Матан Лаба, вариант №18

Григорий Горбушкин, Евгений Турчанин

Вопрос 1

Составьте интегральную сумму для функции e^{3x} на отрезке $[0, 0.5]$

Введем равномерное разбиение отрезка $[0, 0.5]$ на n частей, то есть

$$x_k = \frac{k}{2n}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Тогда интегральная сумма будет иметь вид

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_k = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{3k}{2n}}, \tag{2}$$

Перепишем сумму для правых прямоугольников, для левых прямоугольников и для средних прямоугольников:

$$S_{\text{правая}} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{3k}{2n}}, \tag{3}$$

$$S_{\text{левая}} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{3k}{2n}}, \tag{4}$$

$$S_{\text{средняя}} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} e^{3\frac{2k-1}{4n}}, \tag{5}$$

$$S_{\text{трапеции}} = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n} e^{3\frac{k}{2n}} + e^{3\frac{k-1}{2n}} = \frac{1}{4n}\left(e^{\frac{3}{2n}} + 1\right) \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{3(k-1)}{2n}}. \tag{6}$$

Вопрос 2

Вычислите пределы интегральных сумм при $n \to \infty$.

1. $S_{\text{правая}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^{\frac{3}{2n}} \cdot (e^{3/2} - 1)}{2n(e^{3/2n} - 1)} = \dfrac{e^{3/2} - 1}{3}$,
2. $S_{\text{левая}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(e^{3/2} - 1)}{2n(e^{3/2n} - 1)} = \dfrac{e^{3/2} - 1}{3}$,
3. $S_{\text{средняя}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{3}{4n}}(e^{3/2} - 1)}{2n(e^{3/2n} - 1)} = \dfrac{e^{3/2} - 1}{3}$,
4. $S_{\text{трапеции}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(e^{3/2n} + 1)(e^{3/2} - 1)}{4n(e^{3/2n} - 1)} = \dfrac{e^{3/2} - 1}{3}$.

Вопрос 3

Докажите, что интеграл существует

Функция e^{3x} непрерывна на отрезке $[0, 0.5]$, значит, по теореме о существовании интеграла Римана, интеграл существует.

Вопрос 4

Проверьте вычисление при помощи формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_0^{0.5} e^{3x}\,dx = \left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^{0.5} = \frac{e^{3/2} - 1}{3}$$

Вопрос 5

Вывести формулу для оценки погрешности.

Докажем формулы для погрешности:

1. Для правых прямоугольников покажем, что $|R_n| \le \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| \dfrac{(b-a)^2}{2n}$.
   По Тейлору, для $x_k \in [x_k, x_{k+1}]$ найдется такое $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$, что $f(x) = f(x_k) + f'(\xi_k)(x - x_k)$, тогда
   $$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(\xi_k)(x - x_k)\,\mathrm{d}x$$
   отсюда
   $$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\,\mathrm{d}x - f(x_k)\Delta x_k\right| \le \max_{\Delta_k} |f'(\xi_k)| \cdot \frac{(\Delta x_k)^2}{2}$$
   Если $\Delta x_k = (b-a)/n$, то
   $$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k\right| \le \sum_{k=1}^n \max_{\Delta_k} |f'(\xi_k)| \cdot \frac{(b-a)^2}{2n^2} \le \max_{[a,b]} |f'(x)| \frac{(b-a)^2}{2n}$$

