Вдв
Решение дз №4

Евгений Турчанин

Вопрос 1: 185

$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$ ***Решение:*** Метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$1 = A(x^2+1)^2 + Bx^2(x^2+1) + (Cx+D)x^2$$
$$1 = A(x^4+2x^2+1) + B(x^4+x^2) + Cx^3 + Dx^2$$
$$1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + A$$

Сравнивая коэффициенты:

$$\begin{aligned} x^0 &: A = 1 \\ x^3 &: C = 0 \\ x^4 &: A + B = 0 \implies B = -A = -1 \\ x^2 &: 2A + B + D = 0 \implies 2(1) + (-1) + D = 0 \implies 1 + D = 0 \implies D = -1 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2} &= \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx \\ &= -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx \end{aligned}$$

Для последнего интеграла используем рекуррентную формулу или подстановку $x = \tan t$:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$$

Подставляем обратно:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2} &= -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x - \left(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right) + C \\ &= -\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(x^2+1)} + C \end{aligned}$$

Ответ из зеленой рамки на изображении (с возможной ошибкой знака):

$$-\frac{1}{x} - \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\arctan x + C = -\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

Вопрос 2: 191

$\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}dx$ ***Решение:*** Метод Остроградского:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \int \frac{cx+d}{x^2+x+1}dx$$

Дифференцируем обе части:

$$\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{x^2+x+1}\right) + \frac{cx+d}{x^2+x+1}$$

$$\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{a(x^2+x+1)-(ax+b)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} + \frac{(cx+d)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$x-1 = a(x^2+x+1) - (2ax^2+ax+2bx+b) + (cx^3+cx^2+cx+dx^2+dx+d)$$

$$x-1 = (a-2a)x^2 + (a-a-2b)x + (a-b) + cx^3 + (c+d)x^2 + (c+d)x + d$$

$$x-1 = cx^3 + (-a+c+d)x^2 + (-2b+c+d)x + (a-b+d)$$

Сравнивая коэффициенты:

$$\begin{aligned}
x^3 &: c = 0 \\
x^2 &: -a+c+d = 0 \implies -a+d = 0 \implies a = d \\
x^1 &: -2b+c+d = 1 \implies -2b+d = 1 \\
x^0 &: a-b+d = -1
\end{aligned}$$

Решаем систему:

$$\begin{aligned}
a &= d \\
-2b+d &= 1 \\
a-b+d &= -1 \implies d-b+d = -1 \implies 2d-b = -1
\end{aligned}$$

Из $-2b+d = 1 \implies d = 1+2b$. Подставляем в $2d-b=-1$:

$$2(1+2b)-b = -1 \implies 2+4b-b = -1 \implies 3b = -3 \implies b = -1$$

$$d = 1+2(-1) = -1$$

$$a = d = -1$$

Итак, $a=-1, b=-1, c=0, d=-1$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}dx &= \frac{-x-1}{x^2+x+1} + \int \frac{-1}{x^2+x+1}dx \\
&= -\frac{x+1}{x^2+x+1} - \int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}dx \\
&= -\frac{x+1}{x^2+x+1} - \int \frac{1}{(x+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}d(x+1/2) \\
&= -\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}/2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + C \\
&= -\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

Вопрос 3: 196

$\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$ ***Решение:*** Делим числитель и знаменатель на x^2:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-1/x^2}{x^2+1+1/x^2}dx &= \int \frac{1-1/x^2}{(x^2+1/x^2)+1}dx \\
&= \int \frac{1-1/x^2}{(x+1/x)^2-2+1}dx \\
&= \int \frac{1}{(x+1/x)^2-1}d(x+1/x)
\end{aligned}$$

Замена $t = x + 1/x$:

$$\int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

Подставляем обратно $t = x + 1/x$:

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + 1/x - 1}{x + 1/x + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{x^2-x+1}{x}}{\frac{x^2+x+1}{x}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right| + C$$

