Матан инд
Вариант №18

Евгений Турчанин

Вопрос 1

Найти площадь фигуры, ограниченную кривыми:

1. $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2x^2$
2. $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t$

Решение:

1. Перейдем в полярные координаты:

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$r^4 = a^2r^2\cos^2\varphi \Rightarrow r = \pm a\cos\varphi,$$

Площадь фигуры в полярных координатах равна:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} a^2\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{4}\left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{a^2\pi}{2}.$$

2. Для поиска площади фигуры воспользуемся формулой:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left|x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\right|\mathrm{d}t.$$

Посчитаем производные:

$$x'(t) = -2\sin t + 2\sin 2t,$$
$$y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t.$$

Тогда:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(2\cos t - \cos 2t)(2\cos t - 2\cos 2t) - (-2\sin t + 2\sin 2t)(2\sin t - \sin 2t)\ \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(4\cos^2 t - 4\cos t\cos 2t - 2\cos 2t\cos t + 2\cos^2 2t + 4\sin^2 t - 2\sin t\sin 2t - 4\sin 2t\sin t + 2\sin^2 2t\right)\ \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} 6 - 6\cos 2t\cos t - 6\sin 2t\sin t\,\mathrm{d}t = 3\int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t - 3\int\limits_0^{2\pi}\cos 2t\cos t\,\mathrm{d}t - 3\int\limits_0^{2\pi}\sin 2t\sin t\,\mathrm{d}t =$$
$$= 6\pi$$

Ответ:

1. $\frac{a^2\pi}{2}$.
2. 6π.

Вопрос 2

Найти длину кривой, заданной уравнением:

1. $r = \dfrac{2}{\cos^4(\varphi/4)}$
2. $2(y^2 + z^2) = x$, $z\cos 2x - y\sin 2x = 0$, $0 \le x < \pi/4$

Решение:

1. В полярных координатах длина кривой равна:

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\frac{4}{\cos^8(\varphi/4)} + \frac{4\sin^2(\varphi/4)}{\cos^{10}(\varphi/4)}}\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{2}{\cos^5(\varphi/4)}\,\mathrm{d}\varphi =$$

2. Выразим y, z через x: