МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ СЕВАСТОПОЛЕ

Факультет «Компьютерной математики»
Направление подготовки «Прикладная математика и информатика»
01.03.02 (бакалавр)

ОТЧЁТ
по вычислительной задаче №1
«Решение уравнения
методом Рунге-Кутты»

Работу выполнил:
Студент группы ПМ-401
Воронец Владимир Олегович

Руководитель: профессор
кафедры прикладной
математики и информатики
Осипенко Георгий Сергеевич

Севастополь, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Используя метод Рунге-Кутты, решить уравнение Дуффинга

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma\cos\omega t$$

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Методы Рунге-Кутты — большой класс численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем.

К классу методов Рунге-Кутты относятся явный метод Эйлера.

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [1]:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Новое значение высчитывается в четыре стадии:

$k_1 = f(x_n, y_n)$

$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$

$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$

$k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$

Где h – величина шага по x.

Для высших порядков задача сводится к задаче Коши первого порядка последствием замены переменных.

РЕШЕНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, применяя метод Эйлера.

Уравнение Дуффинга:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t \end{cases}$$

Численное решение задаётся формулами [2]:

$$f(t, x, y) = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t$$

$$g(t, x, y) = y$$

$$k_1 = hf(t_0, x_0, y_0)$$

$$q_1 = hg(t_0, x_0, y_0)$$

$$k_2 = hf(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{q_1}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2})$$

$$q_2 = hg(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{q_1}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{q_2}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2})$$

$$q_3 = hg(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{q_2}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(t_0 + h, x_0 + q_3, y_0 + k_3)$$

$$q_4 = hg(t_0 + h, x_0 + q_3, y_0 + k_3)$$

$$x_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4)$$

$$t_{1=}t_0 + h$$

По условию, нам известны коэффициенты:

ω = 1

δ = 0.25

γ = 0.3

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

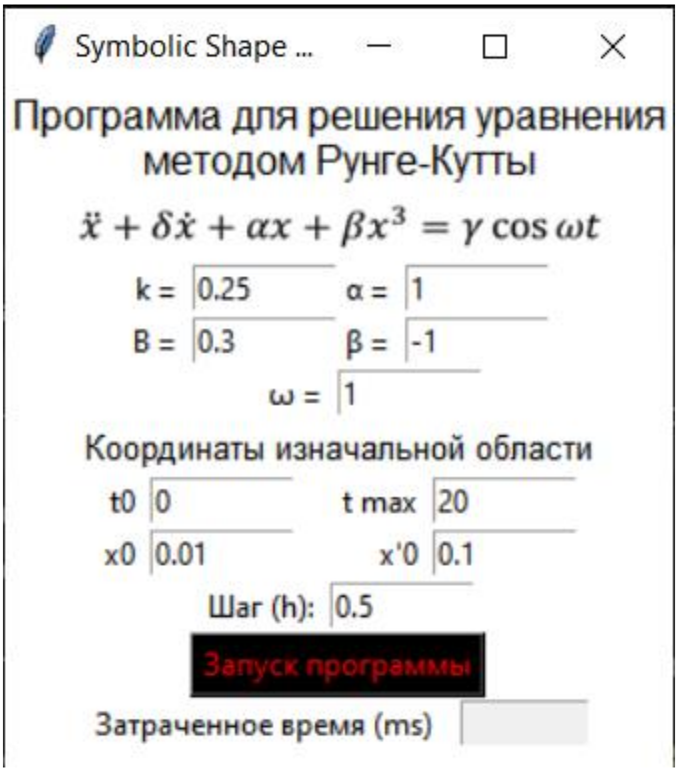

Рисунок 1: Пользовательский интерфейс программы

Отображение, построенное методом Эйлера при $t_0 = 0$, $t_{max} = 20$, $x_0 = 0.01$, $y_0 = 0.1$, $h = 0.01$.

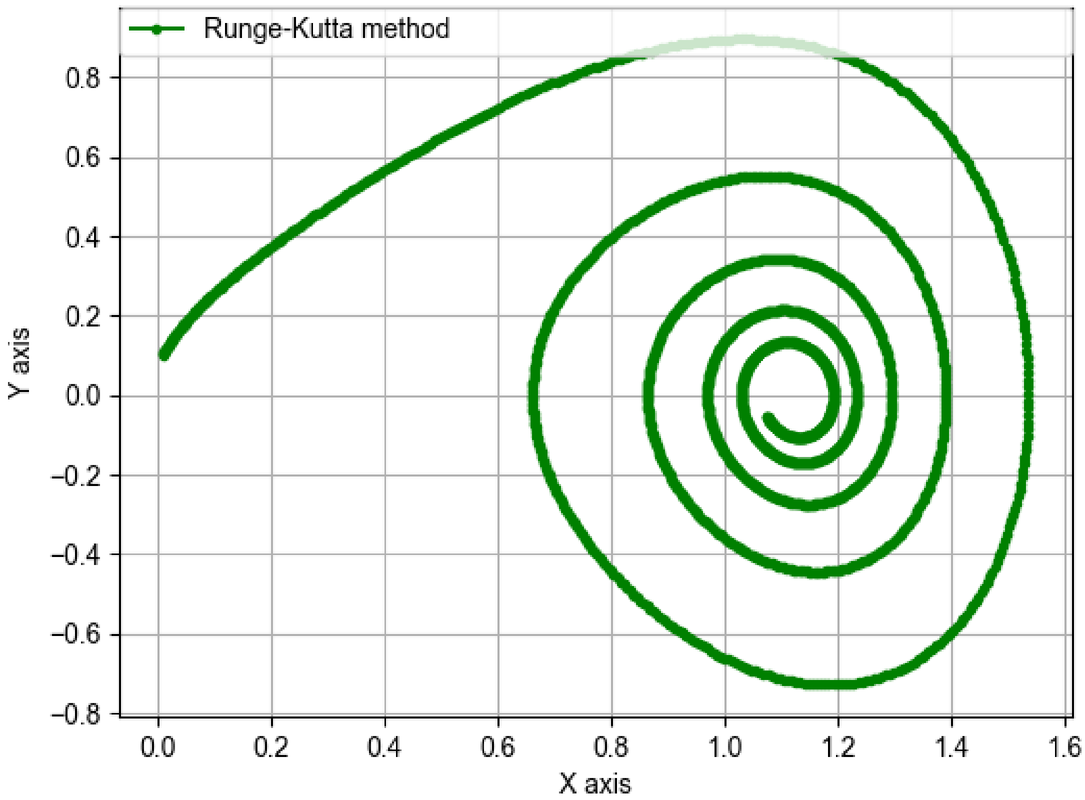

Рисунок 2: Полученное отображение методом Рунге-Кутты

ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ

Время выполнения программы – 2.5 миллисекунды.

Программа была написана самостоятельно на языке программирования Python в среде программирования PyCharm с использованием библиотеки Matplotlib [3] для графического изображения полученного отображения, и Tkinter для создания оконных приложений и создания пользовательского интерфейса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Рунге_—_Кутты
2. http://www.mathprofi.ru/metody_eilera_i_runge_kutty.html
3. https://www.python.org/doc/