y^2+x-2y-6=0$의 교점을 지나고 중심이 x축 위에 있는 원의 반지름의 길이를 구하시오.

실력 UP

228 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=4$를 점 $(-1, 0)$에서 x축에 접하도록 선분 PQ를 접는 선으로 하여 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.



생각해 봅시다!

평행한 두 직선 사이의 거리는 한 직선 위의 점과 다른 직선 사이의 거리와 같다.

두 원의 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원
⇨ 공통인 현을 지름으로 하는 원

원의 중심이 x축 위에 있으면 중심의 y좌표가 0이므로 원의 방정식에서 y의 계수가 0이다.

점 $(-1, 0)$에서 x축에 접하고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식을 구한다.

세상을 움직이려면

먼저 자기 자신을

움직여야 한다.

– 소크라테스 –

I 도형의 방정식

이 단원에서는

점과 도형의 평행이동과 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동을 학습하고, 이를 바탕으로 다양한 문제를 풀어 봅니다.

개념원리 이해

01 평행이동

1 평행이동

어떤 도형을 모양과 크기를 바꾸지 않고 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 이동하는 것을 **평행이동**이라 한다.

2 점의 평행이동

필수 01

점 (x, y)를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(x+a,\ y+b)$$

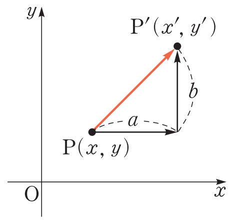
이 평행이동을 $(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$로 나타낸다.

> x축의 방향으로 a만큼 평행이동한다는 것은 $a>0$이면 양의 방향으로, $a<0$이면 음의 방향으로 $|a|$만큼 평행이동함을 뜻한다.

설명 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$이라 하면

$x'=x+a,\ y'=y+b$

따라서 점 P'의 좌표는 $(x+a, y+b)$이다.



3 도형의 평행이동

필수 02, 03

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a,\ y-b)=0$$ ← x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입한 방정식

> 방정식 $ax+by+c=0$ ($a\neq0$ 또는 $b\neq0$)은 직선을 나타내고 방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ ($A^2+B^2-4C>0$)은 원을 나타내는 것처럼 방정식 $f(x, y)=0$은 일반적으로 좌표평면 위의 도형을 나타낸다.

설명 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$이라 하면

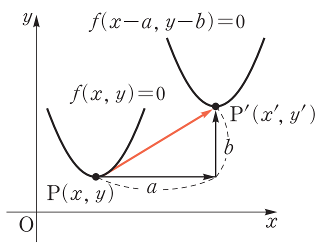
$x'=x+a,\ y'=y+b$

$\therefore\ x=x'-a,\ y=y'-b$ ······ ㉠

이때 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 위의 점이므로 방정식 $f(x, y)=0$에 ㉠을 대입하면

$f(x'-a, y'-b)=0$

따라서 점 $\mathrm{P}'(x', y')$은 방정식 $f(x-a, y-b)=0$이 나타내는 도형 위의 점이므로 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a, y-b)=0$이다.



알아둡시다!

점 (x, y)를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표
⇨ $(x+a, y+b)$

229 다음 점을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) $(7, 2)$

(2) $(-6, 5)$

(3) $(-2, -4)$

230 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-5, y+3)$에 의하여 다음 점이 옮겨지는 점의 좌표를 구하시오.

(1) $(1, 3)$

(2) $(4, -6)$

(3) $(-2, 5)$

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식
⇨ $f(x-a, y-b)=0$

231 다음 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) $3x-2y+5=0$

(2) $y=x^2+4$

(3) $(x-3)^2+(y+4)^2=1$

232 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-2, y+5)$에 의하여 다음 방정식이 나타내는 도형이 옮겨지는 도형의 방정식을 구하시오.

(1) $2x-y-3=0$

(2) $y=-x^2+2x$

(3) $(x+3)^2+(y-2)^2=5$

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 52쪽

필수 01 점의 평행이동

다음 물음에 답하시오.

(1) 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+1, y-b)$에 의하여 점 $(-2, 3)$이 점 $(a, 2)$로 옮겨질 때, $a-b$의 값을 구하시오.

(2) 점 $(5, -1)$을 점 $(3, 4)$로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(1, -3)$이 옮겨지는 점의 좌표를 구하시오.

풀이

(1) 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+1, y-b)$는 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 $(-2, 3)$이 옮겨지는 점의 좌표는

$(-2+1, 3-b)$, 즉 $(-1, 3-b)$

따라서 $-1=a$, $3-b=2$이므로 $a=-1$, $b=1$

$\therefore a-b=\mathbf{-2}$

(2) 점 $(5, -1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(3, 4)$라 하면

$5+a=3$, $-1+b=4$ $\therefore a=-2$, $b=5$

즉 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 $(1, -3)$이 옮겨지는 점의 좌표는

$(1-2, -3+5)$, 즉 $\mathbf{(-1, 2)}$

KEY Point

- **점 (x, y)를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표**
  ⇨ $(x+a, y+b)$

● 정답 및 풀이 54쪽

확인 체크

233 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-3, y+2)$에 의하여 점 $(a, -1)$이 직선 $y=2x-3$ 위의 점으로 옮겨질 때, a의 값을 구하시오.

234 점 $(2, -4)$를 점 $(1, -3)$으로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(-3, 6)$이 옮겨지는 점의 좌표를 구하시오.

235 점 (m, n)을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하였더니 원 $x^2+y^2-6x+8y+19=0$의 중심과 일치하였다. 이때 mn의 값을 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 52쪽

필수 02 직선의 평행이동

점 $(-3,\ 4)$를 점 $(-1,\ 1)$로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $3x-y+2=0$이 직선 $ax-y+b=0$으로 옮겨질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

풀이 점 $(-3,\ 4)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-1,\ 1)$이라 하면

$-3+m=-1,\ 4+n=1 \qquad \therefore\ m=2,\ n=-3$

즉 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하는 것이므로 $3x-y+2=0$에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+3$을 대입하면

$3(x-2)-(y+3)+2=0$

$\therefore\ 3x-y-7=0$

이 직선이 직선 $ax-y+b=0$과 일치하므로

$a=3,\ b=-7$

$\therefore\ a+b=\mathbf{-4}$

참고 직선은 평행이동해도 기울기가 변하지 않으므로 두 직선 $3x-y+2=0$, $ax-y+b=0$에서 $a=3$임을 쉽게 알 수 있다.

KEY Point

- 도형 $f(x,\ y)=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식
  ⇨ $f(x-a,\ y-b)=0$ ← x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입

● 정답 및 풀이 54쪽

확인 체크

236 직선 $2x-3y+k=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선이 점 $(1,\ -4)$를 지날 때, 상수 k의 값을 구하시오.

237 점 $(1,\ 2)$를 점 $(-2,\ 4)$로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $3x-4y+2=0$이 직선 $3x+py+q=0$으로 옮겨질 때, 상수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.

238 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선과 직선 $y=2x+1$이 y축에서 수직으로 만난다. 이때 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 53쪽

필수 03 포물선과 원의 평행이동

다음 물음에 답하시오.

(1) 포물선 $y=2x^2-4x+5$를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $p+2$만큼 평행이동한 포물선의 꼭짓점이 x축 위에 있을 때, p의 값을 구하시오.

(2) 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+3, y-4)$에 의하여 원 $x^2+y^2+4x-2y+a=0$이 원 $(x-1)^2+(y+b)^2=3$으로 옮겨질 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

풀이 (1) $y=2x^2-4x+5$에서 $\quad y=2(x-1)^2+3$

이 포물선을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $p+2$만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-(p+2)=2(x-p-1)^2+3 \quad \therefore y=2(x-p-1)^2+p+5$

이 포물선의 꼭짓점 $(p+1, p+5)$가 x축 위에 있으므로

$p+5=0 \quad \therefore \boldsymbol{p=-5}$

(2) $x^2+y^2+4x-2y+a=0$에서 $\quad (x+2)^2+(y-1)^2=5-a \quad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 평행이동은 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하는 것이므로 ㉠에 x 대신 $x-3$, y 대신 $y+4$를 대입하면

$(x-3+2)^2+(y+4-1)^2=5-a \quad \therefore (x-1)^2+(y+3)^2=5-a$

이 원이 원 $(x-1)^2+(y+b)^2=3$과 일치하므로

$3=b,\ 5-a=3 \quad \therefore \boldsymbol{a=2,\ b=3}$

다른 풀이 (1) 포물선 $y=2(x-1)^2+3$의 꼭짓점 $(1, 3)$을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $p+2$만큼 평행이동한 점의 좌표는 $\quad (1+p, 3+p+2)$, 즉 $(1+p, 5+p)$

이 점이 x축 위에 있으므로 $\quad 5+p=0 \quad \therefore p=-5$

(2) 원 ㉠의 중심 $(-2, 1)$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점의 좌표는 $\quad (-2+3, 1-4)$, 즉 $(1, -3)$

이 점이 원 $(x-1)^2+(y+b)^2=3$의 중심 $(1, -b)$와 일치하므로 $\quad b=3$

또 원은 평행이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 $\quad \sqrt{5-a}=\sqrt{3} \quad \therefore a=2$

KEY Point

- 포물선의 평행이동 ⇨ $\boldsymbol{y=a(x-p)^2+q}$의 꼴로 바꾸어 평행이동한다.
- 원의 평행이동 ⇨ $\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$의 꼴로 바꾸어 평행이동한다.
- 포물선의 평행이동은 꼭짓점의 평행이동으로, 원의 평행이동은 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다.

● 정답 및 풀이 54쪽

확인 체크

239 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-a, y+2b)$에 의하여 포물선 $y=x^2-4x+3$이 포물선 $y=x^2-3$으로 옮겨질 때, $a+b$의 값을 구하시오.

240 원 $x^2+y^2+6x+2y+8=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 원 $x^2+y^2-4x-4y+6=0$과 일치할 때, ab의 값을 구하시오.

STEP 1

생각해 봅시다!

