Матан Лаба

Павел Андреев, Григорий Горбушкин, Евгений Турчанин

Теория

Вопрос 1

Объяснить, почему разность назад $f_{-}(x_0)$ – разумное приближение производной в точке x_0.

$$f_{-}(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}, \tag{1}$$

разложим $f(x_0 - h)$ в ряд Тейлора:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + o(h), \tag{2}$$

подставим (2) в (1)

$$f_{-}(x_0) = \frac{hf'(x_0) - o(h))}{h} = f'(x_0) - o(1) \tag{3}$$

Тк их разница равна $o(1)$, то $f_{-}(x_0)$ – разумное приближение производной в точке x_0.

Вопрос 2

Формально показать, как получаются формулы для оценки погрешности в случае приближения производной первой (односторонней) разностью.

$$f_{-}(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}, \tag{4}$$

разложим $f(x_0 - h)$ в ряд Тейлора:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + f''(\xi_1)\frac{h^2}{2}, \tag{5}$$

где $\xi_1 \in (x_0 - h, x_0)$, подставим (5) в (4)

$$f_{-}(x_0) = \frac{hf'(x_0) - f''(\xi_1))\frac{h^2}{2}}{h} = f'(x_0) - f''(\xi_1)\frac{h}{2} \tag{6}$$

Пусть $M = \sup\{f''(\xi_1)\}$, тогда разность можно оценить как:

$$|f_{-}(x_0) - f'(x_0)| \leqslant M\frac{h}{2}. \tag{7}$$

Тк ошибка линейно зависит от h, следовательно мы можем сделать ее сколь угодно малой, тк M — конечное число

Вопрос 3

Объяснить, почему центральная разность $f_{\circ 1}(x_0)$ – разумное приближение производной в точке x_0.

$$f_{\circ 1}(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \tag{8}$$

Разложим $f(x_0 + h)$ и $f(x_0 - h)$ в ряд Тейлора:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2), \tag{9}$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2), \tag{10}$$

подставим (10) и (9) в (8)

$$f_{\circ 1}(x_0) = \frac{2hf'(x_0) + h^2 f''(x_0) + o(h^2)}{2h} = f'(x_0) + \frac{h}{2} f''(x_0) + o(h), \tag{11}$$

Понятно, что при $h \to 0$, $f_{\circ 1}(x_0)$ - $f'(x_0)$ идет к 0

Вопрос 4

Формально показать, как получаются формулы для оценки погрешности в случае приближения производной центральной разностью.

Опять же разложим в ряд Тейлора:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + f'''(\xi_1)\frac{h^3}{6}, \tag{12}$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + f'''(\xi_2)\frac{h^3}{6}, \tag{13}$$

Пусть $M = \sup\{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\}$, тогда разность можно оценить как:

$$|f_{\circ 1}(x_0) - f'(x_0)| \leqslant M\frac{h^2}{12}. \tag{14}$$

Вопрос 5

Узнать, как хранятся числа, скажем, в python. Узнать, что такое машинная точность. Объяснить, почему в python 0.1+0.2 != 0.3.

Число в python хранится в виде $\pm m \cdot 2^s$, где $m, s \in \mathbb{N}$, а 0.1, 0.2 и 0.3, в этой системе — это бесконечные переодические дроби в этой системе
Машинная точность — это такое минимальное число ε, что $1 + \varepsilon \neq 1$, она примерно равна 2^{-52}
Ошибка округления получается, тк $f(x_0 + h)$ и $f(x_0)$ — округлены до машинной точности, а делятся на h, те р ост ошибки $O(1/h)$

Вопрос 6

1. Выбрать любую дважды дифференцируемую функцию f.
2. Аппроксимировать производную с помощью разностей $f_{\pm}(x_0)$, $f_{\circ 1}(x_0)$.
3. Построить график зависимости $\Delta(x, \varepsilon)$ от h, $h \in (10^{-20}, 1)$,

