МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Ю. Е. Кувайскова

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

Ульяновск
УлГТУ
2014

УДК 519.61 (075.8)
ББК 22.193я73
К 88

Рецензенты: зав. кафедрой «Информационная безопасность и теория управления» Ульяновского государственного университета, д-р физ.-мат. наук, профессор А.С. Андреев,
кафедра «Телекоммуникационные технологии и сети» Ульяновского государственного университета.

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Кувайскова, Ю. Е.
К 88 Численные методы. Лабораторный практикум : учебное пособие / Ю.Е. Кувайскова. – Ульяновск : УлГТУ, 2014. – 113 с.
ISBN 978-5-9795-1246-4

Содержание учебного пособия включает краткие теоретические сведения по методам оценки погрешностей приближенных вычислений, численным методам решения нелинейных уравнений, систем линейных и нелинейных уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений, методам интерполяции и аппроксимации таблично заданных функций и методам численного интегрирования. Приведена методика выполнения лабораторных работ и варианты заданий.
Пособие написано в соответствии с программами курсов «Численные методы» для студентов направления «Прикладная математика» и дисциплине «Вычислительная математика» для студентов направления «Информатика и вычислительная техника» и может служить руководством к выполнению лабораторных работ.

УДК 519.61 (075.8)
ББК 22.193я73

ISBN 978-5-9795-1246-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Численные методы (Вычислительная математика) – раздел прикладной математики, в котором проводятся разработка, обоснование и реализация (на базе вычислительной техники) методов приближенного решения разнообразных задач на уровне математических моделей.

Основное содержание дисциплины составляют численные методы, представляющие собой упорядоченные схемы (итерационные процедуры, расчетные формулы, алгоритмы) переработки информации с целью нахождения приближенного решения рассматриваемой задачи в числовой форме.

Следует подчеркнуть компьютерно-ориентированный характер численных методов – в конечном итоге их реализация связана с применением вычислительной техники и программирования.

В настоящем пособии представлены лабораторные работы, целью проведения которых является ознакомление студентов с численными методами решения практических задач. Лабораторные работы нацелены на выработку навыков, необходимых при решении проектных и научных задач с использованием электронных вычислительных машин. Для выполнения расчетов рекомендуется использовать математически ориентированные программные системы, такие как MathCAD, MathLAB и другие.

Пособие предназначено для студентов направления «Прикладная математика» по дисциплине «Численные методы» и для студентов направления «Информатика и вычислительная техника» по дисциплине «Вычислительная математика» и служит руководством к выполнению лабораторных работ.

1. Лабораторная работа №1. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1.1. Погрешности приближенных вычислений

1.1.1. Правила оценки погрешностей

Пусть A и a – два «близких» числа. A – точное, a – приближенное.

Определение. Величина $\Delta(a) = |A - a|$ называется абсолютной погрешностью приближенного числа a, а величина $\delta(a) = \dfrac{\Delta a}{|a|}$ – относительной погрешностью.

Числа Δ_a и δ_a такие, что $\Delta_a \ge \Delta a$ и $\delta_a \ge \delta a$ называются оценками или границами абсолютной или относительной погрешностей (предельные погрешности).

Пусть a и b – два приближенных числа.

Абсолютные погрешности:

$\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$,

$\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b$,

$\Delta(a \cdot b) = a\Delta b + b\Delta a$,

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2}.$$

Относительные погрешности:

$$\delta(a+b) = \frac{\Delta(a+b)}{|a+b|} = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a+b|} = \frac{|a|}{|a+b|}\frac{\Delta a}{|a|} + \frac{|b|}{|a+b|}\frac{\Delta b}{|b|} = \frac{|a|}{|a+b|}\delta a + \frac{|b|}{|a+b|}\delta b,$$

$$\delta(a-b) = \frac{\Delta(a-b)}{|a-b|} = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a-b|} = \frac{|a|}{|a-b|}\frac{\Delta a}{|a|} + \frac{|b|}{|a-b|}\frac{\Delta b}{|b|} = \frac{|a|}{|a-b|}\delta a + \frac{|b|}{|a-b|}\delta b,$$

$$\delta(a \cdot b) = \delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta a + \delta b,$$

$$\delta(a^k) = k\delta a.$$

Определение. Для приближенного числа, полученного округлением, *предельная абсолютная погрешность* Δ_a равна половине единицы последнего разряда числа.

Пример. $a = 0{,}817$, $\Delta_a = 0{,}0005$.

Определение. *Значащими цифрами* числа называются все его цифры, начиная с первой ненулевой слева.

Пример. $0{,}000\underline{15}$ – две значащие цифры, $\underline{12{,}150}$ – все цифры значащие.

Определение. *Округлением* числа a называется замена его числом b с меньшим количеством значащих цифр.

Определение. Значащую цифру приближенного числа называют *верной*, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит эта цифра (в узком смысле) или единицы разряда (в широком смысле).

1.1.2. Оценка ошибок при вычислении функций

Пусть дана функция $y = f(x)$ и a – приближенное значение аргумента x, Δa – его абсолютная погрешность. Тогда за абсолютную погрешность функции можно принять ее приращение или дифференциал.

$\Delta y \approx dy$, $\Delta y = |f'(a)| \cdot \Delta a$.

Для функции n переменных можно записать:

$$\Delta y = \left|f'_{x_1}(x_1,...,x_n)\right| \cdot \Delta x_1 + ... + \left|f'_{x_n}(x_1,...,x_n)\right| \cdot \Delta x_n,$$

где $\Delta x_1,...,\Delta x_n$ – абсолютные погрешности.

$\delta y = \dfrac{\Delta y}{|f(x_1,...,x_n)|}$ – относительная погрешность.

Пример. $y = \sin x$, a – приближенное значение x.

$\Delta y = \Delta(\sin x) = |\cos(a)| \cdot \Delta a$.

1.1.3. Правила подсчета цифр

Принцип Крылова: Согласно техническому подходу, приближенное число должно записываться так, чтобы в нем все значащие цифры, кроме последней, были верными и лишь последняя была бы сомнительна и притом в среднем не более чем на одну единицу.

Чтобы результаты арифметических действий, совершенных над приближенными числами, записанными в соответствии с принципом Крылова, так же соответствовали этому принципу, нужно придерживаться следующих правил:

1. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим количеством десятичных знаков.

2. При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр.

3. При определении количества верных цифр в значениях элементарных функций от приближенных значений аргумента следует грубо оценить значение модуля производной функции. Если это значение не превосходит единицы или близко к ней, то в значении функции можно считать верными столько знаков после запятой, сколько их имеет значение аргумента. Если же модуль производной функции в окрестности приближенного значения аргумента превосходит единицу, то количество верных десятичных знаков в значении функции меньше, чем в значении аргумента на величину k, где k – наименьший показатель степени, при котором имеет место $|f`(x)| < 10^k$.

4. Результаты промежуточных вычислений должны иметь 1–2 запасных знака, которые затем должны быть отброшены.

1.1.4. Вычисления со строгим учетом предельных абсолютных погрешностей

Этот метод предусматривает использование правил вычисления предельных абсолютных погрешностей.

При пооперационном учете ошибок промежуточные результаты, так же как и их погрешности, заносятся в специальную таблицу, состоящую из двух параллельно заполняемых частей – для результатов и их погрешностей.

1.1.5. Вычисления по методу границ

Если нужно иметь абсолютно гарантированные границы возможных значений вычисляемой величины, используют специальный метод вычислений – метод границ.

Пусть $f(x,y)$ – функция непрерывная и монотонная в некоторой области допустимых значений аргументов x и y. Нужно получить ее значение $f(a, b)$, где a и b – приближенные значения аргументов, причем достоверно известно, что

$НГ_a < a < ВГ_a$;

$НГ_b < b < ВГ_b$.

Здесь НГ, ВГ – обозначения соответственно нижней и верхней границ значений параметров. Итак, вопрос состоит в том, чтобы найти строгие границы значения $f(a, b)$ при известных границах значений a и b.

Допустим, что функция $f(x,y)$ возрастает по каждому из аргументов x и y. Тогда

$f(НГ_a, НГ_b) < f(a, b) < f(ВГ_a, ВГ_b)$.

Пусть теперь $f(x,y)$ возрастает по аргументу x и убывает по аргументу y. Тогда будет строго гарантировано неравенство

$f(НГ_a, ВГ_b) < f(a, b) < f(ВГ_a, НГ_b)$.

Рассмотрим указанный принцип на примере основных арифметических действий.

Пусть $f(x,y) = x + y$. Тогда очевидно, что

$НГ_a + НГ_b < a + b < ВГ_a + ВГ_b$.

Точно так же для функции $f(x,y) = x - y$ (она по x возрастает, а по y убывает) имеем

$НГ_a - ВГ_b < a - b < ВГ_a - НГ_b$.

Аналогично для умножения и деления:

$НГ_a \cdot НГ_b < a \cdot b < ВГ_a \cdot ВГ_b$.

$НГ_a / ВГ_b < a / b < ВГ_a / НГ_b$.

Вычисляя по методу границ с пошаговой регистрацией промежуточных результатов, удобно использовать обычную вычислительную таблицу, состоящую из двух строк – отдельно для вычисления НГ и ВГ результата (по этой причине метод границ называют еще методом двойных вычислений). При выполнении промежуточных вычислений и округлении результатов используются все рекомендации правил подсчета цифр с одним важным дополнением: округление нижних границ ведется по недостатку, а верхних – по избытку. Окончательные результаты округляются по этому же правилу до последней верной цифры.

1.2. Пример выполнения лабораторной работы

1.2.1. Задание к лабораторной работе

1. Число X, все цифры которого верны в строгом смысле, округлите до трех значащих цифр. Для полученного числа $X_1 \approx X$ найдите предельную абсолютную и предельную относительную погрешности. В записи числа X_1 укажите количество верных цифр (в узком и широком смысле).

2. Вычислите с помощью микрокалькулятора значение величины Z при заданных значениях параметров a, b и c, используя «ручные» расчетные таблицы для пошаговой регистрации результатов вычислений, тремя способами:

1) по правилам подсчета цифр;

2) по методу строгого учета границ абсолютных погрешностей;

3) по способу границ.

Сравните полученные результаты между собой, прокомментируйте различие методов вычислений и смысл полученных числовых значений.

1.2.2. Решение типового примера

1. Число X = 7,3344, все цифры которого верны в строгом смысле, округлите до трех значащих цифр. Для полученного числа $X_1 \approx X$ найдите предельную абсолютную и предельную относительную погрешности. В записи числа X_1 укажите количество верных цифр (в узком и широком смысле).

Пусть X = 7,3344.

Округлим данное число до трех значащих цифр, получим число:

X_1 = 7,33.

Вычислим абсолютную погрешность:

$\Delta X_1 = |X - X_1| = |7{,}3344 - 7{,}33| = 0{,}0044$.

Определим границы абсолютной погрешности (предельную погрешность), округляя с избытком до одной значащей цифры:

$\Delta_{X_1} = 0{,}005$.

Предельная относительная погрешность составляет:

$$\delta_{X_1} = \frac{\Delta_{X_1}}{|X_1|} = \frac{0{,}005}{7{,}33} = 0{,}0007 = 0{,}07\%.$$

Укажем количество верных цифр в узком и широком смысле в записи числа X_1 = 7,33.

Так как $\Delta_{X_1} = 0{,}005 \le 0{,}005$, следовательно, в узком смысле верными являются все цифры числа X_1 7, 3, 3.

Так как $\Delta_{X_1} = 0{,}005 \le 0{,}01$, следовательно, в широком смысле верными являются также все цифры числа X_1 7, 3, 3.

2. Вычислите с помощью микрокалькулятора значение величины $Z = \dfrac{ab - 4c}{\ln a + b}$ при заданных значениях параметров a = 12,762, b = 0,4534

и c = 0,290, используя «ручные» расчетные таблицы для пошаговой регистрации результатов вычислений, тремя способами:

1) по правилам подсчета цифр;

2) по методу строгого учета границ абсолютных погрешностей;

3) по способу границ.

Сравните полученные результаты между собой, прокомментируйте различие методов вычислений и смысл полученных числовых значений.

1) ***«Правила подсчета цифр»***

$$Z = \frac{ab - 4c}{\ln a + b}$$

a	b	c	$a{\cdot}b$	$4{\cdot}c$	$a{\cdot}b - 4{\cdot}c$	$\ln a$	$\ln a + b$	Z
12,762	0,4534	0,290	5,786**3**	1,16**0**	4,62**6**	2,546**5**	3,000**0**	1,54**2**

Прокомментируем ход вычислений.

1) Сначала вычислим $a{\cdot}b$ = 12,762·0,4534 = 5,786 290 8. Воспользуемся правилом, что при умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр. Число 12,762 содержит пять значащих цифр, число 0,4534 – четыре значащие цифры, т. е. в полученном значении следует сохранить четыре значащие цифры. Округляя с одной запасной цифрой, получаем 5,786**3** (запасная цифра выделена) и заносим результаты в таблицу.

$a{\cdot}b$ = 12,762 · 0,4534 = 5,786 290 8 ≈ 5,786**3**.

2) Вычислим $4{\cdot}c$ = 4·0,290 = 1,160. Воспользуемся правилом, что при определении количества верных цифр в значениях элементарных функций от приближенных значений аргумента следует грубо

оценить значение модуля производной функции. Оценка величины производной в этой точке: $4 < 10^1$, т. е. в полученном значении следует сохранить на один десятичный знак меньше, чем в значении аргумента. Округляя с одной запасной цифрой, получаем 1,16**0** (запасная цифра выделена) и заносим результаты в таблицу.

$4 \cdot c = 4 \cdot 0{,}290 = 1{,}160 \approx 1{,}16\mathbf{0}$.

3) Вычислим $a \cdot b - 4 \cdot c = 5{,}786\mathbf{3} - 1{,}16\mathbf{0} = 4{,}6263$. Воспользуемся правилом, что при сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим количеством десятичных знаков. Число 5,786**3** содержит три десятичных знака, число 1,16**0** – два десятичных знака, т. е. в полученном значении следует сохранить два десятичных знака. Округляя с одной запасной цифрой, получаем 4,62**6** (запасная цифра выделена) и заносим результаты в таблицу.

$a \cdot b - 4 \cdot c = 5{,}786\mathbf{3} - 1{,}16\mathbf{0} = 4{,}6263 \approx 4{,}62\mathbf{6}$.

4) Вычислим $\ln a = \ln 12{,}762 = 2{,}546\ 472\ 005\ 446$. Воспользуемся правилом, что при определении количества верных цифр в значениях элементарных функций от приближенных значений аргумента следует грубо оценить значение модуля производной функции. Оценка величины производной в этой точке: $(\ln a)' = \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{12{,}762} \approx 0{,}784 < 10^0$. Так как значение производной не превосходит единицы, то в значении функции можно считать верными столько знаков после запятой, сколько их имеет значение аргумента. Округляя с одной запасной цифрой, получаем 2,546**5** (запасная цифра выделена) и заносим результаты в таблицу.

$\ln a = \ln 12{,}762 = 2{,}546\ 472\ 005\ 446 \approx 2{,}546\mathbf{5}$.

5) Вычислим $\ln a + b = 2{,}546\mathbf{5} + 0{,}4534 = 2{,}9999$. Воспользуемся правилом, что при сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим количеством десятичных знаков. Число $2{,}546\mathbf{5}$ содержит три десятичных знака, число 0,4534 – четыре десятичных знака, т. е. в полученном значении следует сохранить три десятичных знака. Округляя с одной запасной цифрой, получаем $3{,}000\mathbf{0}$ (запасная цифра выделена) и заносим результаты в таблицу.

$\ln a + b = 2{,}546\mathbf{5} + 0{,}4534 = 2{,}9999 \approx 3{,}000\mathbf{0}$.

6) Вычислим $Z = \dfrac{ab - 4c}{\ln a + b} = \dfrac{4{,}626}{3{,}0000} = 1{,}542$. Воспользуемся правилом, что при умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр. Число $4{,}62\mathbf{6}$ содержит три значащих цифры, число $3{,}000\mathbf{0}$ – четыре значащие цифры, т. е. в полученном значении следует сохранить три значащие цифры. Округляя с одной запасной цифрой, получаем $1{,}54\mathbf{2}$ (запасная цифра выделена) и заносим результаты в таблицу.

$$Z = \frac{ab - 4c}{\ln a + b} = \frac{4{,}626}{3{,}0000} = 1{,}542 \approx 1{,}54\mathbf{2}.$$

Округляя окончательный результат без запасной цифры, получим $Z = 1{,}54$ (три верные значащие цифры).

2) ***«Метод строгого учета границ абсолютных погрешностей»***

Проделаем пошаговые вычисления по методу строгого учета границ предельных абсолютных погрешностей в предположении, что исходные данные a, b и c имеют предельные абсолютные погрешности $\Delta a = 0{,}0005$, $\Delta b = 0{,}000\,05$, $\Delta c = 0{,}0005$ (т. е. у a, b и c все цифры верны в узком смысле).

Промежуточные результаты вносятся в таблицу после округления до одной запасной цифры (с учетом вычисленной параллельно величины погрешности); значения погрешностей для удобства округляются (с возрастанием) до двух значащих цифр.

a	12,762	Δa	0,0005
b	0,4534	Δb	0,000 05
c	0,290	Δc	0,0005
$a \cdot b$	5,78**6**	$\Delta(a \cdot b)$	0,000 87
$4 \cdot c$	1,16**0**	$\Delta(4 \cdot c)$	0,002
$a \cdot b - 4 \cdot c$	4,62**6**	$\Delta(a \cdot b – 4 \cdot c)$	0,0029
$\ln a$	2,546 4**7**	$\Delta(\ln a)$	0,000 040
$\ln a + b$	2,999**9**	$\Delta(\ln a + b)$	0,000 09
Z	1,54**2**	ΔZ	0,0011

1) Вычисляем $a \cdot b$ = 12,762·0,4534 = 5,786 290 8. Подсчитаем предельную абсолютную погрешность:

$\Delta(a \cdot b) = b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b$ = 0,4534 · 0,0005 + 12,762 · 0,000 05 = = 0,000 865 ≈ 0,000 87.

Судя по ее величине, в полученном значении в узком смысле верны два знака после запятой. Округляем это значение с одной запасной цифрой 5,78**6** (запасная цифра выделена) и вносим его в таблицу.

2) Вычисляем $4 \cdot c$ = 4·0,290 = 1,160. Подсчитаем предельную абсолютную погрешность:

$\Delta(4 \cdot c) = |(4c)'| \cdot \Delta c$ = 4 · 0,0005 = 0,002.

Судя по ее величине, в полученном значении в узком смысле верны два знака после запятой. Округляем это значение с одной запасной цифрой 1,16**0** (запасная цифра выделена) и вносим его в таблицу.

3) Вычисляем $a{\cdot}b - 4{\cdot}c = 5{,}786\mathbf{3} - 1{,}16\mathbf{0} = 4{,}6263$. Подсчитаем предельную абсолютную погрешность:

$\Delta(a{\cdot}b - 4{\cdot}c) = \Delta(a{\cdot}b) + \Delta(4{\cdot}c) = 0{,}000\,87 + 0{,}002 = 0{,}002\,87 \approx 0{,}0029$.

Судя по ее величине, в полученном значении в узком смысле верны два знака после запятой. Округляем это значение с одной запасной цифрой 4,62**6** (запасная цифра выделена) и вносим его в таблицу.

4) Вычисляем $\ln a = \ln 12{,}762 = 2{,}546\,472\,005\,446$. Подсчитаем предельную абсолютную погрешность:

$\Delta(\ln a) = |(\ln a)'| \cdot \Delta \mathrm{a} = 1 \,/\, 12{,}762 \cdot 0{,}0005 = 0{,}000\,039\,178\,81 \approx$ $\approx 0{,}000\,040$.

Судя по ее величине, в полученном значении в узком смысле верны четыре знака после запятой. Округляем это значение с одной запасной цифрой 2,546 4**7** (запасная цифра выделена) и вносим его в таблицу.

5) Вычисляем $\ln a + b = 2{,}546\,4\mathbf{7} + 0{,}4534 = 2{,}999\,87$. Подсчитаем предельную абсолютную погрешность:

$\Delta(\ln a + b) = \Delta(\ln a) + \Delta b = 0{,}000\,040 + 0{,}000\,05 = 0{,}000\,09$.

Судя по ее величине, в полученном значении в узком смысле верны три знака после запятой. Округляем это значение с одной запасной цифрой 2,999**9** (запасная цифра выделена) и вносим его в таблицу.

6) Вычисляем $Z = \dfrac{ab - 4c}{\ln a + b} = \dfrac{4{,}626}{2{,}9999} = 1{,}542\,051\,4$. Подсчитаем предельную абсолютную погрешность:

$$\Delta Z = \frac{(ab - 4c)\Delta(\ln a + b) + (\ln a + b)\Delta(ab - 4c)}{(\ln a + b)^2} =$$

$$= \frac{4{,}626 \cdot 0{,}000\,09 + 2{,}9999 \cdot 0{,}0029}{2{,}9999^2} = 0{,}001\,012\,96 \approx 0{,}0011.$$

Судя по ее величине, в полученном значении в узком смысле верны два знака после запятой. Округляем это значение с одной запасной цифрой 1,54**2** (запасная цифра выделена) и вносим его в таблицу.

Округляя окончательный результат до последней верной в узком смысле цифры, а также округляя погрешность до соответствующих разрядов результата, окончательно получаем: $Z = 1{,}54 \pm 0{,}01$.

3) ***«Способ границ»***

Нижняя и верхняя границы значений a, b и c определены из условия, что в исходных данных $a = 12{,}762$, $b = 0{,}4534$ и $c = 0{,}290$ все цифры верны в узком смысле ($\Delta a = 0{,}0005$, $\Delta b = 0{,}000\,05$ и $\Delta c = 0{,}0005$), т. е.

$12{,}7615 < a < 12{,}7625$; $0{,}453\,35 < b < 0{,}453\,45$; $0{,}2895 < c < 0{,}2905$.

При выполнении промежуточных вычислений и округлении результатов будем использовать все рекомендации правил подсчета цифр с одним важным дополнением: округление нижних границ ведется по недостатку, а верхних – по избытку. Окончательные результаты округляются по этому же правилу до последней верной цифры.

	НГ	ВГ
a	12,7615	12,7625
b	0,453 35	0,453 45
c	0,2895	0,2905
$a \cdot b$	5,785 4**2**	5,787 1**6**
$4 \cdot c$	1,158**0**	1,162**0**
$a \cdot b - 4 \cdot c$	4,623**4**	4,629**2**
ln a	2,546 4**3**	2,546 5**2**
ln $a + b$	2,999 7**8**	2,999 9**7**
Z	1,541**4**	1,543**2**

1) $НГ_{ab} = НГ_a \cdot НГ_b = 12{,}7615 \cdot 0{,}453\,35 = 5{,}785\,426\,025 \approx 5{,}785\,4\mathbf{2}$;

$ВГ_{ab} = ВГ_a\ ВГ_b = 12{,}7625 \cdot 0{,}453\,45 = 5{,}787\,155\,625 \approx 5{,}787\,1\mathbf{6}$.

2) $НГ_{4c} = 4 \cdot 0{,}2895 = 1{,}158\mathbf{0}$;

$ВГ_{4c} = 4 \cdot 0{,}2905 = 1{,}162\mathbf{0}$.

3) $НГ_{ab-4c} = НГ_{ab} - ВГ_{4c} = 5{,}785\,4\mathbf{2} - 1{,}162\mathbf{0} = 4{,}623\,42 \approx 4{,}623\mathbf{4}$;

$ВГ_{ab-4c} = ВГ_{ab} - НГ_{4c} = 5{,}787\,1\mathbf{6} - 1{,}158\mathbf{0} = 4{,}629\,16 \approx 4{,}629\mathbf{2}$.

4) $НГ_{\ln a} = \ln(НГ_a) = \ln(12{,}7615) = 2{,}546\,432\,825\,867 \approx 2{,}546\,4\mathbf{3}$;

$ВГ_{\ln a} = \ln(ВГ_a) = \ln(12{,}7625) = 2{,}546\,511\,183\,491 \approx 2{,}546\,5\mathbf{2}$.

5) $НГ_{\ln a + b} = НГ_{\ln a} + НГ_b = 2{,}546\,4\mathbf{3} + 0{,}453\,35 = 2{,}999\,78 \approx$ $\approx 2{,}999\,\mathbf{78}$;

$ВГ_{\ln a + b} = ВГ_{\ln a} + ВГ_b = 2{,}546\,5\mathbf{2} + 0{,}453\,45 = 2{,}999\,97 \approx$ $\approx 2{,}999\,9\mathbf{7}$.

6) $НГ_Z = НГ_{ab-4c} / ВГ_{\ln a + b} = 4{,}623\mathbf{4} / 2{,}999\,9\mathbf{7} = 1{,}541\,148\,744\,821 \approx$ $\approx 1{,}541\mathbf{1}$;

$ВГ_Z = ВГ_{ab-4c} / НГ_{\ln a + b} = 4{,}629\mathbf{2} / 2{,}999\,7\mathbf{8} = 1{,}543\,179\,833\,188 \approx$ $\approx 1{,}543\mathbf{2}$.

Таким образом, результат вычислений значения Z по методу границ имеет вид $1{,}541 < Z < 1{,}543$.

Вычисляя значение величины Z тремя разными способами, получили следующие результаты:

1) $Z \approx 1{,}54$,

2) $Z = 1{,}54 \pm 0{,}01$,

3) $1{,}541 < Z < 1{,}543$.

1.2.3. Варианты заданий

№	*X*	*Z*	*a*	*b*	*c*
1	0,068 147	$\frac{(b-c)^2}{2a+b}$	1,105	6,453	3,54
2	0,121 38	$\frac{\ln b - a}{a^2 + 12c}$	0,9319	15,347	0,409

Продолжение

№	X	Z	a	b	c
3	7,321 47	$\frac{\ln(b+c)}{b-ac}$	0,2399	4,893	1,172
4	0,007 275	$\frac{(a-c)^2}{\sqrt{a}+3b}$	11,437	0,609 37	8,67081
5	45,548	$\frac{a-bc}{\ln a+3b}$	10,589	0,5894	0,125
6	10,7818	$\frac{b^2-\ln c}{\sqrt{c-a}}$	2,038	3,912 53	5,0075
7	1,005 745	$\frac{a-\cos b}{13c+b}$	3,149	0,85	0,007
8	2,189 01	$\frac{\cos^2 a+2b}{\sqrt{2c}-a}$	1,068 32	3,043	2,7817
9	35,3085	$\frac{\sqrt{a+b}}{3a-c}$	9,6574	1,4040	1,126
10	78,5457	$\frac{a-\sin b}{b^2+6c}$	2,751	1,215	0,1041
11	0,9538	$\frac{\ln a+4b}{ab-c}$	7,0345	0,231	0,6572
12	2,0543	$\frac{\sqrt{ab}}{b-2c}$	3,124	5,92	1,789
13	0,108 34	$\frac{c+\sin b}{c-a^2}$	0,3107	13,27	4,711
14	0,001 245	$\frac{b-\sin a}{a+3c}$	3,672	3,863	0,1098
15	11,2621	$\frac{\ln c-10a}{\sqrt{bc}}$	0,1135	0,101 56	89,453
16	2,734 91	$\frac{\lg(a-b)}{\sqrt{b-c}}$	8,325 74	3,156	1,0493
17	37,5461	$\frac{b+\cos c}{b+2a}$	0,134 87	14,025	3,001 29

Окончание

№	*X*	*Z*	*a*	*b*	*c*
18	23,6394	$\frac{a^2 - b}{\sqrt{ab + c}}$	2,7252	3,034	0,7065
19	14,1674	$\frac{\sqrt{b - c}}{\ln a + b}$	19,034 73	3,751	0,1071
20	1,450 06	$\frac{ac + b}{\sqrt{b - c}}$	0,093	2,3471	1,231 74
21	0,5485	$\frac{10c + \sqrt{b}}{a^2 - b}$	1,289	1,0346	0,34
22	3,8469	$\frac{a + \sqrt{c}}{\lg(a^2 + b)}$	1,621	5,5943	16,65
23	15,0897	$\frac{(a - c)^2}{\sqrt{a} + 3b}$	11,7	0,0937	5,081
24	0,058 64	$\frac{10c + \sqrt{b}}{a^2 - b}$	1,247 34	0,346	0,051
25	2,504 71	$\frac{\ln b - a}{a^2 + 10c}$	0,7219	135,347	0,013
26	6,200 89	$\frac{(b - c)^2}{2a + b}$	4,05	6,723	0,032 54
27	12,4782	$\frac{b^2 - \ln c}{\sqrt{c - a}}$	0,038	3,9353	5,75
28	5,023 84	$\frac{\ln a + 4b}{ab - c}$	7,345	0,31	0,098 72
29	8,5441	$\frac{a^2 - b}{\sqrt{ab + c}}$	3,714 52	3,03	0,765
30	0,246 89	$\frac{b + \cos c}{b + 2a}$	0,115 87	4,25	3,009 71

2. Лабораторная работа №2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Прямые методы решения

2.1.1. Постановка задачи

Будем рассматривать системы уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n1n}x_n = b_n \end{cases}, \qquad (2.1)$$

$$A\overline{x} = \overline{b}, \qquad (2.2)$$

$\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ – вектор свободных членов, $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – вектор неизвестных с вещественными координатами, $A = (a_{ij}),\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$ – вещественная матрица размера $n \times n$, матрица коэффициентов системы (2.1).

Эффективность способов решения системы (2.1) во многом зависит от структуры и свойств матрицы *A:* размера, обусловленности, симметричности, заполненности (т. е. соотношения между числом нулевых и ненулевых элементов), специфики расположения ненулевых элементов матрицы.

Теорема Кронекера–Капелли: Необходимым условием существования единственного решения системы (2.1) является:

$\det A \neq 0$.

Определение. Нормой называется такая величина, обладающая свойствами:

1) $||x|| > 0$, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$,
3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Определение. Если в пространстве векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ введена норма $\|x\|$, то согласованной с ней нормой в пространстве матриц A называется норма $\|A\| = \sup \dfrac{\|Ax\|}{x}$, $x \neq 0$.

Таблица 2.1

Виды норм векторов и матриц

В пространстве векторов	В пространстве матриц
1. Кубическая норма	
$\|x\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \lvert x_j \rvert$	$\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le i \le n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lvert a_{ij} \rvert \right)$
2. Октаэдрическая норма	
$\|x\|_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \lvert x_j \rvert$	$\|A\|_2 = \max\limits_{1 \le j \le n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lvert a_{ij} \rvert \right)$
3. Сферическая норма	
$\|x\|_3 = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} \lvert x_j \rvert^2} = \sqrt{(x, x)}$	$\|A\|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$

2.1.2. Метод Гаусса

Один из методов решения системы (2.1) – метод Гаусса. Суть метода Гаусса заключается в приведении исходной матрицы A к треугольному виду. Будем постоянно приводить систему (2.1) к треугольному виду, исключая последовательно сначала x_1 из второго, третьего, …, n-го уравнений, затем x_2 из третьего, четвертого, …, n-го уравнений преобразованной системы и т. д.

На первом этапе заменим второе, третье, …, n-е уравнения на уравнения, получающиеся сложением этих уравнений с первым, умноженным соответственно на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$, $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$, …, $-\dfrac{a_{n1}}{a_{11}}$.

Результатом этого этапа преобразований будет эквивалентная (2.1) система

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\
\qquad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\
\qquad \ldots \\
\qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}
\end{cases}, \tag{2.3}
$$

коэффициенты которой (с верхним индексом 1) подсчитываются по формулам

$$
a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1j},\; b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot b_1,\; i, j = 2,3,\ldots,n\,.
$$

При этом можно считать, что $a_{11} \neq 0$, так как по предположению система (2.1) однозначно разрешима, значит, все коэффициенты при x_1 не могут одновременно равняться нулю и на первое место всегда можно поставить уравнение с отличным от нуля первым коэффициентом.

На втором этапе проделываем такие же операции, как и на первом, с подсистемой (2.3). Эквивалентный (2.3) результат будет иметь вид

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\
\qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\
\qquad\qquad \ldots \\
\qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}
\end{cases}, \tag{2.4}
$$

где $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot a_{2j}^{(1)},\; b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot b_2^{(1)},\; i, j = 3,\ldots,n\,.$

Продолжая этот процесс, на (n–1)-м шаге так называемого прямого хода метода Гаусса систему (2.1) приведем к треугольному виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} . \tag{2.5}$$

Общая формула для расчета коэффициентов:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)},\ b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot b_k^{(k-1)}, \tag{2.6}$$

где верхний индекс k – номер этапа, $k = \overline{1, n-1}$, нижние индексы i и j изменяются от $k+1$ до n. Полагаем, что $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, $b_i^{(0)} = b_i$.

Структура полученной матрицы позволяет последовательно вычислять значения неизвестных, начиная с последнего (обратный ход метода Гаусса).

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}},$$

$\ldots,$

$$x_2 = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)}x_3 - \ldots - a_{2n}^{(1)}x_n}{a_{22}^{(1)}},$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n}{a_{112}}.$$

Этот процесс можно определить одной формулой

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}}\left(b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)}x_j \right), \tag{2.7}$$

где k полагают равным n, n – 1, …, 2,1 и сумма по определению считается равной нулю, если нижний предел суммирования имеет значение больше верхнего.

2.1.3. Оценки погрешностей решения системы

Приведем оценки погрешностей системы (2.1).

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица коэффициентов системы, $\|A\| = \max\limits_{1\le i\le n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$ – ее норма, $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$, $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – соответственно столбики свободных членов и неизвестных, $\|\bar{b}\| = \max\limits_{1\le i\le n}|b_i|$, $\|\bar{x}\| = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$ – нормы, $\Delta_{\bar{b}}, \Delta_{\bar{x}}$ и $\delta_{\bar{b}} = \dfrac{\Delta_{\bar{b}}}{\|\bar{b}\|}$, $\delta_{\bar{x}} = \dfrac{\Delta_{\bar{x}}}{\|\bar{x}\|}$ – соответственно их абсолютные и относительные погрешности.

Тогда абсолютная погрешность решения системы (2.1) имеет оценку:

$$\Delta_{\bar{x}} \le \|A^{-1}\| \cdot \Delta_{\bar{b}} \quad ,$$

а относительная погрешность – оценку:

$$\delta_{\bar{x}} \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \delta_{\bar{b}} .$$

2.2. Итерационные методы решения

2.2.1. Метод простой итерации (МПИ)

Система вида $A\bar{x} = \bar{b}$ может быть преобразована к эквивалентной ей системе

$$\bar{x} = (E - A)\bar{x} + \bar{b} .$$

Обозначим через $B = (E - A)$, тогда $\bar{x} = B\bar{x} + \bar{b}$.

Образуем итерационный процесс

$$\bar{x}^{k+1} = B\bar{x}^{k} + \bar{b} . \tag{2.8}$$

Теорема (о простых итерациях). Необходимым и достаточным условием сходимости МПИ (2.8) при любом начальном векторе $\bar{x}^0$ к решению $\bar{x}^*$ системы (2.2) является выполнение условия: или $||B|| < 1$ (хотя бы в одной норме), или все собственные числа $\lambda_B^i < 1$.

Для определения количества итераций, необходимых для достижения заданной точности ε, можно воспользоваться априорной оценкой погрешности решения системы и это значение найти из неравенства:

$$\frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\cdot\left\|\overline{x}^1-\overline{x}^0\right\|<\varepsilon .$$

Апостериорную (уточненную) оценку погрешности решения находят по формуле

$$\Delta_{\overline{x}_k}\le\frac{\|B\|}{1-\|B\|}\cdot\left\|\overline{x}^k-\overline{x}^{k-1}\right\|.$$

2.2.2. Метод Якоби

Для сходимости МПИ необходимо выполнение соответствующих условий. Одним достаточно эффективным способом приведения системы к виду, чтобы было выполнено условие сходимости МПИ, является метод Якоби.

Представим $A = L + D + R$, где D – диагональная матрица, L, R – левая и правая строго треугольные матрицы (с нулевыми диагоналями).

Тогда систему (2.2) можно записать в виде $L\overline{x}+D\overline{x}+R\overline{x}=\overline{b}$.

Если на диагонали исходной матрицы нет 0, то эквивалентной к формуле (2.2) задачей будет $\overline{x}=-D^{-1}(L+R)\overline{x}+D^{-1}\overline{b}$,

где $B=-D^{-1}(L+R)$, $\overline{c}=D^{-1}\overline{b}$ – вектор свободных членов.

Тогда итерационный процесс Якоби:

$$\overline{x}^{k+1}=-D^{-1}(L+R)\overline{x}^k+D^{-1}\overline{b}. \qquad (2.9)$$

Чтобы записать метод Якоби в развернутом виде, достаточно заметить, что обратной матрицей к матрице $D=(a_{ii})_{i=1}^n$ служит диагональная матрица D^{-1} с элементами $d_{ii}=\dfrac{1}{a_{ii}}$.

Тогда (2.9) имеет вид:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = -\dfrac{(a_{12}x_2^k + \ldots + a_{1n}x_n^k - b_1)}{a_{11}} \\ x_2^{k+1} = -\dfrac{(a_{21}x_2^k + \ldots + a_{2n}x_n^k - b_2)}{a_{22}} \\ \ldots \\ x_n^{k+1} = -\dfrac{(a_{n1}x_1^k + \ldots + a_{n,n-1}x_n^k - b_n)}{a_{nn}} \end{cases}.$$

Теорема. В случае диагонального преобладания в матрице A, метод Якоби (2.9) сходится. $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \forall\, i = \overline{1,n} \quad i \neq j$.

2.2.3. Метод Зейделя

Метод Зейделя применяется в основном к системам, в которых преобладающими элементами являются диагональные. В противном случае скорость его сходимости практически не отличается от скорости сходимости МПИ.

Рассмотрим систему (2.1), где $a_{ii} \neq 0 \quad i = \overline{1,n}$.

В (2.1) разделим i-е уравнение на a_{ii} и обозначим $\tilde{a}_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$, $\tilde{b}_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$.

Получим эквивалентную (2.1) систему, выразив в каждом i-м уравнении компонент решения x_i

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{b}_1 - \tilde{a}_{12}x_2 - \ldots - \tilde{a}_{1n}x_n \\ x_2 = \tilde{b}_2 - \tilde{a}_{21}x_1 - \ldots - \tilde{a}_{2n}x_n \\ \ldots \\ x_n = \tilde{b}_n - \tilde{a}_{n1}x_1 - \ldots - \tilde{a}_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases}. \qquad (2.10)$$

Идея метода Зейделя: При проведении итераций по формуле (2.10) используется результат предыдущих уравнений в процессе одной итерации.

Общая формула:

$$x_i^{k+1} = \widetilde{b}_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i-1} \widetilde{a}_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \widetilde{a}_{ij} x_j^{k} . \qquad (2.11)$$

Теорема. Для того чтобы метод Зейделя сходился, достаточно выполнения одного из условий: $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \forall\, i = \overline{1,n} \;\; i \neq j$ или A – вещественная, симметричная, положительно определенная матрица.

2.2.4. Метод релаксации

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений. Преобразуем эту систему следующим образом.

Перенесем свободные члены налево и разделим первое уравнение на $(-a_{11})$, второе уравнение на $(-a_{22})$ и т.д. Получим систему, подготовленную к релаксации:

$$\begin{cases} -x_1 + \widetilde{a}_{12} x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{1n} x_n + \widetilde{b}_1 = 0 \\ \widetilde{a}_{21} x_1 - x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{2n} x_n + \widetilde{b}_2 = 0 \\ \ldots \\ \widetilde{a}_{n1} x_1 + \widetilde{a}_{n2} x_2 + \ldots - x_n + \widetilde{b}_n = 0 \end{cases}, \qquad (2.12)$$

$\widetilde{a}_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}\,(i \neq j)$, $\widetilde{b}_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$.

Пусть $\overline{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ – начальное приближение системы (2.12).

Подставляя эти значения в систему (2.12), получим невязки.

$$\begin{cases} R_1^0 = \widetilde{b}_1 - x_1^0 + \sum\limits_{j=2}^{n} \widetilde{a}_{1j} x_j^0 \\ R_2^0 = \widetilde{b}_2 - x_2^0 + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{n} \widetilde{a}_{2j} x_j^0 \\ \ldots \\ R_n^0 = \widetilde{b}_n - x_n^0 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \widetilde{a}_{nj} x_j^0 \end{cases}. \qquad (2.13)$$

Если одной из неизвестных x_s^0 дать приращение δx_s^0, то соответствующая невязка R_s^0 уменьшится на величину δx_s^0, а все остальные невязки R_i^0 $(i \neq s)$ увеличатся на $\widetilde{a}_{is}\delta x_s^0$.

Чтобы обратить очередную невязку в 0, достаточно величине x_s^0 дать приращение $\delta x_s^0 = R_s^0$. Тогда $R_s^1 = 0$, а $R_i^1 = R_i^0 + \widetilde{a}_{is}\delta x_s^0$ $(i \neq s)$.

Метод релаксации (ослабления) в его простейшей форме заключается в том, что на каждом шаге обращают в 0 максимальную по модулю невязку путем изменения значения соответствующей компоненты приближения. Процесс заканчивается, когда все невязки последней преобразованной системы будут равняться 0 с заданной точностью.

2.3. Пример выполнения лабораторной работы

2.3.1. Задание к лабораторной работе

Дана система четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4. \end{cases}$$

1. Решите систему уравнений методом Гаусса.

2. Для матрицы системы найдите обратную.

3. Зная, что свободные члены исходной системы имеют абсолютную погрешность 0,001, найдите оценку абсолютной и относительной погрешности решения.

4. Преобразуйте систему к виду, необходимому для применения метода простой итерации. Выбрав в качестве начального приближения $\bar{x}^0 = \bar{0}$, найдите k_0 −необходимое число итеративных шагов для решения системы методом простой итерации с точностью 0,01.

5. Сделав k_0 итеративных шагов, найдите приближенное решение системы МПИ. Определите уточненную оценку погрешности решения.

6. Преобразуйте систему к виду, необходимому для применения метода (по варианту).

Метод по вариантам:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31 – метод Якоби;

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 ,23, 26, 29, 32 – метод Зейделя;

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33 – метод релаксации.

Найдите приближенное решение системы с точностью 0,001.

2.3.2. Решение типового примера

1. Решим систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{aligned}
&5{,}526\cdot x_1+0{,}305\cdot x_2+0{,}887\cdot x_3+0{,}037\cdot x_4=0{,}774\\
&0{,}658\cdot x_1+2{,}453\cdot x_2+0{,}678\cdot x_3+0{,}192\cdot x_4=0{,}245\\
&0{,}398\cdot x_1+0{,}232\cdot x_2+4{,}957\cdot x_3+0{,}567\cdot x_4=0{,}343\\
&0{,}081\cdot x_1+0{,}521\cdot x_2+0{,}192\cdot x_3+4{,}988\cdot x_4=0{,}263.
\end{aligned}$$

На первом этапе заменим второе, третье, четвертое уравнения на уравнения, получающиеся сложением этих уравнений с первым, умноженным соответственно на $-\dfrac{0{,}658}{5{,}526}$, $-\dfrac{0{,}398}{5{,}526}$, $-\dfrac{0{,}081}{5{,}526}$, т. е. исключаем x_1 из второго, третьего и четвертого уравнений.

Система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned}
5{,}5260\cdot x_1+0{,}3050\cdot x_2+0{,}8870\cdot x_3+0{,}0370\cdot x_4&=0{,}7740\\
2{,}4167\cdot x_2+0{,}5724\cdot x_3+0{,}1876\cdot x_4&=0{,}1528\\
0{,}2100\cdot x_2+4{,}8931\cdot x_3+0{,}5643\cdot x_4&=0{,}2873\\
0{,}5165\cdot x_2+0{,}1790\cdot x_3+4{,}9875\cdot x_4&=0{,}2517.
\end{aligned}$$

На втором этапе проделываем такие же операции, как и на первом, с полученной подсистемой, т. е. исключаем x_2 из третьего и четвертого уравнений. Результат будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
5{,}5260 \cdot x_1 + 0{,}3050 \cdot x_2 + 0{,}8870 \cdot x_3 + 0{,}0370 \cdot x_4 &= 0{,}7740 \\
2{,}4167 \cdot x_2 + 0{,}5724 \cdot x_3 + 0{,}1876 \cdot x_4 &= 0{,}1528 \\
4{,}8434 \cdot x_3 + 0{,}5480 \cdot x_4 &= 0{,}2740 \\
0{,}0567 \cdot x_3 + 4{,}9474 \cdot x_4 &= 0{,}2190.
\end{aligned}
$$

На третьем шаге исключаем x_3 из четвертого уравнения. Система уравнений примет вид:

$$
\begin{aligned}
5{,}5260 \cdot x_1 + 0{,}3050 \cdot x_2 + 0{,}8870 \cdot x_3 + 0{,}0370 \cdot x_4 &= 0{,}7740 \\
2{,}4167 \cdot x_2 + 0{,}5724 \cdot x_3 + 0{,}1876 \cdot x_4 &= 0{,}1528 \\
4{,}8434 \cdot x_3 + 0{,}5480 \cdot x_4 &= 0{,}2740 \\
4{,}9410 \cdot x_4 &= 0{,}2158.
\end{aligned}
$$

Прямой ход метода Гаусса завершен. По формуле (2.7) находим неизвестные:

$x_4 = 0{,}0437$;

$x_3 = 0{,}0516$;

$x_2 = 0{,}0476$;

$x_1 = 0{,}1289$.

Получаем решение системы: $\bar{x} = (0{,}1289;\ 0{,}0476;\ 0{,}0516;\ 0{,}0437)^T$.

2. Для матрицы системы найдем обратную. Чтобы найти обратную матрицу, нужно четыре раза решить исходную систему, в которой столбик свободных членов поочередно заменяется столбиками: $(1,0,0,0)^T$, $(0,1,0,0)^T$, $(0,0,1,0)^T$, $(0,0,0,1)^T$. Полученные решения системы заносим в соответствующие столбики матрицы A^{-1}. В итоге получим матрицу

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1856 & -0{,}0208 & -0{,}0305 & 0{,}0029 \\ -0{,}0464 & 0{,}4202 & -0{,}0488 & -0{,}0103 \\ -0{,}0130 & -0{,}0131 & 0{,}2067 & -0{,}0229 \\ 0{,}0023 & -0{,}0431 & -0{,}0024 & 0{,}2024 \end{pmatrix}.
$$

3. Зная, что свободные члены исходной системы имеют абсолютную погрешность 0,001, найдем оценку абсолютной и относительной погрешности решения.

Для этого предварительно получим оценки норм $\|A\|$ и $\|A^{-1}\|$, используя формулу кубической нормы.

$$\|A\| = \max_{1\le i\le 4}\sum_{j=1}^{4}|a_{ij}| = \max\{6{,}755;\ 3{,}981;\ 6{,}154;\ 5{,}782\} = 6{,}755,$$

$$\|A^{-1}\| = \max\{0{,}1372;\ 0{,}3147;\ 0{,}1577;\ 0{,}1592\} = 0{,}3147,$$

$$\|\bar{b}\| = \max_{1\le i\le 4}|b_i| = 0{,}774.$$

По условию $\Delta_{\bar{b}} = 10^{-3}$, тогда $\delta_{\bar{b}} = \dfrac{\Delta_{\bar{b}}}{\|\bar{b}\|} = \dfrac{10^{-3}}{0.774} \approx 1{,}292 \cdot 10^{-3}$.

Абсолютная погрешность решения: $\Delta_{\bar{x}} \le \|A^{-1}\| \cdot \Delta_{\bar{b}} = 0{,}4\cdot 10^{-3}$.

Относительная погрешность решения: $\delta_{\bar{x}} \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \delta_{\bar{b}} = 2{,}8\cdot 10^{-3}$.

4. Преобразуем систему к виду, необходимому для применения метода простой итерации. Для этого обе части первого уравнения разделим на 5,526, второго – 2,453, третьего – на 4,957, четвертого – на 4,988, и система примет вид:

$x_1 + 0{,}0552\cdot x_2 + 0{,}1605\cdot x_3 + 0{,}0067\cdot x_4 = 0{,}1401$

$0{,}2682\cdot x_1 + x_2 + 0{,}2764\cdot x_3 + 0{,}0783\cdot x_4 = 0{,}0999$

$0{,}0803\cdot x_1 + 0{,}0468\cdot x_2 + x_3 + 0{,}1144\cdot x_4 = 0{,}0692$

$0{,}0162\cdot x_1 + 0{,}1045\cdot x_2 + 0{,}0385\cdot x_3 + x_4 = 0{,}0527.$

Неизвестные, стоящие на главной диагонали, оставим слева, остальные члены уравнений перенесем вправо, и тогда система примет вид:

$x_1 = -\,0{,}0552\cdot x_2 - 0{,}1605\cdot x_3 - 0{,}0067\cdot x_4 + 0{,}1401$

$x_2 = -\,0{,}2682\cdot x_1 - 0{,}2764\cdot x_3 - 0{,}0783\cdot x_4 + 0{,}0999$

$x_3 = -\,0{,}0803\cdot x_1 - 0{,}0468\cdot x_2 - 0{,}1144\cdot x_4 + 0{,}0692$

$x_4 = -\,0{,}0162\cdot x_1 - 0{,}1045\cdot x_2 - 0{,}0385\cdot x_3 + 0{,}0527.$

Обозначим:

$$\overline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\ \overline{c}=\begin{pmatrix}0{,}1401\\0{,}0999\\0{,}0692\\0{,}0527\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&-0{,}0552&-0{,}1605&-0{,}0067\\-0{,}2682&0&-0{,}2764&-0{,}0783\\-0{,}0803&-0{,}0468&0&-0{,}1144\\-0{,}0162&-0{,}1045&-0{,}0385&0\end{pmatrix}.$$

Вычислим $\|B\|$, чтобы обосновать возможность решения системы методом итерации.

$\|B\| = \max\{0{,}2224; 0{,}6229; 0{,}2415; 0{,}1592\} = 0{,}6299 < 1$,

следовательно, условия теоремы о сходимости МПИ выполнены, и систему можно решать методом итерации.

5. Выбрав в качестве начального приближения $\overline{x}^0=\overline{0}$, найдем k_0 – необходимое число итеративных шагов для решения системы методом простой итерации с точностью 0,001.

Так как по условию задачи нулевое приближение $\overline{x}^0=\overline{0}$, то $\overline{x}^1=B\overline{x}^0+\overline{c}$. Значит, $\|\overline{x}^1-\overline{x}^0\| = \|\overline{c}\| = 0{,}1401$.

Решим неравенство $\dfrac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\cdot\left\|\overline{x}^1-\overline{x}^0\right\|<\varepsilon$.

$\dfrac{(0{,}6299)^k}{1-0{,}6299}\cdot 0{,}1401<0{,}01$,

$(0{,}6299)^k < 0{,}0264$,

$\ln(0{,}6299)^k < \ln(0{,}0264)$,

$k > \dfrac{\ln(0{,}0264)}{\ln(0{,}6299)} = 7{,}8633$ и полагаем $k_0 = 8$.

Сделаем 8 итеративных шагов и получим:

$$\overline{x}^1=\begin{pmatrix}0{,}1401\\0{,}0999\\0{,}0692\\0{,}0527\end{pmatrix};\ \overline{x}^2=\begin{pmatrix}0{,}1231\\0{,}0391\\0{,}0472\\0{,}0373\end{pmatrix};\ \overline{x}^3=\begin{pmatrix}0{,}1301\\0{,}0509\\0{,}0532\\0{,}0448\end{pmatrix};\ \overline{x}^4=\begin{pmatrix}0{,}1284\\0{,}0468\\0{,}0512\\0{,}0432\end{pmatrix};$$

$$\overline{x}^5 = \begin{pmatrix} 0{,}1290 \\ 0{,}0479 \\ 0{,}0518 \\ 0{,}0438 \end{pmatrix}; \ \overline{x}^6 = \begin{pmatrix} 0{,}1288 \\ 0{,}0476 \\ 0{,}0516 \\ 0{,}0436 \end{pmatrix}; \ \overline{x}^7 = \begin{pmatrix} 0{,}1289 \\ 0{,}0477 \\ 0{,}0516 \\ 0{,}0437 \end{pmatrix}; \ \overline{x}^8 = \begin{pmatrix} 0{,}1289 \\ 0{,}0476 \\ 0{,}0516 \\ 0{,}0436 \end{pmatrix}.$$

Столбик $\overline{x}^8$ выбираем в качестве приближенного решения исходной системы. Оценим погрешность приближенного решения $\overline{x}^8$.

$$\Delta_{\overline{x}^8} \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|} \cdot \left\|\overline{x}^8 - \overline{x}^7\right\| = \frac{0{,}6299}{0{,}3701} \cdot 0{,}0001 \le 0{,}0002.$$

6. Найдем решение системы методом по варианту.

1) ***«Метод Якоби»***

Преобразуйте систему к виду, необходимому для применения метода Якоби.

Представим матрицу в виде $A = L + D + R$,

где $A = \begin{pmatrix} 5{,}526 & 0{,}305 & 0{,}887 & 0{,}037 \\ 0{,}658 & 2{,}453 & 0{,}678 & 0{,}192 \\ 0{,}398 & 0{,}232 & 4{,}957 & 0{,}567 \\ 0{,}081 & 0{,}521 & 0{,}192 & 4{,}988 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5{,}526 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}453 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4{,}957 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4{,}988 \end{pmatrix}$,

$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}658 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}398 & 0{,}232 & 0 & 0 \\ 0{,}081 & 0{,}521 & 0{,}192 & 0 \end{pmatrix}$ и $R = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}305 & 0{,}887 & 0{,}037 \\ 0 & 0 & 0{,}678 & 0{,}192 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}567 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда $B = -D^{-1}(L+R) = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}0552 & -0{,}1605 & -0{,}0067 \\ -0{,}2682 & 0 & -0{,}2764 & -0{,}0783 \\ -0{,}0803 & -0{,}0468 & 0 & -0{,}1144 \\ -0{,}0162 & -0{,}1045 & -0{,}0385 & 0 \end{pmatrix}$ и

вектор свободных членов $\overline{c} = D^{-1}\overline{b} = \begin{pmatrix} 0{,}1401 \\ 0{,}0999 \\ 0{,}0692 \\ 0{,}0527 \end{pmatrix}$.

Запишем итерационный процесс метода Якоби:

$$\bar{x}^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}0552 & -0{,}1605 & -0{,}0067 \\ -0{,}2682 & 0 & -0{,}2764 & -0{,}0783 \\ -0{,}0803 & -0{,}0468 & 0 & -0{,}1144 \\ -0{,}0162 & -0{,}1045 & -0{,}0385 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}^{k} + \begin{pmatrix} 0{,}1401 \\ 0{,}0999 \\ 0{,}0692 \\ 0{,}0527 \end{pmatrix}.$$

Проверим условие сходимости метода Якоби $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \forall\, i = \overline{1,n} \quad i \neq j$.

$$\begin{aligned} &5{,}526 > 0{,}305 + 0{,}887 + 0{,}037 \\ &2{,}453 > 0{,}658 + 0{,}678 + 0{,}192 \\ &4{,}957 > 0{,}398 + 0{,}232 + 0{,}567 \\ &4{,}988 > 0{,}081 + 0{,}521 + 0{,}192 \end{aligned},$$

следовательно, условие сходимости метода Якоби выполнено.