241 두 점 A$(2, a)$, B$(b, 3)$을 각각 A$'(-1, 5)$, B$'(1, 0)$으로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(a+b, a-b)$가 옮겨지는 점의 좌표를 구하시오.

242 직선 $2x-y+4=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원래의 직선과 일치하였다. 이때 $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오. (단, $ab\neq0$)

243 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하였더니 직선 $y=-x+5$와 y축에서 만났다. 이 평행이동에 의하여 점 $(-1, 2)$로 옮겨지는 점의 좌표를 구하시오.

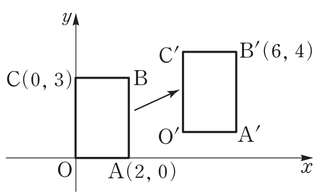
244 도형 $f(x, y)=0$을 도형 $f(x-4, y+1)=0$으로 옮기는 평행이동에 의하여 포물선 $y=x^2+2ax+a+3$이 옮겨지는 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(3, b)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

도형 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동
⇨ $f(x-a, y-b)=0$

245 원 $x^2+(y-1)^2=9$를 원 $(x-1)^2+y^2=9$로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-4=0$이 직선 $x+ay+b=0$으로 옮겨질 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

STEP 2

246 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 원점 O와 두 점 A$(2, 0)$, C$(0, 3)$에 대하여 $\overline{\text{OA}}$, $\overline{\text{OC}}$를 두 변으로 하는 직사각형 OABC가 있다. 이 직사각형을 평행이동하여 직사각형 O$'$A$'$B$'$C$'$으로 옮겼을 때, 점 B$'$의 좌표가 $(6, 4)$이었다. 이때 직선 A$'$C$'$의 y절편을 구하시오.



점 B를 점 B$'$으로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 AC가 직선 A$'$C$'$으로 평행이동한다.

I -4 도형의 이동

연습 문제

생각해 봅시다!

247 직선 $4x+3y-5=0$을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선이 원 $(x-1)^2+y^2=4$에 접할 때, 양수 k의 값을 구하시오.

248 포물선 $y=x^2+8x+9$를 포물선 $y=x^2$으로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $l: 2x-3y-2=0$이 옮겨지는 직선을 l'이라 하자. 이때 두 직선 l과 l' 사이의 거리를 구하시오.

두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

249 원 $C_1: x^2+y^2-6x+2y+2=0$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 p만큼 평행이동한 원을 C_2라 하자. 두 원 C_1, C_2의 중심 사이의 거리가 3일 때, 원 C_2의 중심의 좌표를 구하시오. (단, $p>0$)

교육청 기출

250 좌표평면에서 두 양수 a, b에 대하여 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 원을 C라 하자. 원 C가 x축과 y축에 동시에 접할 때, $a+b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

원이 x축과 y축에 동시에 접한다.
⇨ |(중심의 x좌표)|
=|(중심의 y좌표)|
=(반지름의 길이)

251 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+2, y-3)$에 의하여 원 $x^2+(y-1)^2=9$를 평행이동한 원이 직선 $3x-4y+k=0$과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $m<k<n$일 때, $n-m$의 값을 구하시오.

실력 UP

252 세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(3, 0)$, $\mathrm{B}(0, 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB를 평행이동한 삼각형 $\mathrm{O'A'B'}$에서 점 $\mathrm{B'}$의 좌표가 $(6, 2)$일 때, 삼각형 $\mathrm{O'A'B'}$의 내접원의 방정식을 구하시오.

삼각형의 내접원의 중심과 삼각형의 세 변 사이의 거리는 모두 같다.

02 대칭이동

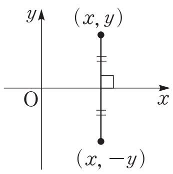
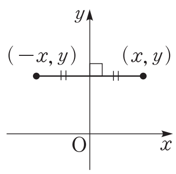
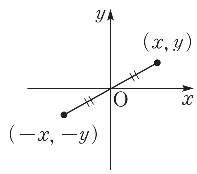
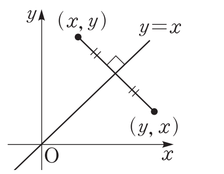
1 대칭이동

어떤 도형을 한 점 또는 한 직선에 대하여 대칭인 도형으로 이동하는 것을 **대칭이동**이라 한다.

2 점의 대칭이동

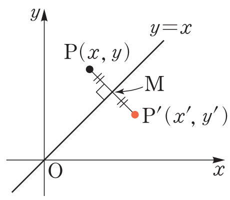
필수 04

점 (x, y)를 x축, y축, 원점 및 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 다음과 같다.

x축에 대한 대칭이동	y축에 대한 대칭이동	원점에 대한 대칭이동	직선 $y=x$에 대한 대칭이동
			
$(x, y) \longrightarrow (x, -y)$ ⇨ y좌표의 부호가 바뀐다.	$(x, y) \longrightarrow (-x, y)$ ⇨ x좌표의 부호가 바뀐다.	$(x, y) \longrightarrow (-x, -y)$ ⇨ x, y좌표의 부호가 바뀐다.	$(x, y) \longrightarrow (y, x)$ ⇨ x, y좌표가 서로 바뀐다.