   $$\Delta(x, h) = \left| f'(x) - f_{\pm, \circ_1} \right|,$$

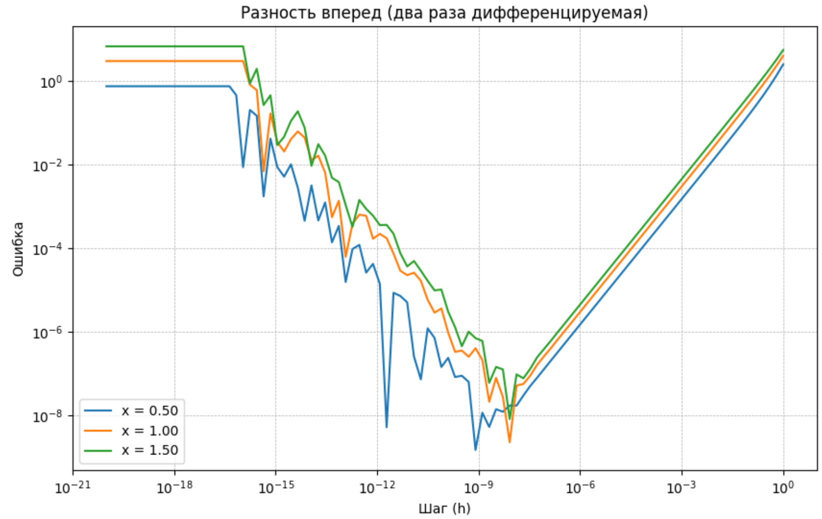
   при разных x (шкала по оси y – логарифмическая!).
4. Проинтерпретировать полученный результат.

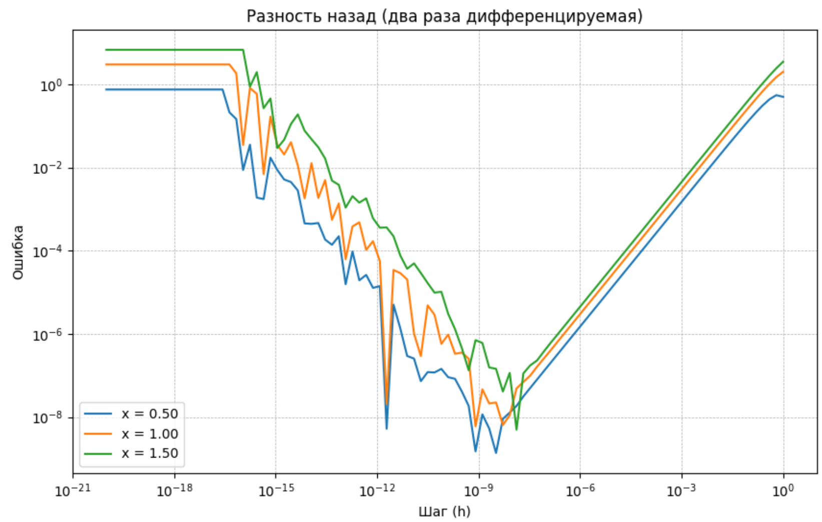
Пусть наша ~~дорогая~~ функция $f(x) = x^3$, тогда аппроксимация производной

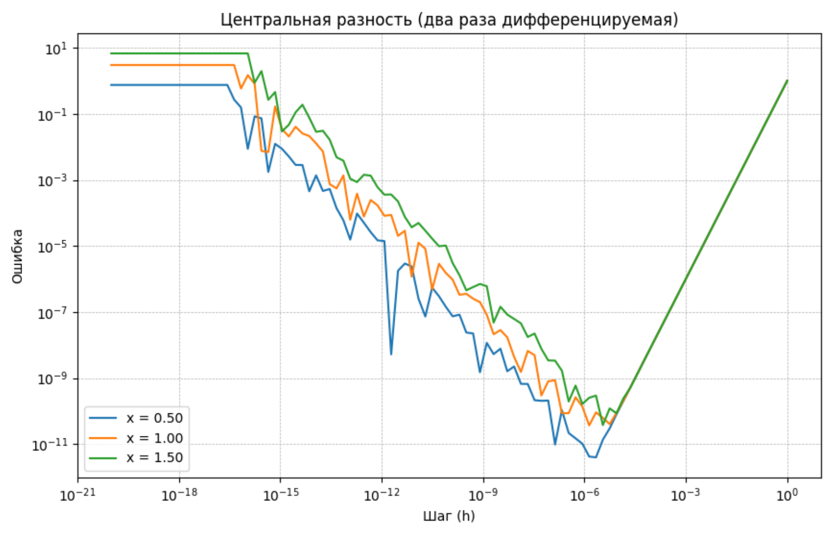
$$f_{+}(x_0) = \frac{(x_0 + h)^3 - (x_0)^3}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2 \tag{15}$$

$$f_{-}(x_0) = \frac{(x_0)^3 - (x_0 - h)^3}{h} = 3x^2 - 3hx + h^2 \tag{16}$$

$$f_{\circ 1}(x_0) = \frac{(x_0 + h)^3 - (x_0 - h)^3}{2h} = 3x^2 + h^2 \tag{17}$$







