

Матан инд
Вариант №19(22)

Евгений Турчанин

Вопрос 1

Доказать что: $\frac{1^4}{1 \cdot 3} + \frac{2^4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^4}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}$

Решение: Докажем через индукцию:

1. Покажем что для $n = 1$ верно:

$$\frac{1(1+1)(1^2+1+1)}{6(2+1)} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{1^4}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

2. Пусть верно для n

3. Тогда докажем, что верно для $n + 1$:

$$\underbrace{\frac{1^4}{1 \cdot 3} + \frac{2^4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^4}{(2n-1) \cdot (2n+1)}}_{\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}} + \frac{(n+1)^4}{(2n+1) \cdot (2n+3)} \Rightarrow$$

Нужно доказать, что:

$$\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)} + \frac{(n+1)^4}{(2n+1) \cdot (2n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)(n^2+3n+3)}{6(2n+3)}$$

~~Трудно не заметить, что так оно и есть~~ Давайте покажем, что это так:

Сократим все на $n + 1$ и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{n(2n+3)(n^2+n+1)}{6(2n+1)(2n+3)} + \frac{6(n+1)^3}{6(2n+1) \cdot (2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+2)(n^2+3n+3)}{6(2n+1)(2n+3)}$$

Сократим на знаменатели и раскроем скобки:

$$2x^4 + 11x^3 + 23x^2 + 21x + 6 = 2x^3 + 11x^2 + 23x + 21 + 6 \Rightarrow$$

$$0 = 0$$

Ч.Т.Д.

Вопрос 2

Доказать что:

$$\sum_{k=1}^k \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Решение: Докажем опять ~~двадцать~~ через индукцию:

1. Покажем что для $n = 1$ верно:

$$\frac{1}{1^2} = 1$$
$$2 - \frac{1}{1} = 1$$
$$1$$

2. Пусть верно для n

3. Тогда докажем, что верно для $n + 1$:

Те нужно доказать что верно:

$$\underbrace{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{\leq 2 - \frac{1}{n}} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{(2n-1)(n+1)^2 + n}{(n+1)^2 n} \leq \frac{(2n+1)(n+1)n}{(n+1)^2 n}$$

Сократим на знаменатель:

$$(2n-1)(n+1)^2 + n \leq (2n+1)(n+1)n$$

Раскроем скобки:

$$2n^3 + 4n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1 + n \leq 2n^3 + 2n^2 + n^2 + n \Rightarrow$$
$$-1 \leq 0$$

Ч.Т.Д.

Момент когда меня сместили с 19 на 22 место

Вопрос 3

Доказать: $(2n-1)! < n^{2n-1}$, $n \geq 2$

Решение: Докажем по мат. индукции:

1. Покажем что для $n = 2$ верно:

$$(4-1)! < 2^{4-1} \Rightarrow 6 < 8$$

2. Пусть верно для n

3. Докажем, что верно для $n + 1$

$$(2n+1)! < (n+1)^{2n+1} \Rightarrow 2n(2n+1)n^{2n-1} < (n+1)^{2n+1} \Rightarrow$$
$$4n^{2n+1} + 2n^{2n} < n^{2n+1} + (n+1)^{2n} \cdot (2n+1) + (n+1)^{2n-1} \cdot n(2n+1)$$

Преобразуем правую часть:

$$n^{2n+1} + (n+1)^{2n} \cdot (2n+1) + (n+1)^{2n-1} \cdot n(2n+1) > 5n^{2n+1} + 2n^{2n}$$

Тк

$$4n^{2n+1} + 2n^{2n} < 5n^{2n+1} + 2n^{2n}$$

Ч.Т.Д.

Вопрос 4

$$C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (-1)^n(n+1)C_n^n = ?$$

Решение: Легко заметить что:

$$C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (-1)^n(n+1)C_n^n = (n+1)C_n^0 - nC_n^1 + (n-1)C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n$$

Тогда начальную сумму можно представить в виде:

$$\frac{n+1}{2}(C_n^0 - C_n^1 + (-1)^n C_n^2 + \dots + C_n^n)$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n = (a+b)^n$$

Такое равенство будет выполняться при $a = 1$ и $b = -1$ (причем, очевидно что четность/нечетность n не влияет), тогда искомая сумма будет равна:

$$\frac{n+1}{2} 0^n = 0$$

Ответственность: $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (-1)^n(n+1)C_n^n = 0$

