Матан
Решение дз №2

Евгений Турчанин

Вопрос 1

Доказать:

- $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = A \cup B$
- $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$
- $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$

Решение:

- $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = A \cup B$ Перепишем эти выражения по определению:

$$(x \in A \vee x \in B) \cap (x \notin A \vee x \notin B) \Leftrightarrow \tag{1}$$

- $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$

$$A\Delta(B\Delta C) \Leftrightarrow A\Delta(x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \notin B \wedge x \in C) \Leftrightarrow \tag{2}$$
$$(x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \in C) \tag{3}$$
$$(A\Delta B)\Delta C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\Delta C \Leftrightarrow \tag{4}$$
$$(x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \in C) \tag{5}$$

Ч.Т.Д.

- $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$

$$A \cap (B\Delta C) \Leftrightarrow A \cap ((x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \notin B \wedge x \in C)) \Leftrightarrow \tag{6}$$
$$(x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \tag{7}$$
$$(A \cap B)\Delta(A \cap C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)\Delta(x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow \tag{8}$$
$$(x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \tag{9}$$

Ч.Т.Д.

Вопрос 2

Найти ОФФ

- $y = \log_{3+x}\left(x^2 - 1\right)$
- $y = \lg(\pi - 2\arctan x)$

Решение:

- $y = \log_{3+x}(x^2 - 1)$

$$\begin{cases} 3 + x > 0 \\ 3 + x \neq 1 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \tag{10}$$

Решая систему, получаем: $x \in (-3, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, \infty)$

- $y = \lg(\pi - 2\arctan x)$

$$\pi - 2\arctan x > 0(\ -\ ) \Rightarrow x \in \mathbb{R} \tag{11}$$

Ответ:
$x \in (-3, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, \infty)$
$x \in \mathbb{R}$

Вопрос 3

Найти область значений

- $y = \sqrt{8 - 2x - x^2}$
- $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

Решение:

- $y = \sqrt{8 - 2x - x^2}$

$$-x^2 - 2x + 8 - \text{парабола ветвями вниз, найдем ее max} : x_{max} = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow y_{max} = 3 \Rightarrow y \in [0, 3] \quad (12)$$

- $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (1 - \cos^2 x)^2 + \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x \quad (13)$$

Пусть $t = \cos^2 x$, тогда

$$y = 2t^2 - 2t + 1 \Rightarrow y_{min} = \frac{1}{2}; \quad y_{max} = 1 \quad (14)$$

Ответ:
$y \in [0, 3]$
$y \in [\frac{1}{2}, 1]$

Вопрос 4

Доказать, что функции f и g взаимно обратные:

$$f = x^2 + 1, x \leqslant 0, g = -\sqrt{x - 1}, x \geqslant 1$$

Решение: Рассмотрим обзасть значений f:

$$f(x) \in [1, \infty) \text{ такая же область значений у х во второй функции} \quad (15)$$

Теперь рассмотрим область значений g:

$$g(x) \in (-\infty, 0] \text{ такая же область значений у х в первой функции} \quad (16)$$

К тому же f и g монотонный $\Rightarrow$ f и g взаимно обратные, тк выполняются инъекция и сюръекция.

Ч.Т.Д.