2. Для средних прямоугольников, покажем что $|R_n| \le \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \dfrac{(b-a)^3}{24n^2}$.
   Опять разложим в ряд Тейлора, но уже в окресности средний точки, те вокруг $\dfrac{x_k + x_{k-1}}{2}$
   $$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_{\text{ср}})(x_k - x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x_{\text{ср}})(x - x_{\text{ср}})\,\mathrm{d}x + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f''(\xi_k)(x - x_{\text{ср}})^2}{2}\,\mathrm{d}x.$$
   Попробуем обосновать разложение до второго порядка ~~кроме фразы, что в формуле есть вторая производная~~. Видно, что второй член зануляется (хотя бы из соображения симметрии), поэтому чтобы вычислить погрешность нужно раскладываться до 2-го порядка.
   $$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x - f(x_{\text{ср}})(x_k - x_{k-1})\right| \le \max_{\Delta_k} |f''(\xi_k)| \cdot \frac{(x_k - x_{k-1})^3}{24}.$$
   Если $\Delta x_k = (b-a)/n$, то
   $$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^n f(x_{\text{ср}})\Delta x_k\right| \le \sum_{k=1}^n \max_{\Delta_k} |f''(\xi_k)| \cdot \frac{(x_k - x_{k-1})^3}{24} \le \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

3. Для трапеций, покажем что $|R_n| \le \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$.
   Разложим в ряд Тейлора в окрестности x_{k-1}
   $$f(x_k) = f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + \frac{f''(\xi_k)(x_k - x_{k-1})^2}{2},$$
   теперь ~~подгоним~~ подстравим это в формулу для трапеции
   $$\frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_k) + f(x_{k-1})) = \frac{x_k - x_{k-1}}{2}\left(2f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + \frac{f''(\xi_k)(x_k - x_{k-1})^2}{2})\right),$$
   распишем интеграл в его ~~prime~~ форме
   $$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_{k-1})\Delta x_k + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x_{k-1})(x - x_{k-1})\,\mathrm{d}x + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f''(\xi_k^*)(x - x_{k-1})^2}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Тогда их разность будет равна

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_k) + f(x_{k-1}))\right| = \left|f''(\xi_k^*)\frac{x_k - x_{k-1}}{6} - f''(\xi_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{4}\right|$$

тогда если $\Delta x_k = (b-a)/n$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_k) + f(x_{k-1}))\right| \le \max_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)| \frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

Вопрос 6

Найдите погрешность оценки, сравните ее с теоретической погрешностью

1. Погрешность для правых/левых прямоугольников

$$|R_n| \le \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \frac{(b-a)^2}{2n} = \max_{x\in[0,0.5]} |3e^{3x}| \frac{0.5^2}{2n} = \frac{3e^{1.5}}{8n},$$

тогда для n=10 погрешность будет равна 0.168, для n=100 погрешность будет равна 0.0168

2. Погрешность для средних прямоугольников

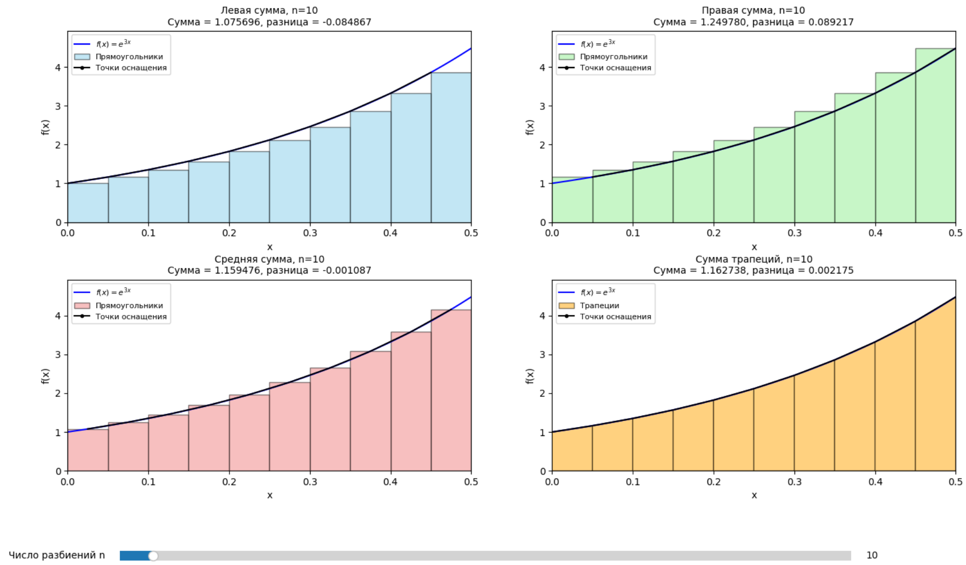
$$|R_n| \le \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{24n^2} = \max_{x\in[0,0.5]} |9e^{3x}| \frac{0.5^3}{24n^2} = \frac{9e^{1.5}}{192n^2}$$

