Матан инд
Вариант №19(22)

Евгений Турчанин

Вопрос 1

Доказать что: $\dfrac{1^4}{1\cdot 3}+\dfrac{2^4}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n^4}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}$

Решение: Докажем через индукцию:

1. Покажем что для $n=1$ верно:

$$\frac{1(1+1)(1^2+1+1)}{6(2+1)}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1^4}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$$

2. Пусть верно для n

3. Тогда докажем, что верно для $n+1$:

$$\underbrace{\frac{1^4}{1\cdot 3}+\frac{2^4}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^4}{(2n-1)\cdot(2n+1)}}_{\dfrac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}}+\frac{(n+1)^4}{(2n+1)\cdot(2n+3)}\Rightarrow$$

Нужно доказать, что:

$$\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}+\frac{(n+1)^4}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)(n^2+3n+3)}{6(2n+3)}$$

~~Трудно не заметить, что так оно и есть~~ Давайте покажем, что это так:
Сократим все на $n+1$ и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{n(2n+3)(n^2+n+1)}{6(2n+1)(2n+3)}+\frac{6(n+1)^3}{6(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{(2n+1)(n+2)(n^2+3n+3)}{6(2n+1)(2n+3)}$$

Сократим на знаменатели и раскроем скобки:

$$2x^4+11x^3+23x^2+21x+6=2x^3+11x^2+23x+21+6\Rightarrow$$

$$0=0$$

Ч.Т.Д.

Вопрос 2

Доказать что:

$$\sum_{k=1}^{k}\frac{1}{k^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$$

Решение: Докажем опять ~~двадцатьпять~~ через индукцию:

1. Покажем что для $n=1$ верно:

$$\frac{1}{1^2}=1$$

$$2-\frac{1}{1}=1$$

1

2. Пусть верно для n

3. Тогда докажем, что верно для $n+1$:
   Те нужно доказать что верно:

$$\underbrace{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}_{\leqslant 2-\frac{1}{n}}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}$$

   Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{(2n-1)(n+1)^2+n}{(n+1)^2 n}\leqslant\frac{(2n+1)(n+1)n}{(n+1)^2 n}$$

   Сократим на знаменатель:

$$(2n-1)(n+1)^2+n\leqslant(2n+1)(n+1)n$$

   Раскроем скобки:

$$2n^3+4n^2+2n-n^2-2n-1+n\leqslant 2n^3+2n^2+n^2+n\Rightarrow$$

$$-1\leqslant 0$$

Ч.Т.Д.

Момент когда меня сместили с 19 на 22 место

Вопрос 3

Доказать: $(2n-1)!<n^{2n-1},\ n\geqslant 2$

Решение: Докажем по мат. индукции:

1. Покажем что для $n=2$ верно:

$$(4-1)!<2^{4-1}\Rightarrow 6<8$$

2. Пусть верно для n

3. Докажем, что верно для $n+1$

$$(2n+1)!<(n+1)^{2n+1}\Rightarrow 2n(2n+1)n^{2n-1}<(n+1)^{2n+1}\Rightarrow$$

$$4n^{2n+1}+2n^{2n}<n^{2n+1}+(n+1)^{2n}\cdot(2n+1)+(n+1)^{2n-1}\cdot n(2n+1)$$

   Преобразуем правую часть:

$$n^{2n+1}+(n+1)^{2n}\cdot(2n+1)+(n+1)^{2n-1}\cdot n(2n+1)>5n^{2n+1}+2n^{2n}$$

   Тк

$$4n^{2n+1}+2n^{2n}<5n^{2n+1}+2n^{2n}$$

Ч.Т.Д.