Вопрос 5

Доказать:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-3}{6n-4} = \frac{1}{2}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - \ln(n+1)) = -\infty$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n \cdot n^2 - n) = \infty$

Решение:

1. Определение предела:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |A - x_n| < \epsilon$$

Тогда чтобы доказать что $1/2$ является пределом, нужно показать что:

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{3n-3}{6n-4} \right| < \epsilon$$

Те что $\left| \frac{1}{2} - \frac{3n-3}{6n-4} \right|$ может быть сколь угодно малым, покажем это:

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{3n-3}{6n-4} \right| = \frac{1}{6n-4} - \text{эта дробь может быть сколь угодно малой из принципа Архимеда}$$

Ч.Т.Д.

2. Если пределом последовательности является $-\infty$, то не существует такого числа, которое *подпирает* последовательность снизу и последовательность монотонно убывает. Запишем это в формальном виде:

$$\forall M \exists x_{n_0} : \forall n \geq n_0 : x_n < M$$

Докажем что для любого M можно найти такой x_{n_0} , начиная с которого, все члены меньше M :

$$3 - \ln(n+1) < M \Rightarrow n > e^{3-M} - 1 \text{ — ну вот он, можно округлить до целых и прибавить } 1$$

Теперь покажем монотонность последовательности:

$$x_{n+1} - x_n = 3 - \ln(n+2) - 3 + \ln(n+1) = \ln \frac{n+1}{n+2} < 0 \Rightarrow \text{последовательность монотонно убывает}$$

Получаем что, последовательность монотонно убывает и не ограничена снизу

Ч.Т.Д.

3. Если предел последовательности это ∞ , то множество ее частичных пределов — $\{-\infty, \infty\}$

Тогда докажем, что $\pm\infty$ являются частичными пределами, и что других частичных пределов нету:

$$(a) \ n - \text{ четное} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(1 - 1/n) \rightarrow \infty$$

$$(b) \ n - \text{ нечетное} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -n^2(1 + 1/n) \rightarrow -\infty$$

Других частичных пределов нету, тк в подпоследовательность входит либо бесконечное число четных и нечетных, тогда предел — ∞ , либо конечное число четных/нечетных и бесконечное число нечетных/четных, тогда с какого-то номера в подпоследовательности не будет четных/нечетных чисел, тогда частичные пределы — $\mp\infty$

Ч.Т.Д.