Для достижения точности $\varepsilon = 0{,}001$ приближения будем находить до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$\Delta_{\bar{x}^k} = \left\| \bar{x}^k - \bar{x}^{k-1} \right\| \leq \frac{1 - \|B\|}{\|B\|} \cdot \varepsilon = \frac{0{,}3701}{0{,}6299} \cdot 0{,}001 \approx 0{,}0006.$$

Все вычисления занесем в таблицу.

k	x_1	x_2	x_3	x_4	$\Delta_{\bar{x}^k} = \left\| \bar{x}^k - \bar{x}^{k-1} \right\|$
0	0	0	0	0	
1	0,1401	0,0999	0,0692	0,0527	0,1401
2	0,1231	0,0391	0,0472	0,0373	0,0608
3	0,1301	0,0509	0,0532	0,0448	0,0118
4	0,1284	0,0468	0,0512	0,0432	0,0041
5	0,1290	0,0479	0,0518	0,0438	0,0011
6	0,1288	0,0476	0,0516	0,0436	0,0003

2) ***«Метод Зейделя»***

Преобразуйте систему к виду, необходимому для применения метода Зейделя. Для этого разделим каждое уравнение системы на диагональный элемент и выразим в каждом уравнении компонент решения x_i, получим систему вида:

$x_1 = 0{,}1401 - 0{,}0552 \cdot x_2 - 0{,}1605 \cdot x_3 - 0{,}0067 \cdot x_4$

$x_2 = 0{,}0999 - 0{,}2682 \cdot x_1 - 0{,}2764 \cdot x_3 - 0{,}0783 \cdot x_4$

$x_3 = 0{,}0692 - 0{,}0803 \cdot x_1 - 0{,}0468 \cdot x_2 - 0{,}1144 \cdot x_4$

$x_4 = 0{,}0527 - 0{,}0162 \cdot x_1 - 0{,}1045 \cdot x_2 - 0{,}0385 \cdot x_3$.

Запишем итерационный процесс метода Зейделя:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = 0{,}1401 - 0{,}0552 x_2^k - 0{,}1605 x_3^k - 0{,}0067 x_4^k \\ x_2^{k+1} = 0{,}0999 - 0{,}2682 x_1^{k+1} - 0{,}2764 x_3^k - 0{,}0783 x_4^k \\ x_3^{k+1} = 0{,}0692 - 0{,}0803 x_1^{k+1} - 0{,}0468 x_2^{k+1} - 0{,}1144 x_4^k \\ x_4^{k+1} = 0{,}0527 - 0{,}0162 x_1^{k+1} - 0{,}1045 x_2^{k+1} - 0{,}0385 x_3^{k+1} \end{cases}.$$

Проверим условие сходимости метода Зейделя:

$$\begin{array}{l} 5{,}526 > 0{,}305 + 0{,}887 + 0{,}037 \\ 2{,}453 > 0{,}658 + 0{,}678 + 0{,}192 \\ 4{,}957 > 0{,}398 + 0{,}232 + 0{,}567 \\ 4{,}988 > 0{,}081 + 0{,}521 + 0{,}192 \end{array},$$

следовательно, условие сходимости выполнено, и систему можно решать методом Зейделя.

Для достижения точности $\varepsilon = 0{,}001$ приближения будем находить до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$\Delta_{\bar{x}^k} = \left\| \bar{x}^k - \bar{x}^{k-1} \right\| \le \frac{1 - \|B\|}{\|B\|} \cdot \varepsilon = \frac{0{,}3701}{0{,}6299} \cdot 0{,}001 \approx 0{,}0006 .$$

Все вычисления занесем в таблицу.

k	x_1	x_2	x_3	x_4	$\Delta_{\bar{x}^k} = \lVert \bar{x}^k - \bar{x}^{k-1} \rVert$
0	0	0	0	0	
1	0,1401	0,0623	0,0550	0,0418	0,1401
2	0,1275	0,0472	0,0520	0,0437	0,0151
3	0,1289	0,0476	0,0516	0,0437	0,0013
4	0,1289	0,0476	0,0516	0,0436	0,0001

3) ***«Метод релаксации»***

Преобразуйте систему к виду, необходимому для применения метода релаксации. Перенесем, свободные члены налево и разделим первое уравнение на $(-5{,}526)$, второе уравнение на $(-2{,}453)$ и т. д. Получим систему, подготовленную к релаксации:

$$\begin{cases} -x_1 - 0{,}0552x_2 - 0{,}1605x_3 - 0{,}0067x_4 + 0{,}1401 = 0 \\ 0{,}2682x_1 - x_2 - 0{,}2764x_3 - 0{,}0783x_4 - 0{,}0999 = 0 \\ 0{,}0803x_1 - 0{,}0468x_2 - x_3 - 0{,}1144x_4 - 0{,}0692 = 0 \\ 0{,}0162x_1 - 0{,}1045x_2 - 0{,}0385x_3 - x_4 - 0{,}0527 = 0 \end{cases}.$$

Пусть $\bar{x}^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ – начальное приближение, подставим эти значения в систему, получим невязки.

$$\begin{cases} R_1^0 = 0{,}1401 - x_1^0 - 0{,}0552x_2^0 - 0{,}1605x_3^0 - 0{,}0067x_4^0 = 0{,}1401 \\ R_2^0 = 0{,}0999 - x_2^0 - 0{,}2682x_1^0 - 0{,}2764x_3^0 - 0{,}0783x_4^0 = 0{,}0999 \\ R_3^0 = 0{,}0692 - x_3^0 - 0{,}0803x_1^0 - 0{,}0468x_2^0 - 0{,}1144x_4^0 = 0{,}0692 \\ R_4^0 = 0{,}0527 - x_4^0 - 0{,}0162x_1^0 - 0{,}1045x_2^0 - 0{,}0385x_3^0 = 0{,}0527 \end{cases}.$$

Выберем максимальную по модулю невязку $R_1^0 = 0{,}1401$ и соответствующей неизвестной x_1^0 дадим приращение $\delta x_1^0 = R_1^0 = 0{,}1401$.

Тогда $R_1^1 = 0$, а остальные невязки пересчитаем по формуле $R_i^1 = R_i^0 + \widetilde{a}_{i1}\delta x_1^0 \quad (i \neq 1)$, получим

$$\begin{cases} R_1^1 = 0 \\ R_2^1 = R_2^0 - 0{,}2682\delta x_1^0 = 0{,}0999 - 0{,}2682 \cdot 0{,}1401 = 0{,}0623 \\ R_3^1 = R_3^0 - 0{,}0803\delta x_1^0 = 0{,}0692 - 0{,}0803 \cdot 0{,}1401 = 0{,}0579 \\ R_4^1 = R_4^0 - 0{,}0162\delta x_1^0 = 0{,}0527 - 0{,}0162 \cdot 0{,}1401 = 0{,}0504 \end{cases}.$$

Аналогично находим максимальную по модулю невязку $R_2^1 = 0{,}0623$ и соответствующей неизвестной x_2^1 дадим приращение $\delta x_2^1 = R_2^1 = 0{,}0623$.

Тогда $R_2^2 = 0$, а остальные невязки пересчитаем по формуле $R_i^2 = R_i^1 + \widetilde{a}_{i2}\delta x_2^1 \ \ (i \neq 2)$, получим

$$\begin{cases} R_1^2 = R_1^1 - 0{,}0552\delta x_2^1 = 0 - 0{,}0552 \cdot 0{,}1375 = -0{,}0034 \\ R_2^2 = 0 \\ R_3^2 = R_3^0 - 0{,}0468\delta x_2^1 = 0{,}0805 - 0{,}0468 \cdot 0{,}1375 = 0{,}0550 \\ R_4^2 = R_4^0 - 0{,}0162\delta x_2^1 = 0{,}0550 - 0{,}1045 \cdot 0{,}1375 = 0{,}0439 \end{cases}.$$

Снова находим максимальную по модулю невязку $R_3^2 = 0{,}0550$ и соответствующей неизвестной x_3^2 дадим приращение $\delta x_3^2 = R_3^2 = 0{,}0550$.

Тогда $R_3^3 = 0$, а остальные невязки пересчитаем по формуле $R_i^3 = R_i^2 + \widetilde{a}_{i3}\delta x_3^2 \ \ (i \neq 3)$, получим

$$\begin{cases} R_1^3 = -0{,}0123 \\ R_2^3 = -0{,}0152 \\ R_3^3 = 0 \\ R_4^3 = 0{,}0418 \end{cases}.$$

Процесс заканчивается, когда все невязки последней преобразованной системы будут равняться 0 с заданной точностью.

Для достижения точности $\varepsilon = 0{,}001$ приближения будем находить до тех пор, пока не выполнится неравенство

$R_i^k \leq 0{,}001, i = \overline{1{,}4}$.

Все вычисления занесем в таблицу.

k	δx_1^k	δx_2^k	δx_3^k	δx_4^k	R_1	R_2	R_3	R_4
0	0,1401	0	0	0	0,1401	0,0623	0,0550	0,0418
1	0	0,0623	0	0	0	0,0623	0,0579	0,0504
2	0	0	0,0550	0	–0,0034	0	0,0550	0,0439
3	0	0	0	0,0418	–0,0123	–0,0152	0	0,0418
4	0	–0,0185	0	0	–0,0126	–0,0185	–0,0048	0
5	–0,0115	0	0	0	–0,0115	0	–0,0039	0,0019
6	0	0,0031	0	0	0	0,0031	–0,0030	0,0021
7	0	0	–0,0031	0	–0,0002	0	–0,0031	0,0018
8	0	0	0	0,0019	0,0003	0,0009	0	0,0019
9	0	0,0007	0	0	0,0003	0,0007	–0,0002	0

Суммируя все приращения δx_i^k, найдем значения корней:

$$x_1 = \sum_{k=0}^{9} \delta x_1^k = 0{,}1401 - 0{,}0115 = 0{,}1286,$$

$$x_2 = \sum_{k=0}^{9} \delta x_2^k = 0{,}0623 - 0{,}0185 + 0{,}0031 + 0{,}0007 = 0{,}0477,$$

$$x_3 = \sum_{k=0}^{9} \delta x_3^k = 0{,}0550 - 0{,}0031 = 0{,}0519,$$

$$x_4 = \sum_{k=0}^{9} \delta x_4^k = 0{,}0418 + 0{,}0019 = 0{,}0437.$$

2.3.3. Варианты заданий

№	**Система уравнений**
1	$4{,}003 \cdot x_1 + 0{,}207 \cdot x_2 + 0{,}519 \cdot x_3 + 0{,}281 \cdot x_4 = 0{,}425$ $0{,}416 \cdot x_1 + 3{,}273 \cdot x_2 + 0{,}326 \cdot x_3 + 0{,}375 \cdot x_4 = 0{,}021$ $0{,}297 \cdot x_1 + 0{,}351 \cdot x_2 + 2{,}997 \cdot x_3 + 0{,}429 \cdot x_4 = 0{,}213$ $0{,}412 \cdot x_1 + 0{,}194 \cdot x_2 + 0{,}215 \cdot x_3 + 3{,}628 \cdot x_4 = 0{,}946.$
2	$2{,}591 \cdot x_1 + 0{,}512 \cdot x_2 + 0{,}128 \cdot x_3 + 0{,}195 \cdot x_4 = 0{,}159$ $0{,}203 \cdot x_1 + 3{,}469 \cdot x_2 + 0{,}572 \cdot x_3 + 0{,}162 \cdot x_4 = 0{,}280$ $0{,}256 \cdot x_1 + 0{,}273 \cdot x_2 + 2{,}994 \cdot x_3 + 0{,}501 \cdot x_4 = 0{,}134$ $0{,}381 \cdot x_1 + 0{,}219 \cdot x_2 + 0{,}176 \cdot x_3 + 5{,}903 \cdot x_4 = 0{,}864.$

Продолжение

№	Система уравнений
3	$2{,}979 \cdot x_1 + 0{,}427 \cdot x_2 + 0{,}406 \cdot x_3 + 0{,}348 \cdot x_4 = 0{,}341$ $0{,}273 \cdot x_1 + 3{,}951 \cdot x_2 + 0{,}217 \cdot x_3 + 0{,}327 \cdot x_4 = 0{,}844$ $0{,}318 \cdot x_1 + 0{,}197 \cdot x_2 + 2{,}875 \cdot x_3 + 0{,}166 \cdot x_4 = 0{,}131$ $0{,}219 \cdot x_1 + 0{,}231 \cdot x_2 + 0{,}187 \cdot x_3 + 3{,}276 \cdot x_4 = 0{,}381.$
4	$3{,}738 \cdot x_1 + 0{,}195 \cdot x_2 + 0{,}275 \cdot x_3 + 0{,}136 \cdot x_4 = 0{,}815$ $0{,}519 \cdot x_1 + 5{,}002 \cdot x_2 + 0{,}405 \cdot x_3 + 0{,}283 \cdot x_4 = 0{,}191$ $0{,}306 \cdot x_1 + 0{,}381 \cdot x_2 + 4{,}812 \cdot x_3 + 0{,}418 \cdot x_4 = 0{,}423$ $0{,}272 \cdot x_1 + 0{,}142 \cdot x_2 + 0{,}314 \cdot x_3 + 3{,}935 \cdot x_4 = 0{,}352.$
5	$4{,}855 \cdot x_1 + 1{,}239 \cdot x_2 + 0{,}272 \cdot x_3 + 0{,}258 \cdot x_4 = 1{,}192$ $1{,}491 \cdot x_1 + 4{,}954 \cdot x_2 + 0{,}124 \cdot x_3 + 0{,}236 \cdot x_4 = 0{,}256$ $0{,}456 \cdot x_1 + 0{,}285 \cdot x_2 + 4{,}354 \cdot x_3 + 0{,}254 \cdot x_4 = 0{,}852$ $0{,}412 \cdot x_1 + 0{,}335 \cdot x_2 + 0{,}158 \cdot x_3 + 2{,}874 \cdot x_4 = 0{,}862.$
6	$5{,}401 \cdot x_1 + 0{,}519 \cdot x_2 + 0{,}364 \cdot x_3 + 0{,}283 \cdot x_4 = 0{,}243$ $0{,}295 \cdot x_1 + 4{,}830 \cdot x_2 + 0{,}421 \cdot x_3 + 0{,}278 \cdot x_4 = 0{,}231$ $0{,}524 \cdot x_1 + 0{,}397 \cdot x_2 + 4{,}723 \cdot x_3 + 0{,}389 \cdot x_4 = 0{,}721$ $0{,}503 \cdot x_1 + 0{,}264 \cdot x_2 + 0{,}248 \cdot x_3 + 4{,}286 \cdot x_4 = 0{,}220.$
7	$3{,}857 \cdot x_1 + 0{,}239 \cdot x_2 + 0{,}272 \cdot x_3 + 0{,}258 \cdot x_4 = 0{,}190$ $0{,}491 \cdot x_1 + 3{,}941 \cdot x_2 + 0{,}131 \cdot x_3 + 0{,}178 \cdot x_4 = 0{,}179$ $0{,}436 \cdot x_1 + 0{,}281 \cdot x_2 + 4{,}189 \cdot x_3 + 0{,}416 \cdot x_4 = 0{,}753$ $0{,}317 \cdot x_1 + 0{,}229 \cdot x_2 + 0{,}326 \cdot x_3 + 2{,}971 \cdot x_4 = 0{,}860.$
8	$4{,}238 \cdot x_1 + 0{,}329 \cdot x_2 + 0{,}256 \cdot x_3 + 0{,}425 \cdot x_4 = 0{,}560$ $0{,}249 \cdot x_1 + 2{,}964 \cdot x_2 + 0{,}351 \cdot x_3 + 0{,}127 \cdot x_4 = 0{,}380$ $0{,}365 \cdot x_1 + 0{,}217 \cdot x_2 + 2{,}897 \cdot x_3 + 0{,}168 \cdot x_4 = 0{,}778$ $0{,}178 \cdot x_1 + 0{,}294 \cdot x_2 + 0{,}432 \cdot x_3 + 3{,}701 \cdot x_4 = 0{,}749.$
9	$,389 \cdot x_1 + 0{,}273 \cdot x_2 + 0{,}126 \cdot x_3 + 0{,}418 \cdot x_4 = 0{,}144$ $0{,}329 \cdot x_1 + 2{,}796 \cdot x_2 + 0{,}179 \cdot x_3 + 0{,}278 \cdot x_4 = 0{,}297$ $0{,}186 \cdot x_1 + 0{,}275 \cdot x_2 + 2{,}987 \cdot x_3 + 0{,}316 \cdot x_4 = 0{,}529$ $0{,}197 \cdot x_1 + 0{,}219 \cdot x_2 + 0{,}274 \cdot x_3 + 3{,}127 \cdot x_4 = 0{,}869.$

Продолжение

№	Система уравнений
10	$2{,}958\cdot x_1+0{,}147\cdot x_2+0{,}354\cdot x_3+0{,}238\cdot x_4=0{,}651$ $0{,}127\cdot x_1+2{,}395\cdot x_2+0{,}256\cdot x_3+0{,}273\cdot x_4=0{,}898$ $0{,}403\cdot x_1+0{,}184\cdot x_2+3{,}815\cdot x_3+0{,}416\cdot x_4=0{,}595$ $0{,}259\cdot x_1+0{,}361\cdot x_2+0{,}281\cdot x_3+3{,}736\cdot x_4=0{,}389.$
11	$4{,}503\cdot x_1+0{,}219\cdot x_2+0{,}527\cdot x_3+0{,}396\cdot x_4=0{,}553$ $0{,}259\cdot x_1+5{,}121\cdot x_2+0{,}423\cdot x_3+0{,}206\cdot x_4=0{,}358$ $0{,}413\cdot x_1+0{,}531\cdot x_2+4{,}317\cdot x_3+0{,}264\cdot x_4=0{,}565$ $0{,}327\cdot x_1+0{,}412\cdot x_2+0{,}203\cdot x_3+4{,}851\cdot x_4=0{,}436.$
12	$5{,}103\cdot x_1+0{,}293\cdot x_2+0{,}336\cdot x_3+0{,}270\cdot x_4=0{,}745$ $0{,}179\cdot x_1+4{,}912\cdot x_2+0{,}394\cdot x_3+0{,}375\cdot x_4=0{,}381$ $0{,}189\cdot x_1+0{,}321\cdot x_2+2{,}875\cdot x_3+0{,}216\cdot x_4=0{,}480$ $0{,}317\cdot x_1+0{,}165\cdot x_2+0{,}386\cdot x_3+3{,}934\cdot x_4=0{,}552.$
13	$5{,}554\cdot x_1+0{,}252\cdot x_2+0{,}496\cdot x_3+0{,}237\cdot x_4=0{,}442$ $0{,}580\cdot x_1+4{,}953\cdot x_2+0{,}467\cdot x_3+0{,}028\cdot x_4=0{,}464$ $0{,}319\cdot x_1+0{,}372\cdot x_2+8{,}935\cdot x_3+0{,}520\cdot x_4=0{,}979$ $0{,}043\cdot x_1+0{,}459\cdot x_2+0{,}319\cdot x_3+4{,}778\cdot x_4=0{,}126.$
14	$2{,}998\cdot x_1+0{,}209\cdot x_2+0{,}315\cdot x_3+0{,}281\cdot x_4=0{,}108$ $0{,}163\cdot x_1+3{,}237\cdot x_2+0{,}226\cdot x_3+0{,}307\cdot x_4=0{,}426$ $0{,}416\cdot x_1+0{,}175\cdot x_2+3{,}239\cdot x_3+0{,}159\cdot x_4=0{,}310$ $0{,}287\cdot x_1+0{,}196\cdot x_2+0{,}325\cdot x_3+4{,}062\cdot x_4=0{,}084.$
15	$5{,}452\cdot x_1+0{,}401\cdot x_2+0{,}758\cdot x_3+0{,}123\cdot x_4=0{,}886$ $0{,}785\cdot x_1+2{,}654\cdot x_2+0{,}687\cdot x_3+0{,}203\cdot x_4=0{,}356$ $0{,}402\cdot x_1+0{,}244\cdot x_2+4{,}456\cdot x_3+0{,}552\cdot x_4=0{,}342$ $0{,}210\cdot x_1+0{,}514\cdot x_2+0{,}206\cdot x_3+4{,}568\cdot x_4=0{,}452.$
16	$2{,}923\cdot x_1+0{,}220\cdot x_2+0{,}159\cdot x_3+0{,}328\cdot x_4=0{,}605$ $0{,}363\cdot x_1+4{,}123\cdot x_2+0{,}268\cdot x_3+0{,}327\cdot x_4=0{,}496$ $0{,}169\cdot x_1+0{,}271\cdot x_2+3{,}906\cdot x_3+0{,}295\cdot x_4=0{,}590$ $0{,}241\cdot x_1+0{,}319\cdot x_2+0{,}257\cdot x_3+3{,}862\cdot x_4=0{,}896.$

Продолжение

№	Система уравнений
17	$5{,}482 \cdot x_1 + 0{,}358 \cdot x_2 + 0{,}237 \cdot x_3 + 0{,}409 \cdot x_4 = 0{,}416$ $0{,}580 \cdot x_1 + 4{,}953 \cdot x_2 + 0{,}467 \cdot x_3 + 0{,}028 \cdot x_4 = 0{,}464$ $0{,}319 \cdot x_1 + 0{,}372 \cdot x_2 + 8{,}935 \cdot x_3 + 0{,}520 \cdot x_4 = 0{,}979$ $0{,}043 \cdot x_1 + 0{,}459 \cdot x_2 + 0{,}319 \cdot x_3 + 4{,}778 \cdot x_4 = 0{,}126.$
18	$3{,}738 \cdot x_1 + 0{,}195 \cdot x_2 + 0{,}275 \cdot x_3 + 0{,}136 \cdot x_4 = 0{,}815$ $0{,}519 \cdot x_1 + 5{,}002 \cdot x_2 + 0{,}405 \cdot x_3 + 0{,}283 \cdot x_4 = 0{,}191$ $0{,}306 \cdot x_1 + 0{,}381 \cdot x_2 + 4{,}812 \cdot x_3 + 0{,}418 \cdot x_4 = 0{,}423$ $0{,}272 \cdot x_1 + 0{,}142 \cdot x_2 + 0{,}314 \cdot x_3 + 3{,}935 \cdot x_4 = 0{,}352.$
19	$3{,}910 \cdot x_1 + 0{,}129 \cdot x_2 + 0{,}283 \cdot x_3 + 0{,}107 \cdot x_4 = 0{,}395$ $0{,}217 \cdot x_1 + 4{,}691 \cdot x_2 + 0{,}279 \cdot x_3 + 0{,}237 \cdot x_4 = 0{,}432$ $0{,}201 \cdot x_1 + 0{,}372 \cdot x_2 + 2{,}987 \cdot x_3 + 0{,}421 \cdot x_4 = 0{,}127$ $0{,}531 \cdot x_1 + 0{,}196 \cdot x_2 + 0{,}236 \cdot x_3 + 5{,}032 \cdot x_4 = 0{,}458.$
20	$5{,}482 \cdot x_1 + 0{,}617 \cdot x_2 + 0{,}520 \cdot x_3 + 0{,}401 \cdot x_4 = 0{,}823$ $0{,}607 \cdot x_1 + 4{,}195 \cdot x_2 + 0{,}232 \cdot x_3 + 0{,}570 \cdot x_4 = 0{,}152$ $0{,}367 \cdot x_1 + 0{,}576 \cdot x_2 + 8{,}193 \cdot x_3 + 0{,}582 \cdot x_4 = 0{,}625$ $0{,}389 \cdot x_1 + 0{,}356 \cdot x_2 + 0{,}207 \cdot x_3 + 5{,}772 \cdot x_4 = 0{,}315.$
21	$3{,}345 \cdot x_1 + 0{,}329 \cdot x_2 + 0{,}365 \cdot x_3 + 0{,}203 \cdot x_4 = 0{,}305$ $0{,}125 \cdot x_1 + 4{,}210 \cdot x_2 + 0{,}402 \cdot x_3 + 0{,}520 \cdot x_4 = 0{,}283$ $0{,}314 \cdot x_1 + 0{,}251 \cdot x_2 + 4{,}531 \cdot x_3 + 0{,}168 \cdot x_4 = 0{,}680$ $0{,}197 \cdot x_1 + 0{,}512 \cdot x_2 + 0{,}302 \cdot x_3 + 2{,}951 \cdot x_4 = 0{,}293.$
22	$4{,}247 \cdot x_1 + 0{,}275 \cdot x_2 + 0{,}397 \cdot x_3 + 0{,}239 \cdot x_4 = 0{,}721$ $0{,}466 \cdot x_1 + 4{,}235 \cdot x_2 + 0{,}264 \cdot x_3 + 0{,}358 \cdot x_4 = 0{,}339$ $0{,}204 \cdot x_1 + 0{,}501 \cdot x_2 + 3{,}721 \cdot x_3 + 0{,}297 \cdot x_4 = 0{,}050$ $0{,}326 \cdot x_1 + 0{,}421 \cdot x_2 + 0{,}254 \cdot x_3 + 3{,}286 \cdot x_4 = 0{,}486.$
23	$3{,}476 \cdot x_1 + 0{,}259 \cdot x_2 + 0{,}376 \cdot x_3 + 0{,}398 \cdot x_4 = 0{,}871$ $0{,}425 \cdot x_1 + 4{,}583 \cdot x_2 + 0{,}417 \cdot x_3 + 0{,}328 \cdot x_4 = 0{,}739$ $0{,}252 \cdot x_1 + 0{,}439 \cdot x_2 + 3{,}972 \cdot x_3 + 0{,}238 \cdot x_4 = 0{,}644$ $0{,}265 \cdot x_1 + 0{,}291 \cdot x_2 + 0{,}424 \cdot x_3 + 3{,}864 \cdot x_4 = 0{,}581.$

Окончание

№	Система уравнений
24	$3{,}241 \cdot x_1 + 0{,}197 \cdot x_2 + 0{,}643 \cdot x_3 + 0{,}236 \cdot x_4 = 0{,}454$ $0{,}257 \cdot x_1 + 3{,}853 \cdot x_2 + 0{,}342 \cdot x_3 + 0{,}427 \cdot x_4 = 0{,}371$ $0{,}324 \cdot x_1 + 0{,}317 \cdot x_2 + 2{,}793 \cdot x_3 + 0{,}238 \cdot x_4 = 0{,}465$ $0{,}438 \cdot x_1 + 0{,}326 \cdot x_2 + 0{,}483 \cdot x_3 + 4{,}229 \cdot x_4 = 0{,}822.$
25	$4{,}405 \cdot x_1 + 0{,}472 \cdot x_2 + 0{,}395 \cdot x_3 + 0{,}253 \cdot x_4 = 0{,}623$ $0{,}227 \cdot x_1 + 2{,}957 \cdot x_2 + 0{,}342 \cdot x_3 + 0{,}327 \cdot x_4 = 0{,}072$ $0{,}419 \cdot x_1 + 0{,}341 \cdot x_2 + 3{,}238 \cdot x_3 + 0{,}394 \cdot x_4 = 0{,}143$ $0{,}325 \cdot x_1 + 0{,}326 \cdot x_2 + 0{,}401 \cdot x_3 + 4{,}273 \cdot x_4 = 0{,}065.$
26	$2{,}974 \cdot x_1 + 0{,}347 \cdot x_2 + 0{,}439 \cdot x_3 + 0{,}123 \cdot x_4 = 0{,}381$ $0{,}242 \cdot x_1 + 2{,}895 \cdot x_2 + 0{,}412 \cdot x_3 + 0{,}276 \cdot x_4 = 0{,}721$ $0{,}249 \cdot x_1 + 0{,}378 \cdot x_2 + 3{,}791 \cdot x_3 + 0{,}358 \cdot x_4 = 0{,}514$ $0{,}387 \cdot x_1 + 0{,}266 \cdot x_2 + 0{,}431 \cdot x_3 + 4{,}022 \cdot x_4 = 0{,}795.$
27	$3{,}452 \cdot x_1 + 0{,}458 \cdot x_2 + 0{,}125 \cdot x_3 + 0{,}236 \cdot x_4 = 0{,}745$ $0{,}254 \cdot x_1 + 2{,}458 \cdot x_2 + 0{,}325 \cdot x_3 + 0{,}126 \cdot x_4 = 0{,}789$ $0{,}305 \cdot x_1 + 0{,}125 \cdot x_2 + 3{,}869 \cdot x_3 + 0{,}458 \cdot x_4 = 0{,}654$ $0{,}423 \cdot x_1 + 0{,}452 \cdot x_2 + 0{,}248 \cdot x_3 + 3{,}896 \cdot x_4 = 0{,}405.$
28	$2{,}979 \cdot x_1 + 0{,}427 \cdot x_2 + 0{,}406 \cdot x_3 + 0{,}348 \cdot x_4 = 0{,}341$ $0{,}273 \cdot x_1 + 3{,}951 \cdot x_2 + 0{,}217 \cdot x_3 + 0{,}327 \cdot x_4 = 0{,}844$ $0{,}318 \cdot x_1 + 0{,}197 \cdot x_2 + 2{,}875 \cdot x_3 + 0{,}166 \cdot x_4 = 0{,}131$ $0{,}219 \cdot x_1 + 0{,}231 \cdot x_2 + 0{,}187 \cdot x_3 + 3{,}276 \cdot x_4 = 0{,}381.$
29	$2{,}048 \cdot x_1 + 0{,}172 \cdot x_2 + 0{,}702 \cdot x_3 + 0{,}226 \cdot x_4 = 0{,}514$ $0{,}495 \cdot x_1 + 4{,}093 \cdot x_2 + 0{,}083 \cdot x_3 + 0{,}390 \cdot x_4 = 0{,}176$ $0{,}277 \cdot x_1 + 0{,}368 \cdot x_2 + 4{,}164 \cdot x_3 + 0{,}535 \cdot x_4 = 0{,}309$ $0{,}766 \cdot x_1 + 0{,}646 \cdot x_2 + 0{,}767 \cdot x_3 + 5{,}960 \cdot x_4 = 0{,}535.$
30	$2{,}389 \cdot x_1 + 0{,}273 \cdot x_2 + 0{,}126 \cdot x_3 + 0{,}418 \cdot x_4 = 0{,}144$ $0{,}329 \cdot x_1 + 2{,}796 \cdot x_2 + 0{,}179 \cdot x_3 + 0{,}278 \cdot x_4 = 0{,}297$ $0{,}186 \cdot x_1 + 0{,}275 \cdot x_2 + 2{,}987 \cdot x_3 + 0{,}316 \cdot x_4 = 0{,}529$ $0{,}197 \cdot x_1 + 0{,}219 \cdot x_2 + 0{,}274 \cdot x_3 + 3{,}127 \cdot x_4 = 0{,}869.$

3. Лабораторная работа №3. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Численные методы решения нелинейных уравнений

3.1.1. Локализация корней

Будем рассматривать задачу приближенного нахождения нулей функции одной переменной

$$f(x) = 0, \tag{3.1}$$

где $f : R_1 \to R_1$ – алгебраическая или трансцендентная функция.

