

Матан Лаба

Павел Андреев, Григорий Горбушкин, Евгений Турчанин

Вопрос 1

Объяснить, почему разность назад $f_{-}(x_0)$ – разумное приближение производной в точке x_0 .

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad (1)$$

$$f'(x_0 - h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0 - h) + h) - f(x_0 - h)}{h}, \quad (2)$$

При $h \rightarrow 0$, $f'(x_0 - h) \rightarrow f'(x_0)$. Значит, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0 - h) + h) - f(x_0 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(\xi), \quad (3)$$

где $\xi \in [x_0 - h, x_0]$, тогда, подставляя ?? в ??

$$|f'(x_0) - f_{-}(x_0)| \leq \frac{M_2 h}{2} \quad (4)$$

Вопрос 2

Формально показать, как получаются формулы для оценки погрешности в случае приближения производной первой (односторонней) разностью.

Вопрос 3

Объяснить, почему центральная разность $f_1(x_0)$ – разумное приближение производной в точке x_0 .

Вопрос 4

Формально показать, как получаются формулы для оценки погрешности в случае приближения производной центральной разностью.

Вопрос 5

Узнать, как хранятся числа, скажем, в python. Узнать, что такое машинная точность. Объяснить, почему в python $0.1 + 0.2 \neq 0.3$.

Вопрос 6

1. Выбрать любую дважды дифференцируемую функцию f .
2. Аппроксимировать производную с помощью разностей $f_{\pm}(x_0)$, $f_{\circ 1}(x_0)$.
3. Построить график зависимости $\Delta(x, \varepsilon)$ от h , $h \in (10^{-20}, 1)$,

$$\Delta(x, h) = |f'(x) - f_{\pm, \circ 1}|,$$

при разных x (шкала по оси y – логарифмическая!).