Вопрос 6

$$\begin{aligned} & 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n\sqrt[4]{n^3-2n} + n\sqrt{n^2+2n+8}}{\sqrt[3]{n^6-5n+4} - 3n^2 - 5n}; 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n-1} + 2^{n+5} + 4n^5}{n\sqrt{3n+5} - 9^{n+3}}; \\ & 3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^4+3n^2+5} - \sqrt{4n^4-6n^2-7}); 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 + \frac{4}{2n-7}}; \\ & 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n+15}{9n+8}\right)^{3n}; 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-5}{6n+7}\right)^{3n}; 7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n+1)!}{n! \cdot (n+4) + 5^n}; \\ & 8) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n^2 + \frac{4}{2n-7}}; 9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{8}-1}; 10) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+9+\dots+3n}{n^2+4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n\sqrt[4]{n^3-2n} + n\sqrt{n^2+2n+8}}{\sqrt[3]{n^6-5n+4} - 3n^2 - 5n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt[4]{n^3-2n} + n\sqrt{1+2/n+8/n^2}}{n\sqrt[3]{1-5/n^5+4/n^6} - n(3+5/n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1+2/n+8/n^2} \left(\frac{5\sqrt[4]{n^3-2n}}{n\sqrt{1+2/n+8/n^2}} + 1 \right)}{n\sqrt[3]{1-5/n^5+4/n^6} - n(3+5/n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+2/n+8/n^2} \left(\frac{5\sqrt[4]{n^3-2n}}{n\sqrt{1+2/n+8/n^2}} + 1 \right)}{\sqrt[3]{1-5/n^5+4/n^6} - (3+5/n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+2/n+8/n^2} \left(\frac{5\sqrt[4]{n^3-2n}}{n\sqrt{1+2/n+8/n^2}} + 1 \right)}{(3+5/n) \left(\frac{\sqrt[3]{1-5/n^5+4/n^6}}{3+5/n} - 1 \right)} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot \left(\frac{1}{3} - 1 \right)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n-1} + 2^{n+5} + 4n^5}{n\sqrt{3n+5} - 9^{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n/3 + 2^n \cdot 32 + 4n^5}{n\sqrt{3n+5} - 9^n \cdot 729} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n/3 \left(1 + \frac{2^n \cdot 32}{9^n/3} + \frac{4n^5}{9^n/3} \right)}{9^n \cdot 729 \left(\frac{n\sqrt{3n+5}}{9^n \cdot 729} - 1 \right)} = \frac{1/3 \cdot 1}{729 \cdot -1} = -\frac{1}{2187}$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^4 + 3n^2 + 5} - \sqrt{4n^4 - 6n^2 - 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 + 12}{\sqrt{4n^4 + 3n^2 + 5} + \sqrt{4n^4 - 6n^2 - 7}} =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 + 12}{2n^2 \sqrt{1 + 3/4n^2 + 5/4n^4} \left(1 + \frac{\sqrt{4n^4 - 6n^2 - 7}}{\sqrt{4n^4 + 3n^2 + 5}}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 + 12}{2n^2 \sqrt{1 + 3/4n^2 + 5/4n^4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{-9n^2 - 9}{4n^4 + 3n^2 + 5}}\right)} =$
 $\frac{9}{2 \cdot (1 + 1)} = \frac{9}{4}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 + \frac{4}{2n - 7}} = 1$ тк корень из чего-то положительного (что растёт медленнее корня) $\rightarrow 1$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n + 15}{9n + 8}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7(1 + 15/n)}{9(1 + 8/n)}\right)^{3n} = 0$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n - 5}{6n + 7}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-12}{6n + 7}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-12}{6n+7} \cdot 3n} = e^{-6}$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n + 1)!}{n! \cdot (n + 4) + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)! \left(\frac{n^2}{(n + 1)!} - 1\right)}{n!(n + 4) \left(1 + \frac{5^n}{n!(n + 4)}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(n + 1)}{n + 4} = -1$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n^2 + \frac{4}{2n - 7}} = 1$ по аналогии с 4
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{8} - 1}$ используя $\sqrt[n]{a} \approx 1 + \frac{\ln a}{n}$ при $n \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{8} - 1} = \frac{\ln 2}{\ln 8}$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n(n + 1)}{n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2(1 + 3/n)}{n^2(1 + 4/n^2)} = 3$

Ответ:

1. $-\frac{1}{2}$
2. $-\frac{1}{2187}$
3. $\frac{9}{4}$
4. 1
5. 0
6. e^{-6}
7. -1
8. 1
9. $\frac{\ln 2}{\ln 8}$
10. 3

Вопрос 7

Найти $\sup x_n$, $\inf x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$x_n = \frac{2n+1}{n} \arccos(-1)^n$$

Решение: Для начала рассмотрим последовательность при четных n :

$$x_n = \frac{2n+1}{n} \arccos 1 = 0 \quad - \text{очевидная хорошая подпоследовательность}$$

Теперь рассмотрим при нечетных n :

$$x_n = \frac{2n+1}{n} \pi = 2 + \frac{1}{n} \pi \quad - \text{понятно, что это убыв. подпоследовательность}$$

Понятно, что других подпоследовательностей нету, тк в последовательности может быть 3 случая:

1. Бесконечное количество четных и нечетных номеров, тогда такая подпоследовательность не сход, тк нельзя найти номер после которого ε можно взять любым, тк при четных можно найти 0, а при нечетных найти >2
2. При конечном количестве четных и бесконечном количестве нечетных, можно найти номер с которого будут только нечетные, те подпоследовательность сход к 2
3. По аналогии с 2, но подпоследовательность сход к 0

Теперь мы готовы сказать, что $\sup x_n = 3\pi$, $\inf x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ — из определения $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq n} x_m)$

Ответ:

1. $\sup x_n = 3\pi$
2. $\inf x_n = 0$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
4. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$

Вопрос 8

Определить сходится ли последовательность:

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2^n}$$

Решение: По критерию Коши: Если последовательность фундаментальна т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \exists p \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \quad (1)$$