Теорема 1 (Больцано–Коши). Если непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ на концах его имеет противоположные знаки, т. е.

$$f(a) \cdot f(b) < 0, \tag{3.2}$$

то на интервале (a, b) она хотя бы один раз обращается в ноль.

Слабость теоремы:

1. Не дает ответа на вопрос о количестве корней на $[a, b]$ в случае выполнения условия (3.2).

2. Если условие (3.2) не выполнено, то не позволяет утверждать, что корней на $[a, b]$ нет.

Усиление теоремы.

Теорема 2. Непрерывная, строго монотонная функция $f(x)$ имеет и при том единственный ноль на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда на его концах она принимает значения разных знаков.

Установить монотонность на данном отрезке можно для дифференцируемой функции, потребовав знакопостоянства ее производной на всем отрезке.

Теорема 3. Пусть $f \in C^1[a;b]$, тогда если $f'(x)$ не меняет знак на интервале (a, b), то условие (3.2) является необходимым и достаточным для того, чтобы уравнение (3.1) имело и при этом единственный корень на отрезке $[a, b]$.

3.1.2. Метод Ньютона

Рассмотрим $f(x)=0$ и построим итерационный процесс:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f`(x_n)},\; n=0,1,2,... \tag{3.3}$$

Запишем уравнение касательной в точке x_0: $y-f(x_0)=f`(x_0)(x-x_0)$.

Найдем точку пересечения касательной с осью абсцисс:

$y=0$, тогда $x_1 \approx x_0-\dfrac{f(x_0)}{f`(x_0)}$.

Затем проводим касательную в x_1 и находим x_2 и так далее.

Поэтому метод Ньютона так же называют методом касательных.

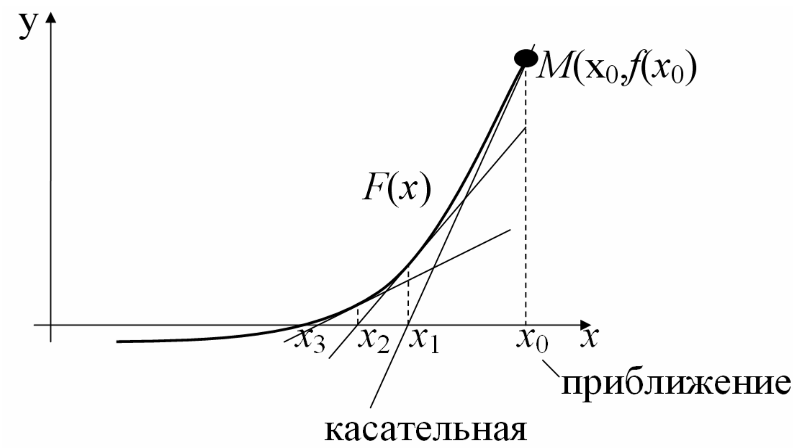

Рис. 3.1. Метод Ньютона (касательных)

Необходимые условия сходимости метода Ньютона:

1. Функция $f(x)$ должна быть дважды дифференцируема и непрерывна, должна иметь непрерывную первую производную, а $\left|f''(x)\right|<M$.

2. $f'(x)\neq 0$ на всем промежутке, содержащем корень $\forall x\in[a,b]: x^*\in[a,b]$.

3. $f''(x)$ сохраняет знак на $[a,b]$, $f''(x)<0$ – функция выпукла вверх, $f''(x)>0$ – функция выпукла вниз.

4. Начальное приближение $x_0 : f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Теорема. При выполнении необходимых условий 1–4, итерационный процесс Ньютона (3.3) сходится к решению x^* уравнения (3.1) с квадратичной скоростью в окрестности корня x^*.

3.1.3. Модификации метода Ньютона

I. Разностный метод с постоянным шагом.

Пусть для $f(x) = 0$ построен итерационный процесс метода Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f`(x_n)},\ n = 0,1,2,... \tag{3.4}$$

Для сложных функций вычисление $f'(x)$ достаточно трудоемко, поэтому заменим в (3.4) производную по определению

$$f`(x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h}.$$

При малых значениях шага h получим приближенное равенство

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot h}{f(x_n + h) - f(x_n)}. \tag{3.5}$$

II. Разностный метод с переменным шагом.

Шаг h можно изменять на каждой итерации либо проводить несколько итераций с одним шагом, затем его изменить (в зависимости от свойств функции). Тогда получим набор $h_1, h_2, ...$

Тогда (3.5) примет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot h_k}{f(x_n + h_k) - f(x_n)}, n \neq k. \tag{3.6}$$

Преимуществом методов этой группы является отсутствие производной. Недостатком – низкая скорость сходимости.

3.1.4. Метод Стеффенсена

Если учесть, что функция $f(x_n) \to 0$ с той же скоростью, что и $x_n \to x^*$, то есть смысл полагать, что $h_k = f(x_n)$. Это можно сделать на той стадии итерационного процесса, когда значения функции $|f(x_n)|$ уже достаточно малы. При таких h_k итерационный процесс пронимает вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}. \qquad (3.7)$$

Метод имеет сугубо локальный характер сходимости, но зато сходимость квадратичная.

3.1.5. Метод секущих

Пусть в (3.6) $h_k = x_{n-1} - x_n$, тогда $x_{n-1} = x_n + h_k$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}, \qquad (3.8)$$

где x_0 и x_1 задаются.

Формула (3.8) определяет новый метод как двухшаговый.

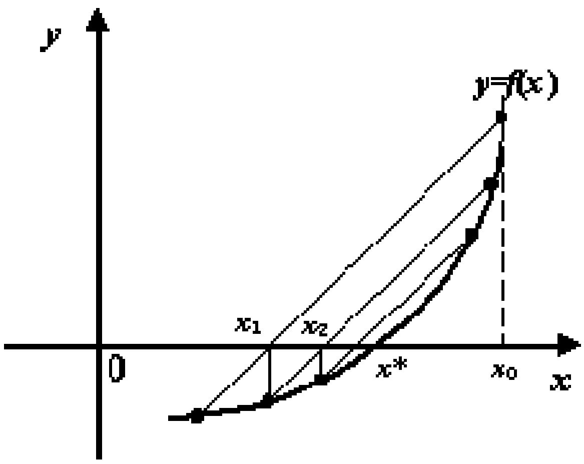

Рис. 3.2. Метод секущих

Из геометрических соображений легко понять, что x_{n+1} есть абсцисса точки пересечения с осью Ox прямой, проведенной через точки (x_{n-1}; $f(x_{n-1})$) и (x_n; $f(x_n)$), т. е. секущей.

3.1.6. Задача «лоцмана»

Наряду с уравнением $f(x)=0$ рассмотрим уравнение $e^{kx}f(x)=0$.

Тогда у $\Phi(x)=e^{kx}f(x)$ корни совпадают с корнями функции $f(x)$.

$\Phi'(x)=e^{kx}[kf(x)+f'(x)]$,

$$x_{n+1}=x_{n-1}-\frac{f(x_n)}{kf(x_n)+f'(x_n)}, \qquad (3.9)$$

Идея метода: Используем свободный параметр k для повышения скорости сходимости процесса Ньютона.

Так как x^* – корень, заранее известное точное решение, то на каждой итерации можно принять $k=-\dfrac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}$. Тогда из (3.9) следует, что

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'^2(x_n)-f(x_n)f''(x_n)}. \qquad (3.10)$$

Итерационный процесс метода «лоцмана» (3.10) в окрестности корня имеет кубическую скорость сходимости (при условии выполнения необходимых условий метода Ньютона). К недостаткам формулы (3.10) можно отнести наличие второй производной.

3.1.7. Метод хорд

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[a;b]$ и выполняется условие (3.2). Запишем уравнение прямой через две точки – уравнение хорды, где $x_0=a$ и $x_1=b$.

$$\frac{y-f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

Рассмотрим пересечение хорды с осью Оx, получим точку x_2.

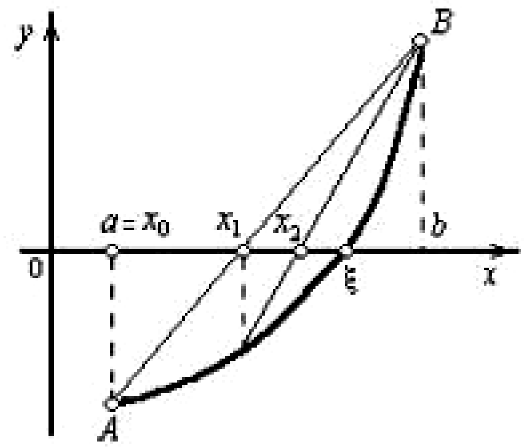

Рис. 3.3. Метод хорд

Выбираем две новые точки таким образом, чтобы на данном отрезке выполнялось условие (3.2).

Опять ищем пересечение с осью *Ox*, то есть $x_2 = x\big|_{y=0}$

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0).$$

И так далее.

Пусть на *n*-м шаге выполнено условие $f(x_n) f(x_{n-1}) < 0$.

Итерационный процесс метода хорд можно записать:

$$x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}). \qquad (3.11)$$

3.1.8. Метод простой итерации

Пусть решается уравнение $f(x) = 0$. Заменим его равносильным

$$x = \varphi(x). \qquad (3.12)$$

Выберем начальное приближение x_0 и подставим в правую часть уравнения (3.12) и получим $x_1 = \varphi(x_0)$. (3.13)

Подставляя в правую часть уравнения (3.13) x_1 вместо x_0 получим $x_2 = \varphi(x_1)$. Повторяя этот процесс, будем иметь последовательность чисел

$$x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n = 1,2,... \qquad (3.14)$$

Если эта последовательность сходящаяся, т. е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, то, переходя к пределу в уравнении (3.14), получим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \varphi(\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1})$.

Предполагая $\varphi(x)$ непрерывной, получим

$$x^* = \varphi(x^*). \tag{3.15}$$

Теорема (о простых итерациях). Пусть $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на [a;b], причем все ее значения принадлежат [a;b]. Тогда, если $\exists q$ – правильная дробь: $|\varphi'(x)| \le q < 1$, то при $a < x < b$:

1) процесс итерации $x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n = 1,2,...$ сходится независимо от начального значения $x_0 \in [a;b]$;

2) предельное значение $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ является единственным корнем уравнения $x = \varphi(x)$ на [a;b].

Погрешность метода: Метод итераций обеспечивает на n-м шаге абсолютную погрешность приближения к корню уравнения (3.1), не превосходящую длины n-го отрезка, умноженной на дробь $\frac{q}{1-q}$: $|x^* - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$, где $q = \max\limits_{x\in[a,b]}|\varphi'(x)|$.

Чтобы функция $\varphi(x)$ обеспечивала сходимость последовательности (3.14), она должна иметь вид

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k}, \tag{3.16}$$

где $|k| \ge \frac{Q}{2}$, $Q = \max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$, знак k совпадает со знаком $f'(x)$ на $[a,b]$.

3.2. Пример выполнения лабораторной работы

3.2.1. Задание к лабораторной работе

1. Локализуйте корень уравнения $f(x) = 0$ на начальном промежутке длиной не менее 1 графическим методом.

2. Выбрав в качестве начального приближения один из концов начального отрезка, уточните корень методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

3. Найдите с точностью 10^{-6} корень уравнения методом Ньютона.

4. Найдите методом по варианту корень уравнения с точностью 10^{-6}.

Метод по вариантам:

1, 6, 11, 16, 21, 26, 31 – разностный метод Ньютона с постоянным шагом,

2, 7, 12, 27, 22, 27, 32 – метод Стеффенсена,

3, 8, 13, 18, 23, 28, 33 – метод секущих,

4, 9, 14, 19, 24, 29, 34 – метод «лоцмана»,

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 – метод хорд.

3.2.2. Решение типового примера

1. Локализуем корень уравнения $f(x) = 2x^2 - x^3 - e^x = 0$ на начальном промежутке длиной не менее 1 графическим методом.

Преобразуем уравнение к виду $2x^2 - x^3 = e^x$, и построим графики полученных функций (рис. 3.4).

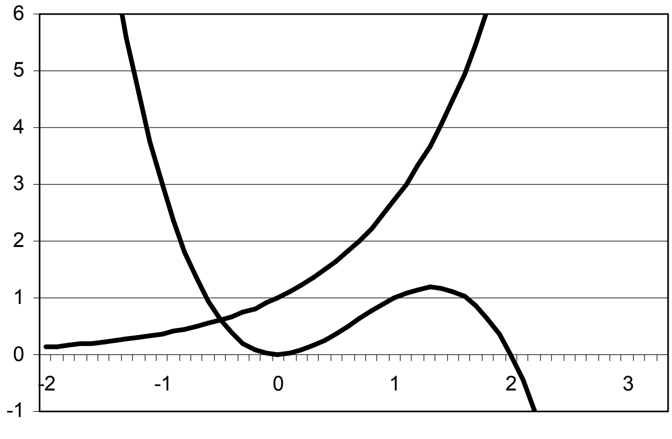

Рис. 3.4. Графическая локализация корня уравнения

Уравнение имеет один действительный корень на отрезке единичной длины $x \in [-1;0]$.

2. Выбрав в качестве начального приближения один из концов начального отрезка, уточним корень методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Для этого предварительно найдем $f'(x) = 4x - 3x^2 - e^x$. Нарисуем график полученной функции на отрезке $x \in [-1;0]$ (рис. 3.5).

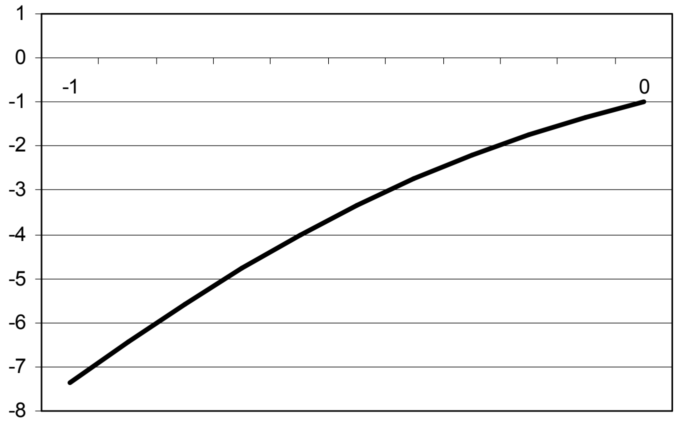

Рис. 3.5. График производной функции $f(x)$

Отсюда находим $Q = \max\limits_{x \in [-1,0]} |f'(x)| = f'(-1) = 7{,}36$.

Выберем k, удовлетворяющее условию (3.16). Так как $f'(x) < 0$ на отрезке $x \in [-1;0]$, следовательно, выберем $k = -4$.

Тогда функция $\varphi(x)$ будет иметь вид:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k} = \frac{4x + 2x^2 - x^3 - e^x}{4}.$$

Найдем производную функции $\varphi(x)$ и построим график этой функции на отрезке $x \in [-1;0]$ (рис. 3.6).

$$\varphi'(x) = x - \frac{f(x)}{k} = \frac{4 + 4x - 3x^2 - e^x}{4}.$$

Тогда $q = \max\limits_{x\in[-1,0]} |\varphi'(x)| = \varphi'(-1) = 0{,}84 < 1$. Возьмем за x_0 левый конец отрезка –1. Вычисления будем выполнять до выполнения условия

$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{q}{1-q}\varepsilon = \frac{0{,}84}{1-0{,}84} 0{,}001 \approx 0{,}0002 .$$

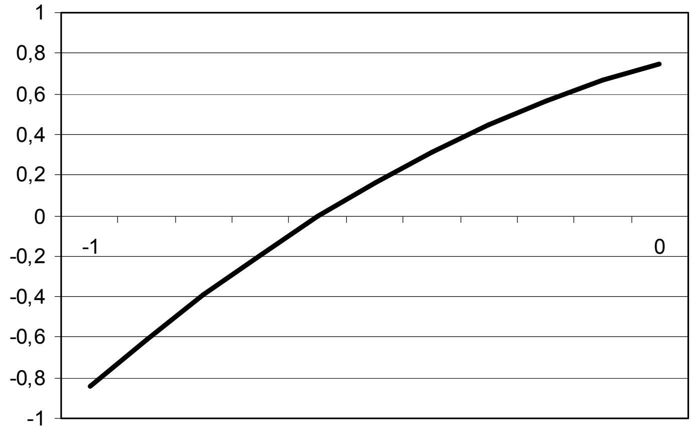

Рис. 3.6. График производной функции $\varphi(x)$

Выполним первую итерацию

$$x_1 = \varphi(x_0) = \frac{4x_0 + 2x_0{}^2 - x_0{}^3 - e^{x_0}}{4} = -0{,}3420 .$$

Вычисления занесем в таблицу.

n	x_n	$\varphi(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	–1,0000	–0,3420	
1	–0,3420	–0,4511	0,6580
2	–0,4511	–0,4856	0,1091
3	–0,4856	–0,4929	0,0345
4	–0,4929	–0,4942	0,0073
5	–0,4942	–0,4944	0,0013
6	–0,4944	–0,4945	0,0002

Поскольку $|x_6 - x_5| \le 0{,}0002$, считаем, что корень уравнения $x^* \approx -0{,}494$ с точность $\varepsilon = 0{,}001$.

3. Найдем с точностью 10^{-6} корень уравнения методом Ньютона.

Вычислим вторую производную функции:

$f'(x) = 4x - 3x^2 - e^x$, $f''(x) = 4 - 6x - e^x$.

Возьмем начальное приближение $x_0 = -1$, так как $f(-1)f''(-1) > 0$.

Образуем итерационный процесс метода Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f`(x_n)} = x_n - \frac{2x_n^{\ 2} - x_n^{\ 3} - e^{x_n}}{4x_n - 3x_n^{\ 2} - e^{x_n}}.$$

Выполняем вычисления до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon = 10^{-6}$.

Расположим все вычисления в таблице.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	–1,000 000	2,632 121	–7,367 879	
1	–0,642 757	0,565 981	–4,336 281	0,357 243
2	–0,512 235	0,060 018	–3,435 251	0,130 522
3	–0,494 764	0,000 982	–3,323 145	0,017 471
4	–0,494 468	0,000 000 3	–3,321 266	0,000 295
5	–0,494 468	0	–3,321 266	0

На пятой итерации достигаем необходимой точности $|x_5 - x_4| \le 10^{-6}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0{,}494\,468$.

4. Найдите методом по варианту корень уравнения с точностью 10^{-6}.

1) ***Разностный метод Ньютона с постоянным шагом***

Построим итерационный процесс разностного метода Ньютона с постоянным шагом *h*= 0,001

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot h}{f(x_n + h) - f(x_n)}.$$

Будем выполнять вычисления до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon = 10^{-6}$.

Сведем все вычисления в таблицу.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	–1,000 000	2,632 121	
1	–0,642 524	0,564 968	0,357 476
2	–0,512 074	0,059 462	0,130 450
3	–0,494 742	0,000 910	0,017 331
4	–0,494 468	–0,000 001	0,000 274
5	–0,494 468	0	0

На пятой итерации достигаем необходимой точности $\lvert x_5 - x_4\rvert \le 10^{-6}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0{,}494\,468$.

2) ***Метод Стеффенсена***

Построим итерационный процесс метода Стеффенсена

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}.$$

Будем выполнять вычисления до выполнения условия $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert \le \varepsilon = 10^{-6}$. Сведем все вычисления в таблицу.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	–1,000 000	2,632 121	
1	0,023 821	–1,022 985	1,023 821
2	–0,262 973	–0,612 266	0,286 794
3	–0,419 295	–0,232 177	0,156 322
4	–0,483 759	–0,035 206	0,064 464
5	–0,494 219	–0,000 827	0,010 461
6	–0,494 468	–0,000 000 5	0,000 249
7	–0,494 468	0	0

На седьмой итерации достигаем необходимой точности $\lvert x_7 - x_6\rvert \le 10^{-6}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0{,}494\,468$.

3) ***Метод секущих***

Построим итерационный процесс метода секущих

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \ .$$

Зададим $x_0 = -1$ и $x_1 = 0$. Будем выполнять вычисления до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon = 10^{-6}$. Сведем все вычисления в таблицу.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	–1,000 000	2,632 121	
1	0,000 000	–1,000 000	1,000 000
2	–0,275 321	–0,586 855	0,275 321
3	–0,666 403	0,670 578	0,391 082
4	–0,457 842	–0,117 435	0,208 561
5	–0,488 924	–0,018 319	0,031 081
6	–0,494 668	–0,000 663	0,005 744
7	–0,494 467	–0,000 004	0,000 201
8	–0,494 468	0	0,000 001

На восьмой итерации достигаем необходимой точности $|x_8 - x_7| \le 10^{-6}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0{,}494\,468$.

4) ***Метод «лоцмана»***

Построим итерационный процесс метода «лоцмана»

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)} .$$

Будем выполнять вычисления до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon = 10^{-6}$. Сведем все вычисления в таблицу.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	–1,000 000	2,632 121	
1	–0,533 922	0,136 050	0,466 078
2	–0,494 503	0,000 114	0,039 419
3	–0,494 468	0	0,000 034
4	–0,494 468	0	0

На четвертой итерации достигаем необходимой точности $\lvert x_4 - x_3\rvert \le 10^{-6}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0{,}494\,468$.

5) ***Метод хорд***

Построим итерационный процесс метода хорд

$$x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}).$$

Зададим $x_0 = -1$ и $x_1 = 0$. Будем выполнять вычисления до выполнения условия $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert \le \varepsilon = 10^{-6}$. Сведем все вычисления в таблицу.

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	–1,000 000	2,632 121	
1	0,000 000	–1,000 000	1,000 000
2	–0,275 321	–0,586 855	0,275 321
3	–0,666 403	0,670 578	0,391 082
4	–0,457 842	–0,117 435	0,208 561
5	–0,488 924	–0,018 319	0,031 081
6	–0,494 668	0,000 663	0,005 744
7	–0,494 467	–0,000 004	0,000 201
8	–0,494 468	0	0,000 001

На восьмой итерации достигаем необходимой точности $\lvert x_8 - x_7\rvert \le 10^{-6}$, следовательно, искомый корень уравнения $x^* \approx -0{,}494\,468$.

3.2.3. Варианты заданий

№	Уравнение	№	Уравнение
1	$f(x)=\sqrt{x}-x^{-1}\ln x+4-1{,}5$	16	$f(x)=\exp(-0{,}5x)-0{,}2x^2+1$
2	$f(x)=\cos x-\exp(-x)+0{,}5$	17	$f(x)=\exp(-0{,}4x^2)-0{,}5x^2+1$
3	$f(x)=1{,}5-0{,}4\sqrt{x^3}-0{,}5\ln x$	18	$f(x)=1{,}5-0{,}4\sqrt{x^3}-e^{-x^2}\sin x$
4	$f(x)=2-\sqrt{x^3}-2\ln x$	19	$f(x)=2-0{,}5x^2-0{,}5x^{-1}\sin x-x$
5	$f(x)=1-0{,}5x^2\ln x+0{,}3\sqrt{x}$	20	$f(x)=0{,}3\exp(x)-\cos^2 x+2$
6	$f(x)=1-x\ln x+0{,}3\sqrt{x}$	21	$f(x)=0{,}5\exp(-x^2)+x\cos x$
7	$f(x)=3-0{,}5\sqrt{x}-\exp(-0{,}5x^2)$	22	$f(x)=\cos^2 x-0{,}8x^2$
8	$f(x)=3-\sqrt{x^3}+0{,}5\ln x$	23	$f(x)=1+\exp(-\sqrt{x})-\ln(x)$
9	$f(x)=0{,}3\exp(-0{,}7\sqrt{x})-2x^2+4$	24	$f(x)=x\ln x-\exp(-0{,}5x^2)$
10	$f(x)=0{,}5\exp(-\sqrt{x})-0{,}2\sqrt{x^3}+2$	25	$f(x)=\sin(0{,}5x)+1-x^2$
11	$f(x)=\exp(-0{,}7x)-0{,}3\sqrt{x}+1$	26	$f(x)=\cos(0{,}5x)-0{,}4\ln x$
12	$f(x)=3-\sqrt{x}-0{,}5\ln x$	27	$f(x)=\exp(-0{,}3x^2)-\sqrt{x}+1$
13	$f(x)=0{,}2\exp(-x^2)-\sqrt{x}+3$	28	$f(x)=\cos^2 x-0{,}1\exp(x)$
14	$f(x)=0{,}3\cos^2 x-\ln x+2$	29	$f(x)=x^2-\exp(-x^2)$
15	$f(x)=\exp(-0{,}5x^2)-x^3+0{,}2$	30	$f(x)=x-\sin x-0{,}25$

4. Лабораторная работа №4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Численные методы решения систем нелинейных уравнений

4.1.1. Метод Ньютона

Пусть требуется решить систему вида:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}, \qquad (4.1)$$

где функции $f_1, f_2, ..., f_n$ – заданные нелинейные вещественнозначные функции n вещественных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Обозначим через

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \ F(\overline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\overline{x}) \\ f_2(\overline{x}) \\ ... \\ f_n(\overline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}, \ \overline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (4.1) можно записать в виде

$$F(\overline{x}) = \overline{0}. \qquad (4.2)$$

Обозначим через

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}; \frac{\partial f_1}{\partial x_2}; ...; \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ ... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}; \frac{\partial f_n}{\partial x_2}; ...; \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad (4.3)$$

J – матрица Якоби, якобиан.