> ① 원점에 대한 대칭이동은 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.
> ② 직선 $y=-x$에 대한 대칭이동: $(x, y) \longrightarrow (-y, -x)$

설명 **직선 $y=x$에 대한 대칭이동**



좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$이라 하면

선분 PP'의 중점 $\mathrm{M}\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$은 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$$\frac{x+x'}{2}=\frac{y+y'}{2} \qquad \therefore x'-y'=-x+y \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 직선 PP'은 직선 $y=x$에 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x}=-1 \qquad \therefore x'+y'=x+y \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$2x'=2y \qquad \therefore x'=y$$

㉠−㉡을 하면

$$-2y'=-2x \qquad \therefore y'=x$$

따라서 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P'의 좌표는 (y, x)이다.

예제 점 $(5, -2)$를 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) x축　　(2) y축

(3) 원점　　(4) 직선 $y=x$

풀이 (1) x축에 대하여 대칭이동하면 y좌표의 부호가 바뀌므로　$(5, 2)$

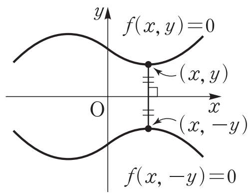
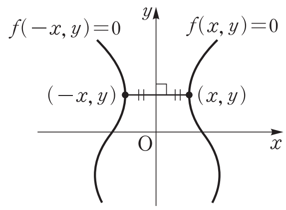
(2) y축에 대하여 대칭이동하면 x좌표의 부호가 바뀌므로　$(-5, -2)$

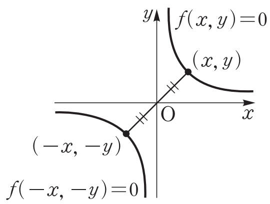
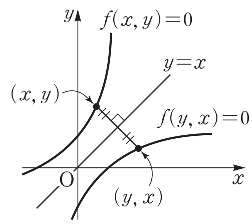
(3) 원점에 대하여 대칭이동하면 x좌표, y좌표의 부호가 바뀌므로　$(-5, 2)$

(4) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 x좌표와 y좌표가 서로 바뀌므로　$(-2, 5)$

3 도형의 대칭이동 필수 05

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점 및 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

<table>
<tr><th>x축에 대한 대칭이동</th><th>y축에 대한 대칭이동</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x, y)=0 \longrightarrow f(x, -y)=0$
⇨ y 대신 $-y$를 대입한다.</td><td>$f(x, y)=0 \longrightarrow f(-x, y)=0$
⇨ x 대신 $-x$를 대입한다.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>원점에 대한 대칭이동</th><th>직선 $y=x$에 대한 대칭이동</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x, y)=0 \longrightarrow f(-x, -y)=0$
⇨ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.</td><td>$f(x, y)=0 \longrightarrow f(y, x)=0$
⇨ x 대신 y, y 대신 x를 대입한다.</td></tr>
</table>

› 직선 $y=-x$에 대한 대칭이동: $f(x, y)=0 \longrightarrow f(-y, -x)=0$

설명 **직선 $y=x$에 대한 대칭이동**

좌표평면에서 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$이라 하면

$$x'=y, \; y'=x$$

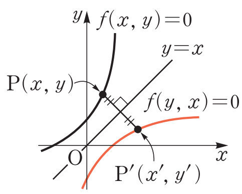
$$\therefore x=y', \; y=x'$$

이것을 $f(x, y)=0$에 대입하면

$$f(y', x')=0$$

이므로 점 $\mathrm{P}'(x', y')$은 방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형 위의 점이다.

따라서 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$이다.



예제 직선 $x+3y+4=0$을 다음에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) x축 (2) y축

(3) 원점 (4) 직선 $y=x$

풀이 (1) y 대신 $-y$를 대입하면 $x+3\times(-y)+4=0$ $\therefore x-3y+4=0$

(2) x 대신 $-x$를 대입하면 $-x+3y+4=0$ $\therefore x-3y-4=0$

(3) x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면 $-x+3\times(-y)+4=0$ $\therefore x+3y-4=0$

(4) x 대신 y, y 대신 x를 대입하면 $y+3x+4=0$ $\therefore 3x+y+4=0$

253 점 $(-2,\ 3)$을 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) x축　　(2) y축

(3) 원점　　(4) 직선 $y=x$

254 직선 $3x-2y+1=0$을 다음에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) x축　　(2) y축

(3) 원점　　(4) 직선 $y=x$

255 포물선 $y=x^2-2x+3$을 다음에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) x축　　(2) y축　　(3) 원점

256 원 $(x-3)^2+(y+2)^2=6$을 다음에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) x축　　(2) y축

(3) 원점　　(4) 직선 $y=x$

알아둡시다!

