

Матан Лаба

Павел Андреев, Григорий Горбушкин, Евгений Турчанин

Теория

Вопрос 1

Объяснить, почему разность назад $f_{-}(x_0)$ – разумное приближение производной в точке x_0 .

$$f_{-}(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}, \quad (1)$$

разложим $f(x_0 - h)$ в ряд Тейлора:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + o(h), \quad (2)$$

подставим (2) в (1)

$$f_{-}(x_0) = \frac{hf'(x_0) - o(h)}{h} = f'(x_0) - o(1) \quad (3)$$

Тк их разница равна $o(1)$, то $f_{-}(x_0)$ – разумное приближение производной в точке x_0 .

Вопрос 2

Формально показать, как получаются формулы для оценки погрешности в случае приближения производной первой (односторонней) разностью.

$$f_{-}(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}, \quad (4)$$

разложим $f(x_0 - h)$ в ряд Тейлора:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + f''(\xi_1)\frac{h^2}{2}, \quad (5)$$

где $\xi_1 \in (x_0 - h, x_0)$, подставим (5) в (4)

$$f_{-}(x_0) = \frac{hf'(x_0) - f''(\xi_1)\frac{h^2}{2}}{h} = f'(x_0) - f''(\xi_1)\frac{h}{2} \quad (6)$$

Пусть $M = \sup\{f''(\xi_1)\}$, тогда разность можно оценить как:

$$|f_{-}(x_0) - f'(x_0)| \leq M\frac{h}{2}. \quad (7)$$

Тк ошибка линейно зависит от h , следовательно мы можем сделать ее сколь угодно малой, тк M – конечное число

Вопрос 3

Объяснить, почему центральная разность $f_{o1}(x_0)$ – разумное приближение производной в точке x_0 .

$$f_{o1}(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad (8)$$

Разложим $f(x_0 + h)$ и $f(x_0 - h)$ в ряд Тейлора:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2), \quad (9)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2), \quad (10)$$

подставим (10) и (9) в (8)

$$f_{\circ 1}(x_0) = \frac{2hf'(x_0) + h^2f''(x_0) + o(h^2)}{2h} = f'(x_0) + \frac{h}{2}f''(x_0) + o(h), \quad (11)$$

Понятно, что при $h \rightarrow 0$, $f_{\circ 1}(x_0) - f'(x_0)$ идет к 0

Вопрос 4

Формально показать, как получаются формулы для оценки погрешности в случае приближения производной центральной разностью.

Опять же разложим в ряд Тейлора:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + f'''(\xi_1)\frac{h^3}{6}, \quad (12)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + f'''(\xi_2)\frac{h^3}{6}, \quad (13)$$

Пусть $M = \sup\{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\}$, тогда разность можно оценить как:

$$|f_{\circ 1}(x_0) - f'(x_0)| \leq M \frac{h^2}{12}. \quad (14)$$

Вопрос 5

Узнать, как хранятся числа, скажем, в python. Узнать, что такое машинная точность. Объяснить, почему в python $0.1 + 0.2 \neq 0.3$.

Число в python хранится в виде $\pm m \cdot 2^s$, где $m, s \in \mathbb{N}$, а 0.1, 0.2 и 0.3, в этой системе — это бесконечные периодические дроби в этой системе

Машинная точность — это такое минимальное число ε , что $1 + \varepsilon \neq 1$, она примерно равна 2^{-52}

Ошибка округления получается, тк $f(x_0 + h)$ и $f(x_0)$ — округлены до машинной точности, а делятся на h , те р ост ошибки $O(1/h)$

Вопрос 6

1. Выбрать любую дважды дифференцируемую функцию f .
2. Аппроксимировать производную с помощью разностей $f_{\pm}(x_0)$, $f_{\circ 1}(x_0)$.
3. Построить график зависимости $\Delta(x, \varepsilon)$ от h , $h \in (10^{-20}, 1)$,

$$\Delta(x, h) = |f'(x) - f_{\pm, \circ 1}|,$$

при разных x (шкала по оси y — логарифмическая!).

