Матан Лаба

Павел Андреев, Григорий Горбушкин, Евгений Турчанин

Вавилонский метод

1. Покажем, что данная последовательность сходится куда надо. Предположим, что она действительно сходится, тогда пусть A - то, куда она сходится, АК предел, тогда:

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right) \Rightarrow A = \sqrt{a}$$

Покажем, что данная последовательность вообще сходится, для этого нам нужна монотонность и ограниченность:

(a) Монотонность

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) - x_{n-1} = -\frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n-1}}$$

Для монотонности нужно показать больше или меньше нуля это выражение, для этого сравним два числа:

$$\frac{1}{2}x_{n-1} \leqslant \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n-1}} \Rightarrow x_{n-1}^2 \leqslant a \Rightarrow \text{тк } x_{n-1} > \sqrt{a} \Rightarrow \text{Убывает}$$

Покажем в явном виде, что $x_{n-1} > \sqrt{a}$, по теореме Каши~~на~~

$$x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-2} + \frac{a}{x_{n-2}}\right) \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{4}x_{n-2} \cdot \frac{a}{x_{n-2}}} = \sqrt{a}$$

(b) Ограниченность

Отсюда получаем и ограниченность, тк если каждый член последовательности меньше $\sqrt{a}$, то последовательность ограниченна снизу.~~И вообще кто молодец? Я молодец! Правильно? Правильно!~~

2. Из выше написанного следует что $\frac{x_n}{\sqrt{a}} - 1 \geqslant 0$

Покажем что $\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2(1+\varepsilon_n)}$:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{\sqrt{a}} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{a}{x_n\sqrt{a}} - 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2 + a - 2x_n\sqrt{a}}{\sqrt{a}x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{\sqrt{a}x_n}\right)$$

Ну это очевидно равно $\frac{\varepsilon_n^2}{2(1+\varepsilon_n)}$

Теперь покажем что $\varepsilon_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}\min(\varepsilon_{n+1}^2, \varepsilon_{n+1})$

$$\varepsilon_{n+2} = \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{2(1+\varepsilon_{n+1})} \Rightarrow \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{(1+\varepsilon_{n+1})} \leqslant \min(\varepsilon_{n+1}^2, \varepsilon_{n+1})$$

Рассмотрим три случая:

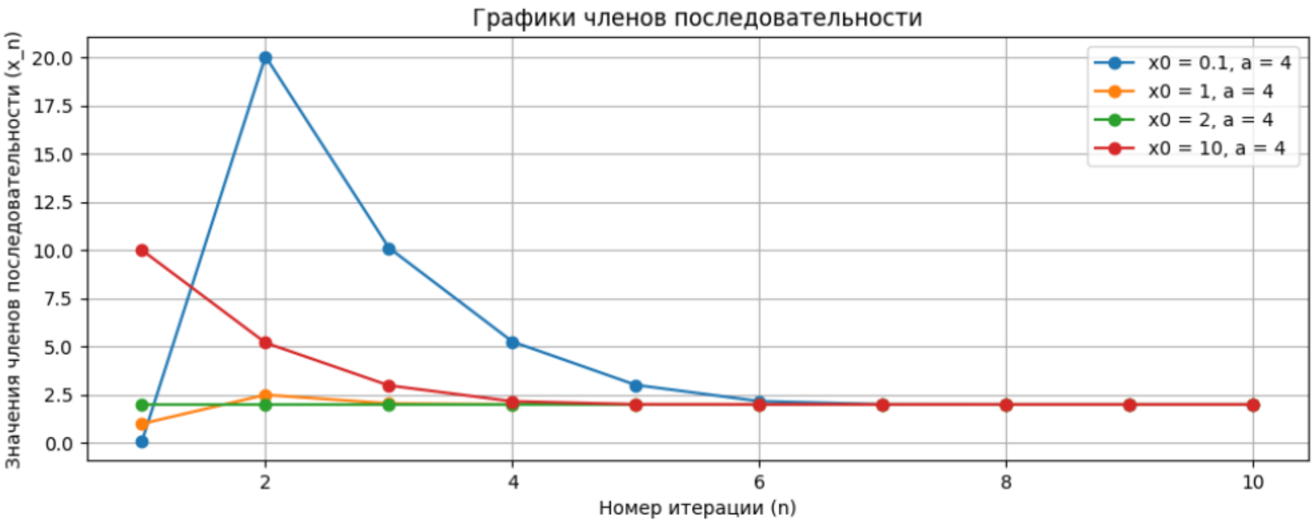
(a) $0 < \varepsilon_{n+1} < 1 \Rightarrow \varepsilon_{n+1} > \varepsilon_{n+1}^2 \Rightarrow \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{(1+\varepsilon_{n+1})} \leqslant \varepsilon_{n+1}^2 \Rightarrow \frac{1}{1+\varepsilon_{n+1}} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{1+\varepsilon_{n+1}} < 1$