Для n-мерного случая итерационный процесс Ньютона:

$$\overline{x}^{(k+1)} = \overline{x}^{(k)} - \left[J(\overline{x}^{(k)})\right]^{-1} F(\overline{x}^{(k)}). \qquad (4.4)$$

Замечание: Если начало приближения выбрано достаточно близко к решению системы, то итерационный процесс (4.4) сходится к этому решению с квадратичной скоростью.

Недостаток: Метод Ньютона достаточно трудоемкий – на каждом шаге итерационного процесса необходимо найти матрицу, обратную якобиану.

Модификации метода Ньютона:

I. Если матрицу Якоби вычислить и обратить лишь в начальной точке, то получим ***модифицированный метод Ньютона***:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \left[J(\bar{x}^{(0)})\right]^{-1} F(\bar{x}^{(k)}). \tag{4.5}$$

Плюсы: Требует меньших вычислительных затрат на 1 итерационный шаг. ***Минусы:*** Итераций требуется значительно больше для достижения заданной точности, чем основной метод Ньютона. Имеет геометрическую скорость сходимости.

II. ***Двухступенчатый метод Ньютона.***

Идея: Вычисление и обращение матрицы Якоби не на каждой итерации, а через несколько шагов.

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \left[J(\bar{x}^{(k)})\right]^{-1} F(\bar{x}^{(k)}) - \left[J(\bar{x}^{(k)})\right]^{-1} F(\bar{x}^{(k)} - \left[J(\bar{x}^{(k)})\right]^{-1} F(\bar{x}^{(k)})). \tag{4.6}$$

За $\bar{x}^{(k)}$ принимается результат одного шага основного метода, затем одного шага модифицированного метода – двухступенчатый процесс.

$$\bar{z}^{(k)} = \bar{x}^{(k)} - \left[J(\bar{x}^{(k)})\right]^{-1} F(\bar{x}^{(k)});\; \bar{x}^{(k)} = \bar{z}^{(k)} - \left[J(\bar{x}^{(k)})\right]^{-1} F(\bar{z}^{(k)}). \tag{4.7}$$

Такой процесс при определенных условиях дает кубическую сходимость последовательности $\{\bar{x}^{(k)}\}$ к решению $\bar{x}^{*}$.

Существуют модификации метода Ньютона, в которых задача обращения матриц Якоби на каждой итерации решается не точно, а приближенно. К таким методам относятся:

– ***аппроксимационный*** аналог метода Ньютона;

– ***разностный*** метод Ньютона.

4.1.2. Метод простой итерации

Необходимо найти решение системы (4.2). Таким образом, рассматривается задача о нулях нелинейного отображения

$F : R_n \to R_n$.

Пусть $\Phi : X \to X$, где $\Phi(X)$ – нелинейный оператор, а X – банахово подпространство (сепарабельное, т. е. счетное, всюду плотное множество).

Определение. Элемент пространства $x^* \in X$ называется неподвижной точкой оператора Φ, если $\Phi(x^*) = x^*$.

Определение. Оператор Φ называется сжимающим на множестве $Q \subset X$, если для $\forall x'$ и $x''Q$ справедливо $\|\Phi(x') - \Phi(x'')\| \le q\|x' - x''\|$, $q < 1$ – условие Липшица.

Рассмотрим наиболее простой метод – метод итерации.

Пусть система (4.1) преобразована к виду:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}, \tag{4.8}$$

$$\bar{x} = \Phi(\bar{x}), \tag{4.9}$$

где $\Phi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\bar{x}) \\ ... \\ \varphi_n(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... \\ \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}$.

Запишем итерацию

$$\bar{x}^{(k+1)} = \Phi(\bar{x}^{(k)}), \tag{4.10}$$

которая определяет ***метод простой итерации*** для задачи (4.1).

Если отображение, задаваемое системой (4.8), является сжимающим в некоторой окрестности корня, начальное приближение $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^T$ лежит в той же окрестности и итерации (4.10) не выходят за ее пределы, то последовательность $\left\{\overline{x}^{(k)}\right\}$ сходится к вектору решения системы (4.1) – $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^T$.

Теорема о простых итерациях. Пусть функция $\Phi(\overline{x})$ и замкнутое множество $M \subseteq D(\Phi) \in R_n$:

1) $\Phi(\overline{x}) \in M, \forall \overline{x} \in M$;

2) $\exists q < 1: \left\|\Phi(\overline{x}) - \Phi(\tilde{\overline{x}})\right\| \leq q\left\|\overline{x} - \tilde{\overline{x}}\right\|$, для $\forall\ \overline{x}, \tilde{\overline{x}} \in M$,

тогда $\Phi(\overline{x})$ имеет в M единственную неподвижную точку $\overline{x}^*$; последовательность $\left\{\overline{x}^{(k)}\right\}$, определяемая методом простых итераций по формуле (4.10), при $\forall$ начальных $\overline{x}^{(0)} \in M$ сходится к $\overline{x}^*$ и справедливы оценки:

$$\left\|\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)}\right\| \leq \frac{q}{1-q}\left\|\overline{x}^{(k)} - \overline{x}^{(k-1)}\right\| \leq \frac{q^k}{1-q}\left\|\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(0)}\right\|, \forall k \in N. \tag{4.11}$$

Для приведения системы нелинейных уравнений к виду, пригодному для итерации, можно использовать такой способ: умножить каждое уравнение системы (4.1) на α_i, где $i = \overline{1, n}$, – некоторый множитель, не равный нулю. Затем эти множители можно использовать для достижения условия сжимаемости.

Недостаток: необходимо прибегать к искусственным приемам при приведении системы к виду, пригодному для итерации.

4.1.3. Метод наискорейшего спуска

Общим недостатком рассмотренных ранее методов является локальный характер сходимости. Когда возникают проблемы с выбором хорошего начального приближения, применяют методы спуска.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}. \tag{4.12}$$

Из функций f и g системы (4.12) образуем новую функцию:

$$\Phi(x,y) = f^2(x,y) + g^2(x,y)\,. \tag{4.13}$$

Так как функция $\Phi(x,y)$ неотрицательная, то $\exists(x^*,y^*)$:

$\Phi(x,y) \geq \Phi(x^*,y^*) \geq 0,\ \forall(x,y) \in R_2$, т. е. $(x^*,y^*) = \arg\min\limits_{x,y\in R_2} \Phi(x,y)$.

Так как $\Phi(x^*,y^*) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x^*,y^*) = 0 \\ g(x^*,y^*) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x^*,y^*)$ решение системы (4.12).

Последовательность точек $\{x_k\},\{y_k\}$ получим по рекуррентной формуле

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \alpha_k \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

где $k = 0,1,2,\ldots$; $(p_k,q_k)^T$ – вектор, определяющий направление минимизации; α_k – скалярная величина, шаговый множитель.

При этом выполняется условие релаксации: $\Phi(x_{k+1},y_{k+1}) < \Phi(x_k,y_k)$.

Вектор $\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = -grad\Phi(x_k,y_k) = -\begin{pmatrix} \Phi'_x(x_k,y_k) \\ \Phi'_y(x_k,y_k) \end{pmatrix}$ – антиградиент $\Phi(x,y)$.

Тогда градиентный метод имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \alpha_k \begin{pmatrix} \Phi'_x(x_k,y_k) \\ \Phi'_y(x_k,y_k) \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

где оптимальный шаг $\alpha_k = \arg\min\limits_{\alpha>0} \Phi\begin{pmatrix} x_k - \alpha\Phi'_x(x_k,y_k) \\ y_k - \alpha\Phi'_y(x_k,y_k) \end{pmatrix}$. (4.16)

Формулы (4.15) и (4.16) определяют градиентный метод, который называют методом наискорейшего спуска.

Достоинство: глобальная скорость (из любой начальной точки процесс приведет к минимальной точке).

Недостаток: медленная скорость сходимости эквивалентная линейной, причем, скорость замедляется в окрестности корня. Лучше применять совместно с другими методами (сначала – спуск, затем – метод Ньютона).

4.2. Пример выполнения лабораторной работы

4.2.1. Задание к лабораторной работе

1. Локализуйте корни системы уравнений графически.

2. Найдите с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ все корни системы нелинейных уравнений, используя методы Ньютона и наискорейшего спуска.

4.2.2. Решение типового примера

1. Локализуем корни системы уравнений графически.

$$\begin{cases} \sin(x_1 + 1{,}5) - x_2 + 2{,}9 = 0 \\ \cos(x_2 - 2) + x_1 = 0 \end{cases}.$$

Преобразуем систему уравнений к виду

$$\begin{cases} x_2 = \sin(x_1 + 1{,}5) + 2{,}9 \\ x_2 = \arccos(-x_1 - 2) + 2 \end{cases}.$$

Построим графики полученных функций (рис. 4.1).

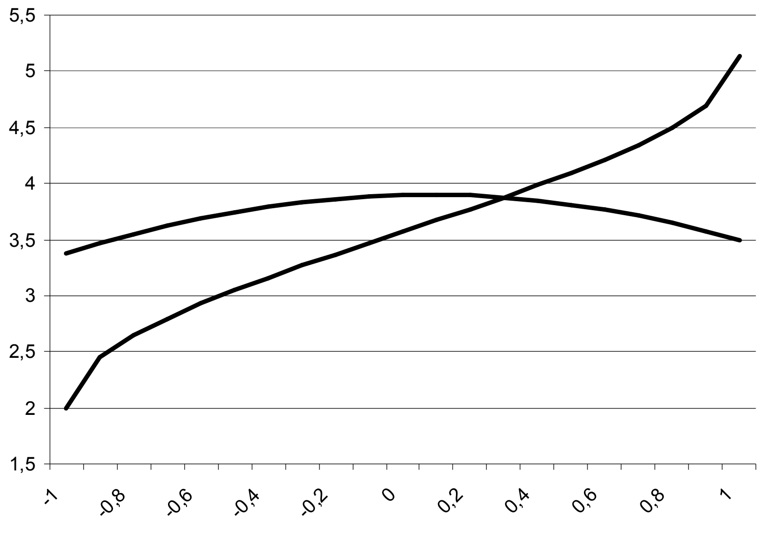

Рис. 4.1. Графическая локализация корня уравнения

Система уравнений имеет один действительный корень на отрезке единичной длины $x_1 \in [0;1]$ и $x_2 \in [3;4]$.

2. Найдем с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ корень системы нелинейных уравнений, используя метод Ньютона.

Построим итерационный процесс Ньютона

$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \left[J(\bar{x}^{(k)})\right]^{-1} \cdot F(\bar{x}^{(k)})$.

Найдем якобиан $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ системы

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = \sin(x_1 + 1{,}5) - x_2 + 2{,}9 \\ f_2(x_1, x_2) = \cos(x_2 - 2) + x_1 \end{cases}.$$

Получим $J = \begin{pmatrix} \cos(x_1 + 1{,}5) & -1 \\ 1 & -\sin(x_2 - 2) \end{pmatrix}$.

Выберем начальное приближение: $\bar{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Вычисления будем выполнять до выполнения условия

$\left\| \bar{x}^{k} - \bar{x}^{k-1} \right\| \le \varepsilon = 0{,}000\,001$.

Найдем значение якобиана в точке $\bar{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, получим

$$J(\bar{x}^{0}) = \begin{pmatrix} 0{,}070\,737 & -1 \\ 1 & -0{,}909\,297 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица к якобиану $\left[J(\bar{x}^{0})\right]^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}971\,804 & 1{,}068\,743 \\ -1{,}068\,743 & 0{,}075\,600 \end{pmatrix}$.

Значение функции $F(\bar{x}^{0}) = \begin{pmatrix} -0{,}102\,505 \\ -0{,}416\,147 \end{pmatrix}$.

Выполним первую итерацию

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0{,}971\,804 & 1{,}068\,743 \\ -1{,}068\,743 & 0{,}075\,600 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}102\,505 \\ -0{,}416\,147 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}345\,139 \\ 3{,}921\,909 \end{pmatrix}.$$

$\left\| \bar{x}^{k} - \bar{x}^{k-1} \right\| = 0{,}345\,139$.

Занесем вычисления в таблицу.

k	$\overline{x}^k$	$\left\Vert \overline{x}^k - \overline{x}^{k-1} \right\Vert$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	
1	$\begin{pmatrix} 0{,}345\,139 \\ 3{,}921\,909 \end{pmatrix}$	0,345 139
2	$\begin{pmatrix} 0{,}299\,791 \\ 3{,}874\,888 \end{pmatrix}$	0,047 021
3	$\begin{pmatrix} 0{,}298\,713 \\ 3{,}874\,140 \end{pmatrix}$	0,001 078
4	$\begin{pmatrix} 0{,}298\,712 \\ 3{,}874\,139 \end{pmatrix}$	0,000 001

Поскольку $\left\Vert \overline{x}^4 - \overline{x}^3 \right\Vert \le 0{,}000\,001$, считаем, что корень системы уравнений $\overline{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}298\,712 \\ 3{,}874\,139 \end{pmatrix}$ с точность $\varepsilon = 10^{-6}$.

Найдем с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ корень системы нелинейных уравнений, используя метод наискорейшего спуска.

Построим итерационный процесс метода наискорейшего спуска

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \end{pmatrix} - \alpha_k \begin{pmatrix} \Phi'_{x_1}(x_1^k, x_2^k) \\ \Phi'_{x_2}(x_1^k, x_2^k) \end{pmatrix}.$$

Строим функцию $\Phi(x_1, x_2) = f_1^2(x_1, x_2) + f_2^2(x_1, x_2)$.

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2) &= \sin^2(x_1 + 1{,}5) + \cos^2(x_2 - 2) + x_1^2 + x_2^2 + 5{,}8\sin(x_1 + 1{,}5) - \\ &- 2x_2\sin(x_1 + 1{,}5) + 8{,}41 - 5{,}8x_2 + 2x_2\cos(x_2 - 2) \end{aligned}.$$

Найдем частные производные функции $\Phi(x_1, x_2)$:

$$\Phi'_{x_1}(x_1, x_2) = 2\left[\cos(x_1 + 1{,}5)\cdot\left(\sin(x_1 + 1{,}5) + 2{,}9 - x_2\right) + x_1 + \cos(x_2 - 2)\right],$$

$$\begin{aligned} \Phi'_{x_2}(x_1, x_2) &= -2\left[\cos(x_2 - 2)\sin(x_2 - 2) - x_2 + \sin(x_1 + 1{,}5) + 2{,}9 + \right. \\ &\left. + x_1\sin(x_1 + 1{,}5)\right] \end{aligned}.$$

Путем перебора выбираем наилучший шаговый множитель α, который оставим постоянным α = const = 0,3.

После первой итерации получаем вектор: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}254\,039 \\ 3{,}711\,456 \end{pmatrix}$.

И только на 25 итерации достигается необходимая точность $\varepsilon = 10^{-6}$, и мы получаем решение:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}298\,711 \\ 3{,}741\,390 \end{pmatrix}.$$

4.2.3. Варианты заданий

№	Система уравнений	№	Система уравнений
1	$\sin(x_1 + x_2) - x_2 - 1.2 = 0$ $2x_1 + \cos x_2 - 2 = 0$	10	$\sin(0.5x_1 + x_2) - 1.2x_1 - 1 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
2	$\cos(x_1 - 1) + x_2 - 0.5 = 0$ $\sin x_1 + 2x_2 - 2 = 0$	11	$\tan(x_1x_2 + 0.3) - x_1^2 = 0$ $0.9x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$
3	$\sin x_1 + 2x_2 - 2 = 0$ $\cos x_1 + x_2 - 1.5 = 0$	12	$\sin(x_1 + x_2) - 1.3x_1 - 1 = 0$ $x_1^2 + 0.2x_2^2 - 1 = 0$
4	$\cos x_1 + x_2 - 1.5 = 0$ $2x_1 - \sin(x_2 - 0.5) - 1 = 0$	13	$\tan(x_1x_2) - x_1^2 = 0$ $0.8x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$
5	$\sin(x_1 + 1.5) - x_2 + 2.9 = 0$ $\cos(x_2 - 2) + x_1 = 0$	14	$\sin(x_1 + x_2) - 1.5x_1 - 0.1 = 0$ $3x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
6	$\cos(x_1 + 0.5) + x_2 - 0.8 = 0$ $\sin x_2 - 2x_1 - 1.6 = 0$	15	$\tan(x_1x_2) - x_1^2 = 0$ $0.7x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$
7	$\sin(x_1 - 1) + x_2 - 0.1 = 0$ $x_1 - \sin(x_2 + 1) - 0.8 = 0$	16	$\sin(x_1 + x_2) - 1.2x_1 - 0.1 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
8	$\cos(x_1 + x_2) + 2x_2 = 0$ $x_1 + \sin x_2 - 0.6 = 0$	17	$\tan(x_1x_2 + 0.2) - x_1^2 = 0$ $0.6x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$
9	$\cos(x_1 + 0.5) - x_2 - 2 = 0$ $\sin x_2 - 2x_1 - 1 = 0$	18	$\sin(x_1 + x_2) - x_1 + 0.1 = 0$ $x_2 - \cos(3x_1) + 0.1 = 0$

Окончание

№	Система уравнений	№	Система уравнений
19	$\sin(x_1 + x_2) - x_2 - 1.5 = 0$ $x_1 + \cos(x_2 - 0.5) - 0.5 = 0$	25	$\cos(x_1 + 0.5) + x_2 - 1 = 0$ $\sin x_2 - 2x_1 - 2 = 0$
20	$\sin(x_2 + 1) - x_1 - 1.2 = 0$ $2x_1^2 + x_2 - 2 = 0$	26	$\cos(x_2 - 2) + x_1 = 0$ $\sin(x_1 + 0.5) - x_2 + 2.9 = 0$
21	$\cos(x_2 - 1) + x_1 - 0.5 = 0$ $x_2 - \cos x_1 - 3 = 0$	27	$\sin(x_1 - 1) + x_2 - 1.5 = 0$ $x_1 - \sin(x_2 - 1) - 1 = 0$
22	$\tan(x_1 x_2 + 0.4) - x_1^2 = 0$ $0.6x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$	28	$\sin(x_2 + 1) - x_1 - 1 = 0$ $2x_2 + \cos x_1 - 0.5 = 0$
23	$\sin(x_1 + x_2) - 1.6x_1 - 1 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	29	$\cos(x_2 - 1) + x_1 - 0.8 = 0$ $x_2 - \cos x_1 - 2 = 0$
24	$\tan(x_1 x_2 + 0.1) - x_1^2 = 0$ $x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$	30	$\cos(x_1 - 1) + x_2 - 1 = 0$ $\sin x_2 + 2x_1 - 1.6 = 0$

5. Лабораторная работа №5. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ТАБЛИЧНО ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

5.1. Интерполяция таблично заданных функций

5.1.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть в точках $x_0, x_1,..., x_n$ таких, что $a \le x_0 <...< x_n \le b$ известны значения функции $y = f(x)$, то есть на отрезке $[a; b]$ задана табличная (сеточная) функция:

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

Определение. Функция $\varphi(x)$ называется интерполирующей (интерполяционной) для $f(x)$ на $[a; b]$, если ее значения $\varphi(x_0)$, $\varphi(x_1)$, ..., $\varphi(x_n)$ в заданных точках $x_0, x_1,..., x_n$, называемых узлами интерполяции, совпадают с заданными значениями функции $f(x)$, то есть с $y_0, y_1,..., y_n$ соответственно.

Будем строить многочлен n-степени $L_n(x)$ в виде линейной комбинации

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) f(x_i)\,, \tag{5.1}$$

где базисные многочлены имеют вид

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_n)},$$

обладающий свойством: $L_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{0,n}$, (5.2)

если известны значения функции $f(x)$ в точках $x_i, i = \overline{0,n}$.

Теорема. Полином n-й степени, обладающий свойством (5.2), единственный.

5.1.2. Полином Ньютона

Пусть интерполируемая функция $y = f(x)$ задана таблично значениями $y_0, y_1, \ldots, y_n$ на системе равностоящих узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$: $\forall x_k$ можно представить в виде $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0,n}$, $h > 0$, $f_k = f(x_k)$, h – шаг сетки.

Определение. Конечной разностью 1-го порядка называется

$\Delta^1 f_k = f_{k+1} - f_k$ $(\Delta^0 f_k = f_k)$.

Конечная разность n-порядка:

$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$.

Свойства:

1. $\Delta^n P_n(x) = const$ (конечная разность n-го порядка от полинома n-й степени равно константе).

$\Delta^{(n+1)} P_n(x) = 0$ (конечная разность $(n+1)$-го порядка от полинома n-го порядка равна нулю).

2. Пусть $f(x)$ имеет все производные, тогда $\Delta^n f_k \approx f^{(n)}(x_k) h^n$.

Непосредственно через значения функции конечные разности можно представить рекуррентной формулой $\Delta^n f_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (C_n^i) f_{n+k-i}$.

Пусть $f(x)$ задана таблично и $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0,n}$, $f_k = f(x_k)$.

Определение. Разделенной разностью $f(x_0, \ldots, x_n)$ n-го порядка называется:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

Разделенная разность первого порядка: $f(x_0, x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

Разделенная разность второго порядка:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}.$$

Свойства разделенной разности.

1. Пусть $f(x)$ имеет все производные, тогда при равномерном разбиении: $f(x_0, x_1, ..., x_n) = f^{(n)}(\xi)$, $f(x_0, x_1, ..., x_n) = \dfrac{\Delta^n f_0}{n! h^n}$.

2. Разделенная разность n-го порядка, примененная к полиному n-й степени равна константе. Разделенная разность (n+1)-го порядка от полинома n-й степени равна нулю.

3. Разделенная разность n-го порядка $f(x_0, x_1, ..., x_n)$ – симметричная функция своих аргументов.

Для функции $f(x)$, заданной таблично на узлах $x_i, i = \overline{0,n}$, можно записать интерполяционный полином Ньютона:

$$\begin{aligned} N_n(x) = f(x_0) + f(x_0,x_1)(x-x_0) + f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1) + ... + \\ + f(x_0,x_1,...,x_n)(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}) \end{aligned} . \quad (5.3)$$

Замечание: Полином Ньютона есть одна из форм представления полинома Лагранжа.

Резюме: Обычно интерполяция проводится не на всех точках разбиения, а только на 5–7 соседних. В этой ситуации при изменении точек интерполирования полином Лагранжа приходится строить заново каждый раз. А полином Ньютона изменяется лишь на несколько слагаемых. При увеличении числа точек интерполяции на одну точку все слагаемые полинома Ньютона сохраняются, добавляются только последующие слагаемые. Для полинома Лагранжа все n слагаемых должны быть построены заново.

I интерполяционная формула Ньютона

Пусть для функции $y = f(x)$, заданной таблицей с постоянным шагом составлена таблица конечных разностей.

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + ... + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x-x_0)...(x-x_{n-1}) . \quad (5.4)$$

Пусть $k = \dfrac{x - x_0}{h}$, $x = x_0 + kh$, тогда

$$P_n(x) = P_n(x_0 + kh) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots +$$
$$+ \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (5.5)$$

Формулы (5.4) и (5.5) применяются для интерполирования в начале отрезка для значения k из интервала $(0,1)$.

Путем переобозначений за начальное значение x_0 можно принять любое табличное значение аргумента x, отбросив лишние узлы сетки.

II интерполяционная формула Ньютона

Когда значения аргумента находятся ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую интерполяционную формулу становится невыгодно. В этом случае строят полином в виде:

$$P_n(x) = P_n(x_n + kh) = y_n + k\Delta y_{n-1} + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 . \qquad (5.6)$$

5.1.3. Кусочно-линейная и кусочно-квадратичная аппроксимация

Пусть задана функция $y = f(x)$ таблично x_i, y_i $(i = \overline{0,n})$ $a \le x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n \le b$.

Требуется аппроксимировать функцию $f(x)$ кусочно-линейной функции $\varphi(x)$, исходя из условий интерполяций, т. е.

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1, x_0 \le x \le x_1 \\ a_2 x + b_2, x_1 \le x \le x_2 \\ \ldots \\ a_n x + b_n, x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases} .$$

Для нахождения неизвестных параметров a_k, b_k $(k = \overline{1,n})$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \begin{cases} a_1 x_0 + b_1 = y_0 \\ a_1 x_1 + b_1 = y_1 \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} a_n x_{n-1} + b_n = y_{n-1} \\ a_n x_n + b_n = y_n \end{cases} \end{cases}.$$

Каждая из n подсистем решается отдельно.

Кусочно-квадратичная аппроксимация осуществляется аналогично кусочно-линейной аппроксимации. Каждое звено кусочно-квадратичной функции при $n = 2m$

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1 x^2 + b_1 x + c_1, x \in [x_0, x_2] \\ a_2 x^2 + b_2 x + c_2, x \in [x_2, x_4] \\ \dots \\ a_n x^2 + b_n x + c_n, x \in [x_{2m-2}, x_{2m}] \end{cases}.$$

Тройка коэффициентов $a_k, b_k, c_k\ (k = \overline{1,m})$ может быть найдена последовательным решением трехмерных линейных систем, соответствующим выставленным интерполяционным условиям.

$$\begin{cases} a_k x_{2k-2}^2 + b_k x_{2k-2} + c_k = y_{2k-2} \\ a_k x_{2k-1}^2 + b_k x_{2k-1} + c_k = y_{2k-1} \\ a_k x_{2k}^2 + b_k x_{2k} + c_k = y_{2k} \end{cases}.$$

5.2. Пример выполнения лабораторной работы

5.2.1. Задание к лабораторной работе

Функция $y = f(x)$ задана таблично в узлах

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4

y_0 y_1 y_2 y_3 y_4.

1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа. Вычислить $L_4(x_1+x_2)$. Построить график многочлена Лагранжа.

2. Построить таблицы конечных и разделенных разностей.

3. Построить полином Ньютона и вычислить значение $N_4(x_1+x_2)$. Построить график многочлена Ньютона.

4. Построить интерполяционные сплайны линейный и квадратичный. Построить графики сплайнов.

5. На одном чертеже с графиком полиномов построить графики сплайнов.

5.2.2. Решение типового примера

Функция $y = f(x)$ задана таблично в узлах

x	0,351	0,867	3,315	5,013	6,432
y	–0,572	–2,015	–3,342	–5,752	–6,911

1. Построим интерполяционный многочлен Лагранжа 4-й степени $L_4(x)$ в виде линейной комбинации $L_4(x) = \sum_{i=0}^{4} p_i(x) f(x_i)$.

