МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ СЕВАСТОПОЛЕ

Факультет «Компьютерной математики»
Направление подготовки «Прикладная математика и информатика»
01.03.02 (бакалавр)

ОТЧЁТ
по вычислительной задаче №8
«Построение меры максимальной энтропии
для дискретной динамической системы (отображение Жюлиа)»

Работу выполнил:
Студент группы ПМ-401
Воронец Владимир Олегович

Руководитель: профессор
кафедры прикладной
математики и информатики
Осипенко Георгий Сергеевич

Севастополь, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Построить меру максимальной энтропии на символическом образе для дискретной динамической системы (отображения Жюлиа):

$$x \to x^2 - y^2 + a$$

$$y \to 2xy + b$$

в области R^2: $[-2;\ 2]x[-2;\ 2]$

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Пусть G – граф с матрицей допустимых переходов П. Число b_n обозначает число допустимых путей длины n в G.

Энтропией графа G называется число

$$h(F) = \lim_{n\to\infty} ln\frac{b_n}{n}.$$

Теорема 1. Энтропия графа G равна логарифму максимального собственного числа матрицы допустимых переходов.

$$h(G) = \ln\lambda.$$

Пусть на символическом образе G отображения f построен инвариантный поток $m = \{m_{ij}\}$. Поток m на G порождает цепь Маркова, у которой состояния системы совпадают с вершинами графа G, а вероятности перехода равны

$$p_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_i}.$$

Матрица вероятностей $P = (p_{ij})$ имеет стационарное распределение $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$. Для стационарного распределения $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ энтропия вычисляется по формуле

$$h_m = -\sum_i m_i \sum_j p_{ij} lnp_{ij}.$$

Подставим $p_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_i}$. и найдем h_m:

$$h_m = -\sum_i m_i \sum_j \frac{m_{ij}}{m_i} ln \frac{m_{ij}}{m_i} = -\sum_{ij} m_{ij}\, ln \frac{m_{ij}}{m_i}$$

$$= -\sum_{ij} m_{ij}\, lnm_{ij} + \sum_{ij} m_{ij}\, lnm_i = -\sum_{ij} m_{ij}\, lnm_{ij} + \sum_i m_i\, lnm_i.$$

Таким образом, энтропия может вычисляться непосредственно по потоку m_i как

$$E = h_m = \sum_{ij} m_{ij}\, lnm_{ij} + \sum_i m_i\, lnm_i.$$

Пусть Π - матрица допустимых переходов некоторого графа G. Наша цель состоит в том, чтобы построить поток, энтропия которого достигает наибольшего значения среди всех потоков на данном графе. Так как любой поток сосредоточен на некоторой компоненте эквивалентности возвратных вершин, то можно считать, что весь граф G является одной компонентой. В этом случае матрица допустимых переходов П является неразложимой.

Теорема 2. Существует поток m на графе G, энтропия которого совпадает с энтропией графа G:

$$h_m = h(G) = \ln \lambda.$$

Для вычисления меры максимальной энтропии рассмотрим метод вычисления левого собственного вектора для максимального собственного числа. [1]

Пусть П – матрица допустимых переходов, для которой надо найти левый собственный вектор для максимального собственного числа. В начале алгоритма генерируется случайный вектор r_0. Далее проводятся последовательные вычисления по итеративной формуле:

$$r_{k+1} = \frac{r_k \Pi}{r_k \Pi \vee.}$$

Расстояние от элементов данной последовательности до левого собственного вектора стремится к нулю. При этом последовательность

$$\mu_k = \frac{(r_k, r_k \Pi)}{(r_k, r_k)}$$

сходится к максимальному собственному значению. В результате алгоритма для матрицы допустимых переходов П мы получаем максимальное собственное число

$$\lambda_{max} = \lim_{k \to \infty} \mu_k$$

и левый собственный вектор

$$e = \lim_{k \to \infty} r_k = (e_1, e_2, \dots, e_n), e_i > 0.$$

Построим стохастическую матрицу

$$P = \left(p_{ij} = \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} \right).$$

Для матрицы Р найдем левый неподвижный вектор $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ такой, что

$$mP = m, m_k > 0, \sum_k m_k = 1.$$

Этот вектор можно найти алгоритмом, описанным выше, при этом начальный вектор удобно выбрать равным вектору e.

