Матан инд
Вариант №19(22)

Евгений Турчанин

Вопрос 1

Доказать что: $\frac{1^4}{1\cdot 3} + \frac{2^4}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{n^4}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}$

Решение: Доказем через индукцию:

1. Покажем что для $n = 1$ верно:

$$\frac{1(1+1)(1^2+1+1)}{6(2+1)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1^4}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$$

2. Пусть верно для n

3. Тогда докажем, что верно для $n+1$:

$$\underbrace{\frac{1^4}{1\cdot 3} + \frac{2^4}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{n^4}{(2n-1)\cdot(2n+1)}}_{\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}} + \frac{(n+1)^4}{(2n+1)\cdot(2n+3)} \Rightarrow$$

Нужно доказать, что:

$$\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)} + \frac{(n+1)^4}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)(n^2+3n+3)}{6(2n+3)}$$

~~Трудно не заметить, что так оно и есть~~ Давайте покажем, что это так:
Сократим все на $n+1$ и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{n(2n+3)(n^2+n+1)}{6(2n+1)(2n+3)} + \frac{6(n+1)^3}{6(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+2)(n^2+3n+3)}{6(2n+1)(2n+3)}$$

Сократим на знаменатели и раскроем скобки:

$$2x^4 + 11x^3 + 23x^2 + 21x + 6 = 2x^3 + 11x^2 + 23x + 21 + 6 \Rightarrow$$

$$0 = 0$$

Ч.Т.Д.

Вопрос 2

Доказать что:

$$\sum_{k=1}^{k} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

Решение: Докажем опять ~~двадцатьпять~~ через индукцию:

1. Покажем что для $n = 1$ верно:

$$\frac{1}{1^2} = 1$$

$$2 - \frac{1}{1} = 1$$

1

2. Пусть верно для n

3. Тогда докажем, что верно для $n+1$:
   Те нужно доказать что верно:

$$\underbrace{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}_{\leqslant 2-\frac{1}{n}}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}$$

   Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{(2n-1)(n+1)^2+n}{(n+1)^2n}\leqslant\frac{(2n+1)(n+1)n}{(n+1)^2n}$$

   Сократим на знаменатель:

$$(2n-1)(n+1)^2+n\leqslant(2n+1)(n+1)n$$

   Раскроем скобки:

$$2n^3+4n^2+2n-n^2-2n-1+n\leqslant 2n^3+2n^2+n^2+n\Rightarrow$$

$$-1\leqslant 0$$

Ч.Т.Д.

Момент когда меня сместили с 19 на 22 место

Вопрос 3

Доказать: $(2n-1)! < n^{2n-1},\ n\geqslant 2$

Решение: Докажем по мат. индукции:

1. Покажем что для $n=2$ верно:

$$(4-1)! < 2^{4-1}\Rightarrow 6<8$$

2. Пусть верно для n

3. Докажем, что верно для $n+1$

$$(2n+1)! < (n+1)^{2n+1}\Rightarrow 2n(2n+1)n^{2n-1} < (n+1)^{2n+1}\Rightarrow$$
$$4n^{2n+1}+2n^{2n} < n^{2n+1}+(n+1)^{2n}\cdot(2n+1)+(n+1)^{2n-1}\cdot n(2n+1)$$

   Преобразуем правую часть:

$$n^{2n+1}+(n+1)^{2n}\cdot(2n+1)+(n+1)^{2n-1}\cdot n(2n+1) > 5n^{2n+1}+2n^{2n}$$

   Тк

$$4n^{2n+1}+2n^{2n} < 5n^{2n+1}+2n^{2n}$$

Ч.Т.Д.

Вопрос 4

$C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (-1)^n(n+1)C_n^n = ?$

Решение: ~~Легко~~Трудно не заметить что:

$$C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (-1)^n(n+1)C_n^n = (n+1)C_n^0 - nC_n^1 + (n-1)C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n$$

Тогда начальную сумму можно представить ввиде:

$$\frac{n+1}{2}(C_n^0 - C_n^1 + (-1)^n C_n^2 + \ldots + C_n^n)$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n = (a+b)^n$$

Такое равенство будет выполнятся при $a = 1$ и $b = -1$(причем, очевидно что четность/нечетность n не влияет), тогда искомая сумма будет равна:

$$\frac{n+1}{2}0^n = 0$$

Ответ~~ственность~~: $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (-1)^n(n+1)C_n^n = 0$