점 $(x,\ y)$를
① x축 대칭 ⇨ $(x,\ -y)$
② y축 대칭 ⇨ $(-x,\ y)$
③ 원점 대칭
⇨ $(-x,\ -y)$
④ 직선 $y=x$ 대칭
⇨ $(y,\ x)$

도형 $f(x,\ y)=0$을
① x축 대칭
⇨ $f(x,\ -y)=0$
② y축 대칭
⇨ $f(-x,\ y)=0$
③ 원점 대칭
⇨ $f(-x,\ -y)=0$
④ 직선 $y=x$ 대칭
⇨ $f(y,\ x)=0$

• 더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 54쪽

필수 04 점의 대칭이동

점 $(4,\ 6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P, y축에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

풀이 점 $(4,\ 6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는

$(4,\ -6)$

점 $(4,\ 6)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는

$(-4,\ 6)$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$y+6=\frac{6-(-6)}{-4-4}(x-4)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y=-\frac{3}{2}x}$$

KEY Point

• 점 $(x,\ y)$를 대칭이동한 점의 좌표

① x축에 대하여 대칭 ⇨ $(x,\ -y)$ ← y좌표 부호 바꾸기

② y축에 대하여 대칭 ⇨ $(-x,\ y)$ ← x좌표 부호 바꾸기

③ 원점에 대하여 대칭 ⇨ $(-x,\ -y)$ ← x좌표, y좌표 부호 바꾸기

④ 직선 $y=x$에 대하여 대칭 ⇨ $(y,\ x)$ ← x좌표, y좌표 서로 바꾸기

• 정답 및 풀이 58쪽

확인 체크

257 점 $(3,\ -5)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점이 직선 $ax-2y+1=0$ 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

258 점 $\mathrm{P}(2,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 점 Q를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 R라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를 구하시오.

259 점 $(k,\ 3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하자. 선분 PQ의 길이가 $2\sqrt{5}$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 54, 55쪽

필수 05 도형의 대칭이동

원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원과 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원이 일치할 때, a, b의 값을 구하시오.

설명 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 꼴로 변형한 후 대칭이동, 평행이동한 원의 방정식을 구한다.

풀이 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$ …… ㉠

원 ㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

원 ㉠을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a+2)^2+(y-b-1)^2=4$

두 원이 일치하므로 $-1=-a+2$, $2=-b-1$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=3}$, $\boldsymbol{b=-3}$

다른 풀이 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$의 중심 $(-2, 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(1, -2)$

점 $(-2, 1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-2+a, 1+b)$

두 점이 일치하므로 $1=-2+a$, $-2=1+b$ $\therefore$ $a=3$, $b=-3$

KEY Point

- 도형 $f(x, y)=0$을 대칭이동한 도형의 방정식
  ① x축에 대하여 대칭 ⇨ $f(x, -y)=0$ ← y 대신 $-y$를 대입
  ② y축에 대하여 대칭 ⇨ $f(-x, y)=0$ ← x 대신 $-x$를 대입
  ③ 원점에 대하여 대칭 ⇨ $f(-x, -y)=0$ ← x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입
  ④ 직선 $y=x$에 대하여 대칭 ⇨ $f(y, x)=0$ ← x 대신 y, y 대신 x를 대입

● 정답 및 풀이 59쪽

확인 체크

260 직선 $y=-3x+6$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선에 수직이고 점 $(-3, 4)$를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

261 직선 $2x-3y+1=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선이 원 $(x-4)^2+(y+k)^2=3$의 넓이를 이등분할 때, 상수 k의 값을 구하시오.

262 포물선 $y=x^2-2mx+m^2-5$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(-2, k)$일 때, $m+k$의 값을 구하시오. (단, m은 상수이다.)

• 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 56쪽

필수 06 도형의 평행이동과 대칭이동

직선 $y=3x+2$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 후 원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(2,\ 1)$을 지날 때, a의 값을 구하시오.

풀이 직선 $y=3x+2$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y=3(x-a)+2$$
$$\therefore\ y=3x-3a+2$$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=3\times(-x)-3a+2$$
$$\therefore\ y=3x+3a-2$$

이 직선이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$$1=6+3a-2$$
$$\therefore\ a=\mathbf{-1}$$

KEY Point

• 평행이동과 대칭이동을 연달아 할 때에는 주어진 순서대로 적용한다.

• 정답 및 풀이 59쪽

확인 체크

263 직선 $4x-2y+3=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식을 구하시오.

264 포물선 $y=x^2-2x+a$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동하였더니 포물선 $y=-x^2+8x-10$이 되었다. 이때 상수 a의 값을 구하시오.

265 원 $x^2+y^2-4x=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원이 직선 $y=mx-2$에 접할 때, 상수 m의 값을 구하시오.

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 56쪽

필수 07 선분의 길이의 합의 최솟값

두 점 A$(0,\ 2)$, B$(6,\ 3)$과 x축 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하시오.

설명 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값

⇨ 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점 B′의 좌표를 구한 후 선분 AB′의 길이를 구한다.

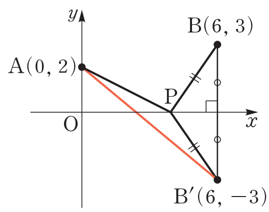
풀이 오른쪽 그림과 같이 점 B$(6,\ 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

B′$(6,\ -3)$

이때 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}&=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\\&\geq\overline{\mathrm{AB'}}\\&=\sqrt{(6-0)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{61}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{61}$이다.