Для построенных стохастической матрицы P и ее стационарного распределения m определим поток

$$m_{ij} = p_{ij} m_i = \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i. \quad (1)$$

Согласно теореме 2, метрическая энтропия достигает своего максимального значения на построенном потоке m_{ij}.

$$E = h_m = ln\lambda_{max}$$

РЕШЕНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

1. Построить достаточно малую окрестность компонент цепно-рекуррентного множества для заданного отображения;
2. Найти левый собственный вектор для максимального собственного числа матрицы переходов символического образа;
3. Вычислить поток максимальной энтропии по формуле (1);
4. Изобразить распределение вычисленной инвариантной меры максимальной энтропии в виде трёхмерного графика, где в плоскости (xy) лежат окрестности компонент цепно-рекуррентного множества, а на оси z отмечается плотность распределения.

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

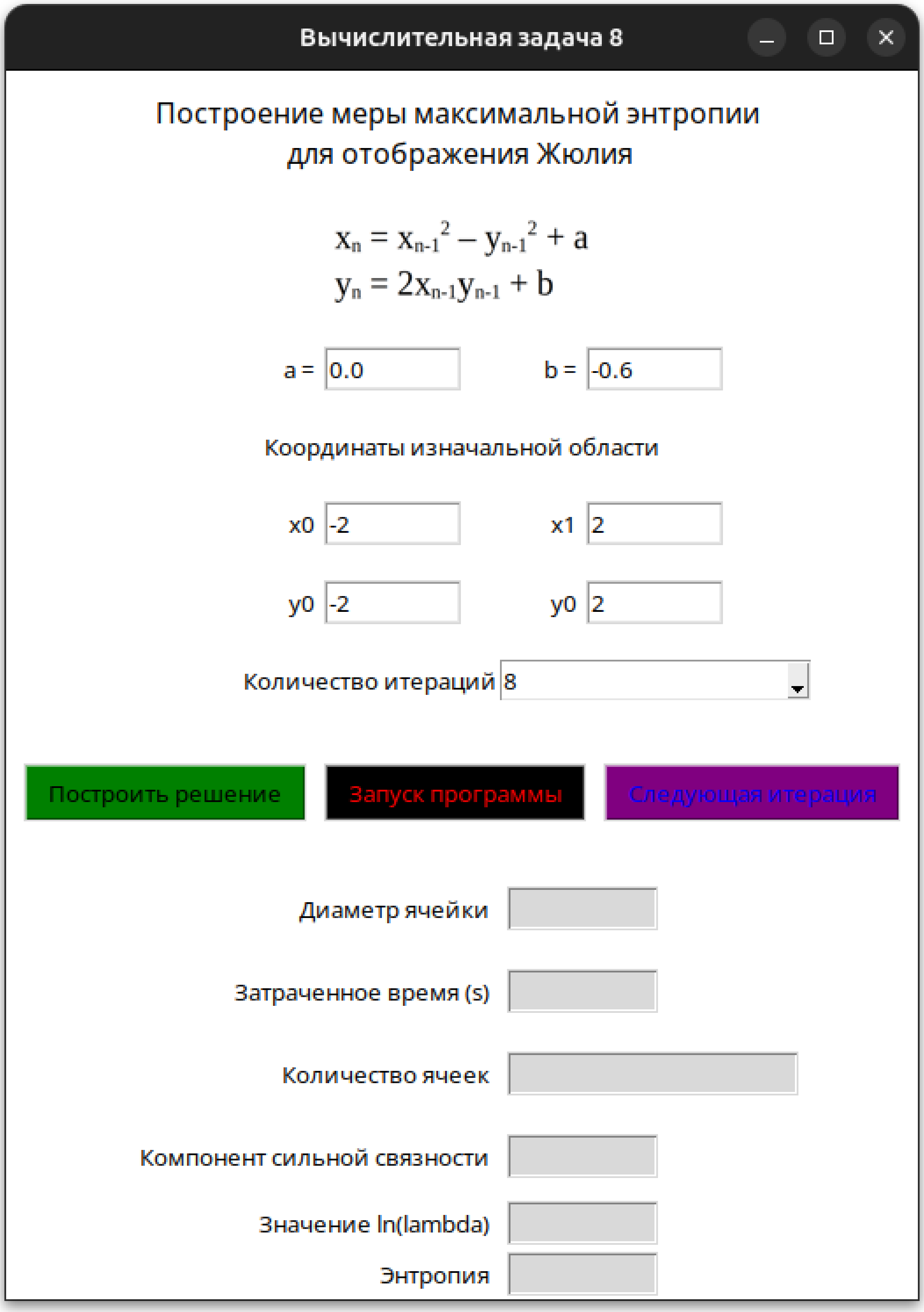

Рисунок 1: Пользовательский интерфейс программы

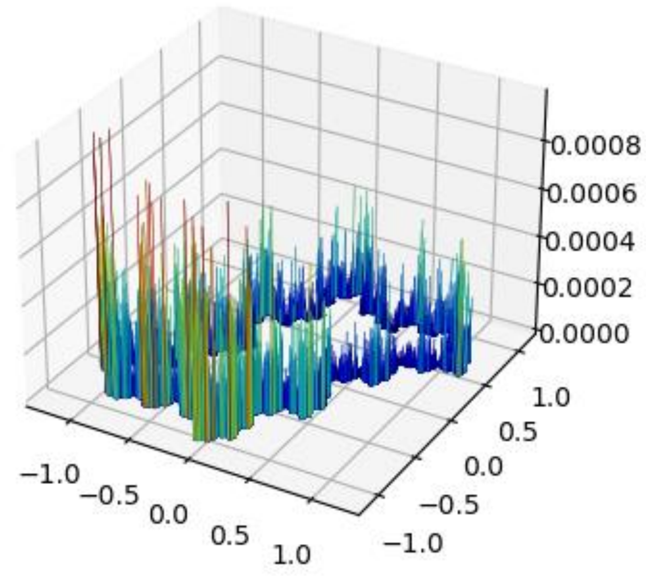

Рисунок 2: Полученный результат при 10 итерациях и значениях параметров $a = 0$, $b = -0.6$.