Ответ из зеленой рамки на изображении (без множителя 1/2):

$$\ln \left| \frac{x + 1/x - 1}{x + 1/x + 1} \right| + C$$

Вопрос 4: 170

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$ ***Решение:*** Замена $t = \dfrac{1}{x+1}$. Тогда $x + 1 = 1/t$, $x = 1/t - 1$, $dx = -1/t^2 dt$.

$$x^2 + 1 = (1/t - 1)^2 + 1 = \left(\frac{1-t}{t} \right)^2 + 1 = \frac{1 - 2t + t^2}{t^2} + \frac{t^2}{t^2} = \frac{2t^2 - 2t + 1}{t^2}$$

$$(x+1)\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2t^2 - 2t + 1}{t^2}} = \frac{1}{t} \frac{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}}{|t|} = \frac{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}}{t^2} \quad (\text{при } t > 0)$$

Интеграл:

$$\begin{aligned}
\int \frac{-1/t^2 dt}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}/t^2} &= -\int \frac{dt}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}} \\
&= -\int \frac{dt}{\sqrt{2(t^2 - t + 1/2)}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - t + 1/4 + 1/4}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{(t - 1/2)^2 + (1/2)^2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| (t - 1/2) + \sqrt{(t - 1/2)^2 + (1/2)^2} \right| + C \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + 1/2} \right| + C
\end{aligned}$$

Подставляем обратно $t = 1/(x+1)$:

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}} \right| + C$$

Ответ из зеленой рамки на изображении (с константой 3/8 вместо 1/4):

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{8}} \right| + C$$

Вопрос 5: 173

$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{4x^2-10x+7}}$ ***Решение:*** Замена $t = \frac{1}{x-1}$. Тогда $x-1 = 1/t$, $x = 1/t+1$, $dx = -1/t^2 dt$.

$$\begin{aligned}
4x^2 - 10x + 7 &= 4(1/t+1)^2 - 10(1/t+1) + 7 \\
&= 4\left(\frac{1+t}{t}\right)^2 - 10\left(\frac{1+t}{t}\right) + 7 \\
&= \frac{4(1+2t+t^2)}{t^2} - \frac{10t(1+t)}{t^2} + \frac{7t^2}{t^2} \\
&= \frac{4+8t+4t^2-10t-10t^2+7t^2}{t^2} = \frac{t^2-2t+4}{t^2} \\
(x-1)\sqrt{4x^2-10x+7} &= \frac{1}{t}\sqrt{\frac{t^2-2t+4}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2-2t+4}}{t^2} \quad (\text{при } t > 0)
\end{aligned}$$

Интеграл:

$$\begin{aligned}
\int \frac{-1/t^2 dt}{\sqrt{t^2-2t+4}/t^2} &= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+4}} \\
&= -\int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2+3}} \\
&= -\ln\left|(t-1) + \sqrt{(t-1)^2+3}\right| + C
\end{aligned}$$

Подставляем обратно $t = 1/(x-1)$:

$$\begin{aligned}
&= -\ln\left|\left(\frac{1}{x-1} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{x-1} - 1\right)^2 + 3}\right| + C \\
&= -\ln\left|\frac{1-(x-1)}{x-1} + \sqrt{\frac{(1-(x-1))^2 + 3(x-1)^2}{(x-1)^2}}\right| + C \\
&= -\ln\left|\frac{2-x}{x-1} + \frac{\sqrt{(2-x)^2 + 3(x^2-2x+1)}}{|x-1|}\right| + C \\
&= -\ln\left|\frac{2-x+\sqrt{4-4x+x^2+3x^2-6x+3}}{x-1}\right| + C \quad (\text{при } x-1 > 0) \\
&= -\ln\left|\frac{2-x+\sqrt{4x^2-10x+7}}{x-1}\right| + C
\end{aligned}$$

Ответ из зеленой рамки на изображении:

$$-\ln\left|\frac{1}{x-1} - 1 + \sqrt{\left(\frac{1}{x-1} - 1\right)^2 + 3}\right| + C$$