

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ СЕВАСТОПОЛЕ

Факультет «Компьютерной математики»
Направление подготовки «Прикладная математика и информатика»
01.03.02 (бакалавр)

ОТЧЁТ
по вычислительной задаче №7
«Построение инвариантных мер методом балансировки
для дискретной динамической системы (отображение Жюлиа)»

Работу выполнил:
Студент группы ПМ-401
Воронец Владимир Олегович

Руководитель: профессор
кафедры прикладной
математики и информатики
Осипенко Георгий Сергеевич

Севастополь, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	3
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.....	3
РЕШЕНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ.....	4
КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ	5
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	7

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Построить с помощью метода балансировки инвариантную меру для дискретной динамической системы (отображения Жюлиа):

$$x \rightarrow x^2 - y^2 + a$$

$$y \rightarrow 2xy + b$$

в области $R^2: [-2; 2] \times [-2; 2]$

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Пусть $f: M \rightarrow M$ – гомеоморфизм компактного многообразия M . Мера μ на M называется инвариантной для гомеоморфизма f , если для любого измеримого множества $A \subset M$ выполнены равенства

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) = \mu(f(A)).$$

Пусть G – ориентированный граф. Поток на G называется распределение $\{m_{ij}\}$ на дугах $\{i \rightarrow j\}$ такое, что

$$m_{ij} \geq 0;$$

$$\sum_{ij} m_{ij} = 1;$$

$$\sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}, \forall i.$$

Для потока на графе мера i -ой вершины можно определить как

$$m_i = \sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}.$$

Для построения потока на графе используется метод балансировки, заключающийся в применении к исходной матрице $x = (x_{ij})$ преобразований:

$$x_{ij}^{t+1} = x_{ij}^t \left(\frac{\sum_{k \neq i} x_{ki}^t}{\sum_{l \neq i} x_{il}^t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

для $j \neq i$ – преобразование i -ой строки,

$$x_{ij}^{t+1} = x_{ij}^t \left(\frac{\sum_{l \neq i} x_{il}^t}{\sum_{m \neq i} x_{mi}^t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

для $k \neq i$ – преобразование i -го столбца,

$$x_{ii}^{t+1} = x_{ii}^t.$$

Чтобы применить метод балансировки для нахождения инвариантной меры динамической системы, необходимо в качестве начального распределения рассмотреть матрицу допустимых переходов символического образа при $t \rightarrow \infty$.

Метод балансировки последовательным приближением преобразует исходную матрицу в поток $\{m_{ij}\}$ на символическом образе. Полученное распределение $\{m_i = \sum_j m_{ij}\}$ вероятностной меры на вершинах символического образа задаёт меру ячеек $\{M(i)\}$ и является приближением к инвариантной мере [1].

РЕШЕНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

1. Построить достаточно малую окрестность компонент цепно-рекуррентного множества для отображения Жюлиа при выбранных параметрах;
2. Применить к символическому образу метод балансировки.
3. Изобразить распределение вычисленной инвариантной меры в виде трёхмерного графика, где в плоскости (xy) лежит окрестность компонент цепно-рекуррентного множества, а по оси z откладывается величина меры ячейки.

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Вычислительная задача 7

Построение инвариантных мер методом балансировки
для отображения Жюлия

$$x_n = x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 + a$$
$$y_n = 2x_{n-1}y_{n-1} + b$$

a = b =

Координаты изначальной области

x0 x1

y0 y1

Количество итераций

Построить решение

Запуск программы

Следующая итерация

Диаметр ячейки

Затраченное время (s)

Количество ячеек

Компонент сильной связности

Рисунок 1: Пользовательский интерфейс программы

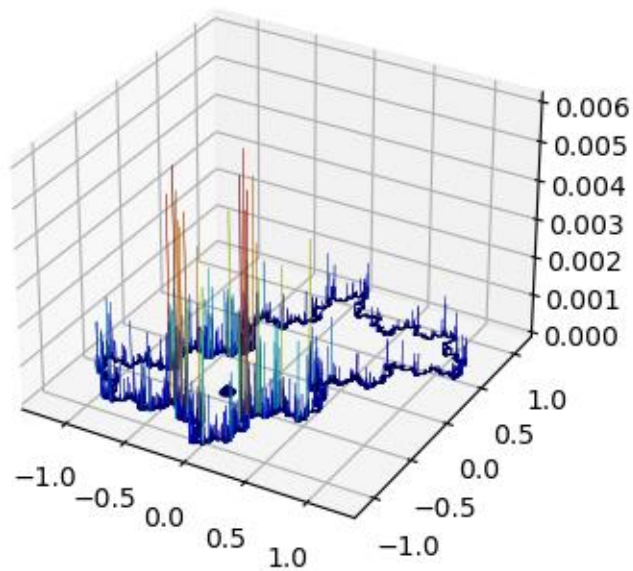


Рисунок 2: Полученный результат при 10 итерациях и значениях параметров $a = 0$, $b = -0.6$.

Диаметр ячейки	0.00390625
Затраченное время (s)	116.0
Количество ячеек	19608/1048576
Компонент сильной связности	4

Рисунок 3: Полученные информационные значения после отработки программы

ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ

Время выполнения программы зависит от количества итераций: 10 итераций выполнено за 116 секунд.

Было использовано 343 мегабайт памяти компьютера при подсчете ячеек и около 92 мегабайт при графическом построении результата.

Нагрузка на процессор (AMD Ryzen 3 3200U) доходила до ~80% при подсчете ячеек и ~40% при графическом отображении.

Программа была написана самостоятельно на языках программирования C++ для выполнения основного алгоритма и Python3 [2] с использованием графической библиотеки Matplotlib [3] для графического отображения ячеек и библиотеки для создания оконных приложений Tkinter [4]. Программа ориентирована на UNIX-подобные системы. Необходимо предварительно установить все вышеперечисленные Python библиотеки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осипенко Г.С. Компьютерно-ориентированные методы динамических систем: учебное пособие. – М: ИНФРА-М, 2023, – 295 с.
2. <https://www.python.org/doc/>
3. <https://matplotlib.org/>
4. <https://docs.python.org/3/library/tkinter.html#module-tkinter>