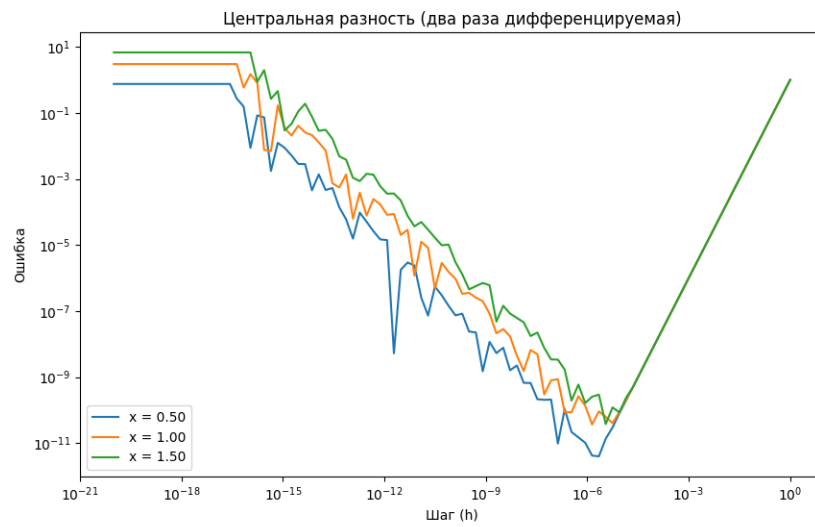
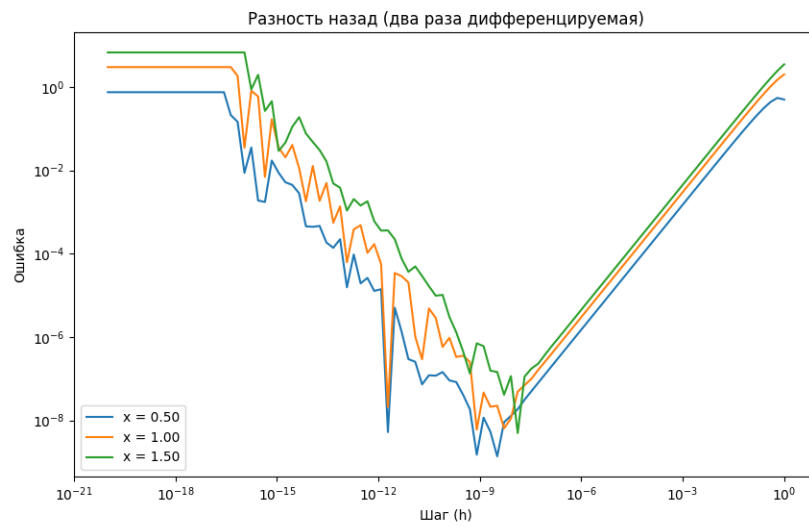
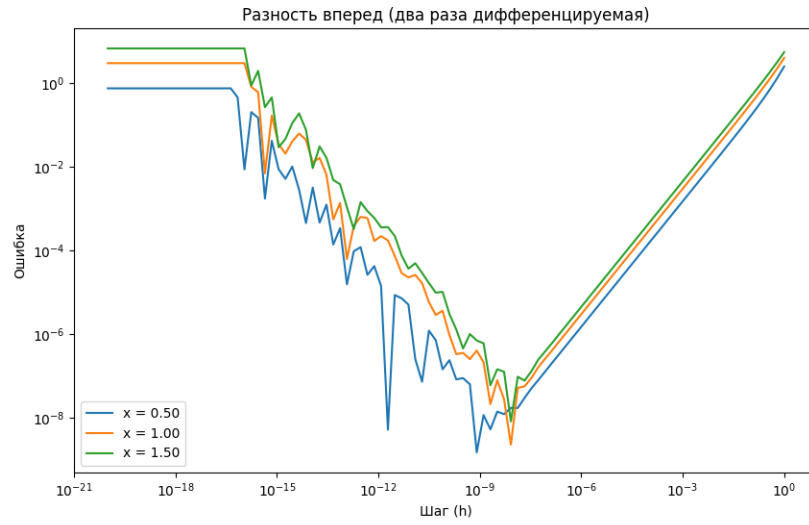
4. Проинтерпретировать полученный результат.