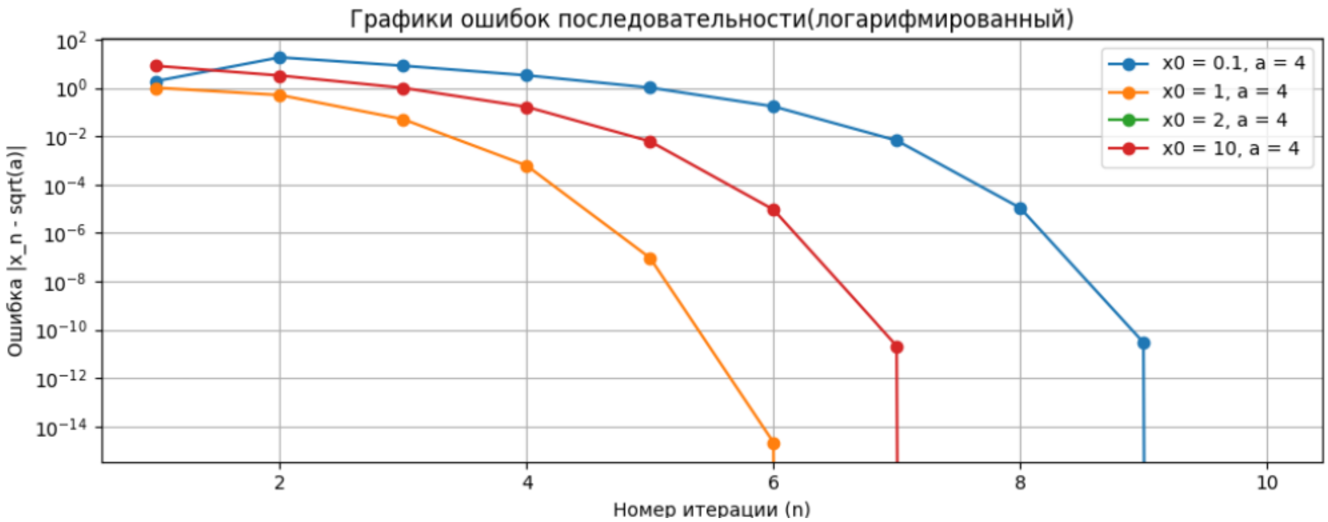
(b) $\varepsilon_{n+1} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1+1} < 1$

(c) $\varepsilon_{n+1} > 1 \Rightarrow \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{(1+\varepsilon_{n+1})} \leqslant \varepsilon_{n+1} \Rightarrow \varepsilon_{n+1}^2 \leqslant \varepsilon_{n+1}^2 + 1 \Rightarrow 0 < 1$