То последовательность сходится, для нашей последовательности возьмем $p=1$:

$$x_n + \frac{1}{2^{n+1}} - x_n = \frac{1}{2^{n+1}} \quad (2)$$

Понятно, что $\frac{1}{2^{n+1}}$ может быть сколь угодно малым \Rightarrow последовательность сходится

Вопрос 9

Используя признак Вейерштрасса, доказать, что данная последовательность сходится, и найти ее предел

$$x_n = \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{13}{12} \cdots \frac{4n+1}{5n-3}$$

Решение: Нашу последовательность можно переписать в виде:

$$x_n = x_{n-1} \frac{4n+1}{5n-3}, \quad n_1 = \frac{5}{2}$$

Тогда покажем, что она огр. снизу и монотонно убывает:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{4n+1}{5n-3}$$

Очевидно, что при $n > 3$:

$$\frac{4n+1}{5n-3} < 1$$

Наша последовательность убывает, и очевидно она огр. снизу 0, тк каждый член получается путем, умножения положительных чисел. Тогда найдем предел:

$$A = A \cdot \frac{4n+1}{5n-3} \Rightarrow A = 0$$

Те наша последовательность имеет предел 0

Ответ:

$$x_n = \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{13}{12} \cdots \frac{4n+1}{5n-3} \rightarrow 0$$

Вопрос 10

Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{4n^2 - 8n - 5}$$

Решение: Через метод неопределенных коэффициентов найдем разложение на две дроби:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(2n+1)(2n-5)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-5} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1}$$

Трудно не заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-5} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1} - \frac{2}{3}$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{4n^2 - 8n - 5} = -\frac{2}{3}$$

Ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{4n^2 - 8n - 5} = -\frac{2}{3}$$

Вопрос 11

Доказать по определению предела функции в точке (по Коши):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6$$

Решение: Из определения предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} - 6 \right| < \varepsilon$$

Раскроем модуль, тогда:

$$\left| \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} - 6 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{5x^2 - 10x + 5}{x - 1} \right| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}$$

Понятно, что если мы возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, то все ок

Вопрос 12

Доказать, что данный предел не существует:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} x$$

Решение: Чтобы показать, что предела не существует, нужно найти две последовательности, которые сходятся в разные точки:

$$x_{n_1} = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad x_{n_2} = \pi q, \quad q \in \mathbb{Z}$$

Понятно, что x_{n_1} идет к 1, а x_{n_2} идет к 0, те ~~бесконечность~~ предел не существует

Вопрос 13

Вычислить пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{10 - x - 6\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt[3]{x}}$

3. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \left(x - \sqrt[3]{2x-3} \right)}{\sin(\pi x/2) - \sin[(x-1)\pi]}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2} \right)^{1/\ln(1+\operatorname{tg}^2 3x)}$

6. $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \left(\frac{2x-1}{x+1} \right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}$

7. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + (4x - \pi) \cos \frac{x}{4x - \pi}}{\lg(2 + \operatorname{tg} x)}$

8. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 - \ln x)}{\ln(1 - \lg x)}$

Решение:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x + 1)^2(x - 1)}{(x + 2)(x + 1)} = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{10 - x - 6\sqrt{1 - x}}{2 + \sqrt[3]{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{10 - x - 18\sqrt{1 - \frac{x}{3}}}{2 + 2\sqrt[3]{\frac{t}{8}} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{18 - t - 18(1 - \frac{x}{18})}{2 - 2(1 - \frac{t}{24})} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x} = \lim_{t \rightarrow \pi/0} \frac{\ln(\operatorname{tg}(t + \pi/4))}{\cos(2t + \pi/2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{t+1}{1-t} + 1 - 1\right)}{-\sin 2t} = -1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x - \sqrt[3]{2x - 3})}{\sin(\pi x/2) - \sin[(x - 1)\pi]} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t + 2 - \sqrt[3]{2t - 3})}{\sin(\pi t/2) - \sin[(t - 1)\pi]} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t + 2 - (1 + \frac{1}{3} \cdot 2t))}{2 \sin(\frac{-\pi}{4}t) \cos(\frac{3\pi t + 4\pi}{4})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t/3}{\pi t/2} = \frac{2}{3\pi}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)^{1/\ln(1 + \operatorname{tg}^2 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[\frac{-\sin^2 \frac{x}{2}}{\ln(1 + \operatorname{tg}^2 3x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[\frac{-\sin^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 3x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[\frac{-\frac{x^2}{4}}{9x^2} \right] = e^{-\frac{1}{36}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \left(\frac{2x - 1}{x + 1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} e^{\frac{\ln\left(\frac{2x - 1}{x + 1}\right)}{\sqrt[3]{x} - 1}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1 + 0} \left(\frac{2x - 1}{x + 1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x} - 1)} = 0, \lim_{x \rightarrow 1 - 0} \left(\frac{2x - 1}{x + 1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x} - 1)} = +\infty$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + (4x - \pi) \cos \frac{x}{4x - \pi}}{\lg(2 + \operatorname{tg} x)},$$

