

Exercice 31 : Codage PPM

1. Calculer les contextes jusqu'à l'ordre 4 pour la chaîne "aababbaabbaabbba".
2. Appliquer le codage PPM à la même chaîne avec un contexte d'ordre 3.
3. Donner l'ensemble des caractères envoyés avec leurs nombres de bits (i.e. pour chaque codage, déterminer le contexte de codage).
4. Utiliser ces caractères envoyés pour effectuer le décodage PPM d'ordre 3.
5. Quel aurait été le nombre de bits envoyé par un codage algébrique de la même séquence ? Comment l'expliquer ?

Solution :

1. Contextes :

- **ordre 0** : $n_a = 8, n_b = 7$.
- **ordre 1** : $n_{aa} = 3, n_{ab} = 4, n_{ba} = 4, n_{bb} = 3$ (suites : aa ab ba ab bb ba aa ab bb ba aa ab bb ba).
- **ordre 2** : $n_{aaa} = 0, n_{aab} = 3, n_{aba} = 1, n_{abb} = 3, n_{baa} = 2, n_{bab} = 1, n_{bba} = 3, n_{bbb} = 0$ (suites : aab aba bab abb bba baa aab abb bba baa aab abb bba).
- **ordre 3** : $n_{aaba} = 1, n_{aabb} = 2, n_{abab} = 1, n_{abba} = 3, n_{baab} = 2, n_{babb} = 1, n_{bbaa} = 2$ (suites : aaba abab babb abba bbaa baab aabb abba bbaa baab aabb abba).
- **ordre 4** : etc ... (trop long)

2. Codage PPM : on commence avec un table vide dans le contexte 0, avec Δ .

a)	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3

Codage : [a]ababbaabbaabbba

0/. : Codage($\Delta, 1$)+Update($\cdot, a + \Delta$)+Up

\emptyset : CodageAlphabet(a)+Down($1/a$)

b)	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
	$\Delta : 1$ a : 1	$\boxed{a} \rightarrow :$		

Codage : a[a]babbaabbaabbba

$1/a$: Codage(a, $\Delta, 1$)+Update($a, a + \Delta$)+Up(\cdot)

0/. : Codage(a, $1/2$)+Update(\cdot, a)+Down($2/aa$)

c)	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
	$\Delta : 1$ a : 2	a $\rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$	$\boxed{aa} \rightarrow :$	

Codage : aa[b]abbaabbaabbba

$2/aa$: Codage(aa, $\Delta, 1$)+Update(aa, Δ)+Update(aa, b)+Up

$1/a$: Codage(a, $\Delta, 1/2$)+Update(a, $b + \Delta$)+Up

0/. : Codage($\cdot, \Delta, 1/3$)+Update($\cdot, b + \Delta$)+Up

\emptyset : CodageAlphabet(b)+Down($3/aab$)

d)	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
	$\Delta : 2$ a : 2 b : 1	a $\rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 1$	aa $\rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$	$\boxed{aab} \rightarrow :$

Codage : aab[a]bbaabbaabbba

$3/aab$: Codage(aab, $\Delta, 1$)+Update(aab, $a + \Delta$)+Up

$2/ab$: Codage(ab, $\Delta, 1/2$)+Update(ab, $a + \Delta$)+Up

$1/b$: Codage(b, $\Delta, 1$)+Update(b, $a + \Delta$)+Up

0/. : Codage($\cdot, a, 2/5$)+UpdateAllAscending(a)+Down($3/aba$)

e)	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
	$\Delta : 2$ a : 3 b : 1	a $\rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 1$ b $\rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$	aa $\rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ ab $\rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$	aab $\rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$ $\boxed{aba} \rightarrow :$

Codage : aaba[b]baabbaabbba

$3/aba$: Codage(aba, $\Delta, 1$)+Update(aba, $b + \Delta$)+Up

$2/ba$: Codage(ba, $\Delta, 1/2$)+Update(ba, $b + \Delta$)+Up

$1/a$: Codage(a,b, $1/4$)+UpdateAllAscending(b)+Down($3/bab$)

Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
$\Delta : 2$ $a : 3$ $b : 2$	$a \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 2$ $b \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$	$aa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $ab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$ $ba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$	$aab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$ $aba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $\boxed{bab} \rightarrow :$

f)

Codage : aabab[b]aabbaabbba

3/bab : Codage(bab, Δ , 1) + Update(bab , $b + \Delta$) + Up

2/ab : Codage(ab, Δ , $1/2$) + Update(ab , $b + \Delta$) + Up

1/b : Codage(b, Δ , $1/2$) + Update(b , $b + \Delta$) + Up

0/. : Codage(., b , $2/7$) + UpdateAllAscending(b) + Down(3/abb)

Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
$\Delta : 2$ $a : 3$ $b : 3$	$a \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 2$ $b \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 1$	$aa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $ab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 1$ $ba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$	$aab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$ $aba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $\boxed{abb} \rightarrow :$

g)

Codage : aababb[a]abbaabbba

3/abb : Codage(abb, Δ , 1) + Update(abb , $a + \Delta$) + Up

2/bb : Codage(bb, Δ , $1/2$) + Update(bb , $a + \Delta$) + Up

1/b : Codage(b, a , $1/4$) + UpdateAllAscending(a) + Down(3/bba)

Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
$\Delta : 2$ $a : 4$ $b : 3$	$a \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 2$ $b \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 1$	$aa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $ab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 1$ $ba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bb \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$	$aab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$ $aba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $abb \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$ $bab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $\boxed{bba} \rightarrow :$

h)

Codage : aababba[a]bbaabbba

$3/bba : \text{Codage}(bba, \Delta, 1) + \text{Update}(bba, a + \Delta) + \text{Up}$
 $2/ba : \text{Codage}(ba, \Delta, 1/2) + \text{Update}(ba, a + \Delta) + \text{Up}$
 $1/a : \text{Codage}(a, a, 1/5) + \text{UpdateAllAscending}(a) + \text{Down}(3/baa)$

Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
i) $\Delta : 2$ $a : 5$ $b : 3$	$a \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 2$ $b \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 1$	$aa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $ab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 1$ $ba \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bb \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$	$aab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$ $aba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $abb \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$ $bab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$ <div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">baa</div> $\rightarrow :$

Codage : aababbbaa[b]baabbba

$3/baa : \text{Codage}(baa, \Delta, 1) + \text{Update}(baa, b + \Delta) + \text{Up}$
 $2/aa : \text{Codage}(aa, b, 1/2) + \text{UpdateAllAscending}(b) + \text{Down}(3/aab)$

Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
j) $\Delta : 2$ $a : 5$ $b : 4$	$a \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 3$ $b \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 1$	$aa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 2$ $ab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 1$ $ba \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bb \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">aab</div> $\rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$ $aba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $abb \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$ $baa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$

Codage : aababbaab[b]aabbba

$3/aab : \text{Codage}(aab, \Delta, 1) + \text{Update}(aab, b + \Delta) + \text{Up}$
 $2/ab : \text{Codage}(ab, b, 1/4) + \text{UpdateUp}(b \rightarrow b, b) + \text{Down}(3/abb)$

Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
k) $\Delta : 2$ $a : 5$ $b : 5$	$a \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 3$ $b \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 2$	$aa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 2$ $ab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 2$ $ba \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bb \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$	$aab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 1$ $aba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $\boxed{abb} \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$ $baa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$

Codage : aababbaabb[a]abbba

$3/abb : \text{Codage}(abb, a, 1/2) + \text{UpdateUp}(bb \rightarrow a, b \rightarrow a, a) + \text{Down}(3/bba)$

Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
l) $\Delta : 2$ $a : 6$ $b : 5$	$a \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 3$ $b \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 3$ $\rightarrow b : 2$	$aa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 2$ $ab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 2$ $ba \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bb \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 2$	$aab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 1$ $aba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $abb \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 2$ $baa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $\boxed{bba} \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 1$

Codage : aababbaabba[a]bbba

$3/bba : \text{Codage}(bba, a, 1/2) + \text{UpdateUp}(ba \rightarrow a, a \rightarrow a, a) + \text{Down}(3/baa)$

Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
m) $\Delta : 2$ $a : 7$ $b : 5$	$a \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 3$ $\rightarrow b : 3$ $b \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 3$ $\rightarrow b : 2$	$aa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 2$ $ab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 2$ $ba \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 1$ $bb \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 2$	$aab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 1$ $aba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $abb \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 2$ $baa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : \mathbf{2}$

Codage : aababbaabbbaa[b]bba

$3/baa : \text{Codage}(baa, b, 1/2) + \text{UpdateUp}(aa \rightarrow b, a \rightarrow b, b) + \text{Down}(3/aab)$

Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
n) $\Delta : 2$ $a : 7$ $b : \mathbf{6}$	$a \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 3$ $\rightarrow b : \mathbf{4}$ $b \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 3$ $\rightarrow b : 2$	$aa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : \mathbf{3}$ $ab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 2$ $ba \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 1$ $bb \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 2$	$aab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 1$ $aba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $abb \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 2$ $baa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : \mathbf{2}$ $bab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 2$

Codage : aababbaabbbaab[b]ba

$3/aab : \text{Codage}(aab, b, 1/4) + \text{UpdateUp}(ab \rightarrow b, b \rightarrow b, b) + \text{Down}(3/abb)$

Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
<p>o)</p> $\Delta : 2$ $a : 7$ $b : 7$	$a \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 3$ $\rightarrow b : 4$ $b \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 3$ $\rightarrow b : 3$	$aa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 3$ $ab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 3$ $ba \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 1$ $bb \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 2$	$aab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 2$ $aba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $\boxed{abb} \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 2$ $baa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 2$ $bab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 2$

Codage : aababbaabbaabb[b]a

3/abb : Codage(abb, $\Delta, 1/3$) + Update(abb, $b + \Delta$) + Up

2/bb : Codage(bb, $b, 1/3$) + Update(bb, $b + \Delta$) + Up

1/b : Codage(b, $b, 3/8$) + UpdateUp(b) + Down(3/bbb)

Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
<p>p)</p> $\Delta : 2$ $a : 7$ $b : 8$	$a \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 3$ $\rightarrow b : 4$ $b \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 3$ $\rightarrow b : 4$	$aa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 3$ $ab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 3$ $ba \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 1$ $bb \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 1$	$aab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 2$ $aba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $abb \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 1$ $baa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 2$ $bab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 2$ $\boxed{bbb} \rightarrow :$

Codage : aababbaabbaabbb[a]

3/bbb : Codage(bbb, $\Delta, 1$) + Update(bbb, $a + \Delta$) + Up

2/bb : Codage(bb, $a, 2/5$) + UpdateUp($b \rightarrow a, a$) + Down(3/bba)

Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2	Ordre 3
q) $\Delta : 2$ $a : \mathbf{8}$ $b : 8$	$a \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 3$ $\rightarrow b : 4$ $b \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : \mathbf{4}$ $\rightarrow b : 4$	$aa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 3$ $ab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 3$ $ba \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 1$ $bb \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : \mathbf{3}$ $\rightarrow b : 1$	$aab \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 1$ $\rightarrow b : 2$ $aba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $abb \rightarrow \Delta : 2$ $\rightarrow a : 2$ $\rightarrow b : 1$ $baa \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 2$ $bab \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow b : 1$ $bba \rightarrow \Delta : 1$ $\rightarrow a : 2$ $bbb \rightarrow \Delta : \mathbf{1}$ $\rightarrow a : \mathbf{1}$

Codage : fin