Вопрос 4

$C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (-1)^n(n+1)C_n^n = ?$

Решение: ~~Легко~~Трудно не заметить что:

$$C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (-1)^n(n+1)C_n^n = (n+1)C_n^0 - nC_n^1 + (n-1)C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n$$

Тогда начальную сумму можно представить ввиде:

$$\frac{n+1}{2}(C_n^0 - C_n^1 + (-1)^n C_n^2 + \ldots + C_n^n)$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n = (a+b)^n$$

Такое равенство будет выполнятся при $a = 1$ и $b = -1$(причем, очевидно что четность/нечетность n не влияет), тогда искомая сумма будет равна:

$$\frac{n+1}{2}0^n = 0$$

~~Ответ~~~~ственность~~: $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (-1)^n(n+1)C_n^n = 0$

Вопрос 5

Доказать:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-3}{6n-4} = \frac{1}{2}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (3 - \ln(n+1)) = -\infty$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} ((-1)^n \cdot n^2 - n) = \infty$

Решение:

1. Определение предела:
$$\forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0 : |A - x_n| < \epsilon$$
Тогда чтобы доказать что $1/2$ является пределом, нужно показать что:
$$\left|\frac{1}{2} - \frac{3n-3}{6n-4}\right| < \epsilon$$
Те что $\left|\frac{1}{2} - \frac{3n-3}{6n-4}\right|$ может быть сколь угодно малым, покажем это:
$$\left|\frac{1}{2} - \frac{3n-3}{6n-4}\right| = \frac{1}{6n-4} \text{ – эта дробь может быть сколь угодно малой из принципа Архимеда}$$
Ч.Т.Д.

2. Если пределом последовательности является $-\infty$, то не существует такого числа, которое *подпирает* последовательность снизу и последовательность монотонно убывает. Запишем это в формальном виде:
$$\forall M \;\; \exists x_{n_0} : \forall n \geqslant n_0 : x_n < M$$

Докажем что для любого M можно найти такой x_{n_0}, начиная с которого, все члены мешьше M:

$$3 - \ln(n+1) < M \Rightarrow n > e^{3-M} - 1 \text{— ну вот он, можно округлить до целых и прибавить 1}$$

Теперь покажем монотонность последовательности:

$$x_{n+1} - x_n = 3 - \ln(n+2) - 3 + \ln(n+1) = \ln\frac{n+1}{n+2} < 0 \Rightarrow \text{последовательность монотонно убывает}$$

Получаем что, последовательность монотонно убывает и не ограничена снизу

Ч.Т.Д.

3. Если предел последовательност это ∞, то множество ее частичных пределов — $\{-\infty, \infty\}$
Тогда докажем, что $\pm\infty$ являются частичными пределами, и что других частичных пределов нету:
   (a) n - четное $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - n) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2(1 - 1/n) \to \infty$
   (b) n - нечетное $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(-n^2 - n) = \lim\limits_{n\to\infty} -n^2(1 + 1/n) \to -\infty$

   Других частичных пределов нету, тк в подпоследовательность входит либо бесконечное число четных и нечетных, тогда предел — ∞, либо конечное число четных/нечетных и бесконечное число нечетных/четных, тогда с какого-то номера в подпоследовательности не будет четных/нечетных чисел, тогда частичне пределы — $\mp\infty$

Ч.Т.Д.

Вопрос 6

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n\sqrt[4]{n^3-2n}+n\sqrt{n^2+2n+8}}{\sqrt[3]{n^6-5n+4}-3n^2-5n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n-1}+2^{n+5}+4n^5}{n\sqrt{3n+5}-9^{n+3}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^4+3n^2+5}-\sqrt{4n^4-6n^2-7}\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\dfrac{4}{2n-7}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+15}{9n+8}\right)^{3n}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-5}{6n+7}\right)^{3n}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(n+1)!}{n!\cdot(n+4)+5^n}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n^2+\dfrac{4}{2n-7}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{8}-1}$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$.

Решение:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n\sqrt[4]{n^3-2n}+n\sqrt{n^2+2n+8}}{\sqrt[3]{n^6-5n+4}-3n^2-5n} =$