МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ СЕВАСТОПОЛЕ

Факультет «Компьютерной математики»
Направление подготовки «Прикладная математика и информатика»
01.03.02 (бакалавр)

ОТЧЁТ

по вычислительной задаче №1

**«Итерация кривой:
оценка энтропии и определение гомоклинической точки»**

Работу выполнил:
Студент группы ПМ-401
Воронец Владимир Олегович

Руководитель: профессор
кафедры прикладной
математики и информатики
Осипенко Георгий Сергеевич

Севастополь, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 3
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ 3
РЕШЕНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ 5
КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ 5
ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ 8
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 8

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Создать механизм для приближенного создания инвариантных пространств с использованием итераций кривых с целью поиска точки гомоклинического пересечения в системе; рассчитать и оценить энтропию отображения, созданной с использованием функции вида:

$$x_1 = x + y + ax(1 - x)$$

$$y_1 = y + ax(1 - x)$$

где $a = 1.35$.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Пусть p — неподвижная точка диффеоморфизма $f : R^n \to R^n$, т. е. $f(p) = p$. Для изучения поведения орбит вблизи p перейдем к линейному отображению $x \to Ax$, где $A = Df(p) = \frac{\partial fi(p)}{\partial xj}$ — матрица Якоби отображения f, вычисленная в точке p. Если A не имеет собственных чисел равных по модулю 1, то неподвижная точка p называется *гиперболической*. В этом случае ее собственные числа $\{\lambda i\}$, $i = 1,\ldots,n$ распадаются на две части: устойчивую $\{|\lambda i| < 1\}$, $i = 1,\ldots,k$ и неустойчивую $\{|\lambda j| > 1\}$, $j = k + 1,\ldots,n$. Если $k \neq n$, точка называется седловой. Пусть $\{v_1,\ldots,v_k\}$ собственные и присоединенные векторы, соответствующие устойчивой части и $\{v_{k+1},\ldots,v_n\}$ — неустойчивой части. Собственное подпространство E^s, натянутое на векторы $\{v_1,\ldots,v_k\}$, называется *устойчивым*, а собственное подпространство E^u, натянутое на векторы $\{v_{k+1},\ldots,v_n\}$, называется *неустойчивым*.

Таким образом, глобальное устойчивое W^s многообразие является образом локального устойчивого многообразия при отрицательных итерациях отображения f, а глобальное неустойчивое многообразие W^u является образом локального неустойчивого многообразия при положительных итерациях. Построенные многообразия являются взаимнооднозначными образами евклидовых пространств R^k и R^{n-k}.

Точки пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий $W_s(A)$ $W_u(A)$ называются *гомоклиническими*.

Вблизи трансверсальной гомоклинической траектории имеется инвариантное множество Ω, траектории которого можно закодировать всевозможными последовательностями из двух символов. В частности, периодическим последовательностям соответствуют периодические траектории равного периода. Это означает наличие периодических траекторий любого большего периода, причем множество периодических траекторий плотно в Ω. Инвариантное множество Ω гомеоморфно произведению двух канторовых множеств. Таким образом, наличие трансверсальной гомоклинической точки гарантирует хаотическую динамику. [1]

Энтропия динамической системы – это число, которое выражает степень хаотичности траекторий динамической системы. Более высокие значения энтропии указывают на большую степень хаоса и непредсказуемости в системе.

Формула подсчета энтропии имеет вид:

$\frac{ln\, L(f(\gamma)}{n}$, где L – длина кривой, n – количество итераций.

При итерировании кривой мы получаем следующую формулу для количества точек N для данной итерации функции после применения алгоритма. Если n стремится к бесконечному значению, то энтропию можно приблизительно выразить как:

$$\lambda = \frac{ln\, N}{n}$$

$E = \sup \lambda$ по всем кривым γ. Значит, энтропия $E \geq \lambda$.

РЕШЕНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Пусть аппроксимирующая ломаная имеет звено $[AB]$ и расстояние $\rho(f(A), f(B)) > h$. В этом случае на отрезке $[AB]$ введем точку C и будем считать, что аппроксимирующая ломаная вместо звена [AB] имеет два звена $[AC]$ и $[CB]$. Если расстояния $\rho(f(A), f(C)) < h$ и $\rho(f(C), f(B)) < h$, то процесс деления прекращается, иначе надо осуществить новое деление каждого звена, длина которого больше h. Таким образом, строится новая аппроксимирующая ломаная, с длиной звена меньше числа h.

