

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ СЕВАСТОПОЛЕ

Факультет «Компьютерной математики»  
Направление подготовки «Прикладная математика и информатика»  
01.03.02 (бакалавр)

**ОТЧЁТ**  
**по вычислительной задаче №6**  
**«Топологическая сортировка графа.**  
**Построение аттрактора и фильтрация динамической системы»**

Работу выполнил:  
Студент группы ПМ-401  
Воронец Владимир Олегович

Руководитель: профессор  
кафедры прикладной  
математики и информатики  
Осипенко Георгий Сергеевич

Севастополь, 2023

## **ОГЛАВЛЕНИЕ**

<b>ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....</b>	<b>3</b>
<b>ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.....</b>	<b>3</b>
<b>РЕШЕНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ.....</b>	<b>4</b>
<b>КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ.....</b>	<b>5</b>
<b>ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ .....</b>	<b>7</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>8</b>

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Построить достаточно малое разбиение области на ячейки для символического образа аттракторов динамической системы для динамической системы (уравнения Дуффинга).

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = B \cos(\omega t)$$

в области  $R^2: [-2; 2] \times [-2; 2]$

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Дан ориентированный граф  $G$ . В [1] гарантировано существование нумерации, которая приводит матрицу переходов графа  $G$  в канонический вид:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{smallmatrix} \square & \diagdown & \square & \square & \square \end{smallmatrix} & & & & \\ 0 & \square & P_k & \dots & \dots \\ \begin{smallmatrix} \square & \diagdown & \square & \diagdown & \square \end{smallmatrix} & & & & \\ 0 & \square & 0 & \square & P_s \end{pmatrix}$$

Каждый диагональный блок либо отвечает компоненте сильной связности, либо соответствует некоторой невозвратной вершине и состоит из одного нуля. Под диагональными блоками стоят только нули.

Топологическая сортировка графа заключается в перенумерации его вершин таким образом, чтобы матрица переходов имела канонический вид.

По теореме 5.1 [1]  $P(d)$  – это окрестность, равная объединению всех ячеек, соответствующих возвратным вершинам графа, где  $d$  – длина стороны ячейки.

$$P(d) = \{\cup M(i), i - \text{возвратная}\}$$

Тогда аттрактор динамической системы совпадает с пересечением множеств  $P(d)$  по формуле:

$$Q = \bigcap_{d>0} P(d)$$

По теореме 5.2 [1], при уменьшении размера ячейки новая окрестность оказывается вложена в старую. Из этого следует то, что уменьшение диаметра ячеек приводит к меньшему размеру окрестности. Таким образом, последовательность окрестностей монотонно убывает и сходится к цепно-рекуррентному множеству по формуле:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \bigcap_k P_k = Q$$

## РЕШЕНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Чтобы построить цепно-рекуррентное множество для данной динамической системы, необходимо построить символический образ системы и выделить в получившемся графе компоненты сильной связности. Для нахождения сильно связанных вершин графа и их топологической сортировки был использован алгоритм Косарайю. В результате работы алгоритма мы получаем компоненты сильной связности в порядке, соответствующем порядку прохождения аттракторов динамической системы

Для нахождения примерных точек аттракторов динамической системы для каждой компоненты сильной связности, состоящей из 2 вершин и более:

1. Для каждой ячейки соответствующей компоненте отображаем точки этой ячейки.
2. Если точка попала в свою ячейку, то считаем результат отображения аттрактором, которому соответствует компонента сильной связности.

Для построения области стягивания точек в аттрактор была выбрана одна сильно связная вершина графа с максимальным количеством зависящих

вершин и рассматривались ее предки – вершины, которые попадали в эту вершину.

## КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Вычислительная работа 6

Построение аттрактора и фильтрации отображения Дуффинга

$$\begin{cases} \dot{y} = -ky + \alpha x + \beta x^3 + B \cos(\omega t) \\ \dot{x} = y \end{cases}$$

k =

α =

B =

β =

ω =

Координаты изначальной области

x0

x1

y0

y1

Шаг (h):

Корень кол-ва точек внутри области:

