Вдв
Решение дз №2

Евгений Турчанин

Вопрос 1

Найдите вещественные и мнимые части следующих комплексных чисел, а также их комплексно сопряженные

$$1)\ \frac{1}{1+i};\ 2)\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3;\ 3)\ \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3;\ 4)\ \left(\frac{i^9+2}{i^{23}+1}\right)^2\ \ 5)\ 10\exp\left\{\frac{3\pi}{4}i\right\}$$

Решение:

1. $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2} \Rightarrow Re = \dfrac{1}{2},\ Im = -\dfrac{1}{2}, z^* = \dfrac{1}{2} + i/2$
2. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3 = \dfrac{(1+i)^2(1+i)^2(1+i)^2}{(1-i)^3(1+i)^3} = \dfrac{-8i}{8} = -i \Rightarrow Re = 0,\ Im = -1,\ z^* = i$
3. $\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{2}^3 + 3\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}i - 3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 i \Rightarrow Re = -1,\ Im = 0,\ z^* = -1$
4. $\left(\dfrac{i^9+2}{i^{23}+1}\right)^2 = \left(\dfrac{2+i}{1-i}\right)^2 = \dfrac{4i+3}{-2i} = -2 + \dfrac{3}{2}i \Rightarrow Re = -2,\ Im = \dfrac{3}{2},\ z^* = -2 - \dfrac{3}{2}i$
5. $10\exp\left\{\dfrac{3\pi}{4}i\right\} \Rightarrow r = 10\varphi = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow 10\exp\left\{\dfrac{3\pi}{4}i\right\} = 10(\cos 3\pi/4 + i\sin 3\pi/4) \Rightarrow Re = -5\sqrt{2},\ Im = 5\sqrt{2},\ z^* = -5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}i$

Ответ:

1. $Re = \dfrac{1}{2}, Im = -\dfrac{1}{2}, z^* = \dfrac{1}{2} - i/2$
2. $Re = 0, Im = -1, z^* = i$
3. $Re = -1, Im = 0, z^* = -1$
4. $Re = -2, Im = \dfrac{3}{2}, z^* = -2 - \dfrac{3}{2}i$
5. $Re = -5\sqrt{2}, Im = 5\sqrt{2}, z^* = -5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}i$

Вопрос 2

Перепишите следующее комплексные числа через их модуль и фазу (аргумент)

$$1)\ 1+i^{321};\ 2)\ \frac{1-i}{1+i};\ 3)\ (1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6};\ 4)\ 1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$$

Решение:

1. $1 + i^{321} = 1 + i \Rightarrow r = \sqrt{2};\ \varphi = \dfrac{\pi}{4}$
2. $\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)^2}{2} = \dfrac{-2i}{2} = -i \Rightarrow r = 1;\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$
3. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6} = \left(\dfrac{(1+i)^4}{(1-i\sqrt{3})^{-3}}\right)^2 = \left(\dfrac{-4}{1-3\sqrt{3}i-9+3^{3/2}i}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow r = \dfrac{1}{4};\ \varphi = 0$
4. $1+\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7} \Rightarrow a = 1+\cos\dfrac{\pi}{7};\ b = \sin\dfrac{\pi}{7} \Rightarrow r = \sqrt{1+2\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos^2\dfrac{\pi}{7}+\sin^2\dfrac{\pi}{7}} = \sqrt{2+2\cos\dfrac{\pi}{7}} \Rightarrow \varphi = \arctan\dfrac{\sin\pi/7}{1+\cos\pi/7}$

Ответ:

1. $r = \sqrt{2}$; $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$
2. $r = 1$; $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$
3. $r = \dfrac{1}{4}$; $\varphi = 0$
4. $r = \sqrt{2 + 2\cos\dfrac{\pi}{7}}$; $\varphi = \arctan\dfrac{\sin\pi/7}{1 + \cos\pi/7}$

Вопрос 3

Найти все решения следующих уравнений:

$$\begin{aligned} &1)\ z^2 = 3 - 4i \\ &2)\ z^8 = 1 + i \\ &3)\ z^6 = 64 \\ &4)\ z^7 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Решение:

1. $z^2 = 3 - 4i \Rightarrow a = 3;\ b = -4 \Rightarrow r = 5 \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{3}{5};\ \sin\varphi = -\dfrac{4}{5} \Rightarrow z = \sqrt{5}(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{2} + i\sin\dfrac{2\varphi + 2\pi k}{2})$,
   Рассмотрим два случая:

   - $k = 0$: $z = \sqrt{5}(\cos\varphi/2 + i\sin\varphi/2) = \sqrt{5}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}} + i\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow z = 2 + i$
   - $k = 1$: $z = \sqrt{5}(\cos(\varphi/2 + \pi) + i\sin(\varphi/2 + \pi)) \Rightarrow z = -2 + i$

   Очевидно что, других корней нету, тк cos и sin — переодические фунции.