Для лучшего графического изображения можно использовать тот факт, что кривая и ломаная будут неразличимы на экране (т. е мы будем получать на экране сплошную линию), если расстояние между узлами ломаной меньше, чем пиксел. Иными словами, при соответствующем выборе масштаба изображение на экране будет создавать достаточно хорошее впечатление "непрерывности". Предположим, что исследуемая прямоугольная область в декартовых координатах имеет вид $[a, b] \times [c, d]$. Допустим, что на экране ей соответствует прямоугольник размера $p_x \times p_y$, где p_x, p_y заданы в пикселах. Величины $h_x = \frac{(b-a)}{p_x}$, $h_y = \frac{(d-c)}{p_y}$ задают коэффициенты соотношения между единицей измерения в декартовой и экранной системах координат. Тогда кривая и ломаная неразличимы на экране, если для любого звена ломаной A_iA_{i+1} с координатами $A_i(x_i, y_i)$ и $A_i(x_i+1, y_i+1)$ имеет место соотношение

$$|x_i - x_{i+1}| \le h_x, \ |y_i - y_{i+1}| \le h_y \quad [1]$$

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

В качестве вводных параметров программа получает прямое и обратное отображения, параметры отображения (A, B, C), точность и количество итераций. Опционален выбор цвета полученных отображений.

Для работы пользователю предложены 3 кнопки: «Решить», позволяющая запустить программу; «Итерация», позволяющая построить следующую итерацию без необходимости закрытия программы; «Посчитать энтропию», по нажатию которой идет подсчет энтропии данной итерации (результат подсчета будет показан в нижестоящем окне «Энтропия:»).

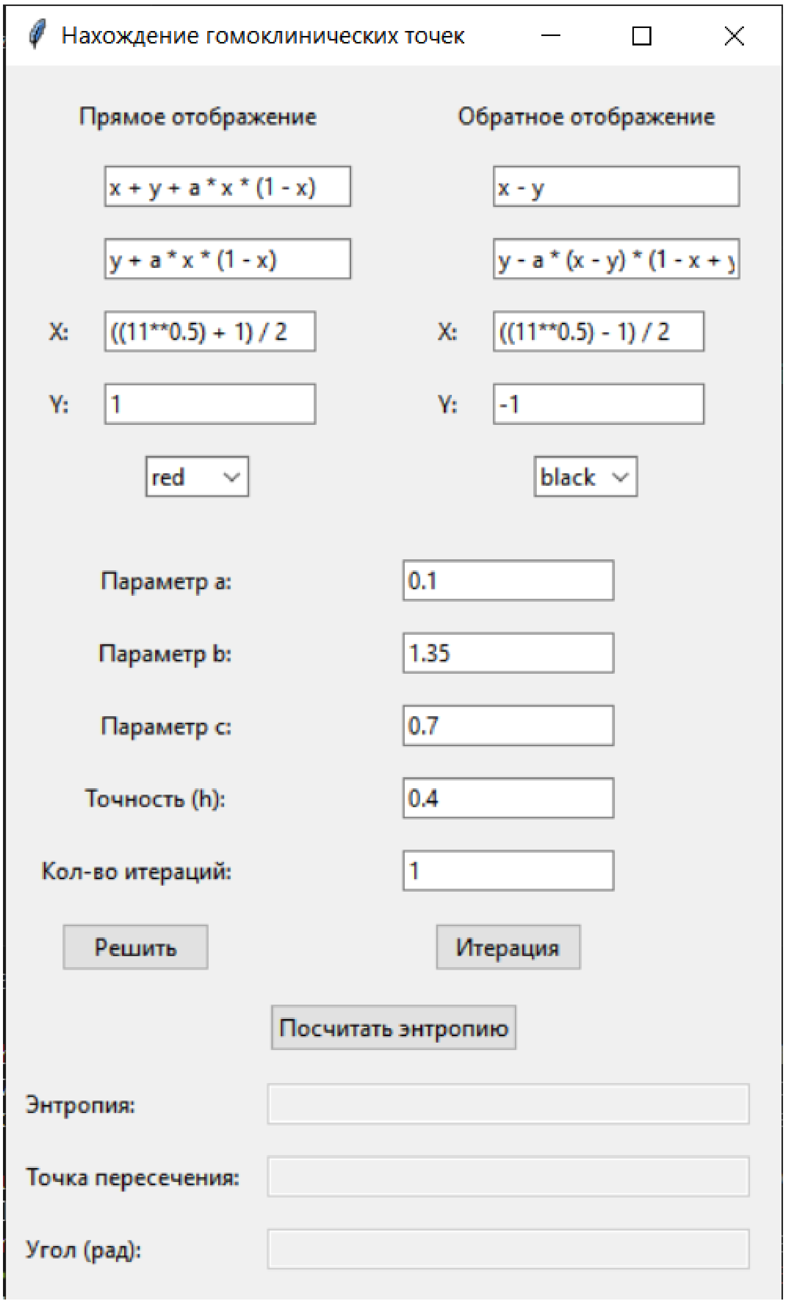

Рисунок 1: Пользовательский интерфейс программы.