Пусть наша ~~дорогая~~ функция $f(x) = x^3$, тогда аппроксимация производной

$$f_+(x_0) = \frac{(x_0 + h)^3 - (x_0)^3}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2 \quad (15)$$

$$f_-(x_0) = \frac{(x_0)^3 - (x_0 - h)^3}{h} = 3x^2 - 3hx + h^2 \quad (16)$$

$$f_{\circ 1}(x_0) = \frac{(x_0 + h)^3 - (x_0 - h)^3}{2h} = 3x^2 + h^2 \quad (17)$$



Пусть наша функция $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ если $x \neq 0$ и 0, если $x = 0$. Понятно что в 0 она не дифф-ма 2-й

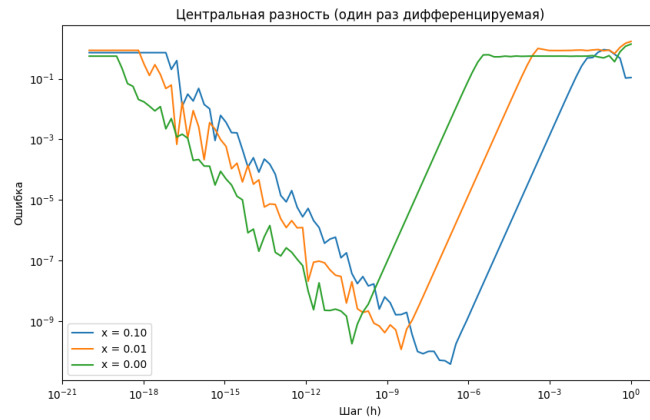
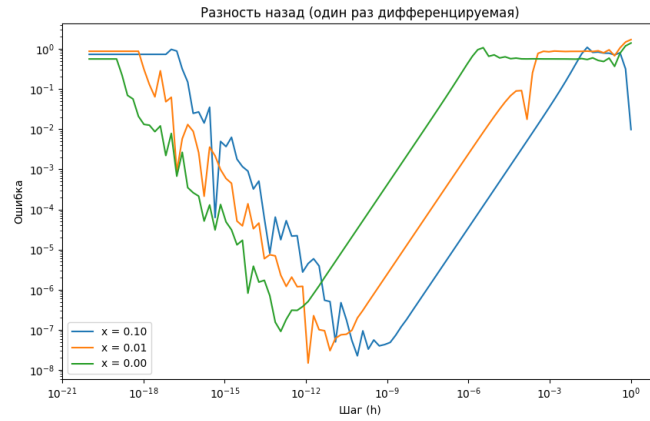
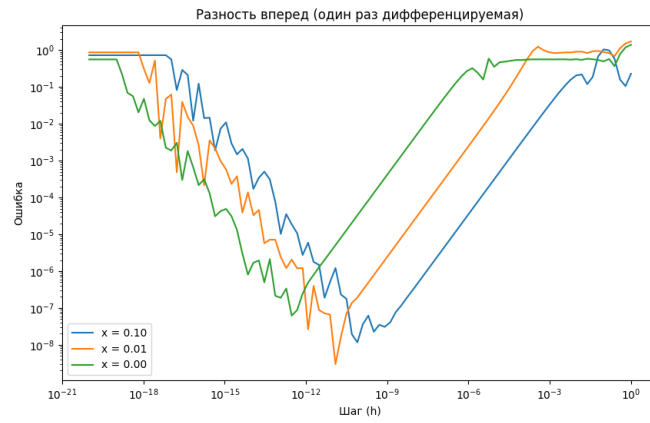
раз

$$f_+(0) = \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = h \sin \frac{1}{h} \quad h \rightarrow 0 \quad (18)$$

$$f_-(0) = \frac{(-h)^2 \sin \frac{1}{-h}}{-h} = -h \sin \frac{1}{-h} \quad h \rightarrow 0 \quad (19)$$

$$f_{\circ 1}(x) = \frac{(h+x)^2 \sin \frac{1}{x+h} - (x-h)^2 \sin \frac{1}{x-h}}{2h} =$$

$$-\frac{1}{2}h \sin \left(\frac{1}{x-h} \right) + x \sin \left(\frac{1}{x-h} \right) - \frac{x^2 \sin \left(\frac{1}{x-h} \right)}{2h} + \frac{1}{2}h \sin \left(\frac{1}{h+x} \right) + x \sin \left(\frac{1}{x+h} \right) + \frac{x^2 \sin \left(\frac{1}{x+h} \right)}{2h} \quad x \rightarrow 0; h \rightarrow 0$$



Экскримент Эксперимент

Используя программу tracker, получаем $\theta_0 = 44.59^\circ$.

