

Матан инд  
Вариант №19(22)

Евгений Турчанин

### Вопрос 1

Доказать что:  $\frac{1^4}{1 \cdot 3} + \frac{2^4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^4}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}$

**Решение:** Докажем через индукцию:

1. Покажем что для  $n = 1$  верно:

$$\frac{1(1+1)(1^2+1+1)}{6(2+1)} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{1^4}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

2. Пусть верно для  $n$

3. Тогда докажем, что верно для  $n + 1$ :

$$\underbrace{\frac{1^4}{1 \cdot 3} + \frac{2^4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^4}{(2n-1) \cdot (2n+1)}}_{\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}} + \frac{(n+1)^4}{(2n+1) \cdot (2n+3)} \Rightarrow$$

Нужно доказать, что:

$$\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)} + \frac{(n+1)^4}{(2n+1) \cdot (2n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)(n^2+3n+3)}{6(2n+3)}$$

~~Трудно не заметить, что так оно и есть~~ Давайте покажем, что это так:

Сократим все на  $n + 1$  и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{n(2n+3)(n^2+n+1)}{6(2n+1)(2n+3)} + \frac{6(n+1)^3}{6(2n+1) \cdot (2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+2)(n^2+3n+3)}{6(2n+1)(2n+3)}$$

Сократим на знаменатели и раскроем скобки:

$$2x^4 + 11x^3 + 23x^2 + 21x + 6 = 2x^3 + 11x^2 + 23x + 21 + 6 \Rightarrow$$

$$0 = 0$$

Ч.Т.Д.

### Вопрос 2

Доказать что:

$$\sum_{k=1}^k \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

**Решение:** Докажем опять ~~двадцать~~ через индукцию:

1. Покажем что для  $n = 1$  верно:

$$\frac{1}{1^2} = 1$$
$$2 - \frac{1}{1} = 1$$
$$1$$

2. Пусть верно для  $n$

3. Тогда докажем, что верно для  $n + 1$ :

Те нужно доказать что верно:

$$\underbrace{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{\leq 2 - \frac{1}{n}} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{(2n-1)(n+1)^2 + n}{(n+1)^2 n} \leq \frac{(2n+1)(n+1)n}{(n+1)^2 n}$$

Сократим на знаменатель:

$$(2n-1)(n+1)^2 + n \leq (2n+1)(n+1)n$$

Раскроем скобки:

$$2n^3 + 4n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1 + n \leq 2n^3 + 2n^2 + n^2 + n \Rightarrow \\ -1 \leq 0$$

Ч.Т.Д.

## Момент когда меня сместили с 19 на 22 место

### Вопрос 3

Доказать:  $(2n-1)! < n^{2n-1}$ ,  $n \geq 2$

**Решение:** Докажем по мат. индукции:

1. Покажем что для  $n = 2$  верно:

$$(4-1)! < 2^{4-1} \Rightarrow 6 < 8$$

2. Пусть верно для  $n$

3. Докажем, что верно для  $n + 1$

$$(2n+1)! < (n+1)^{2n+1} \Rightarrow 2n(2n+1)n^{2n-1} < (n+1)^{2n+1} \Rightarrow \\ 4n^{2n+1} + 2n^{2n} < n^{2n+1} + (n+1)^{2n} \cdot (2n+1) + (n+1)^{2n-1} \cdot n(2n+1)$$

Преобразуем правую часть:

$$n^{2n+1} + (n+1)^{2n} \cdot (2n+1) + (n+1)^{2n-1} \cdot n(2n+1) > 5n^{2n+1} + 2n^{2n}$$

Тк

$$4n^{2n+1} + 2n^{2n} < 5n^{2n+1} + 2n^{2n}$$

Ч.Т.Д.

#### Вопрос 4

$$C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (-1)^n(n+1)C_n^n = ?$$

**Решение:** Легко заметить что:

$$C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (-1)^n(n+1)C_n^n = (n+1)C_n^0 - nC_n^1 + (n-1)C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n$$

Тогда начальную сумму можно представить в виде:

$$\frac{n+1}{2}(C_n^0 - C_n^1 + (-1)^n C_n^2 + \dots + C_n^n)$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n = (a+b)^n$$

Такое равенство будет выполняться при  $a = 1$  и  $b = -1$  (причем, очевидно что четность/нечетность  $n$  не влияет), тогда искомая сумма будет равна:

$$\frac{n+1}{2} 0^n = 0$$

**Ответственность:**  $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (-1)^n(n+1)C_n^n = 0$

#### Вопрос 5

Доказать:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-3}{6n-4} = \frac{1}{2}$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - \ln(n+1)) = -\infty$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n \cdot n^2 - n) = \infty$

**Решение:**

1. Определение предела:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |A - x_n| < \epsilon$$

Тогда чтобы доказать что  $1/2$  является пределом, нужно показать что:

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{3n-3}{6n-4} \right| < \epsilon$$

Те что  $\left| \frac{1}{2} - \frac{3n-3}{6n-4} \right|$  может быть сколь угодно малым, покажем это:

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{3n-3}{6n-4} \right| = \frac{1}{6n-4} - \text{эта дробь может быть сколь угодно мало из принципа Архимеда}$$

**Ч.Т.Д.**

2. Если пределом последовательности является  $-\infty$ , то не существует такого числа, которое *подпирает* последовательность снизу и последовательность монотонно убывает. Запишем это в формальном виде:

$$\forall M \exists x_{n_0} : \forall n \geq n_0 : x_n < M$$

Докажем что для любого  $M$  можно найти такой  $x_{n_0}$ , начиная с которого, все члены меньше  $M$ :

$$3 - \ln(n+1) < M \Rightarrow n > e^{3-M} - 1 - \text{ну вот он, можно округлить до целых и прибавить } 1$$

Теперь покажем монотонность последовательности:

$$x_{n+1} - x_n = 3 - \ln(n+2) - 3 + \ln(n+1) = \ln \frac{n+1}{n+2} < 0 \Rightarrow \text{последовательность монотонно убывает}$$

Получаем что, последовательность монотонно убывает и не ограничена снизу

**Ч.Т.Д.**

3. Если предел последовательности это  $\infty$ , то множество ее частичных пределов —  $\{-\infty, \infty\}$

Тогда докажем, что  $\pm\infty$  являются частичными пределами, и что других частичных пределов нету:

$$(a) \ n - \text{четное} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(1 - 1/n) \rightarrow \infty$$

$$(b) \ n - \text{нечетное} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -n^2(1 + 1/n) \rightarrow -\infty$$

Других частичных пределов нету, тк в подпоследовательность входит либо бесконечное число четных и нечетных, тогда предел —  $\infty$ , либо конечное число четных/нечетных и бесконечное число нечетных/четных, тогда с какого-то номера в подпоследовательности не будет четных/нечетных чисел, тогда частичные пределы —  $\mp\infty$

**Ч.Т.Д.**

*smth smth*