Вопрос 5

Доказать:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-3}{6n-4} = \frac{1}{2}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (3 - \ln(n+1)) = -\infty$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} ((-1)^n \cdot n^2 - n) = \infty$

Решение:

1. Определение предела:
$$\forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0 : |A - x_n| < \epsilon$$
Тогда чтобы доказать что 1/2 является пределом, нужно показать что:
$$\left|\frac{1}{2} - \frac{3n-3}{6n-4}\right| < \epsilon$$
Те что $\left|\frac{1}{2} - \frac{3n-3}{6n-4}\right|$ может быть сколь угодно малым, покажем это:
$$\left|\frac{1}{2} - \frac{3n-3}{6n-4}\right| = \frac{1}{6n-4} - \text{эта дробь может быть сколь угодно малой из принципа Архимеда}$$
Ч.Т.Д.

2. Если пределом последовательности является $-\infty$, то не существует такого числа, которое *подпирает* последовательность снизу и последовательность монотонно убывает. Запишем это в формальном виде:
$$\forall M \;\; \exists x_{n_0} : \forall n \geqslant n_0 : x_n < M$$

Докажем что для любого M можно найти такой x_{n_0}, начиная с которого, все члены мешьше M:

$$3 - \ln(n+1) < M \Rightarrow n > e^{3-M} - 1\text{— ну вот он, можно округлить до целых и прибавить 1}$$

Теперь покажем монотонность последовательности:

$$x_{n+1} - x_n = 3 - \ln(n+2) - 3 + \ln(n+1) = \ln\frac{n+1}{n+2} < 0 \Rightarrow \text{последовательность монотонно убывает}$$

Получаем что, последовательность монотонно убывает и не ограничена снизу

Ч.Т.Д.

3. Если предел последовательност это ∞, то множество ее частичных пределов — $\{-\infty, \infty\}$
Тогда докажем, что $\pm\infty$ являются частичными пределами, и что других частичных пределов нету:
   (a) n - четное $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - n) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2(1 - 1/n) \to \infty$
   (b) n - нечетное $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(-n^2 - n) = \lim\limits_{n\to\infty} -n^2(1 + 1/n) \to -\infty$

   Других частичных пределов нету, тк в подпоследовательность входит либо бесконечное число четных и нечетных, тогда предел — ∞, либо конечное число четных/нечетных и бесконечное число нечетных/четных, тогда с какого-то номера в подпоследовательности не будет четных/нечетных чисел, тогда частичне пределы — $\mp\infty$

Ч.Т.Д.

Вопрос 6

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n\sqrt[4]{n^3-2n}+n\sqrt{n^2+2n+8}}{\sqrt[3]{n^6-5n+4}-3n^2-5n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n-1}+2^{n+5}+4n^5}{n\sqrt{3n+5}-9^{n+3}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^4+3n^2+5}-\sqrt{4n^4-6n^2-7}\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\dfrac{4}{2n-7}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+15}{9n+8}\right)^{3n}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-5}{6n+7}\right)^{3n}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(n+1)!}{n!\cdot(n+4)+5^n}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n^2+\dfrac{4}{2n-7}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{8}-1}$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$.