1. Разностью вперед:

$$\delta t_{\text{верх}} = \left(1 - \frac{0.205}{0.211}\right) \cdot 100\% \approx 2.8\%, \quad (20)$$

$$\delta t_{\text{пад}} = \left(1 - \frac{0.41}{0.421}\right) \cdot 100\% \approx 2.6\%, \quad (21)$$

$$\delta x_{\text{верх}} = \left(1 - \frac{0.623}{0.64}\right) \cdot 100\% \approx 2.7\%, \quad (22)$$

2. Разностью назад:

$$\delta t_{\text{верх}} = \left(1 - \frac{0.211}{0.228}\right) \cdot 100\% \approx 7.5\%, \quad (23)$$

$$\delta t_{\text{пад}} = \left(1 - \frac{0.4096}{0.4561}\right) \cdot 100\% \approx 10.2\%, \quad (24)$$

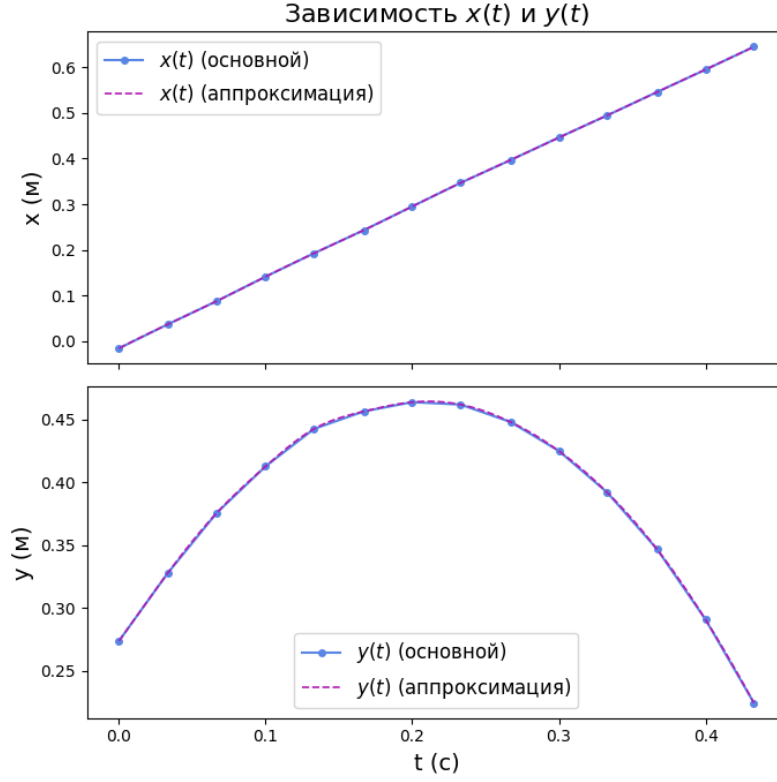
$$\delta x_{\text{верх}} = \left(1 - \frac{0.6231}{0.7202}\right) \cdot 100\% \approx 13.5\%, \quad (25)$$

3. Средним значением:

$$\delta t_{\text{верх}} = \left(1 - \frac{0.2109}{0.2193}\right) \cdot 100\% \approx 3.9\%, \quad (26)$$

$$\delta t_{\text{пад}} = \left(1 - \frac{0.4096}{0.4386}\right) \cdot 100\% \approx 6.6\%, \quad (27)$$

$$\delta x_{\text{верх}} = \left(1 - \frac{0.6231}{0.6802}\right) \cdot 100\% \approx 8.4\%, \quad (28)$$



Для $\theta_0 = 9.14^\circ$. Рассчитаем v_0 разными методами:

1. Разностью вперед:

$$v_{0x} = \frac{0.131 - 0.046}{0.033} \approx 2.59, \quad v_{0y} = \frac{0.725 - 0.716}{0.033} \approx 0.27, \quad (29)$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \approx 2.61, \quad (30)$$

$$t_{\text{верх}} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \approx 0.042, \quad (31)$$

$$t_{\text{пад}} = \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gy_0}}{g} \approx 0.337, \quad (32)$$

$$x_{\text{пад}} = v_0 \cdot \cos \theta \cdot t_{\text{пад}} \approx 0.868, \quad (33)$$

Погрешности:

$$\delta t_{\text{верх}} = \left(1 - \frac{0.042}{0.063}\right) \cdot 100\% \approx 33.23\%, \quad (34)$$

$$\delta t_{\text{пад}} = \left(1 - \frac{0.337}{0.360}\right) \cdot 100\% \approx 6.37\%, \quad (35)$$

$$\delta x_{\text{верх}} = \left(1 - \frac{0.868}{0.963}\right) \cdot 100\% \approx 9.87\%, \quad (36)$$