Вычислим базисные многочлены.

$$p_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} =$$

$$= \frac{(x - 0{,}867)(x - 3{,}315)(x - 5{,}013)(x - 6{,}432)}{(0{,}351 - 0{,}867)(0.351 - 3{,}315)(0{,}351 - 5{,}013)(0{,}351 - 6{,}432)} =$$

$$= 0{,}0231 \cdot (x - 0{,}867)(x - 3{,}315)(x - 5{,}013)(x - 6{,}432),$$

$$p_1(x) = -0{,}0343 \cdot (x - 0{,}351)(x - 3{,}315)(x - 5{,}013)(x - 6{,}432),$$

$$p_2(x) = 0{,}0260 \cdot (x - 0{,}351)(x - 0{,}867)(x - 5{,}013)(x - 6{,}432),$$

$$p_3(x) = -0{,}0215 \cdot (x - 0{,}351)(x - 0{,}867)(x - 3{,}315)(x - 6{,}432),$$

$$p_4(x) = 0{,}0067 \cdot (x - 0{,}351)(x - 0{,}867)(x - 3{,}315)(x - 5{,}013).$$

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа 4-й степени будет иметь вид

$$L_4(x) = -0{,}0132 \cdot (x - 0{,}867)(x - 3{,}315)(x - 5{,}013)(x - 6{,}432) +$$

$$+ 0{,}0691 \cdot (x - 0{,}351)(x - 3{,}315)(x - 5{,}013)(x - 6{,}432) -$$

$$- 0{,}0870 \cdot (x - 0{,}351)(x - 0{,}867)(x - 5{,}013)(x - 6{,}432) +$$

$$+ 0{,}1235 \cdot (x - 0{,}351)(x - 0{,}867)(x - 3{,}315)(x - 6{,}432) -$$

$$- 0{,}0462 \cdot (x - 0{,}351)(x - 0{,}867)(x - 3{,}315)(x - 5{,}013).$$

Вычислим значение полинома в точке

$L_4(x_1 + x_2) = L_4(x_1 + x_2) = L_4(0{,}867 + 3{,}315) = -4{,}3453.$

Построим график многочлена Лагранжа (рис. 5.1).

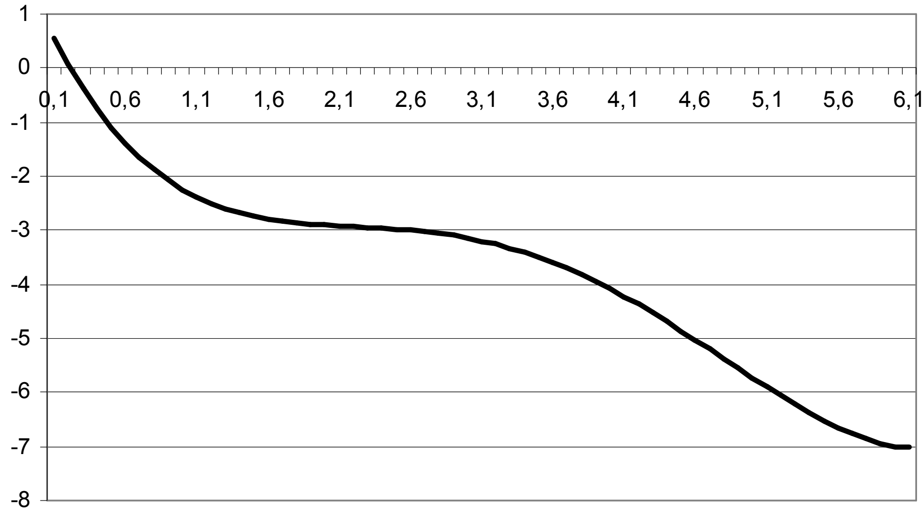

Рис. 5.1. График полинома Лагранжа

2. Построим таблицы конечных и разделенных разностей.

Таблица 5.1

Таблица конечных разностей

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
0,351	–0,572	–1,4430	0,1160	–1,1990	3,5330
0,867	–2,015	–1,3270	–1,0830	2,3340	
3,315	–3,342	–2,4100	1,2510		
5,013	–5,752	–1,1590			
6,432	–6,911				

Таблица 5.2

Таблица разделенных разностей

x_k	y_k	1-го порядка	2-го порядка	3-го порядка	4-го порядка
0,351	–0,572	–2,7965	0,7606	–0,2085	0,0463
0,867	–2,015	–0,5421	–0,2116	0,0728	
3,315	–3,342	–1,4193	0,1933		
5,013	–5,752	–0,8168			
6,432	–6,911				

3. Построим полином Ньютона, используя таблицу разделенных разностей

$$N_4(x) = f(x_0) + f(x_0,x_1)(x-x_0) + f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1) +$$
$$+ f(x_0,x_1,x_2,x_3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) +$$
$$+ f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Получим

$$N_4(x) = -0{,}572 - 2{,}7965(x-0{,}351) + 0{,}7606(x-0{,}351)(x-0{,}867) -$$
$$- 0{,}2085(x-0{,}351)(x-0{,}867)(x-3{,}315) +$$
$$+ 0{,}0463(x-0{,}351)(x-0{,}867)(x-3{,}315)(x-5{,}013).$$

Вычислим значение полинома Ньютона в точке

$$N_4(x_1+x_2) = N_4(x_1+x_2) = L_4(0{,}867+3{,}315) = -4{,}3453.$$

Построим график многочлена Ньютона (рис. 5.2).

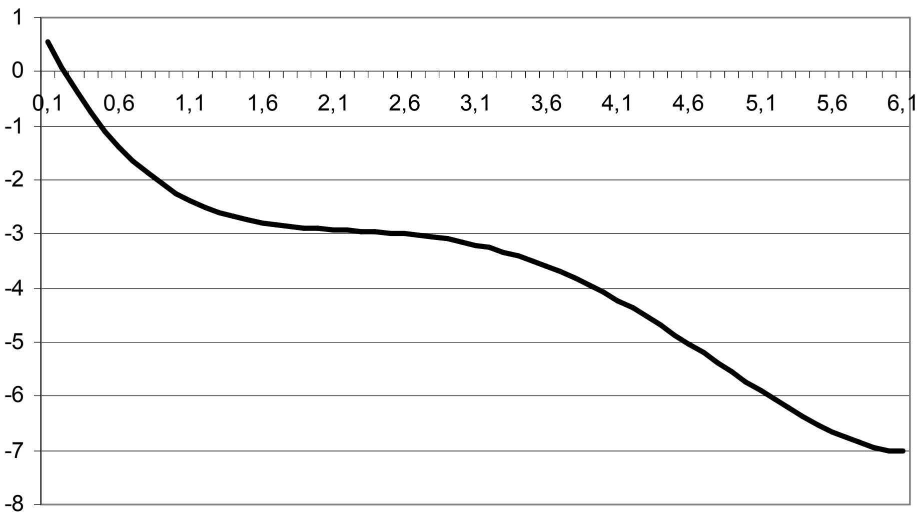

Рис. 5.2. График полинома Ньютона

4. Построим интерполяционные сплайны линейный и квадратичный.

Кусочно-линейная аппроксимация.

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1x + b_1, & 0{,}351 \le x \le 0{,}867, \\ a_2x + b_2, & 0{,}867 \le x \le 3{,}315, \\ a_3x + b_3, & 3{,}315 \le x \le 5{,}013, \\ a_4x + b_4, & 5{,}013 \le x \le 6{,}432. \end{cases}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов строим систему:

$$\begin{cases} \begin{cases} 0{,}351a_1 + b_1 = -0{,}572, \\ 0{,}867a_1 + b_1 = -2{,}015; \end{cases} \\ \begin{cases} 0{,}867a_2 + b_2 = -2{,}015, \\ 3{,}315a_2 + b_2 = -3{,}342; \end{cases} \\ \begin{cases} 3{,}315a_3 + b_3 = -3{,}342, \\ 5{,}013a_3 + b_3 = -5{,}752; \end{cases} \\ \begin{cases} 5{,}013a_4 + b_4 = -5{,}752, \\ 6{,}432a_4 + b_4 = -6{,}911. \end{cases} \end{cases}$$

Решая каждую подсистему отдельно, получим:

$$\begin{matrix} a_1 = -2{,}797 & a_2 = -0{,}542 & a_3 = -1{,}419 & a_4 = -0{,}817 \\ b_1 = 0{,}490 & ,\ b_2 = -1{,}545 & ,\ b_3 = 1{,}362 & ,\ b_4 = -1{,}656 \end{matrix}.$$

Тогда линейный сплайн имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} -2{,}797x + 0{,}490, & 0{,}351 \le x \le 0{,}867, \\ -0{,}542x - 1{,}545, & 0{,}867 \le x \le 3{,}315, \\ -1{,}419x + 1{,}362, & 3{,}315 \le x \le 5{,}013, \\ -0{,}817x - 1{,}656, & 5{,}013 \le x \le 6{,}432. \end{cases}$$

Построим график линейного сплайна (рис. 5.3).

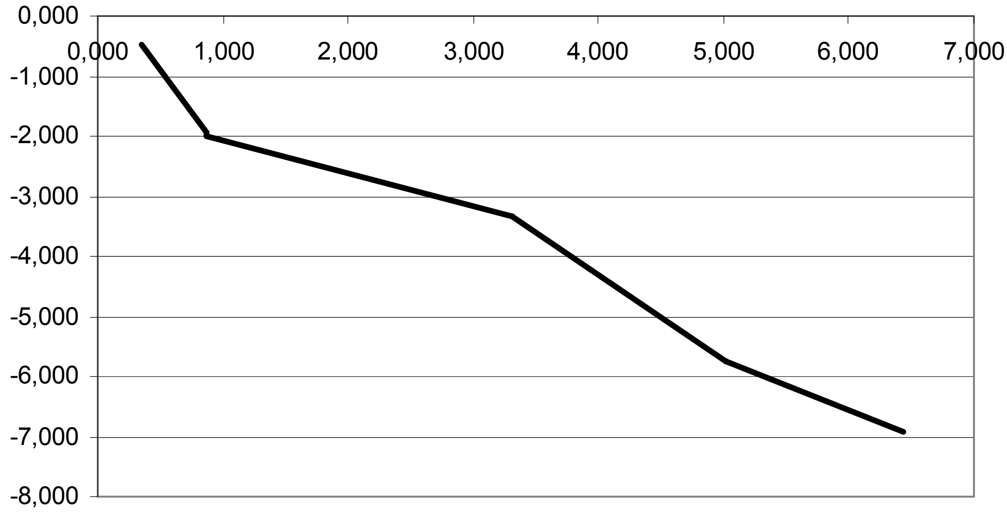

Рис. 5.3. График линейного сплайна

Кусочно-квадратичная аппроксимация.

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1, & x \in [0{,}351;3{,}315] \\ a_2x^2 + b_2x + c_2, & x \in [3{,}315;3{,}6.432] \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 0{,}123a_1 + 0{,}351b_1 + c_1 = -0{,}572, \\ 0{,}752a_1 + 0{,}867b_1 + c_1 = -2{,}015, \\ 10{,}989a_1 + 3{,}315b_1 + c_1 = -3{,}342; \end{cases} \\ \begin{cases} 10{,}989a_2 + 3{,}315b_2 + c_2 = -3{,}342, \\ 25{,}130a_2 + 5{,}013b_2 + c_2 = -5{,}752, \\ 41{,}370a_2 + 6{,}432b_2 + c_2 = -6{,}911. \end{cases} \end{cases}$$

Решая каждую подсистему отдельно, получим:

$a_1 = 0{,}761 \quad a_2 = 0{,}193$

$b_1 = -3{,}724$, $b_2 = -3{,}029$.

$c_1 = 0{,}642 \quad c_2 = 4{,}576$

Тогда квадратичный сплайн имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0{,}761x^2 - 3{,}724x + 0{,}642, & x \in [0{,}351; 3{,}315] \\ 0{,}193x^2 - 3{,}029x + 4{,}576, & x \in [3{,}315; 3.6{,}432] \end{cases}.$$

Построим график квадратичного сплайна (рис. 5.4).

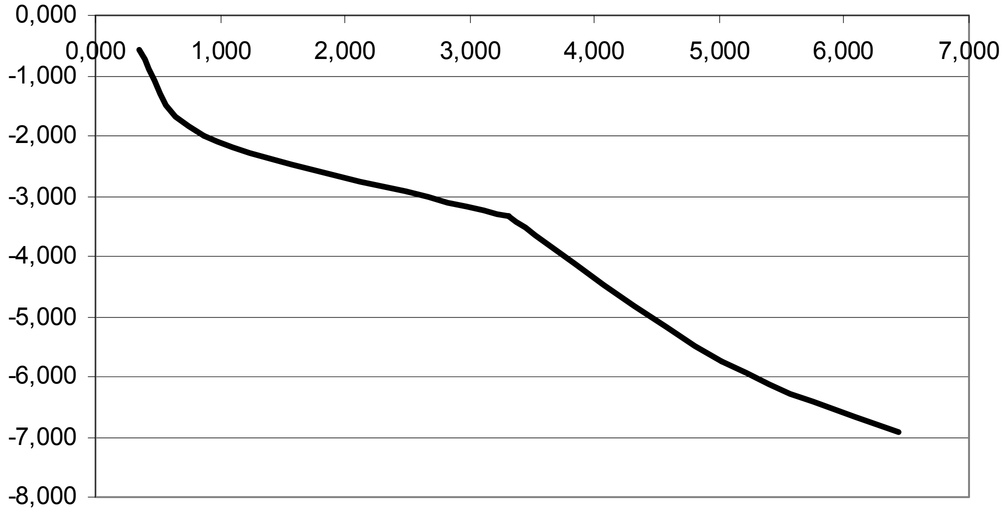

Рис. 5.4. График квадратичного сплайна

5. На одном чертеже с графиком полиномов построим графики сплайнов.

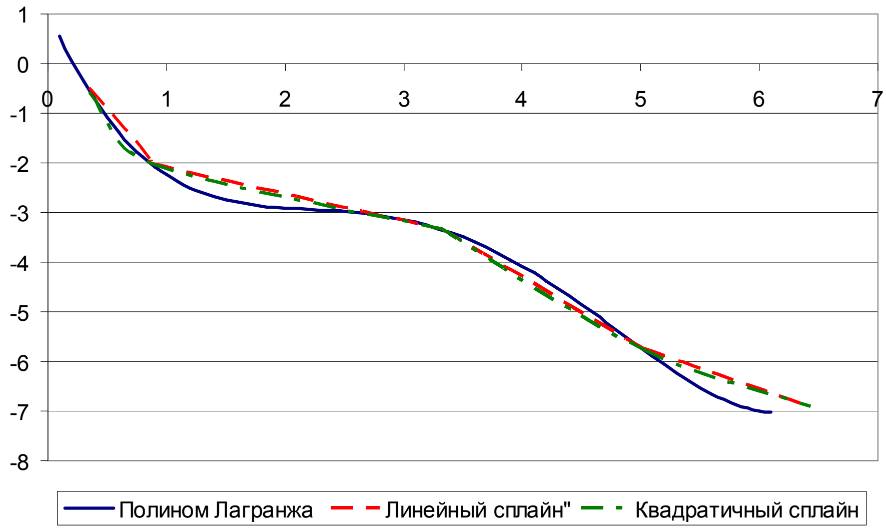

Рис. 5.5. Графики полиномов и сплайнов

5.2.3. Варианты заданий

№	Таблица значений функции
1	*x*: 0,847 1,546 1,834 2,647 2,910 *y*:–1,104 1,042 0,029 –0,344 –0,449
2	*x*: 0,284 0,883 1,384 1,856 2,644 *y*:–3,856 –3,953 –5,112 –7,632 –8,011
3	*x*: 0,259 0,841 1,562 2,304 2,856 *y*: 0,018 –1,259 –1,748 –0,532 0,911
4	*x*: 0,172 0,567 1,113 2,119 2,769 *y*:–7,057 –5,703 –0,132 1,423 2,832
5	*x*: 0,092 0,772 1,385 2,108 2,938 *y*: 3,161 1,357 –0,158 –0,129 –4,438
6	*x*: 0.357 0.871 1,567 2,032 2,628 *y*: 0,548 1,012 1,159 0,694 –0,503
7	*x*: 0,235 0,672 1,385 2,051 2,908 *y*: 1,082 1,805 4,280 5,011 7,082
8	*x*: 0,015 0,681 1,342 2,118 2,671 *y*:–2,417 –3,819 –0,642 0,848 2,815
9	*x*: 0,231 0,848 1,322 2,224 2,892 *y*:–2,748 –3,225 –3,898 –5,908 –6,506
10	*x*: 0,083 0,472 1,347 2,117 2,947 *y*:–2,132 –2,013 –1,613 –0,842 2,973
11	*x*: 0,119 0,718 1,342 2,859 3,948 *y*:–0,572 –2,015 –3,342 –6,752 –6,742

Окончание

12	x: 0,184 0,865 1,213 2,019 2,862 y: –1,687 –2,542 –5,082 –7,042 –8,538
13	x: 0,351 0,867 1,315 2,013 2,859 y: 0,605 0,218 0,205 1,157 5,092
14	x: 0,135 0,876 1,336 2,301 2,642 y: –2,132 –2,113 –1,613 –0,842 1,204
15	x: 0,135 0,876 1,336 2,301 2,851 y: 2,382 –0,212 –1,305 –3,184 –4,365
16	x: 0,079 0,637 1,345 2,095 2,782 y: –4,308 –0,739 1,697 4,208 6,203
17	x: 2,119 3,618 5,342 7,859 8,934 y: 0,605 0,718 0,105 2,157 3,431
18	x: 0,345 0,761 1,257 2,109 2,943 y: –1,221 –0,525 2,314 5,106 9,818
19	x: 0,234 0,649 1,382 2,672 2,849 y: 0,511 0,982 2,411 3,115 4,184
20	x: 0,238 0,647 1,316 2,108 4,892 y: 0,092 0,672 2,385 3,108 2,938
21	x: 0,248 0,663 1,238 2,092 2,939 y: –3,642 0,802 0,841 0,513 0,328
22	x: 0,282 0,872 1,513 2,022 2,672 y: 6,324 –0,405 –1,114 –1,315 –1,469
23	x: 0,324 0,718 1,315 2,035 2,893 y: –2,052 –1,597 –0,231 2,808 8,011
24	x: 0,218 0,562 1,492 2,119 2,948 y: 0,511 0,982 2,411 3,115 4,561
25	x: 0,132 0,567 1,153 2,414 3,939 y: 69,531 1,112 –1,672 –1,922 –1,925
26	x: 0,234 0,649 1,382 3,672 5,911 y: 3,902 2,675 0,611 –3,256 –3,615
27	x: 0,134 0,561 1,341 2,291 6,913 y: 2,156 3,348 3,611 4,112 4,171
28	x: 0,452 0,967 2,255 4,013 5,432 y: 1,252 2,015 4,342 5,752 6,911
29	x: 0,151 0,862 1,282 2,139 2,739 y: –4,528 –0,345 0,638 1,342 3,645
30	x: 0,219 0,811 1,341 2,111 2,874 y: –2,151 –0,452 1,214 2,891 4,617

6. Лабораторная работа №6. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

6.1. Метод наименьших квадратов

Предположим, что между независимой переменной x и зависимой переменной y имеется некая неизвестная функциональная зависимость $y = f(x)$. Эта связь отображается таблицей:

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

$y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}.$

Задача: требуется дать приближенное аналитическое описание этой связи, т. е. подобрать функцию $\Phi(x)$ такую, которая аппроксимировала бы на отрезке $[x_0, x_n]$, заданную отдельными приближенными значениями $y_i = f(x_i)$.

Решение: Функция $\Phi(x)$ берется из определенного m-параметрического семейства функций и ее параметры подбираются так, чтобы сумма квадратов отклонений вычисленных значений $\Phi(x_i)$ от заданных приближенных значений y_i была минимальной.

Задаем семейство m-параметрических функций $y = \Phi(x, a_1, a_2, ..., a_m)$ и ищем значения параметров $a_1, a_2, ..., a_m$, решая экстремальную задачу:

$$S = \sum_{i=0}^{m} (\Phi(x_i, a_1, a_2, ..., a_m) - y_i)^2 \to \min .$$

Для этого находим частные производные функционала S и приравниваем их к нулю, решаем полученную систему, оцениваем параметры $a_1, a_2, ..., a_m$.

Величину $\delta = \sqrt{S} = \sqrt{\sum_{i=0}^{m} (\Phi(x_i, a_1, a_2, ..., a_m) - y_i)^2}$ называют невязкой.

Выберем m линейно независимых на отрезке $[x_0, x_n]$ функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x)$ и аппроксимируем функцию $f(x)$ линейной комбинацией

$$\Phi(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + ... + a_m\varphi_m(x). \qquad (6.1)$$

Приравнивая частные производные функционала S к нулю, получим систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} a_1\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) + a_2\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i) + ... + a_m\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\varphi_m(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_1(x_i) \\ a_1\sum_{i=1}^{n}\varphi_2(x_i)\varphi_1(x_i) + a_2\sum_{i=1}^{n}\varphi_2(x_i)\varphi_2(x_i) + ... + a_m\sum_{i=1}^{n}\varphi_2(x_i)\varphi_m(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_2(x_i) \\ ... \\ a_1\sum_{i=1}^{n}\varphi_m(x_i)\varphi_1(x_i) + a_2\sum_{i=1}^{n}\varphi_m(x_i)\varphi_2(x_i) + ... + a_m\sum_{i=1}^{n}\varphi_m(x_i)\varphi_m(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_m(x_i) \end{cases},$$

решая которую, находим параметры $a_1, a_2, ..., a_m$.

6.2. Пример выполнения лабораторной работы

6.2.1. Задание к лабораторной работе

Функция $y = f(x)$ задана в виде таблицы своих значений в 9 точках

$x_0 \;\; x_1 \;\; x_2 \; . \; . \; . \; x_8$

$y_0 \;\; y_1 \;\; y_2 \; . \; . \; . \; y_8$.

1. Нанести точки на график функции. Путем моделирования на компьютере из предложенных 10 аппроксимирующих законов выбрать два закона, которые на Ваш взгляд дадут наилучшую аппроксимацию по методу наименьших квадратов.

1) $y = ax^2 + bx + c$ 6) $y = ax + be^{-x} + c$

2) $y = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x} + c$ 7) $y = \dfrac{a}{x} + be^{x} + c$

3) $y = bx^a + c$ 8) $y = ax\ln x + be^x + c$

4) $y = be^{ax} + c$ 9) $y = b\exp(-a(x+c)^2) + c$

5) $y = \dfrac{b}{x+a} + c$ 10) $y = a\sqrt{x} + b\sin x + c$

2. Для каждого из двух выбранных законов составить нормальную систему уравнений, решив которую, найти параметры выбранных законов.

3. Построить графики выбранных законов вместе с графиком исходной функции. Для каждого из аппроксимирующих законов найти невязку.

6.2.2. Решение типового примера

Функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений в 9 точках

x	0,034	0,394	0,754	1,114	1,474	1,833	2,193	2,553	2,913
y	2,156	2,988	3,377	3,708	3,802	3,900	4,067	4,129	4,171

1. Нанесем точки на график функции (рис. 6.1).

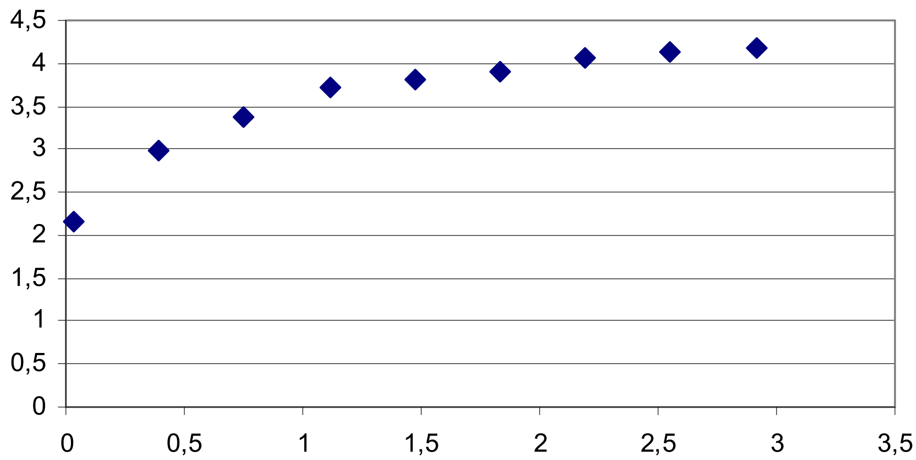

Рис. 6.1. Точки графика функции $y = f(x)$

Из предложенных 10 аппроксимирующих законов путем подбора коэффициентов a, b, c выберем два закона, которые дадут наилучшую аппроксимацию по методу наименьших квадратов.

Моделирование на компьютере позволяет выделить два таких закона:

1) $y_1 = bx^a + c$ при $a = 0{,}15$, $b = 4$, $c = -0{,}4$ (рис. 6.2);

2) $y_2 = ax + be^{-x} + c$ при $a = 0{,}15$, $b = -1{,}65$, $c = 4$ (рис. 6.3).

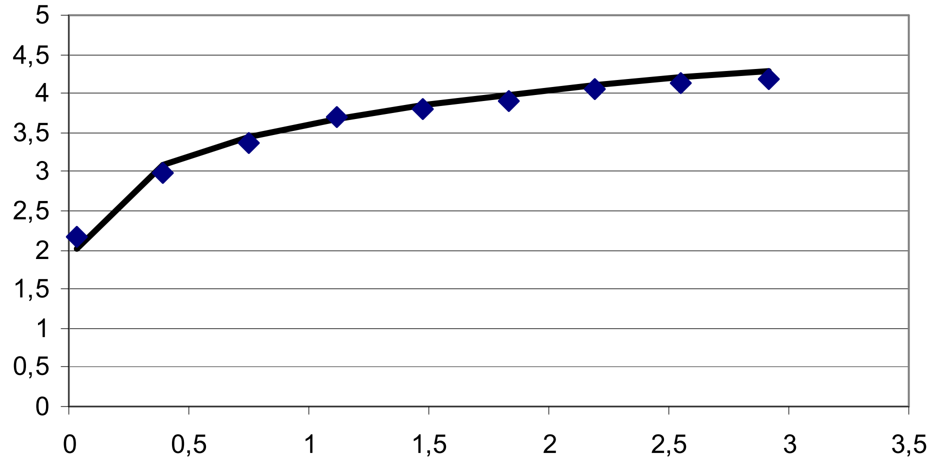

Рис. 6.2. График функции $y_1 = bx^a + c$ с нанесенными точками функции $y = f(x)$

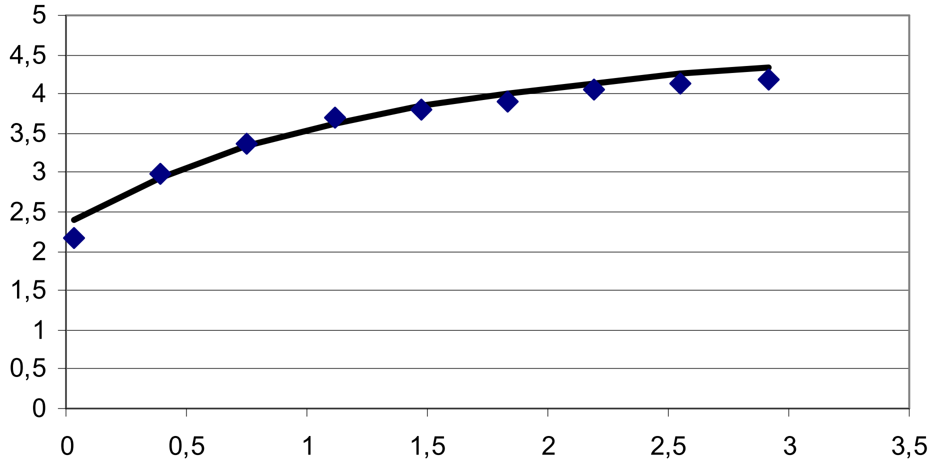

Рис. 6.3. График функции $y_2 = ax + be^{-x} + c$ с нанесенными точками функции $y = f(x)$

2. Для каждого из двух выбранных законов составим нормальную систему уравнений, решив которую, найдем параметры выбранных законов.

