

Матан Лаба

Павел Андреев, Григорий Горбушкин, Евгений Турчанин

Вавилонский метод

1. Покажем, что данная последовательность сходится куда надо. Предположим, что она действительно сходится, тогда пусть A - то, куда она сходится, тогда:

$$A = \frac{1}{2} \left(A + \frac{a}{A} \right) \Rightarrow A = \sqrt{a}$$

Покажем, что данная последовательность вообще сходится:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) - x_{n-1} = -\frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{2} \frac{a}{x_{n-1}}$$

Нужно показать больше или меньше нуля это выражение, для этого сравним два числа:

$$\frac{1}{2} x_{n-1} \leq \frac{1}{2} \frac{a}{x_{n-1}} \Rightarrow x_{n-1}^2 \leq a \Rightarrow \text{тк } x_{n-1} > \sqrt{a} \Rightarrow \text{Убывает}$$

Покажем в явном виде, что $x_{n-1} > \sqrt{a}$

(а) Покажем для $n=2$:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right) \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right) + \frac{a}{\frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right)} \right) = \frac{1}{4} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right) + \frac{a}{\left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right)}$$

Теперь гениальный финт ушами по неравенству Коши:

$$\frac{1}{4} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right) + \frac{a}{\left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right)} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{4} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right) \cdot \frac{a}{\left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right)}} = a \Rightarrow x_2 \geq \sqrt{a}$$

(b) Пусть верно для $n-1$

(c) Покажем что верно для n :

$$x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) \geq 2 \sqrt{\frac{1}{4} x_{n-1} \cdot \frac{a}{x_{n-1}}} = \sqrt{a}$$

Отсюда получаем и ограниченность ~~И вообще кто молодец? Я молодец! Правильно? Правильно!~~

2. Из выше написанного следует что $\frac{x_n}{\sqrt{a}} - 1 \geq 0$

Покажем что $\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2(1 + \varepsilon_n)}$:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{\sqrt{a}} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{a}{x_n \sqrt{a}} - 2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x_n^2 + a - 2x_n \sqrt{a}}{\sqrt{a} x_n} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{\sqrt{a} x_n} \right)$$

Ну это очевидно равно $\frac{\varepsilon_n^2}{2(1 + \varepsilon_n)}$

Теперь покажем что $\varepsilon_{n+2} \leq \frac{1}{2} \min(\varepsilon_{n+1}^2, \varepsilon_{n+1})$

$$\varepsilon_{n+2} = \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{2(1 + \varepsilon_{n+1})} \Rightarrow \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{(1 + \varepsilon_{n+1})} \leq \min(\varepsilon_{n+1}^2, \varepsilon_{n+1})$$

Рассмотрим три случая:

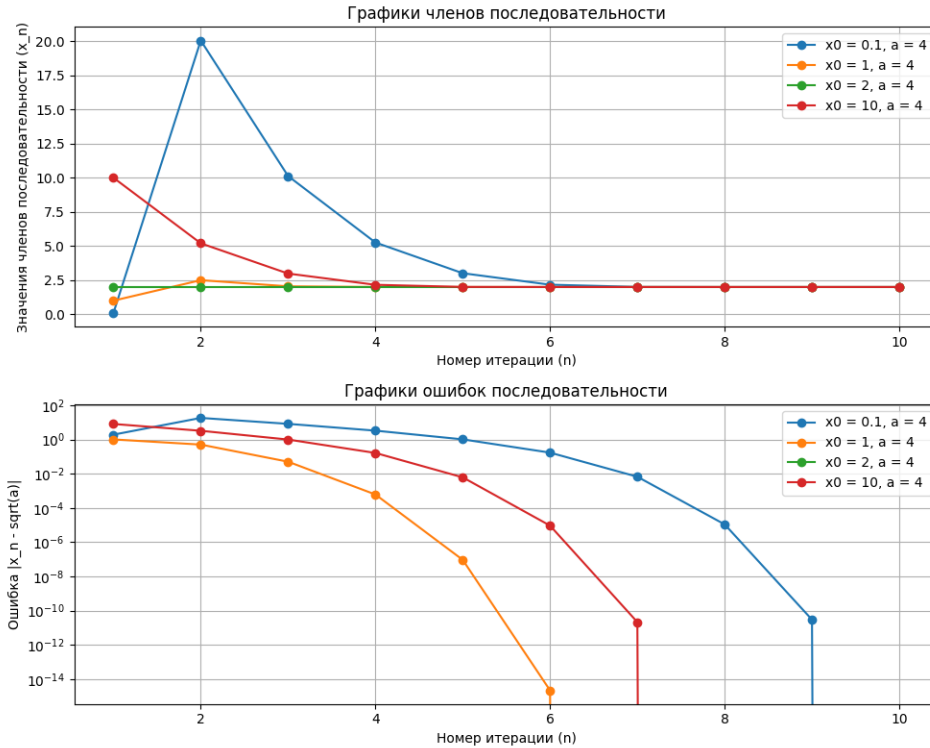
$$(a) \quad 0 < \varepsilon_{n+1} < 1 \Rightarrow \varepsilon_{n+1} > \varepsilon_{n+1}^2 \Rightarrow \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{(1 + \varepsilon_{n+1})} \leq \varepsilon_{n+1}^2 \Rightarrow \frac{1}{1 + \varepsilon_{n+1}} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + \varepsilon_{n+1}} < 1$$