KEY Point

- 선분의 길이의 합의 최솟값

  ⇨ 한 점을 대칭이동하여 두 선분이 한 직선 위에 있도록 한다.

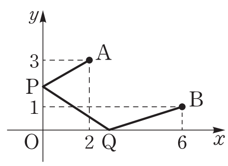
● 정답 및 풀이 60쪽

확인 체크

266 두 점 A$(2,\ 4)$, B$(3,\ -5)$와 y축 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하시오.

267 두 점 A$(1,\ 2)$, B$(3,\ 4)$와 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값과 그때의 점 P의 좌표를 구하시오.

268 오른쪽 그림과 같이 두 점 A$(2,\ 3)$, B$(6,\ 1)$과 y축 위를 움직이는 점 P, x축 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값을 구하시오.



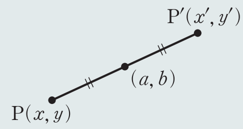
개념원리 이해

03 점과 직선에 대한 대칭이동

1 점에 대한 대칭이동

필수 08

점 $P(x, y)$를 점 (a, b)에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면
점 (a, b)는 선분 PP'의 중점이므로



$$a=\frac{x+x'}{2},\ b=\frac{y+y'}{2} \qquad \therefore x'=2a-x,\ y'=2b-y$$

(1) 점 (x, y)를 점 (a, b)에 대하여 대칭이동하면

$$(x, y) \longrightarrow (2a-x, 2b-y)$$

(2) 도형 $f(x, y)=0$을 점 (a, b)에 대하여 대칭이동하면

$$f(x, y)=0 \longrightarrow f(2a-x, 2b-y)=0$$

설명 (2) 도형 $f(x, y)=0$ 위의 점 $P(x, y)$를 점 (a, b)에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면

$x'=2a-x,\ y'=2b-y \qquad \therefore x=2a-x',\ y=2b-y'$

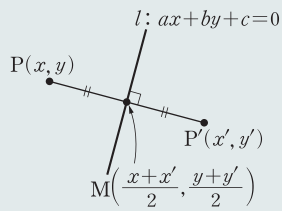
$f(x, y)=0$에 이것을 대입하면 $f(2a-x', 2b-y')=0$이므로 점 $P'(x', y')$은 도형 $f(2a-x, 2b-y)=0$ 위의 점이다.

따라서 도형 $f(x, y)=0$을 점 (a, b)에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(2a-x, 2b-y)=0$이다.

2 직선에 대한 대칭이동

필수 09

점 $P(x, y)$를 직선 $l: ax+by+c=0$에 대하여 대칭이동한 점을
$P'(x', y')$이라 하면



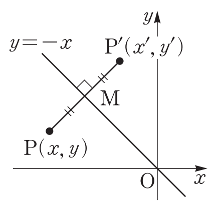
(i) **중점 조건:** $\overline{PP'}$의 중점 $M\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$은 직선 l 위의 점이다.

$$\Rightarrow a\times\frac{x+x'}{2}+b\times\frac{y+y'}{2}+c=0$$

(ii) **수직 조건:** 직선 PP'과 직선 l은 수직이다.

$$\Rightarrow \frac{y'-y}{x'-x}\times\left(-\frac{a}{b}\right)=-1$$

참고 점 $P(x, y)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면



(i) 중점 조건: $\overline{PP'}$의 중점 $M\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$은 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

$$\frac{y+y'}{2}=-\frac{x+x'}{2} \qquad \therefore x'+y'=-x-y \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) 수직 조건: 직선 PP'과 직선 $y=-x$는 수직이므로 직선 PP'의 기울기는 1이다.

즉 $\frac{y'-y}{x'-x}=1$이므로 $\qquad x'-y'=x-y \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x'=-y,\ y'=-x \qquad \therefore P'(-y, -x)$

● 더 다양한 문제는 RPM 공통수학 2 57쪽

필수 08 점에 대한 대칭이동

다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $(2,\ -3)$을 점 $(-2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(2) 원 $x^2+y^2-10x+24=0$을 점 $(3,\ 4)$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

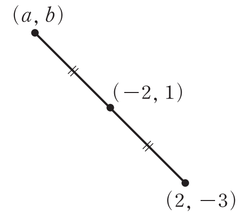
설명 점 P를 점 (a, b)에 대하여 대칭이동한 점이 P′이면 점 (a, b)는 선분 PP′의 중점임을 이용한다.
이때 포물선 또는 원의 점에 대한 대칭이동은 포물선의 꼭짓점 또는 원의 중심의 대칭이동으로 생각한다.

풀이 (1) 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 $(-2,\ 1)$이 두 점 $(2,\ -3)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{2+a}{2}=-2,\ \frac{-3+b}{2}=1 \qquad \therefore a=-6,\ b=5$$

따라서 구하는 점의 좌표는

$\mathbf{(-6,\ 5)}$



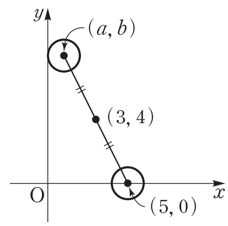
(2) $x^2+y^2-10x+24=0$에서 $\quad (x-5)^2+y^2=1$

원의 중심 $(5,\ 0)$을 점 $(3,\ 4)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 $(3,\ 4)$가 두 점 $(5,\ 0)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{5+a}{2}=3,\ \frac{0+b}{2}=4 \qquad \therefore a=1,\ b=8$$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 8)$이고 반지름의 길이는 1이므로 구하는 원의 방정식은

$\mathbf{(x-1)^2+(y-8)^2=1}$



● 정답 및 풀이 61쪽

확인 체크

269 점 $(a,\ 3)$을 점 $(4,\ 5)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(-2,\ b)$일 때, ab의 값을 구하시오.

