

Матан инд
Вариант №19(22)

Евгений Турчанин

Вопрос 1

Доказать что: $\frac{1^4}{1 \cdot 3} + \frac{2^4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^4}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}$

Решение: Докажем через индукцию:

1. Покажем что для $n = 1$ верно:

$$\frac{1(1+1)(1^2+1+1)}{6(2+1)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1^4}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

2. Пусть верно для n

3. Тогда докажем, что верно для $n + 1$:

$$\underbrace{\frac{1^4}{1 \cdot 3} + \frac{2^4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^4}{(2n-1) \cdot (2n+1)}}_{\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}} + \frac{(n+1)^4}{(2n+1) \cdot (2n+3)} \Rightarrow$$

Нужно доказать, что:

$$\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)} + \frac{(n+1)^4}{(2n+1) \cdot (2n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)(n^2+3n+3)}{6(2n+3)}$$

~~Трудно не заметить, что так оно и есть~~ Давайте покажем, что это так:

Сократим все на $n + 1$ и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{n(2n+3)(n^2+n+1)}{6(2n+1)(2n+3)} + \frac{6(n+1)^3}{6(2n+1) \cdot (2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+2)(n^2+3n+3)}{6(2n+1)(2n+3)}$$

Сократим на знаменатели и раскроем скобки:

$$2x^4 + 11x^3 + 23x^2 + 21x + 6 = 2x^3 + 11x^2 + 23x + 21 + 6 \Rightarrow$$

$$0 = 0$$

Ч.Т.Д.

Вопрос 2

Доказать что:

$$\sum_{k=1}^k \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Решение: Докажем опять ~~двадцать~~ через индукцию:

1. Покажем что для $n = 1$ верно:

$$\frac{1}{1^2} = 1$$

$$2 - \frac{1}{1} = 1$$

2. Пусть верно для n

3. Тогда докажем, что верно для $n + 1$:

Те нужно доказать что верно:

$$\underbrace{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{\leq 2 - \frac{1}{n}} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{(2n-1)(n+1)^2 + n}{(n+1)^2 n} \leq \frac{(2n+1)(n+1)n}{(n+1)^2 n}$$

Сократим на знаменатель:

$$(2n-1)(n+1)^2 + n \leq (2n+1)(n+1)n$$

Раскроем скобки:

$$2n^3 + 4n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1 + n \leq 2n^3 + 2n^2 + n^2 + n \Rightarrow \\ -1 \leq 0$$

Ч.Т.Д.

Момент когда меня сместили с 19 на 22 место

Вопрос 3

Доказать: $(2n-1)! < n^{2n-1}$, $n \geq 2$

Решение: Докажем по мат. индукции:

1. Покажем что для $n = 2$ верно:

$$(4-1)! < 2^{4-1} \Rightarrow 6 < 8$$

2. Пусть верно для n

3. Докажем, что верно для $n + 1$

$$(2n+1)! < (n+1)^{2n+1} \Rightarrow 2n(2n+1)n^{2n-1} < (n+1)^{2n+1} \Rightarrow \\ 4n^{2n+1} + 2n^{2n} < n^{2n+1} + (n+1)^{2n} \cdot (2n+1) + (n+1)^{2n-1} \cdot n(2n+1)$$

Преобразуем правую часть:

$$n^{2n+1} + (n+1)^{2n} \cdot (2n+1) + (n+1)^{2n-1} \cdot n(2n+1) > 5n^{2n+1} + 2n^{2n}$$

Тк

$$4n^{2n+1} + 2n^{2n} < 5n^{2n+1} + 2n^{2n}$$

Ч.Т.Д.

Вопрос 4

$$C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (-1)^n(n+1)C_n^n = ?$$

Решение: Легко заметить, что:

$$C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (-1)^n(n+1)C_n^n = (n+1)C_n^0 - nC_n^1 + (n-1)C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n$$

Тогда начальную сумму можно представить в виде:

$$\frac{n+1}{2}(C_n^0 - C_n^1 + (-1)^n C_n^2 + \dots + C_n^n)$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n = (a+b)^n$$

Такое равенство будет выполняться при $a = 1$ и $b = -1$ (причем, очевидно, что четность/нечетность n не влияет), тогда искомая сумма будет равна:

$$\frac{n+1}{2} 0^n = 0$$

Ответственность: $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (-1)^n(n+1)C_n^n = 0$

Вопрос 5

Доказать:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-3}{6n-4} = \frac{1}{2}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - \ln(n+1)) = -\infty$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n \cdot n^2 - n) = \infty$

Решение:

1. Определение предела:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |A - x_n| < \epsilon$$

Тогда чтобы доказать, что $1/2$ является пределом, нужно показать, что:

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{3n-3}{6n-4} \right| < \epsilon$$

Те, что $\left| \frac{1}{2} - \frac{3n-3}{6n-4} \right|$ может быть сколь угодно малым, покажем это:

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{3n-3}{6n-4} \right| = \frac{1}{6n-4} - \text{эта дробь может быть сколь угодно малой из принципа Архимеда}$$

Ч.Т.Д.

