

Вдв
Решение дз №2

Евгений Турчанин

Вопрос 1

Найдите вещественные и мнимые части следующих комплексных чисел, а также их комплексно сопряженные

$$1) \frac{1}{1+i}; 2) \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3; 3) \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3; 4) \left(\frac{i^9+2}{i^{23}+1}\right)^2; 5) 10 \exp\left\{\frac{3\pi}{4}i\right\}$$

Решение:

1. $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} \Rightarrow Re = \frac{1}{2}, Im = -\frac{1}{2}, z^* = \frac{1}{2} + i/2$
2. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 = \frac{(1+i)^2(1+i)^2(1+i)^2}{(1-i)^3(1+i)^3} = \frac{-8i}{8} = -i \Rightarrow Re = 0, Im = -1, z^* = i$
3. $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 i \Rightarrow Re = -1, Im = 0, z^* = -1$
4. $\left(\frac{i^9+2}{i^{23}+1}\right)^2 = \left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2 = \frac{4i+3}{-2i} = -2 + \frac{3}{2}i \Rightarrow Re = -2, Im = \frac{3}{2}, z^* = -2 - \frac{3}{2}i$
5. $10 \exp\left\{\frac{3\pi}{4}i\right\} \Rightarrow r = 10\varphi = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 10 \exp\left\{\frac{3\pi}{4}i\right\} = 10(\cos 3\pi/4 + i \sin 3\pi/4) \Rightarrow Re = -5\sqrt{2}, Im = 5\sqrt{2}, z^* = -5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}i$

Ответ:

1. $Re = \frac{1}{2}, Im = -\frac{1}{2}, z^* = \frac{1}{2} - i/2$
2. $Re = 0, Im = -1, z^* = i$
3. $Re = -1, Im = 0, z^* = -1$
4. $Re = -2, Im = \frac{3}{2}, z^* = -2 - \frac{3}{2}i$
5. $Re = -5\sqrt{2}, Im = 5\sqrt{2}, z^* = -5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}i$

Вопрос 2

Перепишите следующие комплексные числа через их модуль и фазу (аргумент)

$$1) 1 + i^{321}; 2) \frac{1-i}{1+i}; 3) (1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}; 4) 1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$$

Решение:

1. $1 + i^{321} = 1 + i \Rightarrow r = \sqrt{2}; \varphi = \frac{\pi}{4}$
2. $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i \Rightarrow r = 1; \varphi = -\frac{\pi}{2}$
3. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6} = \left(\frac{(1+i)^4}{(1-i\sqrt{3})^{-3}}\right)^2 = \left(\frac{-4}{1-3\sqrt{3}i-9+3^{3/2}i}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow r = \frac{1}{4}; \varphi = 0$
4. $1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \Rightarrow a = 1 + \cos \frac{\pi}{7}; b = \sin \frac{\pi}{7} \Rightarrow r = \sqrt{1 + 2 \cos \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{\pi}{7}} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{7}} \Rightarrow \varphi = \arctan \frac{\sin \pi/7}{1 + \cos \pi/7}$

Ответ:

1. $r = \sqrt{2}; \varphi = \frac{\pi}{4}$

2. $r = 1; \varphi = -\frac{\pi}{2}$

3. $r = \frac{1}{4}; \varphi = 0$

4. $r = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{7}}; \varphi = \arctan \frac{\sin \pi/7}{1 + \cos \pi/7}$

Вопрос 3

Найти все решения следующих уравнений:

1) $z^2 = 3 - 4i$

2) $z^8 = 1 + i$

3) $z^6 = 64$

4) $z^7 + 1 = 0$

Решение:

1. $z^2 = 3 - 4i \Rightarrow a = 3; b = -4 \Rightarrow r = 5 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{3}{5}; \sin \varphi = -\frac{4}{5} \Rightarrow z = \sqrt{5}(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{2\varphi + 2\pi k}{2}),$
Рассмотрим два случая:

- $k = 0: z = \sqrt{5}(\cos \varphi/2 + i \sin \varphi/2) = \sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}} + i \frac{1}{\sqrt{5}}) \Rightarrow z = 2 + i$

- $k = 1: z = \sqrt{5}(\cos(\varphi/2 + \pi) + i \sin(\varphi/2 + \pi)) \Rightarrow z = -2 + i$

Очевидно что, других корней нету, тк \cos и \sin — периодические функции.