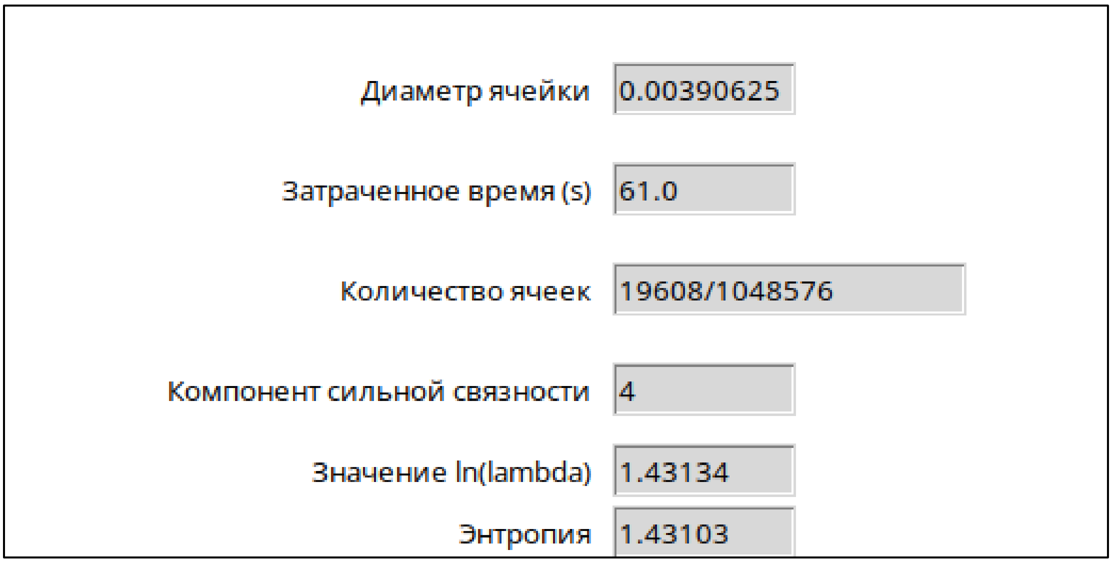

Рисунок 3: Полученные информационные значения после отработки программы

ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ

Время выполнения программы зависит от количества итераций: 10 итераций выполнено за 61 секунду.

Было использовано 219 мегабайт памяти компьютера при подсчете ячеек и около 100 мегабайт при графическом построении результата.

Нагрузка на процессор (AMD Ryzen 3 3200U) доходила до 78% при подсчете ячеек и ~50% при графическом отображении.

Программа была написана самостоятельно на языках программирования C++ для выполнения основного алгоритма и Python3 [2] с использованием графической библиотеки Matplotlib [3] для графического отображения ячеек и библиотеки для создания оконных приложений Tkinter [4]. Программа ориентирована на UNIX-подобные системы. Необходимо предварительно установить все вышеперечисленные Python библиотеки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипенко Г.С. Компьютерно-ориентированные методы динамических систем: учебное пособие. – М: ИНФРА-М, 2023, – 295 с.
2. https://www.python.org/doc/
3. https://matplotlib.org/
4. https://docs.python.org/3/library/tkinter.html#module-tkinter