тк \cos огр. можно на него ~~положить~~ забыть $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + (4x - \pi) \cos \frac{x}{4x - \pi}}{\lg(2 + \operatorname{tg} x)} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\lg(2 + \operatorname{tg} x)} +$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{0}{\lg(2 + \operatorname{tg} x)} = \frac{1}{\lg 3}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 - \ln x)}{\ln(1 - \lg x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(-\ln x)}{\ln(-\lg x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(-\ln x)}{\ln\left(\frac{-\ln x}{\ln 10}\right)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(-\ln x)}{\ln(-\ln x) - \ln(\ln 10)} = 1$$

Вопрос 14

В куб с ребром a вписан прямой круговой цилиндр так, что его ось совпадает с диагональю куба, а окружности оснований касаются граней куба. При каких размерах цилиндра его объем будет наибольшим?

Вопрос 15

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + 3x)^{1/3} - 1) / \operatorname{tg} x - \exp[-\operatorname{sh} x] - x^2(x + 5)/(x + 6)}{\ln(2 \exp[x^2] - 1) / \sin x - \operatorname{arctg} 2x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right) \frac{1}{\sin(x - 1)}$$

1. Разложим слагаемые в ряд тейлора:

$$\frac{(1+3x)^{1/3} - 1}{\operatorname{tg} x} = \frac{x - x^2 + \frac{5x^3}{3} - \frac{10x^4}{3} + o(x^4)}{x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)} = \frac{3 - 3x + 5x^2 - 10x^3}{3 + x^2} + o(x^3)$$

$$\exp[-\operatorname{sh} x] = 1 - x - \frac{x^3}{6} + \frac{(-x - x^3/6)^2}{2} + \frac{(-x - x^3/6)^3}{6} + o(x^3) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\frac{\ln(2\exp[x^2] - 1)}{\sin x} = \frac{\ln(1 + 2x^2 + x^4 + o(x^4))}{x - x^3/6 + o(x^4)} = \frac{2x^2 - x^4 + o(x^4)}{x - x^3/6 + o(x^4)} = \frac{12x - 6x^3}{6 - x^2} + o(x^3)$$

$$\operatorname{arctg} 2x = 2x - \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$$

Подставляем всю эту гадостоть в уравнение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - 3x + 5x^2 - 10x^3}{3 + x^2} - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2(x+5)}{x+6} + o(x^3)}{\frac{12x - 6x^3}{6 - x^2} - 2x + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-3x + 4x^2 - 10x^3}{3 + x^2} + \frac{-12x^2 + 9x^3 + 2x^4}{6(6+x)} + o(x^3)}{\frac{-36x^3 + 8x^5}{-18 + 3x^2} + o(x^3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-291x^3 - 96x^4 + 3x^5}{6(6+x)(3+x^2)} + o(x^3)}{\frac{-36x^3 + 8x^5}{-18 + 3x^2} + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-291x^3 - 96x^4 + 3x^5)(-18 + 3x^2)}{6(6+x)(3+x^2)(-36x^3 + 8x^5)} + o(x^3) = \frac{-18 \cdot -291}{6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot -36} = -\frac{97}{72}$$

2. Ну по аналогии унф, заменим $t = x - 1$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(t+1)} - \frac{2}{t^2 + 2t} \right) \frac{1}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t^2 + 2t - 2(t - t^2/2 + t^3/3)}{(t^2 + 2t)(t - t^2)} \right) \frac{1}{\sin t} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2t^2 - 2/3t^3}{2t^2} \right) \frac{1}{\sin t} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 - 1/3t) \frac{1}{\sin t} = e \frac{1}{\sin t} \cdot \frac{t}{3} = e^{-1/3}$$