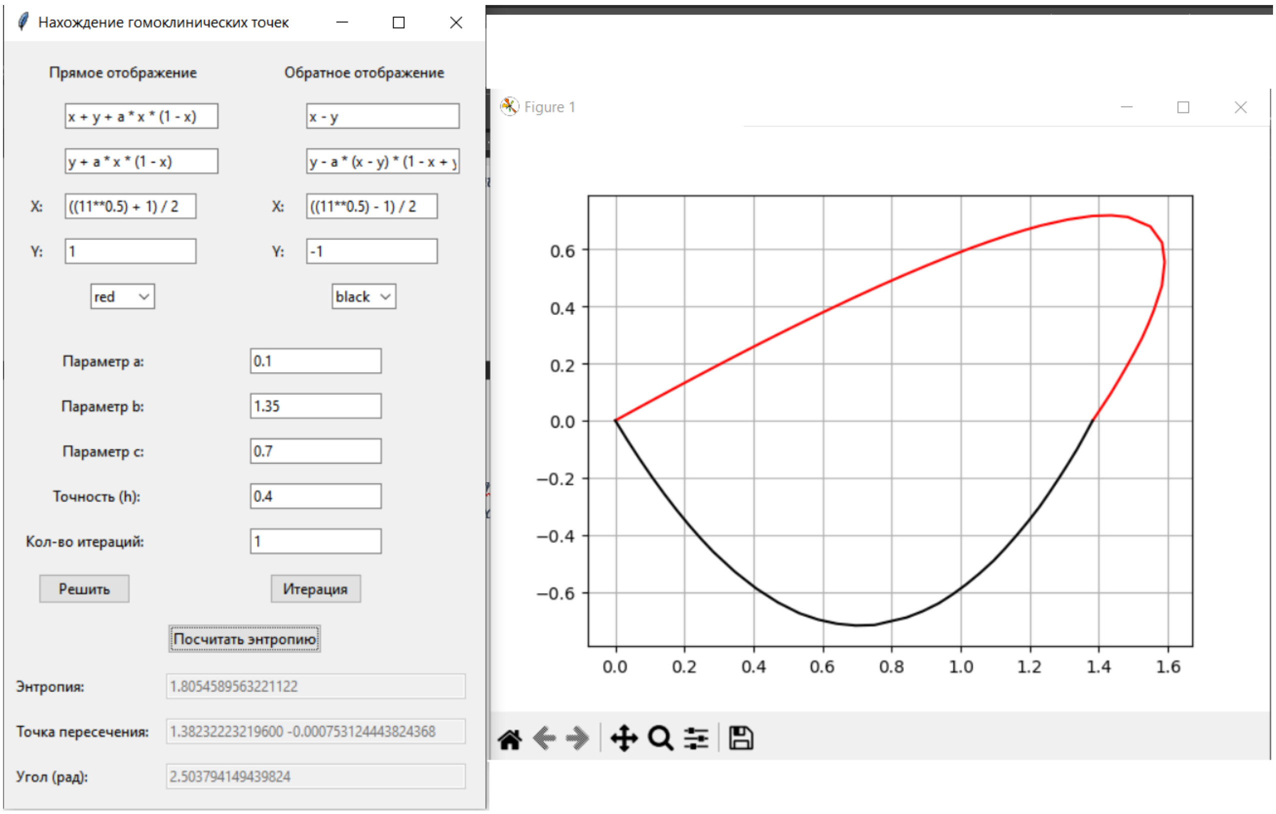

Рисунок 2: Пример отработки программы при заданных параметрах и двух дополнительных итераций по кнопке. Внизу пользовательского интерфейса обновились поля и отобразились оценка энтропии, координаты точки пересечения и угол между прямыми (в рад.)

Рисунок 3: Нагрузка работы программы на процессор и оперативную память при 10 итерациях и точности 0.01.

ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ

Время выполнения программы: 1.98 секунд.

Было использовано 87.2 мегабайта памяти компьютера при простое в оконном режиме и около 120 мегабайт при 10 итерациях.

Нагрузка на процессор (AMD Ryzen 3 3200U) составляла от 0% в простое и до 35% максимум в процессе подсчетов итераций.

Программа была написана на языке программирования Python [2] с использованием графической библиотеки Matplotlib [3], библиотеки для работы с массивами Numpy, библиотеки для создания оконных приложений Tkinter, библиотек для математических преобразований Scipy, math, Sympy. Для запуска программы необходимо предварительно установить данные библиотеки. Запуск осуществляется с командной строки по имени файла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипенко Г.С., Ампилова Н.Б. Введение в символический анализ динамических систем: – СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2004. 240 с.
2. https://www.python.org/doc/
3. https://matplotlib.org/