Матан идз
Вариант №18

Евгений Турчанин

Вопрос 1

Найти площадь фигуры, ограниченную кривыми:

1. $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2x^2$
2. $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t$

Решение:

1. Перейдем в полярные координаты:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}$$

Тогда уравнение примет вид:

$$r^4 = a^2r^2\cos^2\varphi \Rightarrow r = \pm a\cos\varphi,$$

Площадь фигуры в полярных координатах равна:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} a^2\cos^2\varphi\, \mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{4}\left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{a^2\pi}{2}.$$

2. Для поиска площади фигуры воспользуемся формулой:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left|x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\right|\mathrm{d}t.$$

Посчитаем производные:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2\sin t + 2\sin 2t, \\ y'(t) &= 2\cos t - 2\cos 2t. \end{aligned}$$

Тогда:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(2\cos t - \cos 2t)(2\cos t - 2\cos 2t) - (-2\sin t + 2\sin 2t)(2\sin t - \sin 2t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(4\cos^2 t - 4\cos t\cos 2t - 2\cos 2t\cos t + 2\cos^2 2t + 4\sin^2 t - 2\sin t\sin 2t - 4\sin 2t\sin t + 2\sin^2 2t\right)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} 6 - 6\cos 2t\cos t - 6\sin 2t\sin t\,\mathrm{d}t = 3\int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t - 3\int\limits_0^{2\pi}\cos 2t\cos t\,\mathrm{d}t - 3\int\limits_0^{2\pi}\sin 2t\sin t\,\mathrm{d}t =$$

$$= 6\pi$$

Ответ:

1. $\frac{a^2\pi}{2}$.
2. 6π.

Вопрос 2

Найти длину кривой, заданной уравнением:

1. $r = \dfrac{2}{\cos^4(\varphi/4)}$
2. $2(y^2 + z^2) = x$, $z\cos 2x - y\sin 2x = 0$, $0 \le x < \pi/4$

Решение:

1. В полярных координатах длина кривой равна:

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{r^2 + {r'_\phi}^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\frac{4}{\cos^8(\varphi/4)} + \frac{4\sin^2(\varphi/4)}{\cos^{10}(\varphi/4)}}\,\mathrm{d}\varphi = $$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{2}{\cos^5(\varphi/4)}\,\mathrm{d}\varphi = 8\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}(\varphi/4)}{\cos^5(\varphi/4)},$$

возьмем интеграл по частям, $u = \dfrac{1}{\cos^3(t)}$, $\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)}$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^5(t)} = \frac{1}{\cos^3(t)}\,\mathrm{tg}(t) - \int \frac{3\tan^2(t)}{\cos^3(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^3(t)}\,\mathrm{tg}(t) - \int \frac{3}{\cos^5 t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{3}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t,$$

по аналогии для $\dfrac{1}{\cos^3(t)}$:

$$\int \frac{1}{\cos^3(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos(t)}\,\mathrm{tg}(t) - \int \frac{1}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t + \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t},$$

ну а $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t + 1}{\sin t - 1}\right|$, тогда

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^5 t} = \frac{\mathrm{tg}\,t}{4\cos^3 5} + \frac{\mathrm{tg}\,t}{8\cos t} + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{\sin t + 1}{\sin t - 1}\right|,$$

тогда в подстановке от 0 до 2π

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi/4}{\cos^5\varphi/4} = \frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{tg}\,\varphi/4}{4\cos^3\varphi/4} + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi/4}{8\cos\varphi/4} + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{\sin\varphi/4 + 1}{\sin\varphi/4 - 1}\right|\right]_0^{2\pi} = \infty,$$

получается, что длина кривой бесконечна ~~не предел~~

2. Выразим y, z через x:

$$z\cos 2x - y\sin 2x = 0 \Rightarrow z(\cos^2 x - \sin^2 x) - 2y\sin x\cos x = 0 \Rightarrow z(1 - \mathrm{tg}^2\,x) - 2y\,\mathrm{tg}\,x = 0,$$

отсюда

$$z = \frac{2y\,\mathrm{tg}\,x}{1 - \mathrm{tg}^2\,x},$$

с другой стороны

$$z = \sqrt{\frac{x-2y^2}{2}},$$

объеденяем и получаем

$$\frac{4y^2 \operatorname{tg}^2 x}{1-2\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x} = \frac{x-2y^2}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{x(1-2\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)}{2(1+2\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{x}(1-\operatorname{tg}^2 x)}{\sqrt{2}(1+\operatorname{tg}^2 x)},$$

тогда

$$z = \sqrt{\frac{x-\dfrac{x(1-\operatorname{tg}^2 x)^2}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2}}{2}} = \sqrt{\frac{4x\operatorname{tg}^2 x}{2}} = \sqrt{2x}\operatorname{tg} x.$$

Для вычисления длины кривой есть формула

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x,$$

подставим производные

$$L = \int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{1+}$$

Вопрос 3

Исследовать на сходимость интеграл:

1. $\displaystyle\int\limits_1^\infty x\left|\ln\cos\frac{1}{x}\right|\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int\limits_0^\infty (e^x+x)\sin e^{2x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int\limits_0^1 (x-\sin x)^{-1}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sin(\pi/x)}{x(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$

Решение:

1. Покажем, что интеграл расходится.

$$\int\limits_0^\infty x\left|\ln\cos\frac{1}{x}\right|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty x\left|\ln\left(1-\frac{1}{2x^2}+O\left(\frac{1}{2x^5}\right)\right)\right|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty x\left(-\frac{1}{2x^2}+O\left(\frac{1}{2x^5}\right)-\frac{1}{8x^4}\right)\,\mathrm{d}x,$$

   Понятно, что этот интеграл не сход.

2. Проверим на абс. сход.

$$\int\limits_0^\infty (e^x+x)\sin e^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

Для этого сделаем замену $t = e^{2x}$ и навесим модуль

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + \frac{\ln t}{2}\right)|\sin t| \, \frac{\mathrm{d}t}{t}$$