2. Разностью назад:

$$v_{0x} = \frac{0.046 - (-0.039)}{0.033} \approx 2.58, \quad v_{0y} = \frac{0.716 - 0.697}{0.033} \approx 0.56, \quad (37)$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \approx 2.64, \quad (38)$$

$$t_{\text{верх}} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \approx 0.043, \quad (39)$$

$$t_{\text{пад}} = \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gy_0}}{g} \approx 0.337, \quad (40)$$

$$x_{\text{пад}} = v_0 \cdot \cos \theta \cdot t_{\text{пад}} \approx 0.878, \quad (41)$$

Погрешности:

$$\delta t_{\text{верх}} = \left(1 - \frac{0.043}{0.063}\right) \cdot 100\% \approx 33.42\%, \quad (42)$$

$$\delta t_{\text{пад}} = \left(1 - \frac{0.337}{0.360}\right) \cdot 100\% \approx 6.50\%, \quad (43)$$

$$\delta x_{\text{верх}} = \left(1 - \frac{0.878}{0.963}\right) \cdot 100\% \approx 8.89\%, \quad (44)$$

3. Средним значением:

$$v_{0x} = \frac{0.131 - (-0.039)}{0.066} \approx 2.59, \quad v_{0y} = \frac{0.725 - 0.697}{0.066} \approx 0.42, \quad (45)$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \approx 2.62, \quad (46)$$

$$t_{\text{верх}} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \approx 0.042, \quad (47)$$

$$t_{\text{пад}} = \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gy_0}}{g} \approx 0.337, \quad (48)$$

$$x_{\text{пад}} = v_0 \cdot \cos \theta \cdot t_{\text{пад}} \approx 0.872, \quad (49)$$

Погрешности:

$$\delta t_{\text{верх}} = \left(1 - \frac{0.042}{0.063}\right) \cdot 100\% \approx 32.92\%, \quad (50)$$

$$\delta t_{\text{пад}} = \left(1 - \frac{0.337}{0.360}\right) \cdot 100\% \approx 6.42\%, \quad (51)$$

$$\delta x_{\text{верх}} = \left(1 - \frac{0.872}{0.963}\right) \cdot 100\% \approx 9.50\%, \quad (52)$$

Для $\theta_0 = 41.288^\circ$. Рассчитаем v_0 разными методами:

1. Разностью вперед:

$$v_{0x} \approx 2.394, \quad v_{0y} \approx 1.912, \quad (53)$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \approx 3.064, \quad (54)$$

$$t_{\text{верх}} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \approx 0.206, \quad (55)$$

$$t_{\text{пад}} = \frac{-v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gy_0}}{g} \approx 0.452, \quad (56)$$

$$x_{\text{пад}} = v_0 \cdot \cos \theta \cdot t_{\text{пад}} \approx 1.041, \quad (57)$$

Погрешности:

$$\delta t_{\text{верх}} \approx 17.81\%, \quad (58)$$

$$\delta t_{\text{пад}} \approx 9.58\%, \quad (59)$$

$$\delta x_{\text{верх}} \approx 11.52\%, \quad (60)$$

2. Разностью назад:

$$v_{0x} \approx 2.342, \quad v_{0y} \approx 2.247, \quad (61)$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \approx 3.246, \quad (62)$$

$$t_{\text{верх}} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \approx 0.218, \quad (63)$$

$$t_{\text{пад}} = \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gy_0}}{g} \approx 0.475, \quad (64)$$

$$x_{\text{пад}} = v_0 \cdot \cos \theta \cdot t_{\text{пад}} \approx 1.157, \quad (65)$$

Погрешности:

$$\delta t_{\text{верх}} \approx 12.94\%, \quad (66)$$

$$\delta t_{\text{пад}} \approx 5.08\%, \quad (67)$$

$$\delta x_{\text{верх}} \approx 1.61\%, \quad (68)$$

3. Средним значением:

$$v_{0x} \approx 2.37, \quad v_{0y} \approx 2.08, \quad (69)$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \approx 3.15, \quad (70)$$

$$t_{\text{верх}} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \approx 0.218, \quad (71)$$

$$t_{\text{пад}} = \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gy_0}}{g} \approx 0.463, \quad (72)$$

$$x_{\text{пад}} = v_0 \cdot \cos \theta \cdot t_{\text{пад}} \approx 1.096, \quad (73)$$

Погрешности:

$$\delta t_{\text{верх}} \approx 15.46\%, \quad (74)$$

$$\delta t_{\text{пад}} \approx 7.41\%, \quad (75)$$

$$\delta x_{\text{верх}} \approx 6.81\%, \quad (76)$$