2. $z^8 = 1 + i \Rightarrow a = 1;\ b = i \Rightarrow r = \sqrt{2};\ \varphi = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow z = 2^{1/16}\exp[i(\pi/4 + 2\pi k)/8]$
   Рассмотрим ~~два случая~~ несколько...:

   - $k = 0$: $z = 2^{1/16}\exp[i(\pi/4)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16}\exp[i\pi/32]$
   - $k = 1$: $z = 2^{1/16}\exp[i(\pi/4 + 2\pi)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16}\exp[9i\pi/32]$
   - $k = 2$: $z = 2^{1/16}\exp[i(\pi/4 + 4\pi)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16}\exp[17i\pi/32]$
   - $k = 3$: $z = 2^{1/16}\exp[i(\pi/4 + 6\pi)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16}\exp[25i\pi/32]$
   - $k = 4$: $z = 2^{1/16}\exp[i(\pi/4 + 8\pi)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16}\exp[33i\pi/32]$
   - $k = 5$: $z = 2^{1/16}\exp[i(\pi/4 + 10\pi)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16}\exp[41i\pi/32]$
   - $k = 6$: $z = 2^{1/16}\exp[i(\pi/4 + 12\pi)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16}\exp[49i\pi/32]$
   - $k = 7$: $z = 2^{1/16}\exp[i(\pi/4 + 14\pi)/8] \Rightarrow z = 2^{1/16}\exp[57i\pi/32]$

3. $z^6 = 64 \Rightarrow a = 64;\ b = 0 \Rightarrow r = 64 \Rightarrow \cos\varphi = 1;\ \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow z = 64^{1/6}\exp[i(0 + 2\pi k)/6]$
   Рассмотрим несколько случаев:

   - $k = 0$: $z = 64^{1/6}\exp[i(0)/6] \Rightarrow z = 2$
   - $k = 1$: $z = 64^{1/6}\exp[i(2\pi)/6] \Rightarrow z = 2\exp[i\pi/3]$
   - $k = 2$: $z = 64^{1/6}\exp[i(4\pi)/6] \Rightarrow z = 2\exp[2i\pi/3]$
   - $k = 3$: $z = 64^{1/6}\exp[i(6\pi)/6] \Rightarrow z = 2\exp[i\pi]$
   - $k = 4$: $z = 64^{1/6}\exp[i(8\pi)/6] \Rightarrow z = 2\exp[4i\pi/3]$

- $k = 5$: $z = 64^{1/6}\exp\left[i(10\pi)/6\right] \Rightarrow z = 2\exp\left[5i\pi/3\right]$

4. $z^7 + 1 = 0 \Rightarrow a = -1;\ b = 0 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow \cos\varphi = -1;\ \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi \Rightarrow z = \exp\left[i(\pi + 2\pi k)/7\right]$
   Рассмотрим несколько случаев:
   - $k = 0$: $z = \exp\left[i(\pi)/7\right] \Rightarrow z = \exp\left[i\pi/7\right]$
   - $k = 1$: $z = \exp\left[i(\pi + 2\pi)/7\right] \Rightarrow z = \exp\left[3i\pi/7\right]$
   - $k = 2$: $z = \exp\left[i(\pi + 4\pi)/7\right] \Rightarrow z = \exp\left[5i\pi/7\right]$
   - $k = 3$: $z = \exp\left[i(\pi + 6\pi)/7\right] \Rightarrow z = \exp\left[7i\pi/7\right]$
   - $k = 4$: $z = \exp\left[i(\pi + 8\pi)/7\right] \Rightarrow z = \exp\left[9i\pi/7\right]$
   - $k = 5$: $z = \exp\left[i(\pi + 10\pi)/7\right] \Rightarrow z = \exp\left[11i\pi/7\right]$
   - $k = 6$: $z = \exp\left[i(\pi + 12\pi)/7\right] \Rightarrow z = \exp\left[13i\pi/7\right]$

Ответ:
см выше

Вопрос 4

Даны три комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$. Необходимо найти вещественную и мнимую часть следующего выражения в терминах $x_1, x_2, x_3,\ y_1, y_2, y_3$:

$$z_1 z_2^* + z_2 z_3^* + z_3 z_1^* + \frac{1}{z_1^* - z_2 + z_3^*}$$

Где z^* обозначает комплексно-сопряженное число.

Найдем вещественную и мнимую часть каждого выражения:

1. $z_1 z_2^* = \underbrace{x_1x_2 + y_1y_2}_{\text{Re}} + i\underbrace{(x_2y_1 - x_1y_2)}_{\text{Im}}$
2. $z_2 z_3^* = \underbrace{x_2x_3 + y_2y_3}_{\text{Re}} + i\underbrace{(x_3y_2 - x_2y_3)}_{\text{Im}}$
3. $z_3 z_1^* = \underbrace{x_3x_1 + y_3y_1}_{\text{Re}} + i\underbrace{(x_1y_3 - x_3y_1)}_{\text{Im}}$
4. $\dfrac{1}{z_1^* - z_2 + z_3^*} = \dfrac{1}{x_1 - x_2 + x_3 + i(-y_1 - y_2 - y_3)} = \underbrace{\dfrac{x_1 - x_2 + x_3}{(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2}}_{\text{Re}} + i\underbrace{\dfrac{(y_1 + y_2 + y_3)}{(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2}}_{\text{Im}}$

Объеденяя эти выражения получим:

$$Re = x_1x_2 + y_1y_2 + x_2x_3 + y_2y_3 + x_3x_1 + y_3y_1 + \frac{x_1 - x_2 + x_3}{(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2} \tag{1}$$

$$Im = x_2y_1 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_3 + x_1y_3 - x_3y_1 + \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2} \tag{2}$$

Ответ:
$Re = x_1x_2 + y_1y_2 + x_2x_3 + y_2y_3 + x_3x_1 + y_3y_1 + \dfrac{x_1 - x_2 + x_3}{(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2}$

$$Im = x_2y_1 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_3 + x_1y_3 - x_3y_1 + \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{(x_1 - x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2}$$