тогда для n=10 погрешность будет равна 0.042, для n=100 погрешность будет равна 0.00042

3. Погрешность для трапеций

$$|R_n| \le \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{12n^2} = \max_{x\in[0,0.5]} |9e^{3x}| \frac{0.5^3}{12n^2} = \frac{9e^{1.5}}{96n^2}$$

тогда для n=10 погрешность будет равна 0.063, для n=100 погрешность будет равна 0.00063



…дальше Григорий

Маятник.

Малые колебания

Исследование теоретического изменения угла от практического

Для эксперимента была использована нить, длинной $L = 0.94$ м. В таком случае, теоретическая частота $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}} = \sqrt{\dfrac{9.82}{0.94}} \approx 3.23\ c^{-1}$

Тогда, теоретическая зависимость угла от времени: $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$

Начальные углы в каждой серии:

1 серия (малые углы)	2 серия (малые углы)	3 серия (малые углы)	1 серия (большие углы)	2 серия (большие углы)	3 серия (большие углы)
$\theta_0 = 14.61°$	$\theta_0 = 6.22°$	$\theta_0 = 13.69°$	$\theta_0 = 54.72°$	$\theta_0 = 55.00°$	$\theta_0 = 43.20°$

Таблица 1: Начальные углы

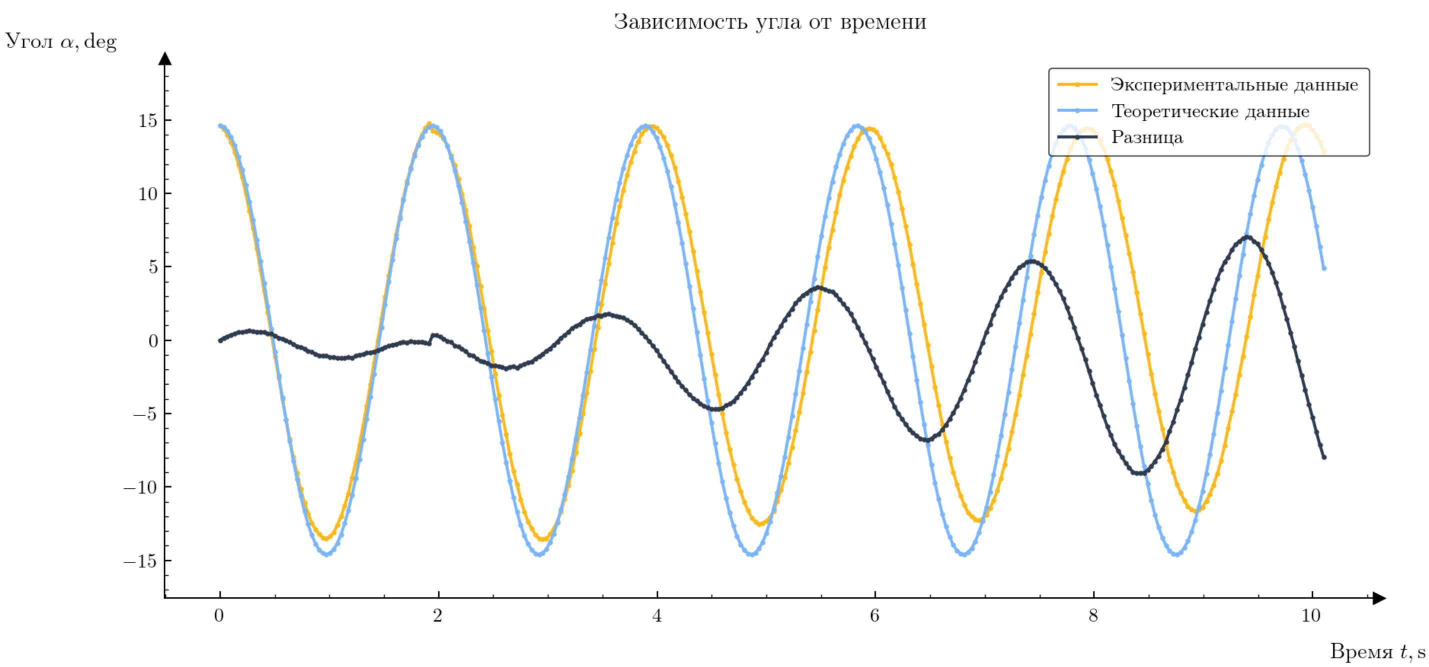


Рис. 1: 1 серия

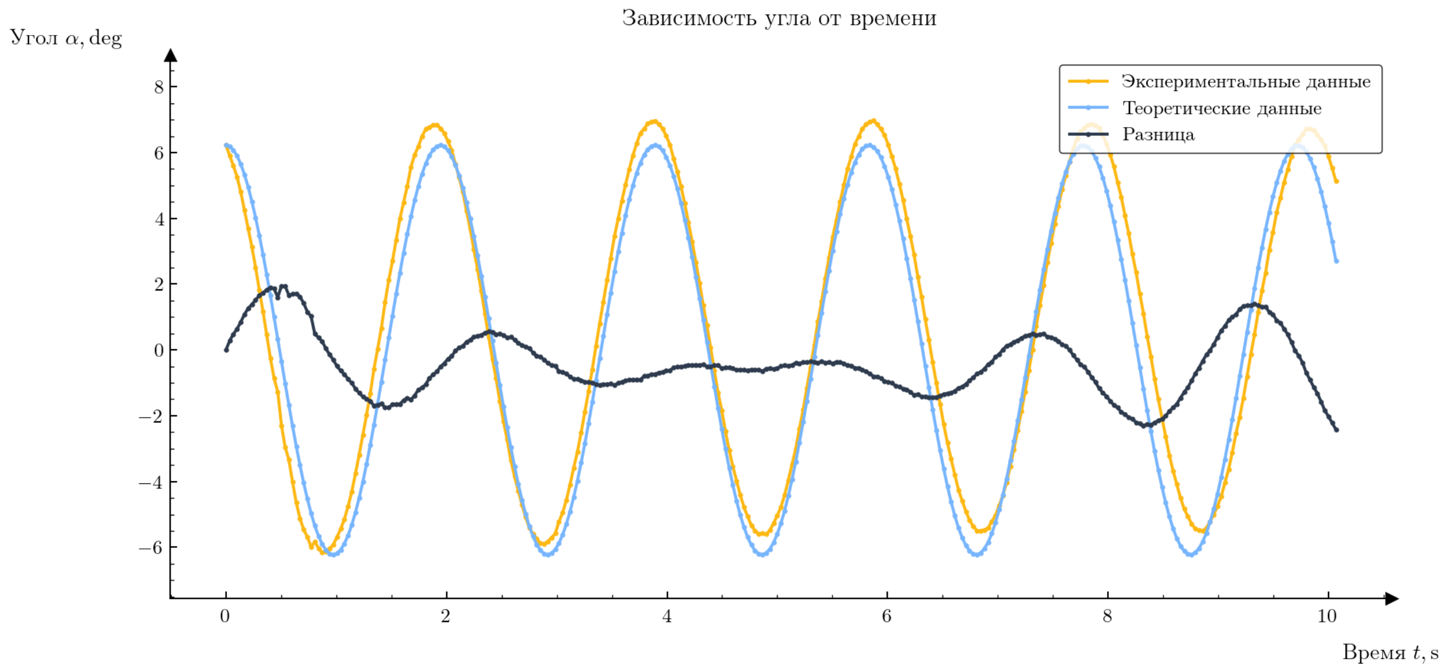


Рис. 2: 2 серия

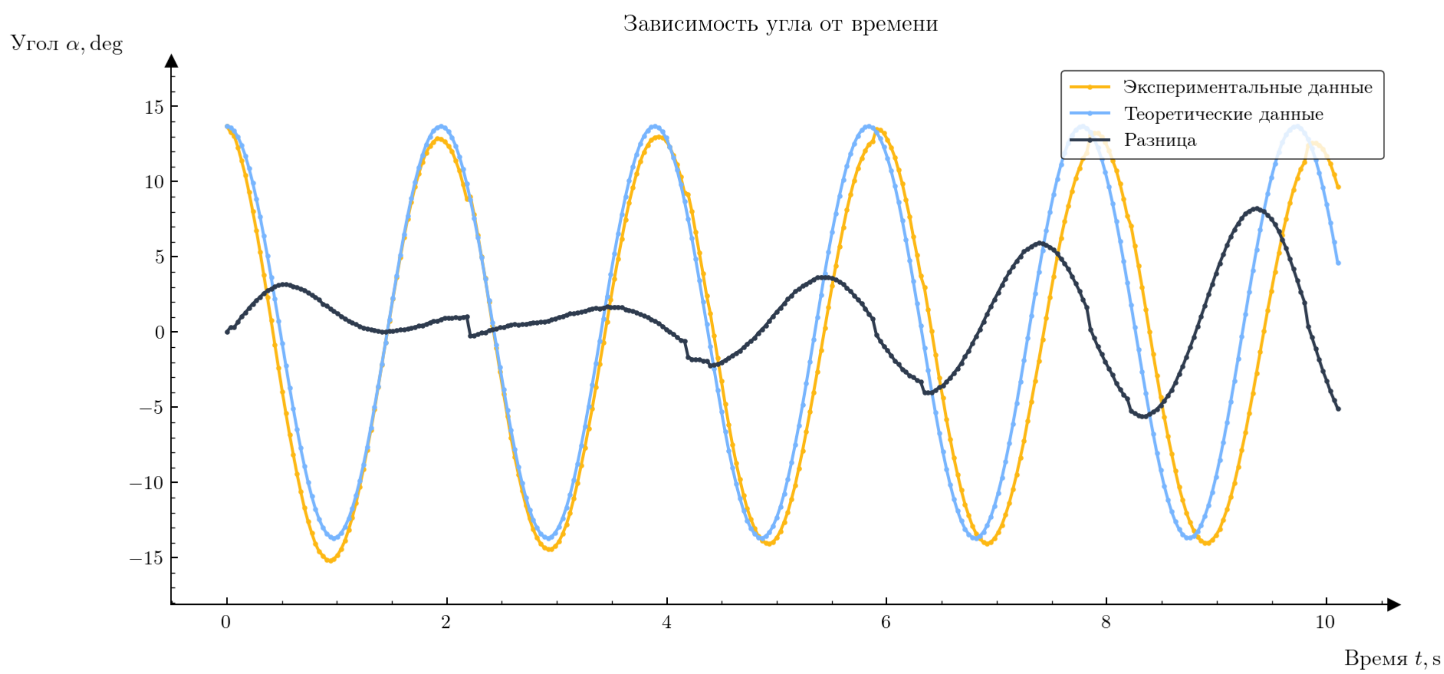


Рис. 3: 3 серия

Исследование изменения теоретического периода от практического

Теоретически, период колебаний будет рассчитываться как $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 1.94$ с

Для серий эти периоды были равны (вычисляем как время 5 колебаний деленное на 5):