1) В первый закон параметр a входит нелинейно, поэтому мы не можем сразу составить нормальную систему. Выберем $c = c_0 = -0,4$. Преобразуем закон так:

$$y - c_0 = bx^a,$$

$$\ln(y - c_0) = a \ln x + \ln b.$$

Делаем замену: $\ln x = t$, $\ln(y - c_0) = z$, приведем исходный закон к виду: $z = at + \ln b$.

Теперь нормальная система параметров a и $\ln b$ будет состоять из двух уравнений и иметь вид:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 + \ln b\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = \sum_{i=1}^{n}\ln x_i \ln(y_i - c_0) \\ a\sum_{i=1}^{n}\ln x_i + (\ln b)n = \sum_{i=1}^{n}\ln(y_i - c_0) \end{cases}.$$

$\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 = 15{,}5487$, $\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = -0{,}7015$, $\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \ln(y_i - c_0) = 1{,}1243$,

$\sum_{i=1}^{n}\ln(y_i - c_0) = 12{,}3217$.

$$\begin{cases} 15{,}5487a - 0{,}7015\ln b = 1{,}1243 \\ -0{,}7015a + 9\ln b = 12{,}3217 \end{cases}.$$

Решая данную систему, получаем a = 0,1345, ln b = 1,3796, b = 3,9733.

$y = 3{,}9733x^{0{,}1345} - 0{,}4$.

Найдем невязку δ = 0,1641.

Варьируя далее параметром c, получим c = 0,5, a = 0,1838, b = 3,0535,

$y = 3{,}0535x^{0{,}1838} + 0{,}5$.

Невязка при этом равна δ = 0,1449.

Построим график найденного закона вместе с графиком исходной функции (рис. 6.4).

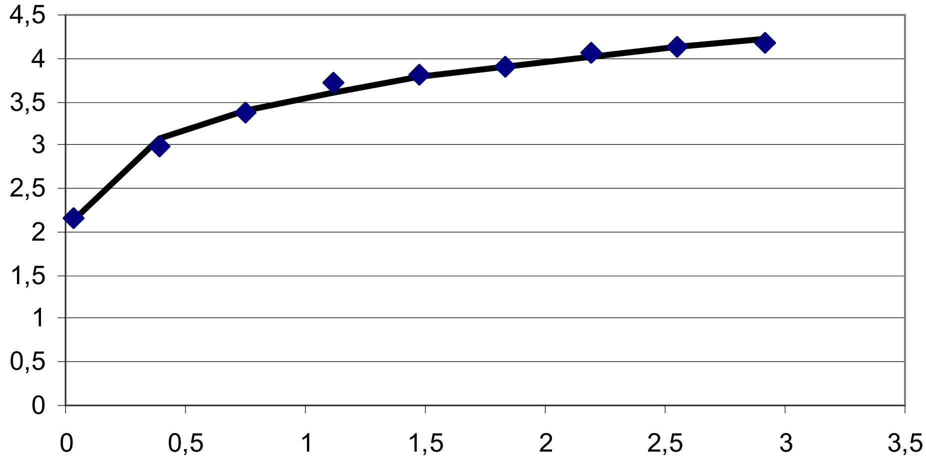

Рис. 6.4. График функции $y = 3{,}0535x^{0{,}1838} + 0{,}5$ с нанесенными точками функции $y = f(x)$

2) Для второго закона имеем $m = 3$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = e^{-x}$, $\varphi_3(x) = 1$. Тогда система нормальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e^{-x_i} + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e^{-x_i} + b\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-2x_i} + c\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-x_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} e^{-x_i} y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-x_i} + cn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 13{,}2620$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 32{,}2980$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 27{,}3111$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e^{-x_i} = 2{,}2513$,

$\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-x_i} = 3{,}0723$, $\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-2x_i} = 1{,}8176$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = 52{,}2908$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i e^{-x_i} = 9{,}4010$.

$$\begin{cases} 27{,}3111a + 2{,}2513b + 13{,}2620c = 52{,}2908 \\ 2{,}2513a + 1{,}8176b + 3{,}0723c = 9{,}4010 \\ 13{,}262a + 3{,}0723b + 9c = 32{,}2980 \end{cases}.$$

Решая систему, получим $a = -0{,}1075$, $b = -2{,}4313$, $c = 4{,}5771$,

$y = -0{,}1075x - 2{,}4313e^{-x} + 4{,}5771$.

Найдем невязку $\delta = 0{,}1727$.

Построим график найденного закона вместе с графиком исходной функции (рис. 6.5).

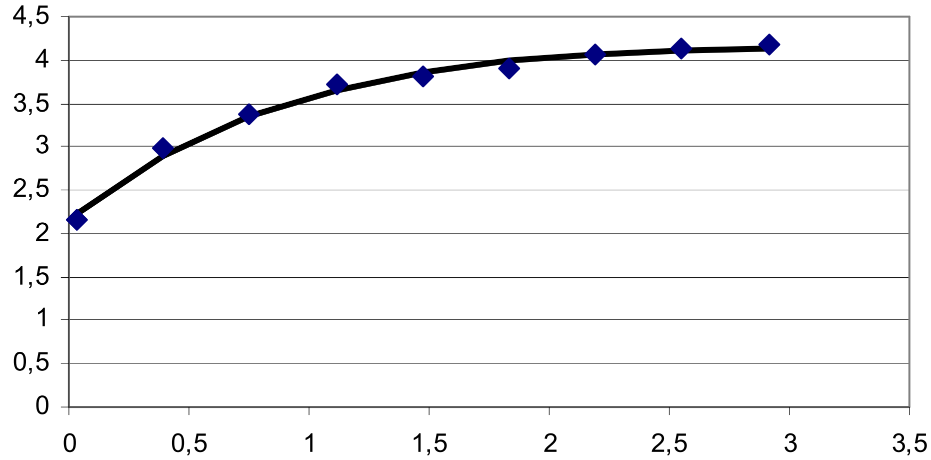

Рис. 6.5. График функции $y = -0{,}1075x - 2{,}4313e^{-x} + 4{,}5771$ с нанесенными точками функции $y = f(x)$

Из двух законов наиболее оптимальным является $y = 3{,}0535x^{0{,}1838} + 0{,}5$ с невязкой $\delta = 0{,}1449$.

6.2.3. Варианты заданий

№	Таблица значений функции									
1	x:	0,142	0,494	0,847	1,199	1,552	1,904	2,257	2,609	2,962
	y:	5,642	4,096	3,390	2,924	2,775	2,534	2,418	2,405	2,298
2	x:	0,173	0,518	0,864	1,209	1,555	1,901	2,246	2,592	2,937
	y:	1,547	0,852	0,063	-0,470	-0,750	-1,142	-1,052	-1,188	-0,962
3	x:	0,119	0,473	0,826	1,180	1,533	1,887	2,241	2,594	2,948
	y:	-0,572	-1,282	-2,155	-3,027	-3,783	-4,418	-5,267	-6,116	-6,742
4	x:	0,231	0,564	0,896	1,229	1,561	1,894	2,227	2,559	2,892
	y:	-2,748	-2,932	-3,070	-3,391	-3,648	-3,737	-3,911	-4,249	-4,506
5	x:	0,235	0,569	0,903	1,237	1,571	1,906	2,240	2,574	2,908
	y:	1,082	1,563	2,182	3,078	3,816	4,500	5,443	6,209	7,082
6	x:	0,079	0,431	0,782	1,134	1,486	1,838	2,189	2,541	2,893
	y:	-4,308	-1,778	-0,268	1,144	2,248	3,273	4,440	5,396	6,357
7	x:	0,324	0,645	0,966	1,287	1,609	1,930	2,251	2,572	2,893
	y:	-2,052	-1,756	-1,076	-0,284	0,982	2,209	4,013	5,796	8,011
8	x:	0,184	0,519	0,854	1,188	1,523	1,858	2,192	2,527	2,862
	y:	-1,687	-3,056	-4,493	-6,928	-10,524	-15,400	-22,049	-32,380	-44,538
9	x:	0,351	0,674	0,998	1,321	1,645	1,968	2,291	2,615	2,938
	y:	-0,571	-0,517	-0,895	-1,125	-1,637	-2,231	-2,971	-3,874	-4,711

Окончание

№	Таблица значений функции									
10	x:	0,259	0,597	0,934	1,272	1,610	1,948	2,286	2,623	2,961
	y:	0,018	-0,920	-1,516	-1,647	-1,586	-1,328	-0,573	0,172	1,122
11	x:	0,218	0,559	0,900	1,242	1,583	1,924	2,266	2,607	2,948
	y:	0,511	0,980	1,561	1,872	2,439	2,900	3,495	3,953	4,561
12	x:	0,234	0,569	0,903	1,238	1,572	1,907	2,242	2,576	2,911
	y:	3,902	3,234	2,495	1,354	0,184	-1,069	-1,952	-2,836	-3,615
13	x:	0,084	0,447	0,810	1,173	1,536	1,898	2,261	2,624	2,987
	y:	-1,732	-1,280	-0,966	-0,634	-0,161	0,117	0,555	0,733	1,435
14	x:	0,132	0,483	0,834	1,185	1,535	1,886	2,237	2,588	2,939
	y:	69,531	5,625	-0,534	-1,694	-1,902	-2,069	-1,934	-2,114	-1,925
15	x:	0,089	0,429	0,769	1,109	1,449	1,789	2,129	2,469	2,809
	y:	-3,856	-3,474	-3,109	-2,673	-2,524	-2,248	-2,082	-1,998	-1,908
16	x:	0,135	0,475	0,814	1,154	1,493	1,833	2,172	2,512	2,851
	y:	2,382	1,321	0,117	-0,789	-1,606	-2,256	-2,985	-3,649	-4,365
17	x:	0,219	0,551	0,883	1,215	1,547	1,878	2,210	2,542	2,874
	y:	-2,151	-1,270	-0,201	0,771	1,626	2,479	3,249	3,841	4,617
18	x:	0,248	0,584	0,921	1,257	1,593	1,930	2,266	2,603	2,939
	y:	-3,642	0,797	0,844	0,829	0,647	0,678	0,633	0,549	0,328
19	x:	0,083	0,441	0,799	1,157	1,515	1,873	2,231	2 ,589	2,947
	y:	-2,132	-2,080	-1,949	-1,903	-1,533	-1,081	-0,516	0,655	1,973
20	x:	0,151	0,488	0,825	1,162	1,500	1,837	2,174	2,511	2,848
	y:	-4,528	-1,763	-0,484	0,338	0,838	1,259	1,383	1,779	1,914
21	x:	0,351	0,664	0,978	1,291	1,605	1,918	2,232	2,546	2,859
	y:	0,605	0,265	0,064	0,116	0,415	0,728	1,673	3,138	5,092
22	x:	0,238	0,570	0,901	1,233	1,565	1,897	2,228	2,560	2,892
	y:	0,092	0,582	0,858	1,331	1,504	1,800	2,229	2,800	2,938
23	x:	0,092	0,448	0,803	1,159	1,515	1,871	2,227	2,582	2,938
	y:	2,161	1,824	1,214	0,431	-0,792	-2,004	-3,635	-5,533	-7,438
24	x:	0,357	0,681	1,005	1,330	1,654	1,978	2,303	2,627	2,951
	y:	0,548	0,919	1,191	1,087	1,108	0,586	0,290	-0,500	-1,204
25	x:	0,282	0,614	0,946	1,278	1,610	1,942	2,274	2,606	2,938
	y:	6,324	0,848	-0,473	-0,938	-1,062	-1,225	-1,255	-1,433	-1,285
26	x:	0,172	0,497	0,821	1,146	1,470	1,795	2,120	2,444	2,769
	y:	-82,057	-14,493	-2,680	-0,689	0,623	1,236	1,425	1,760	1,832
27	x:	0,015	0,347	0,679	1,011	1,343	1,675	2,007	2,339	2,671
	y:	-2,417	-2,215	-1,821	-1,209	-0,640	0,004	0,772	1,383	1,815
28	x:	0,105	0,449	0,794	1,138	1,482	1,826	2,171	2,515	2,859
	y:	-4,215	-3,889	-3,942	-4,595	-5,765	-7,484	-10,771	-15,904	-22,938
29	x:	0,135	0,482	0,829	1,176	1,523	1,869	2,216	2,563	2,910
	y:	-0,642	-0,235	-0,111	-0,057	0,032	-0,002	-0,237	-0,323	-0,449
30	x:	0,034	0,394	0,754	1,114	1,474	1,833	2,193	2,553	2,913
	y:	2,156	2,988	3,377	3,708	3,802	3,900	4,067	4,129	4,171

7. Лабораторная работа №7. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

7.1. Численное интегрирование

7.1.1. Задача численного интегрирования

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $f(x)$. Найти значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Для некоторых функций трудно найти интеграл.

Определение. Выражение $\sum_i g_i f_i$, где $g_i \in R$, $f_i = f(x_i)$ называется квадратурной формулой.

Таким образом, задача сводится к представлению интеграла с помощью квадратурной формулы: $\int_a^b f(x)dx = \sum_i g_i f_i$ на отрезке $[a,b]$.

7.1.1. Квадратурная формула прямоугольников

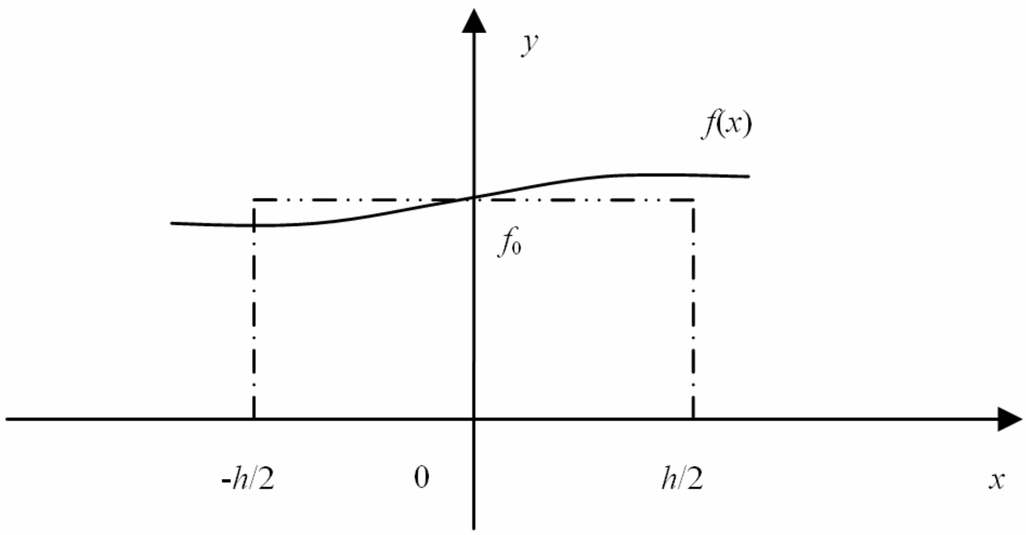

Рис. 7.1. График функции

Как видно, из рис. 7.1 интеграл можно вычислить как

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)dx \approx hf_0 .$$

Обозначим интеграл $F(x)=\int\limits_0^x f(x)dx$.

Тогда по формуле Лейбница можно записать

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x)dx \approx F(h/2)-F(-h/2).$$

По формуле Тейлора

$$F(\pm h/2)=F(0)\pm\frac{h}{2}F'(0)+\frac{h^2}{4}\frac{1}{2!}F''(0)\pm\frac{h^3}{8}\frac{1}{3!}F'''(0)+...=$$
$$=\pm\frac{h}{2}f(0)+\frac{h^2}{4}\frac{1}{2!}f'(0)\pm\frac{h^3}{8}\frac{1}{3!}f''(0)+...,$$

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x)dx = F(h/2)-F(-h/2)=hf(0)+\frac{h^3}{24}f''(0).$$

Таким образом, локальное представление формулы прямоугольников

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x)dx = hf(0)+O\left(\frac{h^3}{24}\right). \qquad (7.1)$$

Пусть отрезок $[a,b]$ разбит на n частей, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n}(hf(x_{i-1})+\frac{h^3}{24}f''(\xi))=\sum_{i=1}^{n}hf(x_{i-1})+\frac{h^3}{24}\sum_{i=1}^{n}f''(\xi)=$$
$$=h\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})+\frac{h^3}{24}f''(\xi)\sum_{i=1}^{n}1=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})+\frac{h^2}{24}\frac{b-a}{n}f''(\xi)n.$$

Таким образом, если $f\in C^2_{[a,b]}$, $\xi\in[a,b]$, получаем глобальную формулу прямоугольников

$$\int\limits_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})+\frac{b-a}{24}h^2 f''(\xi). \qquad (7.2)$$

7.1.2. Квадратурные формулы Ньютона – Котеса

Идея: в интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ вместо $f(x)$ подставляют интерполяционный полином Лагранжа.

Функция $f(x) \in C^{n+1}_{[a,b]}$ может быть единственным образом представлена в виде

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x),$$

где $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) f_i$, $p_i(x)$ – базисные многочлены,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_n(x)$$ – отклонение,

$$W_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n).$$

Пусть последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ совпадает с точками разбиения отрезка $[a,b]$ с шагом h $x_k = x_0 + kh$, тогда

$$L_n(x_0 + kh) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{k(k-1)...(k-n)}{k-i} f_i.$$

Изменим границы интегрирования: $x = a \to k = 0$; $x = b \to k = n$; $dx = hdk$, получим квадратурную формулу Ньютона – Котеса

$$\int_a^b f(x)dx \cong h \int_0^n \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{k(k-1)...(k-n)}{k-i} f_i dk. \qquad (7.3)$$

7.1.3. Квадратурные формулы трапеций и Симпсона

Формула трапеций и Симпсона являются частными случаями формулы Ньютона – Котеса.

Применим полином Ньютона (эквивалентный многочлену Лагранжа в силу единственности):

$$P_n(x_0 + kh) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{k(k-1)...(k-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

I. ***Формула трапеций***

Пусть $n = 1$, т. е. имеем две точки x_0 и $x_1 = x_0 + h$, и известны значения функции $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1)$. Этим точкам соответствуют $k = 0, k = 1$, тогда получим простейшую квадратурную формулу трапеций

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_0^1 (y_0 + k\Delta y_0)hdk = h\left[y_0 k + \frac{k^2}{2}\Delta y_0\right]_0^1 = h\left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2}\right) = \\ = \frac{y_0 + y_1}{2}h\ , \tag{7.4}$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Остаточный член формулы трапеций $r_1 = -\dfrac{f''(\xi_1)}{12}h^3, \xi_1 \in (x_0, x_1)$.

II. ***Формула Симпсона***

Пусть $n = 2$, т. е. интерполируем функцию $f(x)$ по трем точкам x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, тогда получим простейшую формулу Симпсона

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_0^2 \left[y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2}\Delta^2 y_0\right]hdk = \\ = h\left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 + 2y_1 - y_0)\right] = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)\ . \tag{7.5}$$

Остаточный член формулы Симпсона $r_2 = -\dfrac{h^5}{90}f^{IV}(\xi), \xi \in (x_0, x_2)$.

Для применения простейшей формулы Симпсона интервал должен быть симметричен относительно точки x_1: $(x_1 - h; x_1 + h)$.

Распространим формулы трапеций и Симпсона на все отрезки разбиения $[a,b]$.

Глобальная формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + \frac{y_n}{2}). \tag{7.6}$$

Оценка погрешности

$$|R_n| \le M\frac{|b-a|h^2}{12}, M = \max|f''(x)|; x \in [a,b]. \tag{7.7}$$

Глобальная формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{3}(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + y_2 + \ldots + 2y_{2m-1}). \tag{7.8}$$

Оценка погрешности

$$|R_n| \le M\frac{|b-a|h^4}{180},\ M = \max|f^{IV}(x)|; x\in[a,b]. \tag{7.9}$$

Формула Симпсона обладает повышенной точностью по сравнению с формулой трапеции, в ней можно брать меньше отрезков разбиения.

7.1.4. Правило Рунге

Как следует из оценочных формул погрешностей интегрирования (7.7) и (7.9), вычисление R_n возможно лишь тогда, когда подынтегральная функция задана аналитически, что не всегда известно. На практике широко применяется следующий эмпирический прием.

Искомый интеграл вычисляется дважды при делении отрезка $[a,b]$ на n и на $2n$ частей. Затем полученные значения интеграла (обозначим $I(n)$ и $I(2n)$) сравниваются и совпадающие первые десятичные знаки считаются верными. Можно получить выражения, позволяющие хотя бы грубо контролировать точность численного интегрирования на основе двойного счета с шагом h и $2h$:

$$I - I^p(h) \approx \frac{\left|I^p(h) - I^p(2h)\right|}{2^p - 1}, \tag{7.10}$$

где p – порядок метода.

Например, $p = 2$ соответствует формуле трапеций, тогда

$$I - I^{TP}(h) \approx \frac{\left|I^{TP}(h) - I^{TP}(2h)\right|}{3},$$

$p = 4$ соответствует формуле Симпсона.

7.2. Пример выполнения лабораторной работы

7.2.1. Задание к лабораторной работе

1. Найдите шаг интегрирования h для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по формуле трапеций с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

2. Вычислите интеграл по формуле трапеций с шагами $2h$ и h. Дайте уточненную оценку погрешности.

3. Вычислите интеграл по формуле Симпсона с шагами $2h$ и h. Дайте уточненную оценку погрешности.

4. Вычислите определенный интеграл по формуле Ньютона–Лейбница. Сравните приближенные значения интеграла с точными. Какая формула численного интегрирования дала более точный результат?

Указание. Шаг h следует выбирать с учетом дополнительного условия: отрезок интегрирования должен разбиваться на число частей, кратное 4.

7.2.2. Решение типового примера

Найти значение интеграла функции $f(x) = (x^2 - 1)^{-1}$, заданной на отрезке $[2{,}4]$.

1. Сначала найдем шаг интегрирования h для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по формуле трапеций с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Чтобы найти шаг h с помощью формулы $M\dfrac{|b-a|\,h^2}{12} < \varepsilon$, $M = \max|f''(x)|; x \in [a,b]$, найдем вторую производную.

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2},\quad f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}.$$

Тогда $M = \max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)| = \max\limits_{x\in[2,4]}\left|\dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}\right| = |f''(2)| = 0{,}9630$.

$$M\frac{|b-a|\,h^2}{12}<\varepsilon,\ 0{,}9630\frac{|4-2|\,h^2}{12}<0{,}001,\ h^2<0{,}0062,\ h<0{,}0787.$$

Найдем количество шагов, на которое нужно разделить отрезок с шагом $h<0{,}0787$ для достижения точности $\varepsilon=0{,}001$.

$$n>\frac{b-a}{h},\ n>25{,}4130.$$

Следуя указанию, возьмем количество частей отрезка кратное 4, т. е. $n=28$. Следовательно, шаг интегрирования h = 0,0714.

2. Вычислим интеграл по формуле трапеций с шагом h = 0,0714.

Получим

$$I(h)=\int_2^4 (x^2-1)^{-1}dx \approx 0{,}0714(0{,}1667+0{,}3039+0{,}2787+\ldots+0{,}0333)\approx 0{,}2940.$$

Увеличим шаг в два раза и посчитаем интеграл $I(2h)$.

$$2h=0{,}1428,\ n=14,\ I(2h)\approx 0{,}2945.$$

Для определения погрешности воспользуемся правилом Рунге.

$$I-I^{TP}(h)\approx\frac{0{,}2940-0{,}2945}{3}\approx 0{,}0002.$$

Итак, по формуле трапеций

$$\int_2^4 (x^2-1)^{-1}dx=0{,}294\pm 0{,}0002.$$

3. Вычислим интеграл по формуле Симпсона с шагами 2h и h.

Интеграл с шагом $h=0{,}0714,\ n=2m=28,\ m=14$

$$I(h)=\int_2^4 (x^2-1)^{-1}dx\approx$$

$$\approx\frac{2\cdot 0{,}0714}{3}\left(\frac{0{,}3333+0{,}0667}{2}+2\cdot 0{,}3039+0{,}2787+\ldots+2\cdot 0{,}1320\right)\approx 0{,}29384.$$

Увеличим шаг в два раза и посчитаем интеграл $I(2h)$.

$$2h=0{,}1428,\ n=2m=14,\ m=7,\ I(2h)\approx 0{,}29385.$$

Для определения погрешности воспользуемся правилом Рунге.

$$I - I^C(h) \approx \frac{0{,}293\,84 - 0{,}293\,85}{15} \approx 4{,}03 \cdot 10^{-7}.$$

Итак, по формуле Симпсона

$$\int_2^4 (x^2-1)^{-1}\,dx = 0{,}2938 \pm 4{,}03 \cdot 10^{-7}.$$

4. Вычислим определенный интеграл по формуле Ньютона–Лейбница.

$$\int_2^4 (x^2-1)^{-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^4 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|)\Big|_2^4 = $$

$$= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1 - \ln 5 + \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{5} \approx 0{,}293\,89.$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)};$$

$A(x+1) + B(x+1) = 1$,

x: $A + B = 0$, тогда $A = -B$.

x_0: $A - B = 1$, $-2B = 1$, $B = -\frac{1}{2}$, $A = \frac{1}{2}$.

Получаем, что $I = 0{,}293\,89$.

Сравнивая приближенные значения интеграла с точными, видим, что формула Симпсона дает более точный результат интегрирования в отличие от формулы трапеций.

7.2.3. Варианты заданий

№	Интеграл
1	$f(x)=x^4(1+x^2)^{-1}$, $a=1$, $b=2$.
2	$f(x)=x^2e^{-2x}$, $a=0$, $b=1{,}6$.
3	$f(x)=x^{-0{,}5}\ln x$, $a=1$, $b=3$.
4	$f(x)=x\sin 3x$, $a=0$, $b=1$.
5	$f(x)=\sqrt{x+1}\lg(x+1)$ $a=0{,}1$, $b=1{,}1$.
6	$f(x)=x^2\ln x$, $a=1$, $b=2$.
7	$f(x)=x^2(x+1)^{-2}$, $a=1$, $b=4$.
8	$f(x)=x\cos 2x$, $a=0$, $b=1$.
9	$f(x)=x^2\ln x$, $a=1$, $b=2$.
10	$f(x)=\sqrt{x}\ln x$, $a=1$, $b=4$.
11	$f(x)=x^3/\sqrt{1-x^2}$, $a=-0{,}5$, $b=0{,}5$.
12	$f(x)=e^{-x}\cos x$, $a=0$, $b=2$.
13	$f(x)=\sqrt{x}/(x+1)$, $a=1$, $b=4$.
14	$f(x)=e^{-\sqrt{x}}$, $a=1$, $b=4$.
15	$f(x)=x\,arctgx$, $a=0$, $b=1$.
16	$f(x)=x\arccos x$, $a=-0{,}5$, $b=0{,}5$.
17	$f(x)=x\arcsin x$, $a=0$, $b=0{,}9$.
18	$f(x)=(x^3+x)^{-1}$, $a=1$, $b=2{,}2$.
19	$f(x)=x3^{-x}$, $a=0$, $b=1{,}5$.
20	$f(x)=x^2e^{-x}$, $a=0$, $b=1$.
21	$f(x)=x^3/(1+x^2)$, $a=0$, $b=2$.
22	$f(x)=(x^2+x)^{-1}$, $a=1$, $b=3$.
23	$f(x)=\sqrt{1+x^2}$, $a=0$, $b=1{,}8$.
24	$f(x)=x^2\sin x$, $a=0$, $b=1$.
25	$f(x)=x\sin x$, $a=0$, $b=1{,}6$.
26	$f(x)=x^3/\sqrt{x^2+1}$, $a=-0{,}4$, $b=0{,}8$.
27	$f(x)=x^2\cos x$, $a=0$, $b=1$.
28	$f(x)=x2^{-x}$, $a=0$, $b=2$.
29	$f(x)=e^x\sin x$, $a=0$, $b=1{,}2$.
30	$f(x)=x^2arctgx$, $a=0$, $b=1$.