2. Если пределом последовательности является $-\infty$, то не существует такого числа, которое *подпирает* последовательность снизу и последовательность монотонно убывает. Запишем это в формальном виде:

$$\forall M \exists x_{n_0} : \forall n \geq n_0 : x_n < M$$

Докажем что для любого M можно найти такой x_{n_0} , начиная с которого, все члены меньше M :

$$3 - \ln(n+1) < M \Rightarrow n > e^{3-M} - 1 \text{ — ну вот он, можно округлить до целых и прибавить } 1$$

Теперь покажем монотонность последовательности:

$$x_{n+1} - x_n = 3 - \ln(n+2) - 3 + \ln(n+1) = \ln \frac{n+1}{n+2} < 0 \Rightarrow \text{последовательность монотонно убывает}$$

Получаем что, последовательность монотонно убывает и не ограничена снизу

Ч.Т.Д.

3. Если предел последовательности это ∞ , то множество ее частичных пределов — $\{-\infty, \infty\}$

Тогда докажем, что $\pm\infty$ являются частичными пределами, и что других частичных пределов нету:

$$(a) \ n - \text{ четное} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(1 - 1/n) \rightarrow \infty$$

$$(b) \ n - \text{ нечетное} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -n^2(1 + 1/n) \rightarrow -\infty$$

Других частичных пределов нету, тк в подпоследовательность входит либо бесконечное число четных и нечетных, тогда предел — ∞ , либо конечное число четных/нечетных и бесконечное число нечетных/четных, тогда с какого-то номера в подпоследовательности не будет четных/нечетных чисел, тогда частичные пределы — $\mp\infty$

Ч.Т.Д.

Вопрос 6

$$\begin{aligned} & 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n\sqrt[4]{n^3-2n} + n\sqrt{n^2+2n+8}}{\sqrt[3]{n^6-5n+4} - 3n^2 - 5n}; 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n-1} + 2^{n+5} + 4n^5}{n\sqrt{3n+5} - 9^{n+3}}; \\ & 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^4+3n^2+5} - \sqrt{4n^4-6n^2-7} \right); 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 + \frac{4}{2n-7}}; \\ & 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n+15}{9n+8} \right)^{3n}; 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-5}{6n+7} \right)^{3n}; 7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n+1)!}{n! \cdot (n+4) + 5^n}; \\ & 8) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n^2 + \frac{4}{2n-7}}; 9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{8}-1}; 10) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+9+\dots+3n}{n^2+4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n\sqrt[4]{n^3-2n} + n\sqrt{n^2+2n+8}}{\sqrt[3]{n^6-5n+4} - 3n^2 - 5n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt[4]{n^3-2n} + n\sqrt{1+2/n+8/n^2}}{n\sqrt[3]{1-5/n^5+4/n^6} - n(3+5/n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1+2/n+8/n^2} \left(\frac{5\sqrt[4]{n^3-2n}}{n\sqrt{1+2/n+8/n^2}} + 1 \right)}{n\sqrt[3]{1-5/n^5+4/n^6} - n(3+5/n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+2/n+8/n^2} \left(\frac{5\sqrt[4]{n^3-2n}}{n\sqrt{1+2/n+8/n^2}} + 1 \right)}{\sqrt[3]{1-5/n^5+4/n^6} - (3+5/n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+2/n+8/n^2} \left(\frac{5\sqrt[4]{n^3-2n}}{n\sqrt{1+2/n+8/n^2}} + 1 \right)}{(3+5/n) \left(\frac{\sqrt[3]{1-5/n^5+4/n^6}}{3+5/n} - 1 \right)} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot \left(\frac{1}{3} - 1 \right)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n-1} + 2^{n+5} + 4n^5}{n\sqrt{3n+5} - 9^{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n/3 + 2^n \cdot 32 + 4n^5}{n\sqrt{3n+5} - 9^n \cdot 729} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n/3 \left(1 + \frac{2^n \cdot 32}{9^n/3} + \frac{4n^5}{9^n/3} \right)}{9^n \cdot 729 \left(\frac{n\sqrt{3n+5}}{9^n \cdot 729} - 1 \right)} = \frac{1/3 \cdot 1}{729 \cdot -1} = -\frac{1}{2187}$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^4 + 3n^2 + 5} - \sqrt{4n^4 - 6n^2 - 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 + 12}{\sqrt{4n^4 + 3n^2 + 5} + \sqrt{4n^4 - 6n^2 - 7}} =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 + 12}{2n^2 \sqrt{1 + 3/4n^2 + 5/4n^4} \left(1 + \frac{\sqrt{4n^4 - 6n^2 - 7}}{\sqrt{4n^4 + 3n^2 + 5}}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 + 12}{2n^2 \sqrt{1 + 3/4n^2 + 5/4n^4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{-9n^2 - 9}{4n^4 + 3n^2 + 5}}\right)} =$
 $\frac{9}{2 \cdot (1 + 1)} = \frac{9}{4}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 + \frac{4}{2n - 7}} = 1$ тк корень из чего-то положительного (что растёт медленнее корня) $\rightarrow 1$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n + 15}{9n + 8}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7(1 + 15/n)}{9(1 + 8/n)}\right)^{3n} = 0$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n - 5}{6n + 7}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-12}{6n + 7}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-12}{6n+7} \cdot 3n} = e^{-6}$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n + 1)!}{n! \cdot (n + 4) + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)! \left(\frac{n^2}{(n + 1)!} - 1\right)}{n!(n + 4) \left(1 + \frac{5^n}{n!(n + 4)}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(n + 1)}{n + 4} = -1$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n^2 + \frac{4}{2n - 7}} = 1$ по аналогии с 4
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{8} - 1}$ используя $\sqrt[n]{a} \approx 1 + \frac{\ln a}{n}$ при $n \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{8} - 1} = \frac{\ln 2}{\ln 8}$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n(n + 1)}{n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2(1 + 3/n)}{n^2(1 + 4/n^2)} = 3$