270 포물선 $y=-x^2+2x+5$를 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ 6)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

271 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$를 점 $(1,\ 2)$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

더 다양한 문제는 RPM 공통수학2 57쪽

필수 09 직선에 대한 대칭이동

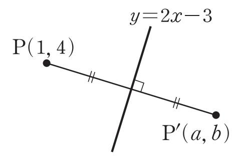
다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $P(1,\ 4)$를 직선 $y=2x-3$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(2) 직선 $y=2x-1$을 직선 $y=x+3$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구하시오.

풀이

(1) 점 $P(1,\ 4)$를 직선 $y=2x-3$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(a,\ b)$라 하자.



$\overline{PP'}$의 중점 $\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{4+b}{2}\right)$가 직선 $y=2x-3$ 위의 점이므로

$\frac{4+b}{2}=2\times\frac{1+a}{2}-3 \qquad \therefore\ 2a-b=8 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

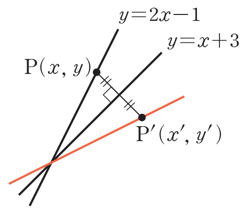
또 두 점 P, P′을 지나는 직선과 직선 $y=2x-3$은 수직이므로

$\frac{b-4}{a-1}\times2=-1 \qquad \therefore\ a+2b=9 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=2$

따라서 구하는 점의 좌표는 **(5, 2)**

(2) 직선 $y=2x-1$ 위의 임의의 점 $P(x,\ y)$를 직선 $y=x+3$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x',\ y')$이라 하자.



$\overline{PP'}$의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2},\ \frac{y+y'}{2}\right)$이 직선 $y=x+3$ 위의 점이므로

$\frac{y+y'}{2}=\frac{x+x'}{2}+3$

$\therefore\ x-y=-x'+y'-6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 두 점 P, P′을 지나는 직선과 직선 $y=x+3$은 수직이므로

$\frac{y'-y}{x'-x}\times1=-1 \qquad \therefore\ x+y=x'+y' \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 x, y에 대하여 풀면 $x=y'-3,\ y=x'+3$

이때 점 $P(x,\ y)$는 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로

$x'+3=2(y'-3)-1 \qquad \therefore\ x'-2y'+10=0$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\boldsymbol{x-2y+10=0}$

KEY Point

- **점 P를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면**
  (i) 중점 조건: $\overline{PP'}$의 중점은 직선 l 위의 점이다.
  (ii) 수직 조건: $\overline{PP'}\perp l$

정답 및 풀이 61쪽

확인 체크

272 두 점 $P(-3,\ 4)$, $Q(1,\ 8)$이 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

273 원 $x^2+(y+1)^2=4$를 직선 $x-2y+3=0$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

특강 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형의 이동

1 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형의 평행이동과 대칭이동

(1) 방정식 $f(-x+p,\ y-q)=0$이 나타내는 도형

⇨ 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

(2) 방정식 $f(x-p,\ -y+q)=0$이 나타내는 도형

⇨ 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

(3) 방정식 $f(y-q,\ x-p)=0$이 나타내는 도형

⇨ 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

› $-x$를 포함하면 y축에 대한 대칭이동, $-y$를 포함하면 x축에 대한 대칭이동을 의미한다. 또 $x,\ y$의 위치가 서로 바뀌면 직선 $y=x$에 대한 대칭이동을 의미한다.

설명

(1) $f(x,\ y)=0$ $\xrightarrow[\text{대칭이동}]{y\text{축에 대하여}}$ $f(-x,\ y)=0$ $\xrightarrow[\text{평행이동}]{x\text{축으로 }p\text{만큼, }y\text{축으로 }q\text{만큼}}$ $f(-(x-p),\ y-q)=0$, 즉 $f(-x+p,\ y-q)=0$

(2) $f(x,\ y)=0$ $\xrightarrow[\text{대칭이동}]{x\text{축에 대하여}}$ $f(x,\ -y)=0$ $\xrightarrow[\text{평행이동}]{x\text{축으로 }p\text{만큼, }y\text{축으로 }q\text{만큼}}$ $f(x-p,\ -(y-q))=0$, 즉 $f(x-p,\ -y+q)=0$

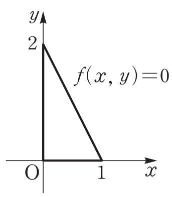
(3) $f(x,\ y)=0$ $\xrightarrow[\text{대칭이동}]{y=x\text{에 대하여}}$ $f(y,\ x)=0$ $\xrightarrow[\text{평행이동}]{x\text{축으로 }p\text{만큼, }y\text{축으로 }q\text{만큼}}$ $f(y-q,\ x-p)=0$

주의 (3) 도형 $f(y,\ x)=0$을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동할 때, $x,\ y$의 위치에 관계없이 x 대신 $x-p$, y 대신 $y-q$를 대입한다.