$$(b) \quad \varepsilon_{n+1} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1+1} < 1$$

$$(c) \quad \varepsilon_{n+1} > 1 \Rightarrow \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{(1 + \varepsilon_{n+1})} \leq \varepsilon_{n+1} \Rightarrow \varepsilon_{n+1}^2 \leq \varepsilon_{n+1}^2 + 1 \Rightarrow 0 < 1$$

Ну и мое любимое

ЧТД



Видно что ошибка уменьшается квадратично, скорость сходимости зависит от начального значения.

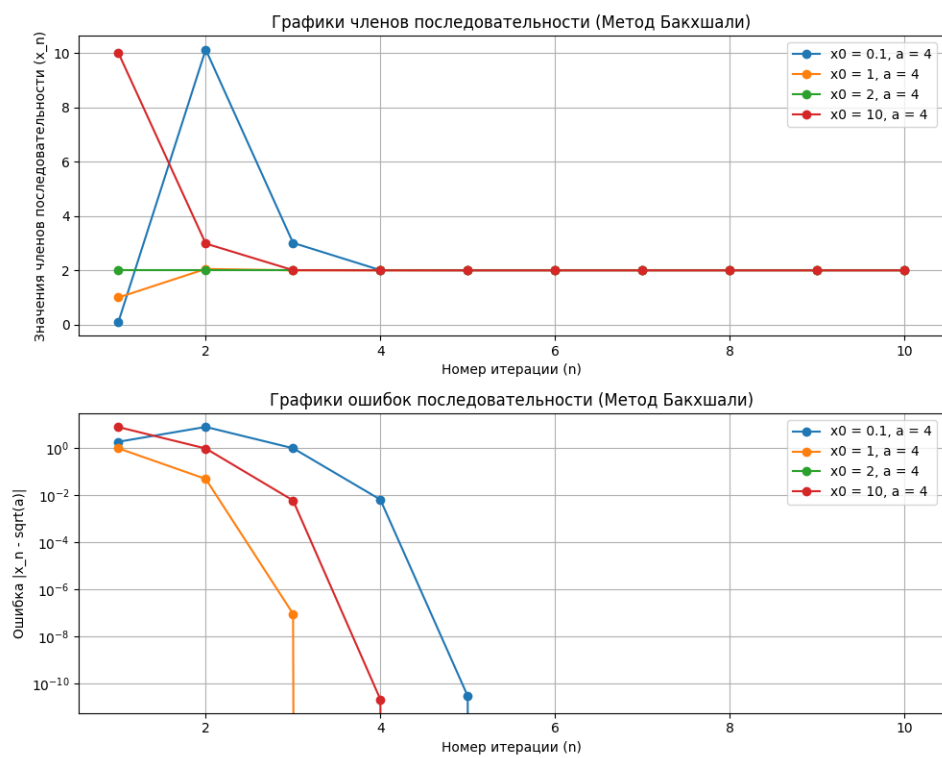
Метод Бакшали

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right) \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right) + \frac{a}{\left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right)} = \frac{\left(\left(\frac{x_0^2 + a}{x_0} \right)^2 + 4a \right) x_0}{4(x_0^2 + a)} = \frac{(x_0^2 + a)^2 + 4ax_0^2}{4x_0(x_0^2 + a)} = \frac{x_0^4 + 6x_0^2a + a^2}{4x_0^3 + 4ax_0}$$

Посчитаем одну итерацию второго метода:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} - \frac{(a - x_n^2)^2}{8 \left(x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} \right) x_n^2} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} - \frac{(a - x_n^2)^2}{8 \left(x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} \right) x_n^2} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} - \frac{(a - x_n^2)^2}{2x_n (4x_n^2 + 2(a - x_n^2))} =$$

$$\frac{(x_n^2 + a)(2x_n^2 + 2a) - (a - x_n^2)^2}{2x_n (2x_n^2 + 2a)} = \frac{2x_n^4 + 4ax_n^2 + 2a^2 - (a^2 - 2ax_n^2 + x_n^4)}{4x_n^3 + 4x_na} = \frac{x_n^4 + 6ax_n^2 + a^2}{4x_n^3 + 4ax_n}$$



Интерактивный метод с двумя переменными