Ответ:

1. $-\frac{1}{2}$
2. $-\frac{1}{2187}$
3. $\frac{9}{4}$
4. 1
5. 0
6. e^{-6}
7. -1
8. 1
9. $\frac{\ln 2}{\ln 8}$
10. 3

Вопрос 7

Найти $\sup x_n$, $\inf x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$x_n = \frac{2n+1}{n} \arccos(-1)^n$$

Решение: Для начала рассмотрим последовательность при четных n :

$$x_n = \frac{2n+1}{n} \arccos 1 = 0 \quad - \text{очевидная хорошая подпоследовательность}$$

Теперь рассмотрим при нечетных n :

$$x_n = \frac{2n+1}{n} \pi = 2 + \frac{1}{n} \pi \quad - \text{понятно, что это убыв. подпоследовательность}$$

Понятно, что других подпоследовательностей нету, тк в последовательности может быть 3 случая:

1. Бесконечное количество четных и нечетных номеров, тогда такая подпоследовательность не сход, тк нельзя найти номер после которого ε можно взять любым, тк при четных можно найти 0, а при нечетных найти >2
2. При конечном количестве четных и бесконечном количестве нечетных, можно найти номер с которого будут только нечетные, те подпоследовательность сход к 2
3. По аналогии с 2, но подпоследовательность сход к 0

Теперь мы готовы сказать, что $\sup x_n = 3\pi$, $\inf x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ — из определения $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq n} x_m)$

Ответ:

1. $\sup x_n = 3\pi$
2. $\inf x_n = 0$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
4. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$

Вопрос 8

Определить сходится ли последовательность:

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2^n}$$

Решение: По критерию Коши: Если последовательность фундаментальна т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \exists p \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \quad (1)$$

То последовательность сходится, для нашей последовательности возьмем $p=1$:

$$x_n + \frac{1}{2^{n+1}} - x_n = \frac{1}{2^{n+1}} \quad (2)$$

Понятно, что $\frac{1}{2^{n+1}}$ может быть сколь угодно малым \Rightarrow последовательность сходится

Вопрос 9

Используя признак Вейерштрасса, доказать, что данная последовательность сходится, и найти ее предел

$$x_n = \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{13}{12} \cdots \frac{4n+1}{5n-3}$$

Вопрос 10

Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{4n^2 - 8n - 5}$$

Решение: Через метод неопределенных коэффициентов найдем разложение на две дроби:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(2n+1)(2n-5)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-5} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1}$$

Трудно не заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-5} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1} - \frac{2}{3}$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{4n^2 - 8n - 5} = -\frac{2}{3}$$

Ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{4n^2 - 8n - 5} = -\frac{2}{3}$$