$T_1 \approx 2.10$ с $T_2 \approx 2.19$ с $T_3 \approx 2.01$ с

Объяснение перехода в (3)

$\dot{\theta} = \pm\omega\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}$
$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \pm\omega\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}$
$\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \pm\omega\mathrm{d}t$
$\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \arcsin\frac{\theta}{\theta_0}\Big|_{\theta=\theta_0}^{\theta} = \arcsin\frac{\theta}{\theta_0} - \arcsin\frac{\theta_0}{\theta_0} = \arcsin\frac{\theta}{\theta_0} - \frac{\pi}{2}$
$\int\limits_0^t \pm\omega\mathrm{d}t = \pm\omega t \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_0} = \sin\left(\pm\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t)$ Ч.Т.Д.

Оценка погрешностей

У нас имеется три серии, в который теоретически период должен быть одинаковый. Среднее значение практического периода колебания:
$\overline{T} = \frac{\sum T}{3} = 2.10$ с

$\Delta t = \sqrt{t_{0.9;3}^2 \frac{\sum(T_i - \overline{T})^2}{6} + \Delta t_{\text{пр}}^2} = 0.18$ с

$\varepsilon_t = 8.6$ %

Тогда, значение T с доверительным интервалом:

$T = 2.10 \pm 0.18$ с

Выводы: Теоретическое значение (1,94 с) не лежит в доверительном интервале полученного практически значения. Данное отличие может быть обусловлено наличием вязкого трения, т к при наличии такого трения уменьшается частота колебаний $\Rightarrow$ увеличивается период колебаний. Кроме того, не все колебания получились "идеально"малыми - двух из трех экспериментах угол чуть больше $10°$.

Анализируя графики различия теоретического изменения угла от практически полученного можно наблюдать, что чем дольше идет наблюдение, тем больше погрешность. Если вначале это может быть связано с приближениями мат модели, то в конце большее влияние на погрешность поведения угла оказывает как раз различие в периоде.

Нелинейные колебания

Исследование теоретического периода от практического

Используя значения начальных углов в таблице, найдем теоретическое значение периода колебания (вычисляем инетеграл по сумме средних прямоугольников)
$T_1 = 2.02$ с
$T_2 = 2.02$ с
$T_3 = 2.01$ с

Графики зависимости практического изменения угла от времени:

