Матан Лаба, вариант №18

Григорий Горбушкин, Евгений Турчанин

Вопрос 1

Составьте интегральную сумму для функции e^{3x} на отрезке $[0, 0.5]$

Введем равномерное разбиение отрезка $[0, 0.5]$ на n частей, то есть

$$x_k = \frac{k}{2n}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Тогда интегральная сумма будет иметь вид

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_k = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{3k}{2n}}, \tag{2}$$

Перепишем сумму для правых прямоугольников, для левых прямоугольников и для средних прямоугольников:

$$S_{\text{правая}} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{3k}{2n}}, \tag{3}$$

$$S_{\text{левая}} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{3k}{2n}} \tag{4}$$

$$S_{\text{средняя}} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} e^{3\frac{2k-1}{4n}} \tag{5}$$

$$S_{\text{трапеции}} = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n} e^{3\frac{k}{2n}} + e^{3\frac{k-1}{2n}} = \frac{1}{4n} \left(e^{\frac{3}{2n}} + 1 \right) \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{3(k-1)}{2n}} \tag{6}$$

Вопрос 2

Вычислите пределы интегральных сумм при $n \to \infty$.

1. $S_{\text{правая}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3^{\frac{3}{2n}} \cdot (e^{3/2} - 1)}{2n(e^{3/2n} - 1)} = \dfrac{e^{3/2} - 1}{3}$
2. $S_{\text{левая}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(e^{3/2} - 1)}{2n(e^{3/2n} - 1)} = \dfrac{e^{3/2} - 1}{3}$
3. $S_{\text{средняя}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{3}{4n}}(e^{3/2} - 1)}{2n(e^{3/2n} - 1)} = \dfrac{e^{3/2} - 1}{3}$
4. $S_{\text{трапеции}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(e^{3/2n} + 1)(e^{3/2} - 1)}{4n(e^{3/2n} - 1)} = \dfrac{e^{3/2} - 1}{3}$

Вопрос 3

Докажите, что интеграл существует

Функция e^{3x} непрерывна на отрезке $[0, 0.5]$, значит, по теореме о существовании интеграла Римана, интеграл существует.

Вопрос 4

Проверьте вычисление при помощи формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_0^{0.5} e^{3x}\, dx = \left[\frac{e^{3x}}{3} \right]_0^{0.5} = \frac{e^{3/2} - 1}{3}$$

Вопрос 5

Найдите погрешность оценки, сравните ее с теоретической погрешностью

Докажем формулы для погрешности:

1. Для правых прямоугольников покажем, что $|R_n| \le \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| \dfrac{(b-a)^2}{2n}$.
   По Тейлору, для $x_k \in [x_k, x_{k+1}]$ найдется такое $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$, что $f(x) = f(x_k) + f'(\xi_k)(x - x_k)$, тогда
   $$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(\xi_k)(x - x_k)\,\mathrm{d}x$$
   отсюда
   $$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\,\mathrm{d}x - f(x_k)\Delta x_k\right| \le \max_{\Delta_k} |f'(\xi_k)| \cdot \frac{(\Delta x_k)^2}{2}$$
   Если $\Delta x_k = (b-a)/n$, то
   $$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k\right| \le \sum_{k=1}^n \max_{\Delta_k} |f'(\xi_k)| \cdot \frac{(b-a)^2}{2n^2} \le \max_{[a,b]} |f'(x)| \frac{(b-a)^2}{2n}$$

2. Для средних прямоугольников, покажем что $|R_n| \le \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \dfrac{(b-a)^3}{24n^2}$.
   Опять разложим в ряд Тейлора, но уже в окресности средний точки, те вокруг $\dfrac{x_k + x_{k-1}}{2}$
   $$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_{\text{ср}})(x_k - x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x_{\text{ср}})(x - x_{\text{ср}})\,\mathrm{d}x + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f''(\xi_k)(x - x_{\text{ср}})^2}{2}\,\mathrm{d}x.$$
   Попробуем обосновать разложение до второго порядка ~~кроме фразы, что в формуле есть вторая производная~~. Видно, что второй член зануляется (хотя бы из соображения симметрии), поэтому чтобы вычислить погрешность нужно раскладываться до 2-го порядка.
   $$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x - f(x_{\text{ср}})(x_k - x_{k-1})\right| \le \max_{\Delta_k} |f''(\xi_k)| \cdot \frac{(x_k - x_{k-1})^3}{24}.$$
   Если $\Delta x_k = (b-a)/n$, то
   $$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^n f(x_{\text{ср}})\Delta x_k\right| \le \sum_{k=1}^n \max_{\Delta_k} |f''(\xi_k)| \cdot \frac{(x_k - x_{k-1})^3}{24} \le \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

3. Для трапеций, покажем что $|R_n| \le \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$.
   Разложим в ряд Тейлора в окрестности x_{k-1}
   $$f(x_k) = f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + \frac{f''(\xi_k)(x_k - x_{k-1})^2}{2},$$
   теперь ~~подгоним~~ подстравим это в формулу для трапеции
   $$\frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_k) + f(x_{k-1})) = \frac{x_k - x_{k-1}}{2}\left(2f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + \frac{f''(\xi_k)(x_k - x_{k-1})^2}{2})\right),$$
   распишем интеграл в его ~~prime~~ форме
   $$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_{k-1})\Delta x_k + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x_{k-1})(x - x_{k-1})\,\mathrm{d}x + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f''(\xi_k^*)(x - x_{k-1})^2}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Тогда их разность будет равна

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_k) + f(x_{k-1}))\right| = \left|f''(\xi_k^*)\frac{x_k - x_{k-1}}{6} - f''(\xi_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{4}\right|$$

тогда если $\Delta x_k = (b-a)/n$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_k) + f(x_{k-1}))\right| \le \max_{\xi\in[a,b]}|f''(\xi)|\frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

Вопрос 6

Вывести формулу для оценки погрешности.

1. Погрешность для правых/левых прямоугольников

$$|R_n| \le \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|\frac{(b-a)^2}{2n} = \max_{x\in[0,0.5]}|3e^{3x}|\frac{0.5^2}{2n} = \frac{3e^{1.5}}{8n}$$

2. Погрешность для средних прямоугольников

$$|R_n| \le \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\frac{(b-a)^3}{24n^2} = \max_{x\in[0,0.5]}|9e^{3x}|\frac{0.5^3}{24n^2} = \frac{9e^{1.5}}{192n^2}$$

3. Погрешность для трапеций

$$|R_n| \le \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\frac{(b-a)^3}{12n^2} = \max_{x\in[0,0.5]}|9e^{3x}|\frac{0.5^3}{12n^2} = \frac{9e^{1.5}}{96n^2}$$

…дальше Григорий