Ну и мое любимое

ЧТД





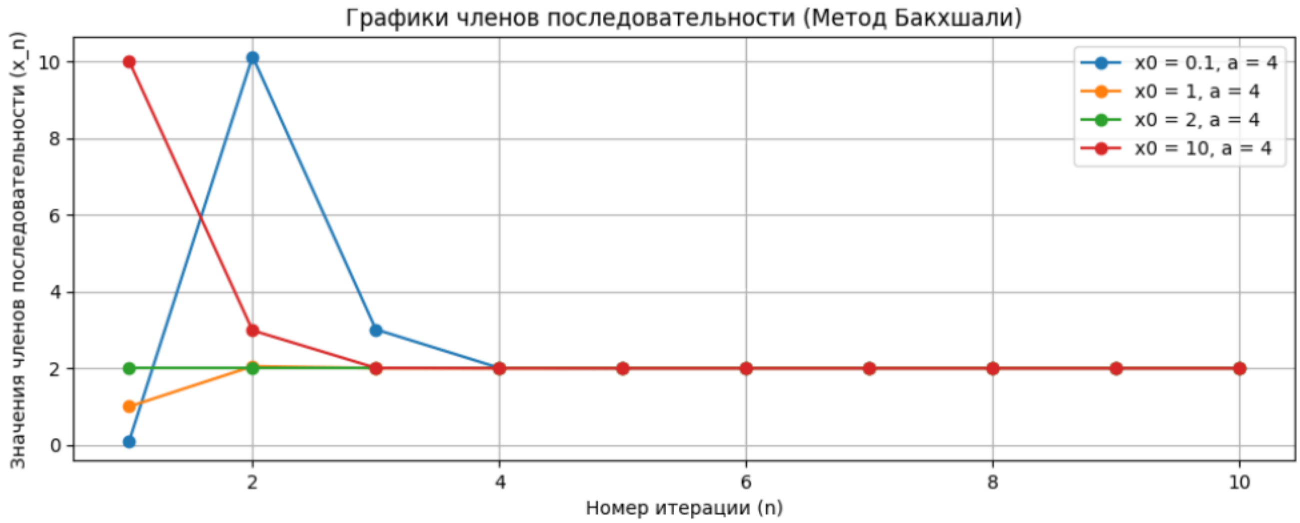
Метод Бакхшали

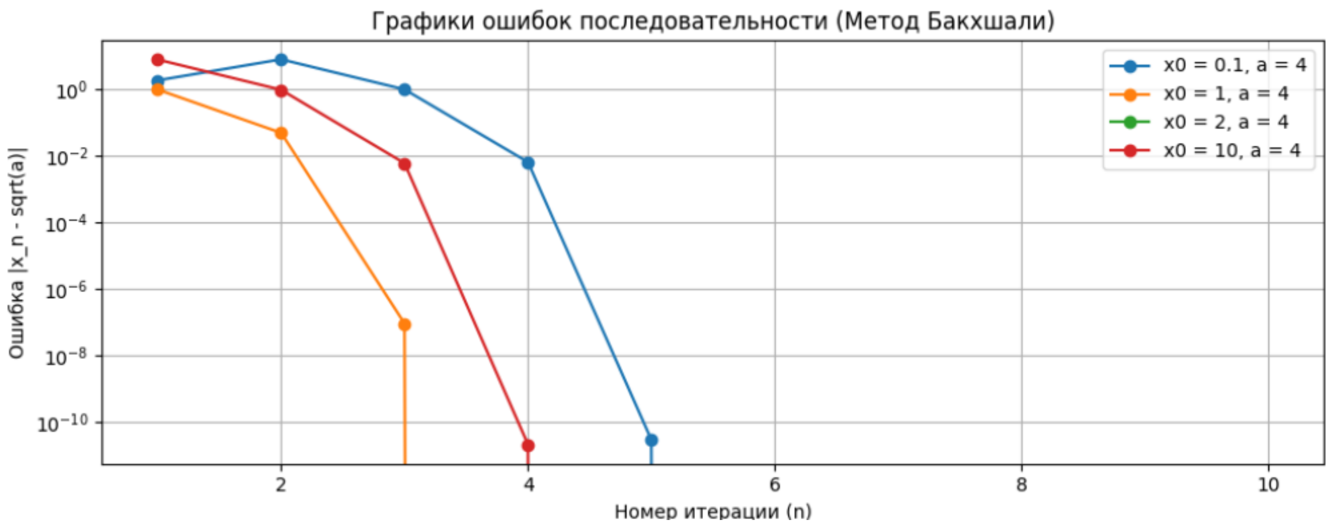
$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) + \frac{a}{\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)} = \frac{\left(\left(\frac{x_0^2 + a}{x_0}\right)^2 + 4a\right) x_0}{4(x_0^2 + a)} = \frac{(x_0^2 + a)^2 + 4a x_0^2}{4x_0(x_0^2 + a)} = \boxed{\frac{x_0^4 + 6x_0^2 a + a^2}{4x_0^3 + 4a x_0}}$$

Посчитаем одну итерацию второго метода:

$$x_1^* = x_0 + \frac{a - x_0^2}{2x_0} - \frac{(a - x_0^2)^2}{8\left(x_0 + \frac{a - x_0^2}{2x_n}\right) x_0^2} = \frac{x_0^2 + a}{2x_0} - \frac{(a - x_0^2)^2}{8\left(x_0 + \frac{a - x_0^2}{2x_0}\right) x_0^2} = \frac{x_0^2 + a}{2x_0} - \frac{(a - x_0^2)^2}{2x_0\left(4x_0^2 + 2(a - x_0^2)\right)} =$$

$$\frac{(x_0^2 + a)(2x_0^2 + 2a) - (a - x_0^2)^2}{2x_0\left(2x_0^2 + 2a\right)} = \frac{2x_0^4 + 4a x_0^2 + 2a^2 - (a^2 - 2a x_0^2 + x_0^4)}{4x_0^3 + 4x_0 a} = \boxed{\frac{x_0^4 + 6a x_0^2 + a^2}{4x_0^3 + 4a x_0}}$$





Интерактивный метод с двумя переменными

1. Покажем связь между c_{n+1} и c_n:

$$1 + c_{n+1} \quad ? \quad (1 + c_n)\left(1 - \frac{c_n}{2}\right)^2$$

   Раскроем правую часть:

$$1 + \frac{c_n^2(c_n - 3)}{4} \quad ? \quad (1 + c_n)\left(1 - c_n + \frac{c_n^2}{4}\right)$$

$$1 + \frac{c_n^3}{4} - \frac{3c_n^2}{4} \quad ? \quad 1 - c_n + \frac{c_n^2}{4} + c_n - c_n^2 + \frac{c_n^3}{4}$$

$$1 + \frac{c_n^3}{4} - \frac{3c_n^2}{4} \,?\, 1 + \frac{c_n^3}{4} - \frac{3c_n^2}{4}$$