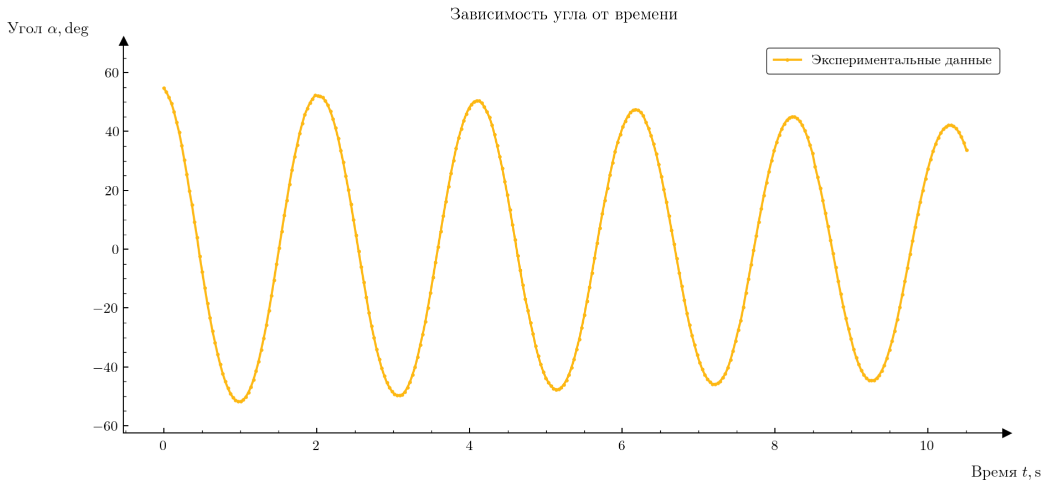


Рис. 4: $\theta_0 = 54.72°$

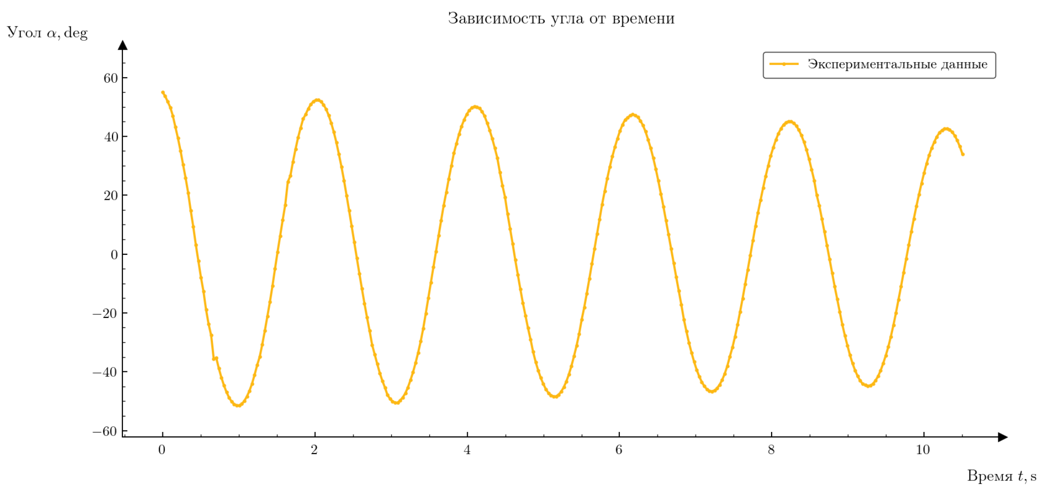


Рис. 5: $\theta_0 = 55.00°$

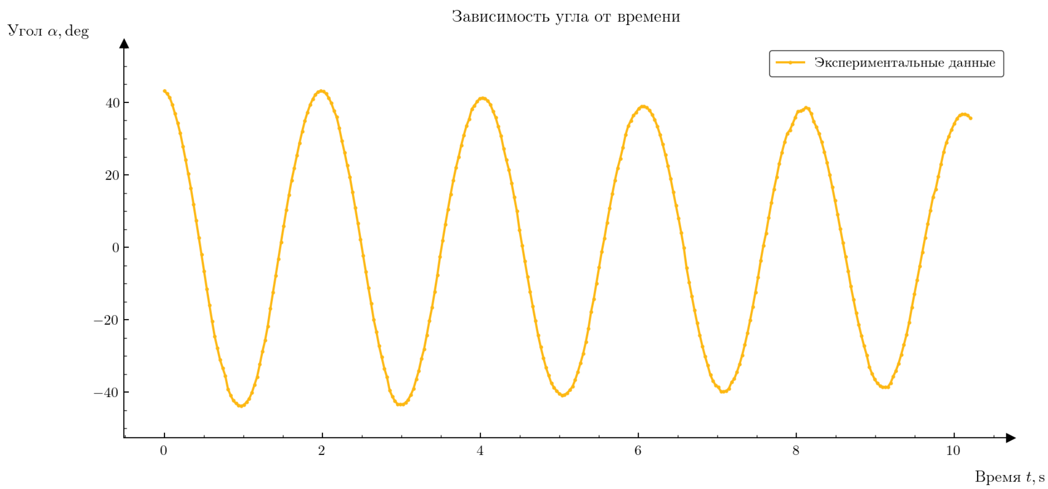


Рис. 6: $\theta_0 = 43.20°$

Практически полученное значение периода колебаний от времени:
$T_{1_{\text{прак}}} = 2.06$ с
$T_{2_{\text{прак}}} = 2.06$ с
$T_{3_{\text{прак}}} = 2.02$ с
Таким образом, отличие теоретического периода от практического:
$\Delta_1 = 0.04$ с
$\Delta_2 = 0.04$ с
$\Delta_3 = 0.01$ с

Доказательство формулы (6)

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = 2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2k^2 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{7}$$

где введено обозначение $k \equiv \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$.