8. Лабораторная работа №8. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

8.1. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

8.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка.

Задача Коши:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \; x \in [x_0, b] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}. \qquad (8.1)$$

Пусть требуется найти решение $y(x)$ на отрезке $[a,b]$, где $x_0 = a$. Применим к отрезку $[a,b]$ равномерное разбиение, т. е. получим $h = \dfrac{b-a}{n}$ и $x_k = x_0 + kh$, где $x_n = b$, x_k – узлы сетки, h – шаг сетки.

Обозначим через $y(x_k)$ точное значение функции $y(x)$ в точке x_k, через y_k приближенное вычисленное значение функции $y(x)$ в точке x_k.

8.1.2. Метод Эйлера

Разложим в ряд Тейлора в точке x_k значение функции $y(x_k + h) = y(x_{k+1})$.

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(\xi), \text{ где } x_k < \xi < x_{k+1}.$$

Согласно задаче Коши (8.1) $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$, тогда разложение Тейлора $y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + \dfrac{h^2}{2} y''(\xi)$.

Полагая, что значение функции в следующем узле получается, таким образом,

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)\,. \tag{8.2}$$

Эта формула и определяет ***метод Эйлера***.

Замечание. Метод Эйлера имеет первый порядок точности $O(h)$.

8.1.3. Методы Рунге – Кутта

I. ***Метод Рунге – Кутта II порядка***

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (8.1) на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$, получим

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx, \quad y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx\,.$$

Воспользуемся формулой трапеций, тогда получим

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \frac{h}{2}\bigl(f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))\bigr).$$

Эта формула дает приближенное значение

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\bigl(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\bigr). \tag{8.3}$$

Формула (8.3) – это неявная формула ***метода Рунге–Кутта II порядка***.

Воспользуемся методом предиктор – корректор для избавления от «неявности». Заменим y_{k+1} в правой части равенства (8.3) по формуле Эйлера на

$$y^*_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)\,. \tag{8.4}$$

Затем подставим y^*_{k+1} в формулу (8.3) вместо y_{k+1} в правой части

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\bigl(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^*_{k+1})\bigr). \tag{8.5}$$

Формула (8.5) – явная формула Рунге–Кутта II порядка. Формула (8.4) – предиктор, формула (8.5) – корректор. Точность метода $O(h^2)$.

II. ***Метод Рунге–Кутта IV порядка***

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\right). \tag{8.6}$$

$$F_1 = f(x_k, y_k),$$

$$F_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1\right),$$

$$F_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2\right),$$

$$F_4 = f\left(x_{k+1}, y_k + hF_3\right).$$

Замечание. Точность метода $O(h^4)$.

8.1.4. Выбор шага интегрирования

Точность расчетов существенным образом зависит от величины шага интегрирования h, поэтому важно правильно выбрать его начальное значение h_0.

Выбор начального шага h_0 проведем на примере метода Рунге–Кутта IV порядка. Итак, пусть ε – заданная точность счета. Поскольку метод Рунге–Кутта имеет точность четвертого порядка относительно шага h, должно выполняться условие $h^4 = \varepsilon$. Кроме того, отрезок $[a,b]$ должен быть разбит на четное число частей. Поэтому начальный шаг h_0 должен быть определен из двух условий:

$$h_0 = \sqrt[4]{\varepsilon}, \quad \frac{b-a}{h_0} \text{ – четно.} \tag{8.7}$$

Наибольшее h_0, удовлетворяющее условиям (8.7), является грубым приближением начального шага. Для его уточнения поступаем следующим образом. Находим решение задачи Коши в точке $x_0 + 2h_0$ по формулам Рунге–Кутта с шагами h_0 и 2 h_0, получаем два значения y_2 и $\widetilde{y}_2$. Путем увеличения или уменьшения шага в два раза (не обязательно однократного) подберем наибольшее значение

h_0, при котором будет выполнено неравенство $|y_2 - \tilde{y}_2| < \varepsilon$. Это и будет величина шага h, с которым решается задача Коши методом Рунге–Кутта.

8.1.5. Многошаговые методы Адамса

Рассмотренные методы Рунге–Кутта описываются формулой $y_{k+1} = \Phi(x_k, y_k)$, т. е. только в одной точке используется только один шаг.

Идея: получить значение, на следующем шаге используя значение не только в одной точке, но и в точках, стоящих перед ней (N + 1 шаг)

$$y_{k+1} = \Phi(x_k, ..., x_{k-N}; y_k, ..., y_{k-N}).$$

Рассмотрим интегральное представление дифференциального уравнения (8.1)

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)dx. \qquad (8.8)$$

Идея: построить интерполяционный полином Лагранжа $L(x_{k-N}, x_{k-N+1}, ..., x_{k-1}, x_k)$ для функции $f(x, y)$.

I. ***Явные методы Адамса***

Пусть известны значение $y_k, y_{k-1}, ..., y_{k-m}$, т. е. известны значения $f(x_k, y_k), ..., f(x_{k-m}, y_{k-m})$. На данных значениях построим интерполяционный полином Лагранжа степени *m*. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $m = 0$, т. е. известно $f(x_k, y_k)$.

$$L_0(x) = f(x_k, y_k).$$

Тогда из (8.8) получим метод Эйлера $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$.

б) Пусть $m = 1$, т. е. известны две точки. Получим

$$L_1(x)=\frac{x-x_{k-1}}{h}f_k-\frac{x-x_k}{h}f_{k-1}.$$

Тогда из (8.8) следует, что

$$y_{k+1}=y_k+\left[\frac{(x-x_{k-1})^2}{2h}f_k-\frac{(x-x_k)^2}{2h}f_{k-1}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}=y_k+\frac{4h}{2}f_k-\frac{h}{2}f_k-\frac{h}{2}f_{k-1},$$

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}\big(3f(x_k,y_k)-f(x_{k-1},y_{k-1})\big). \qquad (8.9)$$

Формула (8.9) определяет ***явный метод Адамса***. Метод Адамса имеет второй порядок точности.

II. ***Неявные методы Адамса***

Построим полином Лагранжа на значениях: $f(x_{k+1},y_{k+1}),...,f(x_{k-m},y_{k-m})$.

Пусть $m = 0$, тогда

$$L_1(x)=-\frac{x-x_{k+1}}{h}f_k-\frac{x-x_k}{h}f_{k+1}$$

и из (8.8) получаем ***неявный метод Адамса***

$$y_{k+1}=y_k+\left[-\frac{(x-x_{k-1})^2}{2h}f_k+\frac{(x-x_k)^2}{2h}f_{k-1}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}=y_k+\frac{h}{2}f_k+\frac{h}{2}f_{k+1},$$

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}\big(f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})\big). \qquad (8.10)$$

Так как (8.10) неявная формула (требуется разрешение относительно y_{k+1}), применяют схемы предиктора – корректора.

То есть предиктор по (8.9)

$$y_{k+1}^*=y_k+\frac{h}{2}\big(3f(x_k,y_k)-f(x_{k-1},y_{k-1})\big),$$

и корректор по (8.10)

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}\big(f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1}^*)\big).$$

Замечание. Неявные схемы неудобны в применении, но являются наиболее эффективными средствами противодействия неустойчивости численных расчетов.

8.2. Пример выполнения лабораторной работы

8.2.1. Задание к лабораторной работе

Решается задача Коши: $y'=f(x,y),\quad y(a)=y_0$ на отрезке $[a,b]$.

1. Найти шаг интегрирования для решения задачи Коши методом Рунге–Кутта (IV) с точностью 10^{-4}.

2. Найти решение задачи Коши на отрезке $[a,b]$ методом Рунге–Кутта (IV) с точностью 10^{-4}. Построить приближенную интегральную кривую.

3. Найти решение задачи Коши на отрезке $[a,b]$ методом Эйлера. Построить на одном графике (с п. 2) приближенную интегральную кривую.

4. Найти точное решение задачи Коши. Сравнить точное решение с приближенным. Найти максимум модуля отклонений в узловых точках приближенного решения от точного.

5. Записать результаты расчетов в сводную таблицу.

8.2.2. Решение типового примера

Решим задачу Коши: $xy'+y=2y^2\ln x,\quad y(1)=1{,}5;\quad a=1,\ b=3$.

1. Найдем шаг интегрирования для решения задачи Коши методом Рунге–Кутта (IV) с точностью 10^{-4}.

$$y'=\frac{y}{x}(2y\ln x-1).$$

Найдем начальный шаг интегрирования h_0. Согласно первому условию (8.7)

$$h_0=\sqrt[4]{0{,}0001}\approx 0{,}1.$$

Выберем $x_0 = a = 1$, $y_0 = 1{,}5$. Найдем решение данной задачи Коши методом Рунге–Кутта (IV) сначала в точке $x_0 + h_0$, затем в точке $x_0 + 2h_0$, получим соответственно

$y_1 \approx 1{,}3813$ и $y_2 \approx 1{,}3078$.

Далее снова найдем решение задачи Коши в точке $x_0 + 2h_0$, но с шагом $2h_0$, получим $\widetilde{y}_2 \approx 1{,}3078$.

Погрешность $|y_2 - \widetilde{y}_2| = 1{,}7 \cdot 10^{-6} < 0{,}0001$, следовательно, увеличиваем шаг в два раза $h_0 = 0{,}2$.

Затем проделываем те же вычисления с новым шагом. Получаем

$y_1 \approx 1{,}3078$, $y_2 \approx 1{,}2402$, $\widetilde{y}_2 \approx 1{,}2401$.

Погрешность $|y_2 - \widetilde{y}_2| = 8{,}9 \cdot 10^{-6} < 0{,}0001$, следовательно, увеличиваем шаг в два раза $h_0 = 0{,}4$, получим

$y_1 \approx 1{,}2401$, $y_2 \approx 1{,}2891$, $\widetilde{y}_2 \approx 1{,}2929$.

Погрешность $|y_2 - \widetilde{y}_2| = 0{,}0003 > 0{,}0001$, следовательно, для решения выбираем шаг $h_0 = 0{,}4$.

Определим $n = \dfrac{b-a}{h_0} = \dfrac{2}{0{,}4} = 5$. Так как n должно быть четным числом, то выбираем $n = 6$. При таком значении n шаг $h_0 = 0{,}33$. Снова вычислим погрешность $|y_2 - \widetilde{y}_2|$ с шагами 0,33 и 0,66.

$y_1 \approx 1{,}2545$, $y_2 \approx 1{,}2493$, $\widetilde{y}_2 \approx 1{,}2507$.

Погрешность $|y_2 - \widetilde{y}_2| = 8 \cdot 10^{-5}$, что укладывается в заданную точность.

2. Найдем решение задачи Коши на отрезке $[a, b]$ методом Рунге–Кутта (IV) с точностью 10^{-4} шагом $h = 0{,}33$, $2h = 0{,}66$.

x_i	Метод Рунге–Кутта (IV)		
	y_i	$\widetilde{y}_i$	$\Delta_i = \lvert y_i - \widetilde{y}_i \rvert$
1	1,5	1,5	0
1,33	1,2545		
1,66	1,2493	1,2507	$8{,}7\cdot 10^{-5}$
1,99	1,3830		
2,32	1,6948	1,6955	$4{,}3\cdot 10^{-5}$
2,65	2,4025		
3	4,7040	4,5124	0,013

$$\Delta = \max_i |\, y_i - \widetilde{y}_i \,| \approx 0{,}013 .$$

Построим приближенную интегральную кривую, полученную методом Рунге–Кутта (IV).

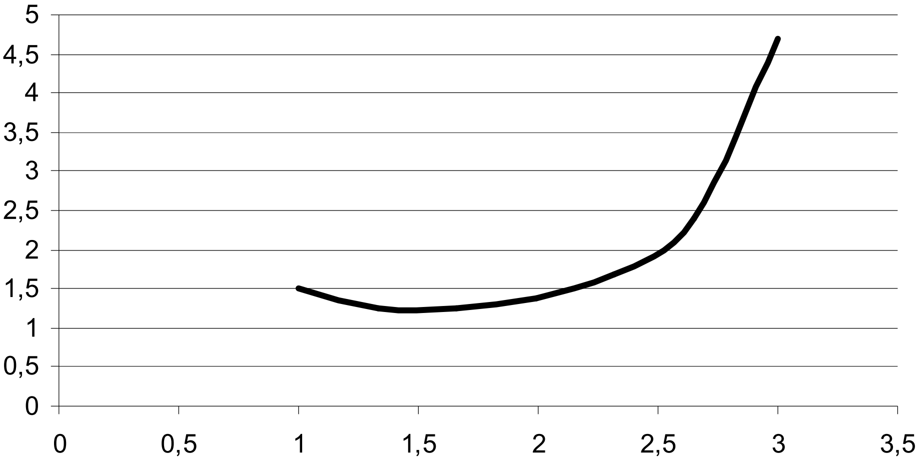

Рис. 8.1. Интегральная кривая, полученная методом Рунге–Кутта (IV)

3. Найдем решение задачи Коши на отрезке $[a,b]$ методом Эйлера с шагом $h = 0{,}33$, $2h = 0{,}66$.

x_i	Метод Эйлера		
	y_i	$\tilde{y}_i$	$\Delta_i = \lvert y_i - \tilde{y}_i \rvert$
1	1,5	1,5	0
1,33	1,0050		
1,66	0,8986	0,5100	0,3886
1,99	0,8826		
2,32	0,9141	0,4121	0,5020
2,65	0,9841		
3	1,0966	0,3761	0,7205

$$\Delta = \max_i \lvert y_i - \tilde{y}_i \rvert \approx 0{,}7205 .$$

Построим на одном графике (с п. 2) приближенную интегральную кривую.

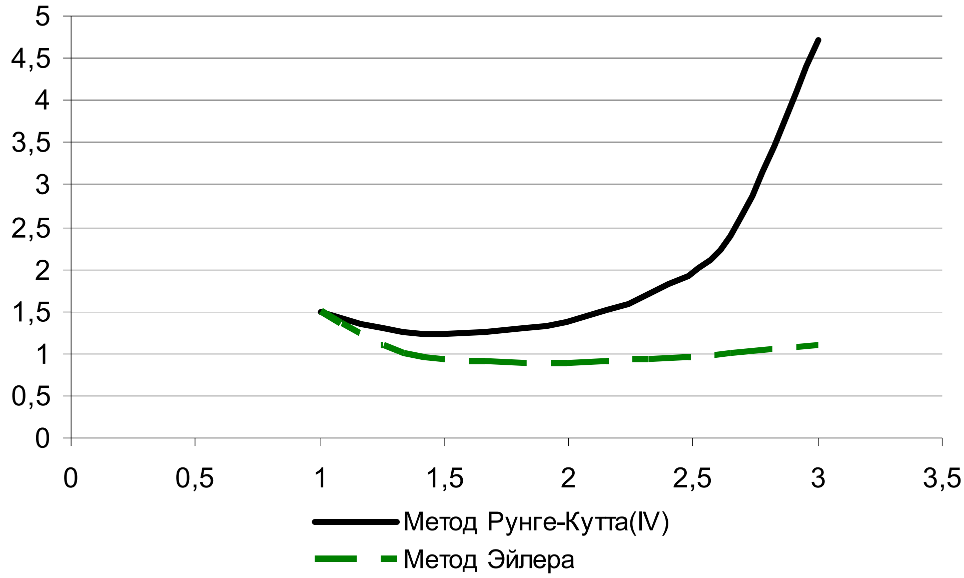

Рис. 8.2. Интегральные кривые, полученные методами Рунге–Кутта (IV) и Эйлера

4. Найдем точное решение задачи Коши.

$$xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = 1{,}5 .$$

Это уравнение Бернулли, значит, нужно привести его к линейному виду. Разделим все уравнение на y^2, получим

$$\frac{x}{y^2}y' + \frac{1}{y} = 2\ln x.$$

Далее делаем замену $z = y^{1-\alpha}$, $z = 1/y$, $y = 1/z$, $z' = -z/z^2$.

$$-xz^2\frac{z'}{z^2} + z = 2\ln x,$$

разделим все уравнение на $-x$,

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{2}{x}\ln x,$$

и мы получили линейное дифференциальное уравнение.

Решение будем искать в виде

$z = U(x)V(x)$,

$z' = U'V + UV'$,

$U'V + UV' - UV/x = -2(\ln x)/x$, $U'V + U(V' - V/x) = -2(\ln x)/x$.

$$\begin{cases} V' - \dfrac{V}{x} = 0, \\ U'V = -\dfrac{2}{x}\ln x. \end{cases}$$

$\dfrac{dV}{dx} = \dfrac{V}{x}; \dfrac{dV}{V} = \dfrac{dx}{x}; \ln V = \ln x + c$, положим $c = 0$, тогда $V = x$,

$$\frac{dU}{dx}x = -\frac{2}{x}\ln x \Rightarrow dU = -\frac{2}{x^2}\ln x dx,$$

$$U = -2\int\frac{\ln x}{x^2}dx = \begin{vmatrix} U = \ln x; & V = \dfrac{1}{x} \\ dU = \dfrac{1}{x}; & dV = -\dfrac{1}{x^2} \end{vmatrix} = 2\left(\frac{\ln x}{x} - \int\frac{1}{x^2}dx\right) = 2\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) + c =$$

$$= \frac{2}{x}(\ln x + 1) + c,$$

$z = U(x)V(x)$, $z = 2(\ln x + 1) + cx$,

$y = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2(\ln x + 1) + cx}$, далее определим константу c.

Так как $y(1)=1{,}5$, то $\dfrac{1}{2 + c} = 1{,}5;\ 2 + c = \dfrac{2}{3};\ c = -\dfrac{4}{3}$, тогда точное решение задачи Коши

$$y = \frac{1}{2\ln x + 2 - \frac{4}{3}x}.$$

Сравним точное решение с приближенным. Найдем максимум модуля отклонений в узловых точках приближенного решения от точного.

x_i	Точное решение	Метод Рунге–Кутта	Δ_i
	y_i	y_i	
1	1,5	1,5	0
1,33	1,2547	1,2545	10^{-4}
1,66	1,2495	1,2493	$2 \cdot 10^{-4}$
1,99	1,3832	1,3830	$3 \cdot 10^{-4}$
2,32	1,6954	1,6948	$6 \cdot 10^{-4}$
2,65	2,4050	2,4025	0,003
3	5,0704	4,7040	0,366

Максимум модуля отклонения точного значения от приближенного: $\delta = \max\limits_i |y(x_i) - y_i| = 0{,}366$.

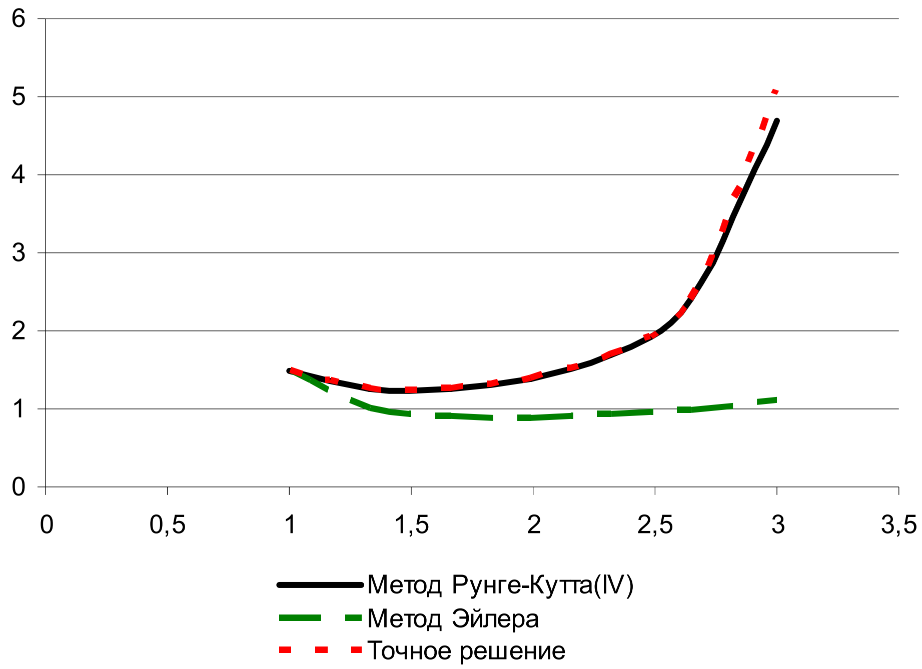

Рис. 8.3. Интегральные кривые

8.2.3. Варианты заданий

№	**Задача Коши**
1	$y'+xy=0{,}5(x-1)e^{x}y^{2}$, $y(0)=2$; $a=0$, $b=2$.
2	$y'-ytgx=-2/3y^{4}\sin x$, $y(0)=1$; $a=0$, $b=1{,}2$.
3	$y'+y^{2}=x$, $y(0)=1$; $a=0$, $b=2$.
4	$xy'+y=y^{3}e^{-x}$, $y(1)=1$; $a=1$, $b=2$.
5	$y'+xy=0{,}5(x+1)e^{x}y^{2}$, $y(0)=1$; $a=0$; $b=2$.
6	$xy'-y=-y^{2}(2\ln x+\ln^{2}x)$, $y(1)=2$; $a=1$, $b=2$.
7	$y'+4x^{3}y=4y^{2}e^{4x}(1-x^{3})$, $y(1)=1$; $a=1$, $b=2{,}8$.
8	$2y'+3y\cos x=e^{2x}(2+3\cos x)/y$, $y(1)=2$; $a=1$, $b=1{,}6$.
9	$y'+2xy=2x^{3}y^{3}$, $y(0)=1$; $a=0$, $b=1$.
10	$xy'+y=y^{2}\ln x$, $y(1)=0{,}5$; $a=1$, $b=5$.
11	$2y'+3y\cos x=(8+12\cos x)e^{2x}/y$, $y(0)=2$; $a=0$, $b=2$.
12	$4y'+x^{3}y=(x^{3}+8)e^{-2x}y^{2}$, $y(0)=0{,}5$; $a=0$, $b=2{,}4$.
13	$8xy'=12y=-(5x^{2}+3)y^{3}$, $y(1)=1$; $a=1$, $b=3$.
14	$y'+y=0{,}5xy^{2}$, $y(0)=2$; $a=0$, $b=2$.
15	$y'+xy=(x-1)e^{x}y^{2}$, $y(0)=1$; $a=0$, $b=2$.
16	$3y'-3y\cos x=-e^{-2x}(2+3\cos x)/y$, $y(0)=1{,}1$; $a=0$, $b=0{,}8$.
17	$y'-y=xy^{2}$, $y(0)=0{,}5$; $a=0$, $b=0{,}8$.
18	$xy'+y=y^{2}\ln x$, $y(1)=1$; $a=1$, $b=2{,}6$.
19	$y'+y=xy^{2}$, $y(0)=1$; $a=0$, $b=2$.
20	$xy'+y=xy^{2}$, $y(1)=1$; $a=1$, $b=2$.
21	$2y'+3y\cos x=e^{2x}(2+3\cos x)/y$, $y(0)=1$; $a=0$, $b=1{,}6$.
22	$3(xy'+y)=xy^{2}$, $y(1)=1$; $a=1$, $b=5$.
23	$y'-y=2xy^{2}$, $y(-1)=0{,}2$; $a=-1$, $b=0{,}6$.
24	$2xy'-3y=-(20x^{2}+12)y^{3}$, $y(1)=0{,}25$; $a=1$, $b=5$.
25	$2y'+3y\cos x=(8+12\cos x)e^{2x}/y$, $y(0)=3$; $a=0$, $b=3$.
26	$y'+xy=(1+x)e^{x}y^{-2}$, $y(0)=1$, $a=0$, $b=1{,}6$.
27	$xy'+y=2y^{2}\ln x$, $y(1)=0{,}5$; $a=1$, $b=5$
28	$2xy'+2y=xy^{2}$, $y(1)=2$; $a=1$, $b=1{,}8$.
29	$y'+4x^{3}y=4(x^{3}+1)e^{-4x}y^{2}$, $y(0)=0{,}5$; $a=0$, $b=1$.
30	$xy'-y=-y^{2}(2\ln x+\ln^{2}x)$, $y(1)=1$; $a=1$, $b=3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численные методы являются основным инструментом решения современных прикладных задач. Аналитическое решение той или иной задачи в виде отдельных формульных соотношений является скорее исключением, нежели правилом в силу сложного и приближенного характера исследуемых моделей. Вот почему численный анализ математических моделей – метод, алгоритм, программа, вычислительный эксперимент – является в настоящее время актуальным и наиболее эффективным аппаратом конструктивного исследования прикладных проблем.

Лабораторный практикум нацелен на выработку практических навыков решения прикладных задач. Однако рассмотренные в лабораторном практикуме виды задач не исчерпывают все области применения численного моделирования. Это объясняется стремлением достаточно подробно рассмотреть определенные группы методов при ограниченном объеме практикума.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы : [учебное пособие для студентов физико-математических специальностей вузов] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. – 6-е изд. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.

2. Бахвалов, Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях: [учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальностям высшего профессионального образования 010101 «Математика» и 010901 «Механика»] / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков; авт. предисл. А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.

3. Вержбицкий, В. М. Основы численных методов : учебник для вузов / В. М. Вержбицкий. – 3-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2009. – 840 с.

4. Волков, Е. А. Численные методы : учебное пособие / Е. А. Волков. – 5-е изд., стер. – СПб. [и др.] : Лань, 2008. – 248 с.

5. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики : учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – 8-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2011. – 672 с.

6. Калиткин, Н. Н. Численные методы : [учебное пособие для студентов университетов и высших технических учебных заведений] / Н. Н. Калиткин; под ред. А. А. Самарского. – 2-е изд. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 586 с.

7. Копченова, Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах : учебное пособие / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – 2-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2008 . – 368 с.

8. Лапчик, М. П. Элементы численных методов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер. – М. : Академия, 2007. – 224 с.

9. Маценко, П. К. Практические и лабораторные работы по вычислительной математике / П. К. Маценко. – Ульяновск : УлГТУ, 2005. – 75 с.

10. Рябенький, В. С. Введение в вычислительную математику / В. С. Рябенький. – М. : Физмагиз, 2000. – 294 с.

11. Самарский, А. А. Введение в численные методы : учебное пособие для вузов / А. А. Самарский; МГУ им. М. В. Ломоносова. – 3-е изд., стереотип. – СПб. : Лань, 2005. – 288 с.

Учебное электронное издание

КУВАЙСКОВА Юлия Евгеньевна

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

Редактор Н. А. Евдокимова

Объем данных 3,27 Мб. ЭИ № 274.

Печатное издание
ЛР №020640 от 22.10.97
Подписано в печать 28.05.2014. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 6,74. Тираж 100 экз. Заказ 737.

Ульяновский государственный технический университет
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, 32.

ИПК «Венец» УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, 32.
Тел.: (8422) 778-113.
E-mail: venec@ulstu.ru
http://www.venec.ulstu.ru