2. $z^8 = 1 + i \Rightarrow a = 1; b = i \Rightarrow r = \sqrt{2}; \varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow z = 2^{1/16} \exp[i(\pi/4 + 2\pi k)/8]$

Рассмотрим два случая несколько...:

- $k = 0: z = 2^{1/16} \exp[i(\pi/4)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16} \exp[i\pi/32]$

- $k = 1: z = 2^{1/16} \exp[i(\pi/4 + 2\pi)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16} \exp[9i\pi/32]$

- $k = 2: z = 2^{1/16} \exp[i(\pi/4 + 4\pi)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16} \exp[17i\pi/32]$

- $k = 3: z = 2^{1/16} \exp[i(\pi/4 + 6\pi)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16} \exp[25i\pi/32]$

- $k = 4: z = 2^{1/16} \exp[i(\pi/4 + 8\pi)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16} \exp[33i\pi/32]$

- $k = 5: z = 2^{1/16} \exp[i(\pi/4 + 10\pi)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16} \exp[41i\pi/32]$

- $k = 6: z = 2^{1/16} \exp[i(\pi/4 + 12\pi)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16} \exp[49i\pi/32]$

- $k = 7: z = 2^{1/16} \exp[i(\pi/4 + 14\pi)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16} \exp[57i\pi/32]$

3. $z^6 = 64 \Rightarrow a = 64; b = 0 \Rightarrow r = 64 \Rightarrow \cos \varphi = 1; \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow z = 64^{1/6} \exp[i(0 + 2\pi k)/6]$
Рассмотрим несколько случаев:

- $k = 0: z = 64^{1/6} \exp[i(0)/6] \Rightarrow z = 2$

- $k = 1: z = 64^{1/6} \exp[i(2\pi)/6] \Rightarrow z = 2 \exp[i\pi/3]$

- $k = 2: z = 64^{1/6} \exp[i(4\pi)/6] \Rightarrow z = 2 \exp[2i\pi/3]$

- $k = 3: z = 64^{1/6} \exp[i(6\pi)/6] \Rightarrow z = 2 \exp[i\pi]$

- $k = 4: z = 64^{1/6} \exp[i(8\pi)/6] \Rightarrow z = 2 \exp[4i\pi/3]$

- $k = 5: z = 64^{1/6} \exp[i(10\pi)/6] \Rightarrow z = 2 \exp[5i\pi/3]$
4. $z^7 + 1 = 0 \Rightarrow a = -1; b = 0 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow \cos \varphi = -1; \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi \Rightarrow z = \exp[i(\pi + 2\pi k)/7]$
Рассмотрим несколько случаев:

- $k = 0: z = \exp[i(\pi)/7] \Rightarrow z = \exp[i\pi/7]$
- $k = 1: z = \exp[i(\pi + 2\pi)/7] \Rightarrow z = \exp[3i\pi/7]$
- $k = 2: z = \exp[i(\pi + 4\pi)/7] \Rightarrow z = \exp[5i\pi/7]$
- $k = 3: z = \exp[i(\pi + 6\pi)/7] \Rightarrow z = \exp[7i\pi/7]$
- $k = 4: z = \exp[i(\pi + 8\pi)/7] \Rightarrow z = \exp[9i\pi/7]$
- $k = 5: z = \exp[i(\pi + 10\pi)/7] \Rightarrow z = \exp[11i\pi/7]$
- $k = 6: z = \exp[i(\pi + 12\pi)/7] \Rightarrow z = \exp[13i\pi/7]$

Ответ:
см выше

Вопрос 4

Даны три комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, z_3 = x_3 + iy_3$. Необходимо найти вещественную и мнимую часть следующего выражения в терминах $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$:

$$z_1 z_2^* + z_2 z_3^* + z_3 z_1^* + \frac{1}{z_1^* - z_2 + z_3^*}$$

Где z^* обозначает комплексно-сопряженное число.

Найдем вещественную и мнимую часть каждого выражения:

1. $z_1 z_2^* = \underbrace{x_1 x_2 + y_1 y_2}_{\text{Re}} + i \underbrace{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}_{\text{Im}}$
2. $z_2 z_3^* = \underbrace{x_2 x_3 + y_2 y_3}_{\text{Re}} + i \underbrace{(x_3 y_2 - x_2 y_3)}_{\text{Im}}$
3. $z_3 z_1^* = \underbrace{x_3 x_1 + y_3 y_1}_{\text{Re}} + i \underbrace{(x_1 y_3 - x_3 y_1)}_{\text{Im}}$
4. $\frac{1}{z_1^* - z_2 + z_3^*} = \frac{1}{x_1 - x_2 + x_3 + i(-y_1 - y_2 - y_3)} = \underbrace{\frac{x_1 - x_2 + x_3}{(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2}}_{\text{Re}} + i \underbrace{\frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2}}_{\text{Im}}$

Объединяя эти выражения получим:

$$\text{Re} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + x_2 x_3 + y_2 y_3 + x_3 x_1 + y_3 y_1 + \frac{x_1 - x_2 + x_3}{(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2} \quad (1)$$

$$\text{Im} = x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_3 y_2 - x_2 y_3 + x_1 y_3 - x_3 y_1 + \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2} \quad (2)$$

Ответ:

$$\text{Re} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + x_2 x_3 + y_2 y_3 + x_3 x_1 + y_3 y_1 + \frac{x_1 - x_2 + x_3}{(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2}$$

$$Im = x_2y_1 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_3 + x_1y_3 - x_3y_1 + \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2}$$