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n\sqrt[4]{n^3-2n}+n\sqrt{n^2+2n+8}}{\sqrt[3]{n^6-5n+4}-3n^2-5n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5\sqrt[4]{n^3-2n}+n\sqrt{1+2/n+8/n^2}}{n\sqrt[3]{1-5/n^5+4/n^6}-n(3+5/n)} =$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+2/n+8/n^2}\left(\dfrac{5\sqrt[4]{n^3-2n}}{n\sqrt{1+2/n+8/n^2}}+1\right)}{n\sqrt[3]{1-5/n^5+4/n^6}-n(3+5/n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+2/n+8/n^2}\left(\dfrac{5\sqrt[4]{n^3-2n}}{n\sqrt{1+2/n+8/n^2}}+1\right)}{\sqrt[3]{1-5/n^5+4/n^6}-(3+5/n)} =$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+2/n+8/n^2}\left(\dfrac{5\sqrt[4]{n^3-2n}}{n\sqrt{1+2/n+8/n^2}}+1\right)}{(3+5/n)\left(\dfrac{\sqrt[3]{1-5/n^5+4/n^6}}{3+5/n}-1\right)} = \frac{1\cdot 1}{3\cdot\left(\dfrac{1}{3}-1\right)} = -\frac{1}{2}$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n-1}+2^{n+5}+4n^5}{n\sqrt{3n+5}-9^{n+3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{9^n/3+2^n\cdot 32+4n^5}{n\sqrt{3n+5}-9^n\cdot 729} = \lim_{n\to\infty}\frac{9^n/3\left(1+\dfrac{2^n\cdot 32}{9^n/3}+\dfrac{4n^5}{9^n/3}\right)}{9^n\cdot 729\left(\dfrac{n\sqrt{3n+5}}{9^n\cdot 729}-1\right)} = \frac{1/3\cdot 1}{729\cdot -1} = -\frac{1}{2187}$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{4n^4+3n^2+5} - \sqrt{4n^4-6n^2-7} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9n^2+12}{\sqrt{4n^4+3n^2+5}+\sqrt{4n^4-6n^2-7}} =$
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9n^2+12}{2n^2\sqrt{1+3/4n^2+5/4n^4}\left(1+\dfrac{\sqrt{4n^4-6n^2-7}}{\sqrt{4n^4+3n^2+5}}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9n^2+12}{2n^2\sqrt{1+3/4n^2+5/4n^4}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{-9n^2-9}{4n^4+3n^2+5}}\right)} =$
$\dfrac{9}{2\cdot(1+1)} = \dfrac{9}{4}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3+\dfrac{4}{2n-7}} = 1$ тк корень из чего-то положительного(что растет медленее корня) $\to 1$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7n+15}{9n+8}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7(1+15/n)}{9(1+8/n)}\right)^{3n} = 0$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6n-5}{6n+7}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{-12}{6n+7}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{-12}{6n+7}\cdot 3n} = e^{-6}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-(n+1)!}{n!\cdot(n+4)+5^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!\left(\dfrac{n^2}{(n+1)!}-1\right)}{n!(n+4)\left(1+\dfrac{5^n}{n!(n+4)}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-(n+1)}{n+4} = -1$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2+\dfrac{4}{2n-7}} = 1$ по аналогии с 4

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{8}-1}$ используя $\sqrt[n]{a} \approx 1+\dfrac{\ln a}{n}$ при $n\to\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{8}-1} = \dfrac{\ln 2}{\ln 8}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n(n+1)}{n^2+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2(1+3/n)}{n^2(1+4/n^2)} = 3$

Ответ:

1. $-\dfrac{1}{2}$
2. $-\dfrac{1}{2187}$
3. $\dfrac{9}{4}$
4. 1
5. 0
6. e^{-6}
7. -1
8. 1
9. $\dfrac{\ln 2}{\ln 8}$
10. 3

Вопрос 7

Найти $\sup x_n$, $\inf x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$

$x_n = \dfrac{2n+1}{n} \arccos{(-1)^n}$

Решение: Для начала рассмотрим последовательность при четных n:

$$x_n = \frac{2n+1}{n} \arccos 1 = 0 \qquad - \text{~~офигенная~~хорошая подпоследовательность}$$

Теперь рассмотрим при нечетных n:

$$x_n = \frac{2n+1}{n}\pi = 2 + \frac{1}{n}\pi \qquad - \text{понятно, что это убыв. подпоследовательность}$$

Понятно, что других подпоследовательностей нету, тк в последовательности может быть 3 случая:

1. Бесконечное количество четных и нечетных номеров, тогда такая подпоследовательность не сход, тк нельзя найти номер после которого ε можно взять любым, тк при четных можно найти 0, а при нечетных найти >2
2. При конечном количестве четных и бесконечном количестве нечетных, можно найти номер с которого будут только нечетные, те подпоследовательность сход к 2
3. По аналогии с 2, но подпоследовательность сход к 0

Теперь мы готовы сказать, что $\sup x_n = 3\pi$, $\inf x_n = 0$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ — из определения $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\sup_{m\geqslant n} x_m)$

Ответ:

1. $\sup x_n = 3\pi$
2. $\inf x_n = 0$
3. $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
4. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$

Вопрос 8

Определить сходится ли последовательность:

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2^n}$$

Решение: По критерию Коши: Если последовательность фундаментальна т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 : \ \forall n \geqslant n_0\, \exists p \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \tag{1}$$

То последовательность сходится, для нашей последовательности возьмем p=1:

$$x_n + \frac{1}{2^{n+1}} - x_n = \frac{1}{2^{n+1}} \tag{2}$$

Понятно, что $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ может быть сколь угодно малым $\Rightarrow$ последовательность сходится

Вопрос 9

Используя признак Вейерштрасса, доказать, что данная последовательность сходится, и найти ее предел

$$x_n = \frac{5}{2}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{13}{12}...\frac{4n+1}{5n-3}$$

