Correction du Devoir MINF0501

Exercice 1 :

1) n est impair, $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k+1$
$$n^2+1 = (2k+1)^2+1 = 4k^2+4k+1+1 = 4k^2+4k+2 = 2(2k^2+2k+1)$$
2) Prenons $n=3$, alors $n^2+1 = 3^2+1 = 10$ et 10 n'est pas divisible par 4. C'est donc faux !
3) Il suffit que $a \wedge b = 1$, à savoir que a et b soient premiers entre eux.

Exercice 2 :

1) $1617 = 520 \times 3 + 57$
$520 = 57 \times 9 + 7$
$57 = 7 \times 8 + 1$
$7 = 1 \times 7 + 0$
On en déduit : $PGCD\ (1617; 520) = 1$
2) $1 = 57 - 7 \times 8$
$1 = 57 - (520 - 57 \times 9) \times 8$
$1 = 57 - 520 \times 8 + 57 \times 72$
$1 = 57 \times 73 - 520 \times 8$
$1 = (1617 - 520 \times 3) \times 73 - 520 \times 8$
$1 = 1617 \times 73 - 520 \times 219 - 520 \times 8$
$1 = 1617 \times 73 - 520 \times 227$

Ainsi $u = 73\ et\ v = -227$ conviennent.
3) Supposons $x\ et\ y$ solutions de (E) : $1617x + 520y = 1$
$$1617x + 520y = 1617 \times 73 + 520 \times (-227)$$
$$1617(x-73) = 520(-227-y)\ \ (*)$$
et ainsi $1617 | 520(-227-y)$ or $1617\ et\ 520$ sont premiers entre eux d'après la question 1.
D'après le théorème de Gauss, $1617 | (-227-y)$ ainsi $\exists k \in \mathbb{Z}, -227 - y = 1617k$
En remplaçant dans $(*)$il vient : $(x-73) = 520k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
Ainsi si $x\ et\ y$ sont solutions on a : $x = 73 + 520k\ et\ y = -227 - 1617k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement si x et y ont les valeurs données ci-dessus :
$$1617x + 520y = 1617(73+520k) + 520(-227-1617k)$$
$$= 1617 \times 73 - 520 \times 227 = 1$$
Donc les solutions sont : $(x; y) = (73 + 520k\ ; -227 - 1617k\ )avec\ k \in \mathbb{Z}$
4) On cherche désormais les solutions positives c'est-à-dire les valeurs de k pour que $x \geq 0\ et\ y \geq 0$
$$x \geq 0 \Leftrightarrow 73 + 520k \geq 0\ \Leftrightarrow k \geq -\frac{73}{520} \Leftrightarrow k \geq 0\ car\ k \in \mathbb{Z}$$
$$y \geq 0 \Leftrightarrow -227 - 1617k \geq 0 \Leftrightarrow k \leq \frac{227}{-1617} \Leftrightarrow k \leq 1\ car\ k \in \mathbb{Z}$$
Au final il n'existe pas de solution vérifiant : $x \geq 0\ et\ y \geq 0$

Exercice 3 :

1) $3150 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$
2) 3150 a donc $(1+1) \times (2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 2^2 \times 3^2 = 36$ diviseurs.
3) Pour obtenir un carré il suffit que tous les exposants des nombres premiers de la décomposition de 3150 soient pairs. Ceci se réalise en multipliant par $14 = 2 \times 7$.
(On obtient alors $210^2 = 44100$*)*

Exercice 4 :

1) Supposons que p divise a et $a+b$ alors p divise $a+b-a=b$. Donc $p|b$
2) On vient de voir p est un diviseur de a et de b. Or $p \geq 2$ car $p \in \mathbb{P}$, mais a ; b sont premiers entre eux. Ceci induit donc une contradiction car $p \neq 1$. Ainsi a et $a+b$ ne peuvent avoir de diviseurs premiers en commun. Ils sont donc premiers entre eux.
3) Supposons que p divise ab et $a+b$. Alors comme $p \in \mathbb{P}, p|a \; ou \; p|b$ et on a alors :
p divise a et $a+b$ ou p divise b et $a+b$
4) Soit $p \in \mathbb{P}$ tel que $p|ab \; et \; p|(a+b)$ D'après la question 3, $p|a \; et \; a+b \; ou \; p|b \; et \; a+b$
D'après les questions 1 et 2 ceci implique que $p|a \; et \; p|b$. Ceci est absurde car a et b sont premiers entre eux. Au final, $PGCD(ab, a+b) = 1$

Exercice 5 :

1) Développer.
2) $M_n \in \mathbb{P}$. Supposons que $a \geq 3$,
$$M_n = a^n - 1 = (1 + a + a^2 + \; \dots + a^{n-1})(a-1)$$
Or $a \geq 3 \; et \; n \geq 2$ donc : $a - 1 \geq 2$ et $1 + a + a^2 + \; \dots + a^{n-1} \geq 4$. On a réussi à factoriser M_n en un produit de deux nombres entiers supérieurs ou égaux à 2. Ceci impliquerait que M_n n'est pas premier.
Ceci est absurde et donc $a < 3$. Or $a \geq 2$ et $a = 2$
3) Supposons $n = kl \; avec \; k; l \geq 2$
$$M_n = 2^n - 1 = 2^{kl} - 1 = \left(2^k\right)^l - 1 = \left(1 + 2^k + \left(2^k\right)^2 + \cdots + \left(2^k\right)^{l-1}\right)(2^k - 1)$$
Et d'après les hypothèses chacun de ces facteurs est supérieur strictement à 1. Ceci est absurde. Il vient donc $M_n \notin \mathbb{P}$.