Количество итераций

Построить решение

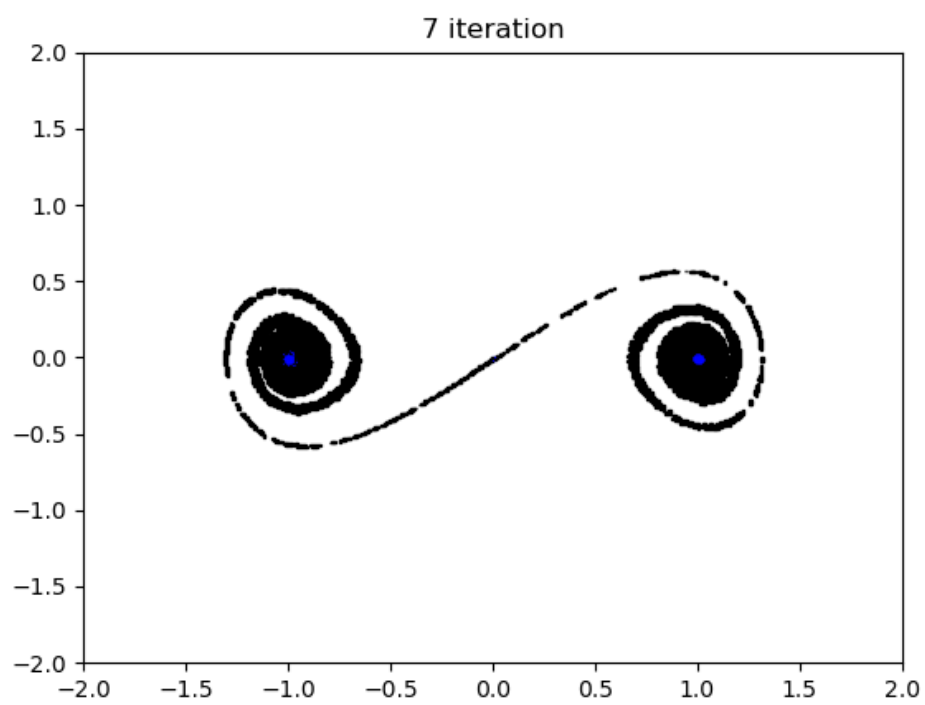
Запуск программы

Следующая итерация

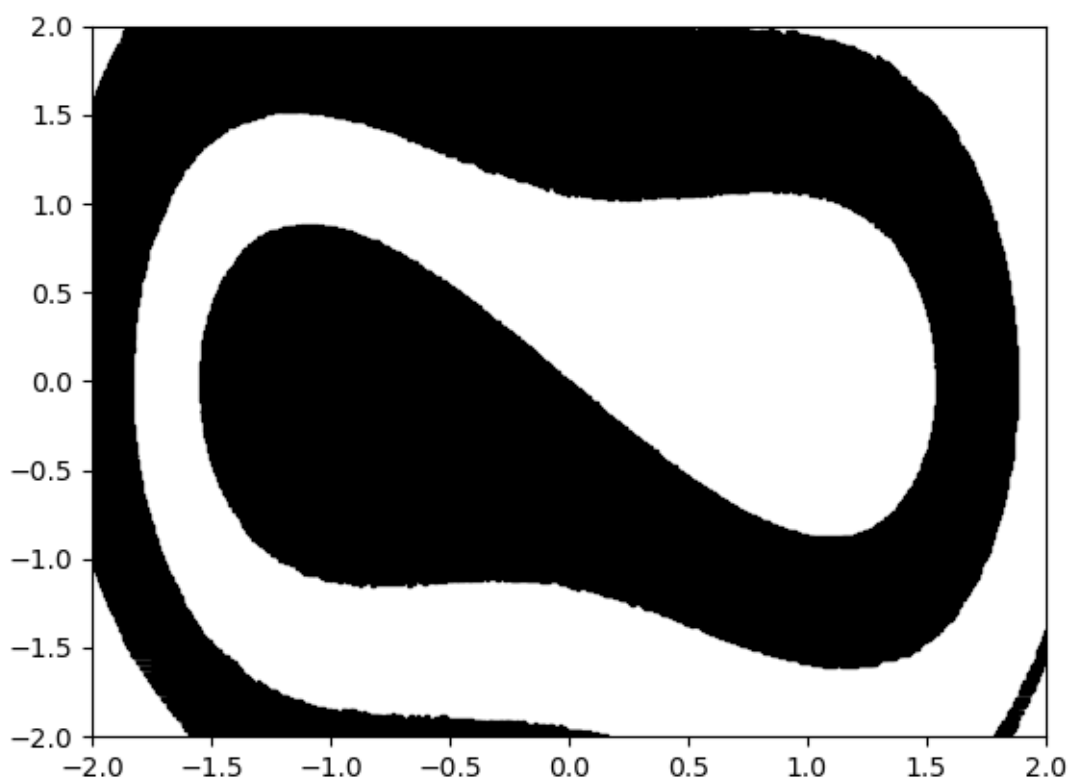
Количество ячеек на рисунке

Затраченное время (s)

Рисунок 1: Пользовательский интерфейс программы



*Рисунок 2: Полученный результат при 7 итерациях*



*Рисунок 3: Область стягивания аттрактора при 7 итерациях*

Количество ячеек на рисунке	8280
Затраченное время (s)	153.263

*Рисунок 4: Информационное поле после подсчета и построения 7 итераций*

## **ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ**

Время выполнения программы зависит от количества итераций. 6 итераций выполнено за 44 секунды, 7 итераций – за 153 секунды. Для графического отображения в среднем уходит 10-25 секунд.

В силу изменений в алгоритме, область подсчитывается дольше – 5 итераций посчитаны за 74 секунды, 6 итераций – 340 секунд и 7 итераций – за 2109 секунд.

Нагрузка на процессор (AMD Ryzen 3 3200U) доходила до 85% при подсчете и около 53% при графическом отображении. Неполная загрузка процессора связана с отсутствием распараллеливания алгоритма и выбранного языка программирования.

Программа была написана на языке программирования Python3 [2] с использованием графической библиотеки Matplotlib [3] для графического отображения ячеек, библиотеки для создания оконных приложений Tkinter [4] и фреймворка NetworkX [5] для работы с графами и алгоритма Косарайю. Программа ориентирована на UNIX-подобные системы. Необходимо предварительно установить все вышеперечисленные Python библиотеки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипенко Г.С., Ампилова Н.Б. Введение в символический анализ динамических систем: – СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2004. 240 с.
2. <https://www.python.org/doc/>
3. <https://matplotlib.org/>
4. <https://docs.python.org/3/library/tkinter.html#module-tkinter>
5. <https://networkx.org/>