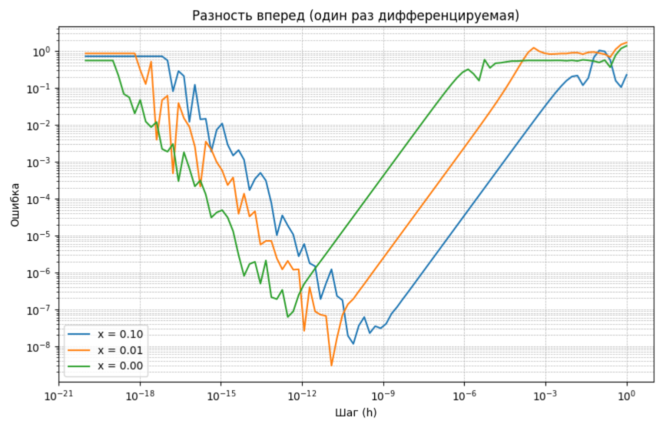
Пусть наша функция $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ если $x \neq 0$ и 0, если $x = 0$. Понятно что в 0 она не дифф-ма 2-й раз

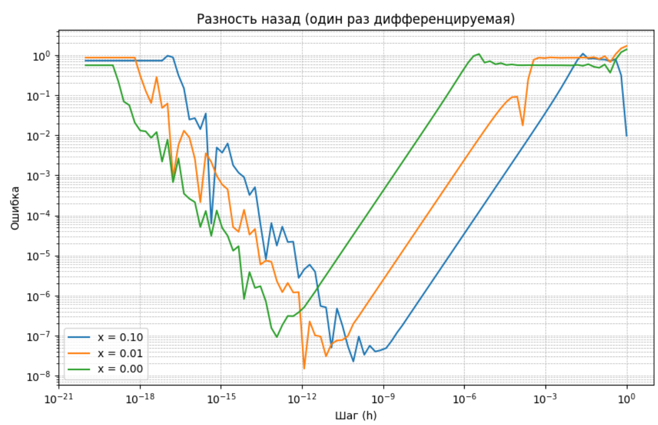
$$f_{+}(0) = \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = h \sin\frac{1}{h} \quad h \to 0 \tag{18}$$

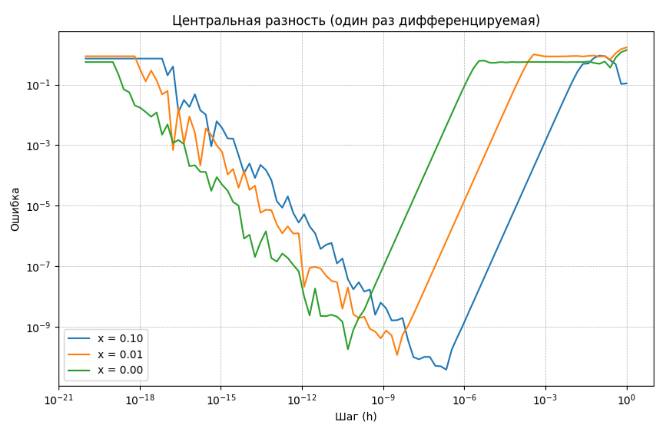
$$f_{-}(0) = \frac{(-h)^2 \sin\frac{1}{-h}}{-h} = -h \sin\frac{1}{-h} \quad h \to 0 \tag{19}$$

$$f_{\circ 1}(x) = \frac{(h+x)^2 \sin\frac{1}{x+h} - (x-h)^2 \sin\frac{1}{x-h}}{2h} =$$

$$-\frac{1}{2} h \sin\left(\frac{1}{x-h}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x-h}\right) - \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x-h}\right)}{2h} + \frac{1}{2} h \sin\left(\frac{1}{h+x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x+h}\right) + \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x+h}\right)}{2h} \quad x \to 0;\ h \to 0$$







~~Экскримент~~ Эксперимент

Используя программу tracker, получаем $\theta_0 = 44.59°$.