● 정답 및 풀이 61쪽

확인 체크

274 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 방정식이 나타내는 도형을 그리시오.



(1) $f(-x+1,\ y+1)=0$

(2) $f(y+1,\ x-1)=0$

연습 문제

STEP 1

생각해 봅시다!

275 점 $(-5,\ 4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P, y축에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오.

교육청 기출

276 좌표평면 위의 점 $A(-3,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하고, 점 B를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 때, 실수 k의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

(직선 AB의 기울기)
=(직선 BC의 기울기)

277 직선 l: $x-3y-6=0$을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선을 m이라 하고, 직선 l을 x축에 대하여 대칭이동한 직선을 n이라 하자. 두 직선 m, n과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

278 점 $(6,\ -2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 다시 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동하였더니 직선 $y=ax+4$ 위의 점이 되었다. 이때 상수 a의 값을 구하시오.

대칭이동과 평행이동을 연달아 할 때에는 주어진 순서대로 적용한다.

279 두 점 $A(3,\ 1)$, $B(a,\ 4)$와 y축 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오.

대칭이동을 이용하여 최솟값을 구한다.

280 점 $P(-1,\ 3)$을 직선 $y=2x+1$에 대하여 대칭이동한 점을 $Q(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

직선에 대한 대칭이동
⇨ 중점 조건, 수직 조건을 이용한다.

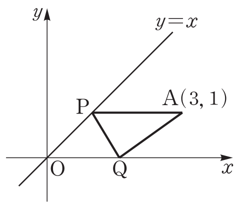
STEP 2

생각해 봅시다!

281 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=4$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원이 y축에 접한다. 이때 양수 a의 값을 구하시오.

원이 y축에 접한다.
⇨ |(중심의 x좌표)|
=(반지름의 길이)

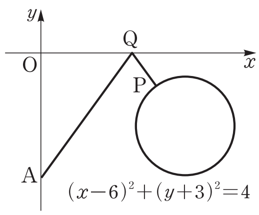
282 오른쪽 그림과 같이 점 A(3, 1)과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P, x축 위를 움직이는 점 Q에 대하여 삼각형 APQ의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오. (단, 세 점 A, P, Q는 한 직선 위에 있지 않다.)



교육청 기출

283 원 $(x-6)^2+(y+3)^2=4$ 위의 점 P와 x축 위의 점 Q가 있다. 점 A(0, -5)에 대하여 $\overline{AQ}+\overline{QP}$의 최솟값은?

① 8　② 9　③ 10
④ 11　⑤ 12



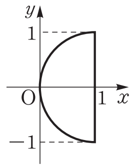
284 포물선 $y=3x^2+12x+8$을 점 $(a, -a)$에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점이 제1사분면 위에 있도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

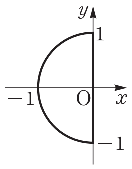
제1사분면 위의 점
⇨ (x좌표)>0,
(y좌표)>0

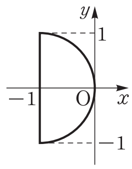
285 원 $x^2+y^2-4x-8y=0$을 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이동하였더니 원 $x^2+y^2=c$가 되었다. 이때 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하시오.

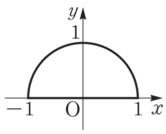
생각해 봅시다!

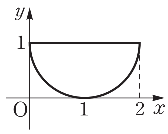
286 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 방정식 $f(y,\ x-1)=0$이 나타내는 도형은?

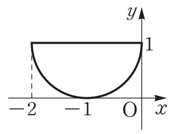


①


②


③


④


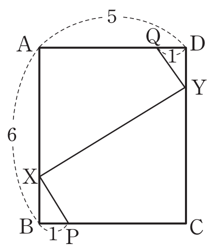
⑤


실력 UP+

287 원 $x^2+y^2-2x-3=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원이 x축에 의하여 잘린 현의 길이를 구하시오.

대칭이동한 원과 x축의 교점의 좌표를 구한다.

288 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 5, 세로의 길이가 6인 직사각형 ABCD에서 두 점 P, Q는 각각 변 BC, AD 위에 있고 $\overline{\mathrm{BP}}=1$, $\overline{\mathrm{DQ}}=1$이다. 변 AB 위의 점 X와 변 CD 위의 점 Y에 대하여 $\overline{\mathrm{PX}}+\overline{\mathrm{XY}}+\overline{\mathrm{YQ}}$의 길이의 최솟값을 구하시오.



두 점 P, Q를 각각 대칭이동하여 세 선분이 한 직선 위에 있는 경우를 생각해 본다.

289 직선 $3x+y-3=0$을 직선 $x-y-8=0$에 대하여 대칭이동한 직선을 l이라 할 때, 점 $(1,\ 2)$와 직선 l 사이의 거리를 구하시오.