   ~~Теперь все стало очевидно~~

2. Докажем по индукции соотношение $a(1 + c_n) = a_n^2$:

   (a) База индукции:
   При $n = 0$: $a(1 + a - 1) = a_0^2 \Rightarrow a^2 = a^2$ - верно

(b) Индукционный переход:
Предположим, что утверждение верно для $n = k$, докажем для $n = k + 1$:

$$a(1 + c_{k+1}) = a_{k+1}^2$$

$$a\left(1 + \frac{c_k^2(c_k - 3)}{4}\right) \quad ? \quad \left(a_k - \frac{a_k c_k}{2}\right)^2$$

$$a + \frac{ac_k^3}{4} - \frac{3ac_k^2}{4} \quad ? \quad a_k^2 - a_k^2 c_k + \frac{a_k^2 c_k^2}{4}$$

$$a + \frac{ac_k^3}{4} - \frac{3ac_k^2}{4} \quad ? \quad a(1 + c_k) - a(c_k + c_k^2) + a\left(\frac{c_k^2}{4} + \frac{c_k^3}{4}\right)$$

$$a + \frac{ac_k^3}{4} - \frac{3ac_k^2}{4} \quad ? \quad a + ac_k - ac_k - ac_k^2 + \frac{ac_k^2}{4} + \frac{ac_k^3}{4}$$

$$a + \frac{ac_k^3}{4} - \frac{3ac_k^2}{4} \quad ? \quad a + \frac{ac_k^3}{4} - \frac{3ac_k^2}{4}$$

~~Теперь все стало еще очевиднее~~

Докажем, что $c_n \to 0 \Leftrightarrow a_n \to \sqrt{a}$:

$$\lim_{n\to\infty} (a(1 + c_{n+1})) = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1}^2)$$

$$\lim_{n\to\infty} (a) + \lim_{n\to\infty} (ac_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1}^2)$$

$$a + 0 = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1}^2)$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}) = \sqrt{a}$$

3. Найдем все возможные пределы данной последовательности:

$$A = \frac{A^2(A - 3)}{4} \Rightarrow A_1 = 0;\ A_2 = -1;\ A_3 = 4$$

Покажем, что -1 и 4 не могут быть пределами последовательности при $-1 < c < 2$:

(a) Если -1 - предел, то с некого номера все члены лежать 'рядом' с -1, рассмотрим такой $-1 < c_n < 0$, тогда

$$c_n \quad ? \quad \frac{c_n^2(c_n - 3)}{4}$$

$$0 \quad ? \quad \frac{c_n(c_n + 1)(c_n - 4)}{4}$$

Понятно, что это число положительное, те $c_n > \frac{c_n^2(c_n - 3)}{4}$, те последовательность возрастает, те -1 не может быть пределом

(b) Если 4 - предел: По аналогии, если 4 - предел, то с некого номера все члены лежать 'рядом' с 4, рассмотрим такой $3 < c_n < 4$, тогда

$$c_n \quad ? \quad \frac{c_n^2(c_n - 3)}{4}$$

$$0 \quad ? \quad \frac{c_n(c_n + 1)(c_n - 4)}{4}$$

Понятно, что это число отрицательное, те $c_n < \frac{c_n^2(c_n - 3)}{4}$, те последовательность убывает, те 4 не может быть пределом

~~Если говорить прям занудно~~ Для каждого из этих случав, если пределом является -1/4, то можно выделить бесконечную подпоследовательсноть, которая не будет идти к -1/4

(c) Покажем, что 0 является пределом, по критерию Коши, для этого покажем, что все числа последовательности лежат в (-1, 2):
Понятно, что c_0 лежит в (-1, 2), покажем, что если верно для c_n, то верно при c_{n+1}:

$$-1 < c_n < 2 \Rightarrow (c_n - 2)^2(c_n + 1) > 0 \Rightarrow c_n^3 - 3c_n^2 + 4 > 0 \Rightarrow c_n^2(c_n - 3) > -4 \Rightarrow \frac{c^2(c-3)}{4} > -1$$

И понятно, что все члены прогрессии(начиная с c_1) лежат ниже 0, поэтому с c_1, все члены лежат в (-1, 0), а выше показано, что при (-1, 0), последовательность возрастает и огр. нулем $\Rightarrow$ 0 является пределом

$\frac{1}{2}\frac{1}{2}$