Решение: Нашу последовательность можно переписать ввиде:

$$x_n = x_{n-1}\frac{4n+1}{5n-3},\ n_1 = \frac{5}{2}$$

Тогда покажем, что она огр. снизу и монотонно убывает:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{4n+1}{5n-3}$$

Очевидно, что при $n > 3$:

$$\frac{4n+1}{5n-3} < 1$$

Наша последовательность убывает, и очевидно она огр. снизу 0, тк каждый член получается путем, умножения положительных чисел Тогда найдем предел:

$$A = A\cdot\frac{4n+1}{5n-3} \Rightarrow A = 0$$

Те наша последовательность имеет предел 0

Ответ:

$$x_n = \frac{5}{2}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{13}{12}...\frac{4n+1}{5n-3} \longrightarrow 0$$

Вопрос 10

Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{4n^2-8n-5}$$

Решение: Через метод неопределенных коэффициентов найдем разложение на две дроби:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{(2n+1)(2n-5)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-5} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}$$

Трудно не заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-5} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1} - \frac{2}{3}$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{4n^2-8n-5} = -\frac{2}{3}$$

Ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{4n^2-8n-5} = -\frac{2}{3}$$

Вопрос 11

Доказать по определению предела функции в точке (по Коши):

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-4x-1}{x-1}=6$$

Решение: Из определения предела по Коши:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\forall x\in\mathbb{R}:|x-1|<\delta\Rightarrow\left|\frac{5x^2-4x-1}{x-1}-6\right|<\varepsilon$$

Раскроем модуль, тогда:

$$\left|\frac{5x^2-4x-1}{x-1}-6\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{5x^2-10x+5}{x-1}\right|\Rightarrow|x-1|<\frac{\varepsilon}{5}$$

Понятно, что если мы возьмем $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$, то все ок

Вопрос 12

Доказать, что данный предел не существует:

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{tg}x$$

Решение: Чтобы показать, что предела не существует, нужно найти две последовательности, которые сходятся в разные точки:

$$x_{n_1}=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}\qquad x_{n_2}=\pi q,\ \ q\in\mathbb{Z}$$

Понятно, что x_{n_1} идет к 1, а x_{n_2} идет к 0, те ~~беспредел~~ предела не существует

Вопрос 13

Вычислить пределы:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to -8}\frac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(x-\sqrt[3]{2x-3}\right)}{\sin\left(\pi x/2\right)-\sin\left[\left(x-1\right)\pi\right]}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)^{1/\ln(1+\operatorname{tg}^2 3x)}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1\pm 0}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^{1/\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}+\left(4x-\pi\right)\cos\dfrac{x}{4x-\pi}}{\lg\left(2+\operatorname{tg}x\right)}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\ln\left(1-\ln x\right)}{\ln\left(1-\lg x\right)}$

Решение:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2x+1)^2(x-1)}{(x+2)(x+1)} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{10-x-18\sqrt{1-\frac{x}{3}}}{2+2\sqrt[3]{\frac{t}{8}-1}} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{18-t-18(1-\frac{x}{18})}{2-2(1-\frac{t}{24})} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x} = \lim\limits_{t\to \pi/0} \dfrac{\ln\left(\operatorname{tg}\left(t+\pi/4\right)\right)}{\cos(2t+\pi/2)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln\left(\dfrac{t+1}{1-t}+1-1\right)}{-\sin 2t} = -1$

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln\left(x-\sqrt[3]{2x-3}\right)}{\sin\left(\pi x/2\right)-\sin\left[(x-1)\pi\right]} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln\left(t+2-\sqrt[3]{2t-3}\right)}{\sin\left(\pi t/2\right)-\sin\left[(t-1)\pi\right]} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln\left(t+2-(1+\frac{1}{3}\cdot 2t)\right)}{2\sin\left(\frac{-\pi}{4}t\right)\cos\left(\frac{3\pi t+4\pi}{4}\right)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t/3}{\pi t/2} = \dfrac{2}{3\pi}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^{1/\ln(1+\operatorname{tg}^2 3x)} = \lim\limits_{x\to 0} \exp\left[\dfrac{-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 3x\right)}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \exp\left[\dfrac{-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 3x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \exp\left[\dfrac{-\dfrac{x^2}{4}}{9x^2}\right] = e^{-\frac{1}{36}}$

6. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)} = \lim\limits_{x\to 1\pm 0} e^{\dfrac{\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)}{\sqrt[3]{x}-1}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1+0} \left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)} = 0,\ \lim\limits_{x\to 1-0} \left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)} = +\infty$

7. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}+(4x-\pi)\cos\dfrac{x}{4x-\pi}}{\lg\left(2+\operatorname{tg} x\right)}$,

   тк cos огр. можно на него ~~положить~~ забить $\Rightarrow \lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}+(4x-\pi)\cos\dfrac{x}{4x-\pi}}{\lg\left(2+\operatorname{tg} x\right)} = \lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\lg(2+\operatorname{tg} x)} + \lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{0}{\lg(2+\operatorname{tg} x)} = \dfrac{1}{\lg 3}$

8. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln\left(1-\ln x\right)}{\ln\left(1-\lg x\right)} = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln(-\ln x)}{\ln(-\lg x)} = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln(-\ln x)}{\ln\left(\dfrac{-\ln x}{\ln 10}\right)} = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln(-\ln x)}{\ln(-\ln x)-\ln(\ln 10)} = 1$

Вопрос 14

В куб с ребром a вписан прямой круговой цилиндр так, что его ось совпадает с диагональю куба, а окружности оснований касаются граней куба. При каких размерах цилиндра его объем будет наибольшим?

Вопрос 15

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left((1+3x)^{1/3}-1\right)/\operatorname{tg} x - \exp[-\operatorname{sh} x] - x^2(x+5)/(x+6)}{\ln\left(2\exp[x^2]-1\right)/\sin x - \operatorname{arctg} 2x}$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{2}{x^2-1}\right)^{\dfrac{1}{\sin(x-1)}}$

1. Разложим слагаемые в ряд тейлора:

$$\frac{(1+3x)^{1/3}-1}{\operatorname{tg} x} = \frac{x - x^2 + \dfrac{5x^3}{3} - \dfrac{10x^4}{3} + o(x^4)}{x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)} = \frac{3 - 3x + 5x^2 - 10x^3}{3 + x^2} + o(x^3)$$

$$\exp[-\operatorname{sh} x] = 1 - x - \frac{x^3}{6} + \frac{(-x - x^3/6)^2}{2} + \frac{(-x - x^3/6)^3}{6} + o(x^3) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\frac{\ln\left(2\exp[x^2] - 1\right)}{\sin x} = \frac{\ln(1 + 2x^2 + x^4 + o(x^4))}{x - x^3/6 + o(x^4)} = \frac{2x^2 - x^4 + o(x^4)}{x - x^3/6 + o(x^4)} = \frac{12x - 6x^3}{6 - x^2} + o(x^3)$$

$$\operatorname{arctg} 2x = 2x - \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$$

Подставляем всю эту гадостоть в уравнение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{3 - 3x + 5x^2 - 10x^3}{3 + x^2} - 1 + x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2(x+5)}{x+6} + o(x^3)}{\dfrac{12x - 6x^3}{6 - x^2} - 2x + \dfrac{8x^3}{3} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-3x + 4x^2 - 10x^3}{3 + x^2} + \dfrac{-12x^2 + 9x^3 + 2x^4}{6(6+x)} + o(x^3)}{\dfrac{-36x^3 + 8x^5}{-18 + 3x^2} + o(x^3)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-291x^3 - 96x^4 + 3x^5}{6(6+x)(3+x^2)} + o(x^3)}{\dfrac{-36x^3 + 8x^5}{-18 + 3x^2} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{(-291x^3 - 96x^4 + 3x^5)(-18 + 3x^2)}{6(6+x)(3+x^2)(-36x^3 + 8x^5)} + o(x^3) = \frac{-18 \cdot -291}{6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot -36} = -\frac{97}{72}$$

2. Ну по аналогии ~~упр~~, заменим $t = x - 1$

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{\ln(t+1)} - \frac{2}{t^2 + 2t}\right)^{\dfrac{1}{\sin t}} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{t^2 + 2t - 2(t - t^2/2 + t^3/3)}{(t^2 + 2t)(t - t^2)}\right)^{\dfrac{1}{\sin t}} \lim_{t\to 0} \left(\frac{2t^2 - 2/3t^3}{2t^2}\right)^{\dfrac{1}{\sin t}} =$$

$$\lim_{t\to 0} (1 - 1/3t)^{\dfrac{1}{\sin t}} = e^{\dfrac{1}{\sin t} \cdot - \dfrac{t}{3}} = e^{-1/3}$$