1. Разностью вперед:

$$\delta t_{\text{верх}} = (1 - \frac{0.205}{0.211}) \cdot 100\% \approx 2.8\%, \tag{20}$$

$$\delta t_{\text{пад}} = (1 - \frac{0.41}{0.421}) \cdot 100\% \approx 2.6\%, \tag{21}$$

$$\delta x_{\text{верх}} = (1 - \frac{0.623}{0.64}) \cdot 100\% \approx 2.7\%, \tag{22}$$

2. Разностью назад:

$$\delta t_{\text{верх}} = (1 - \frac{0.211}{0.228}) \cdot 100\% \approx 7.5\%, \tag{23}$$

$$\delta t_{\text{пад}} = (1 - \frac{0.4096}{0.4561}) \cdot 100\% \approx 10.2\%, \tag{24}$$

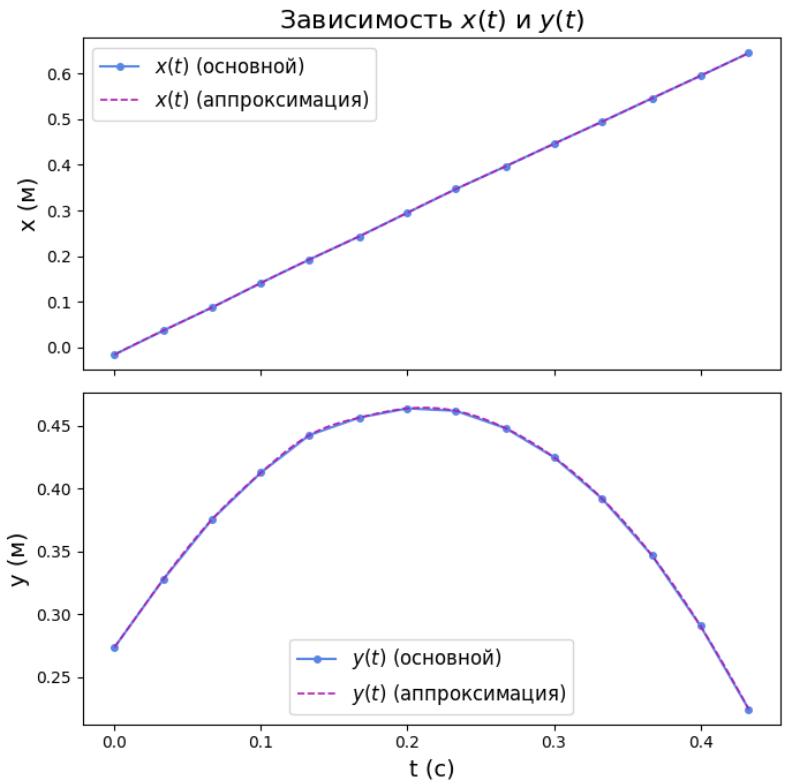
$$\delta x_{\text{верх}} = (1 - \frac{0.6231}{0.7202}) \cdot 100\% \approx 13.5\%, \tag{25}$$

3. Средним значением:

$$\delta t_{\text{верх}} = (1 - \frac{0.2109}{0.2193}) \cdot 100\% \approx 3.9\%, \tag{26}$$

$$\delta t_{\text{пад}} = (1 - \frac{0.4096}{0.4386}) \cdot 100\% \approx 6.6\%, \tag{27}$$

$$\delta x_{\text{верх}} = (1 - \frac{0.6231}{0.6802}) \cdot 100\% \approx 8.4\%, \tag{28}$$



Для $\theta_0 = 9.14°$. Рассчитаем v_0 разными методами:

1. Разностью вперед:

$$v_{0x} = \frac{0.131 - 0.046}{0.033} \approx 2.59, \quad v_{0y} \quad = \frac{0.725 - 0.716}{0.033} \approx 0.27, \tag{29}$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \approx 2.61, \tag{30}$$

$$t_{\text{верх}} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \approx 0.042, \tag{31}$$

$$t_{\text{пад}} = \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0 \sin(\theta)^2 + 2gy_0}}{g} \approx 0.337, \tag{32}$$

$$x_{\text{пад}} = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t_{\text{пад}} \approx 0.868, \tag{33}$$

Погрешности:

$$\delta t_{\text{верх}} = (1 - \frac{0.042}{0.063}) \cdot 100\% \approx 33.23\%, \tag{34}$$

$$\delta t_{\text{пад}} = (1 - \frac{0.337}{0.360}) \cdot 100\% \approx 6.37\%, \tag{35}$$

$$\delta x_{\text{верх}} = (1 - \frac{0.868}{0.963}) \cdot 100\% \approx 9.87\%, \tag{36}$$