Введём новую переменную u через соотношение:

$$\sin u = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{k} \tag{8}$$

Продифференцируем подстановку:

$$\cos u \, \mathrm{d}u = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2k}\,\mathrm{d}\theta \tag{9}$$

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2k\cos u}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,\mathrm{d}u \tag{10}$$

Учитывая, что $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{1 - k^2\sin^2 u}$, получаем:

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2k\cos u}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}\,\mathrm{d}u \tag{11}$$

Используя (7), выразим знаменатель:

$$\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0} = \sqrt{2}\sqrt{k^2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \sqrt{2}k\sqrt{1 - \sin^2 u} = \sqrt{2}k\cos u \tag{12}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \int \frac{1}{\sqrt{2}k\cos u} \cdot \frac{2k\cos u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} \tag{13}$$

- При $\theta = 0$: $\sin u = 0 \Rightarrow u = 0$
- При $\theta = \theta_0$: $\sin u = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$

Итоговое преобразование

$$\int\limits_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \sqrt{2}F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \tag{14}$$

где $F(\varphi, k)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода.

Вычисление эллиптического интеграла

$$K(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^n\right)^2, \quad (-1)!! = 1.$$

$$K(\sin 0.96) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{(-1)!!}{(0)!!}\cdot\sin^0(0.96)\right)^2 + \left(\frac{(2-1)!!}{(2)!!}\cdot\sin(0.96)\right)^2\right) = 1.83, \text{ n} = 1$$

$$K(\sin 0.96) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = 1.93, \text{ n} = 2$$

$$K(\sin 0.96) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = 1.98, \text{ n} = 3$$

$$K(\sin 0.75) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{(-1)!!}{(0)!!}\cdot\sin^0(0.96)\right)^2 + \left(\frac{(2-1)!!}{(2)!!}\cdot\sin(0.96)\right)^2\right) = 1.75, \text{ n} = 1$$

$$K(\sin 0.75) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = 1.80, \text{ n} = 2$$

$$K(\sin 0.75) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = 1.81, \text{ n} = 3$$

Можно сделать вывод, что при использовании трех слагаемых сумма стремительно приближается к вычисленному численно значению интеграла (это очень круто).

Итоговые погрешности

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}\right)'' = \frac{3\sin^2\theta}{4(\cos\theta-\cos\theta_0)^{5/2}} + \frac{\cos\theta}{2(\cos\theta-\cos\theta_0)^{3/2}}$$

Очевидно, что максимум значения этой производной при $\theta \to \theta_0$. . Тогда, для:
$\theta_0 = 0.75$
Чтобы избавиться от особенностей, делаем замену:
$t = \sqrt{0.75-\theta}$. Тогда исходный интеграл и его вторая производная принимают следующий вид:

$$\left(\frac{t}{\sqrt{\cos(0.75-t^2)-\cos 0.75}}\right)'' =$$

$$f''(t) = \frac{-2u\cdot(2t\sin\phi) - t\cdot(2\sin\phi+4t^2\cos\phi)\cdot u + \frac{3}{2}t\cdot(2t\sin\phi)^2}{u^{5/2}}$$

где:

- $u = \cos\big(0.75-t^2\big) - \cos 0.75$,
- $\phi = 0.75 - t^2$.

В этом случае, погрешность вычисленного интеграла $|R_n| \approx 3\cdot 10^{-7}$

Аналогично делаем для $\theta \approx 0.96$. В этом случае замена: $t = \sqrt{0.75-\theta}$. В этом случае, погрешность составит $|R_n| \approx 9\cdot 10^{-7}$