2. Разностью назад:

$$v_{0x} = \frac{0.046 - (-0.039)}{0.033} \approx 2.58, \quad v_{0y} \quad = \frac{0.716 - 0.697}{0.033} \approx 0.56, \tag{37}$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \approx 2.64, \tag{38}$$

$$t_{\text{верх}} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \approx 0.043, \tag{39}$$

$$t_{\text{пад}} = \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0 \sin(\theta)^2 + 2gy_0}}{g} \approx 0.337, \tag{40}$$

$$x_{\text{пад}} = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t_{\text{пад}} \approx 0.878, \tag{41}$$

Погрешности:

$$\delta t_{\text{верх}} = (1 - \frac{0.043}{0.063}) \cdot 100\% \approx 33.42\%, \tag{42}$$

$$\delta t_{\text{пад}} = (1 - \frac{0.337}{0.360}) \cdot 100\% \approx 6.50\%, \tag{43}$$

$$\delta x_{\text{верх}} = (1 - \frac{0.878}{0.963}) \cdot 100\% \approx 8.89\%, \tag{44}$$

3. Средним значением:

$$v_{0x} = \frac{0.131 - (-0.039)}{0.066} \approx 2.59, \quad v_{0y} \quad = \frac{0.725 - 0.697}{0.066} \approx 0.42, \tag{45}$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \approx 2.62, \tag{46}$$

$$t_{\text{верх}} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \approx 0.042, \tag{47}$$

$$t_{\text{пад}} = \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0 \sin(\theta)^2 + 2gy_0}}{g} \approx 0.337, \tag{48}$$

$$x_{\text{пад}} = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t_{\text{пад}} \approx 0.872, \tag{49}$$

Погрешности:

$$\delta t_{\text{верх}} = (1 - \frac{0.042}{0.063}) \cdot 100\% \approx 32.92\%, \tag{50}$$

$$\delta t_{\text{пад}} = (1 - \frac{0.337}{0.360}) \cdot 100\% \approx 6.42\%, \tag{51}$$

$$\delta x_{\text{верх}} = (1 - \frac{0.872}{0.963}) \cdot 100\% \approx 9.50\%, \tag{52}$$

Для $\theta_0 = 41.288°$. Рассчитаем v_0 разными методами:

1. Разностью вперед:

$$v_{0x} \approx 2.394, \quad v_{0y} \approx 1.912, \tag{53}$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \approx 3.064, \tag{54}$$

$$t_{\text{верх}} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \approx 0.206, \tag{55}$$

$$t_{\text{пад}} = \frac{-v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0 \sin(\theta)^2 + 2gy_0}}{g} \approx 0.452, \tag{56}$$

$$x_{\text{пад}} = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t_{\text{пад}} \approx 1.041, \tag{57}$$

Погрешности:

$$\delta t_{\text{верх}} \approx 17.81\%, \tag{58}$$

$$\delta t_{\text{пад}} \approx 9.58\%, \tag{59}$$

$$\delta x_{\text{верх}} \approx 11.52\%, \tag{60}$$

2. Разностью назад:

$$v_{0x} \approx 2.342, \quad v_{0y} \approx 2.247, \tag{61}$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \approx 3.246, \tag{62}$$

$$t_{\text{верх}} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \approx 0.218, \tag{63}$$

$$t_{\text{пад}} = \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0 \sin(\theta)^2 + 2gy_0}}{g} \approx 0.475, \tag{64}$$

$$x_{\text{пад}} = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t_{\text{пад}} \approx 1.157, \tag{65}$$

Погрешности:

$$\delta t_{\text{верх}} \approx 12.94\%, \tag{66}$$

$$\delta t_{\text{пад}} \approx 5.08\%, \tag{67}$$

$$\delta x_{\text{верх}} \approx 1.61\%, \tag{68}$$

3. Средним значением:

$$v_{0x} \approx 2.37, \quad v_{0y} \approx 2.08, \tag{69}$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \approx 3.15, \tag{70}$$

$$t_{\text{верх}} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \approx 0.218, \tag{71}$$

$$t_{\text{пад}} = \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0 \sin(\theta)^2 + 2gy_0}}{g} \approx 0.463, \tag{72}$$

$$x_{\text{пад}} = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t_{\text{пад}} \approx 1.096, \tag{73}$$

Погрешности:

$$\delta t_{\text{верх}} \approx 15.46\%, \tag{74}$$

$$\delta t_{\text{пад}} \approx 7.41\%, \tag{75}$$

$$\delta x_{\text{верх}} \approx 6.81\%, \tag{76}$$