Матан инд
Вариант №19

Евгений Турчанин

Вопрос 1

Доказать что: $\frac{1^4}{1\cdot 3}+\frac{2^4}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^4}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}$

Решение: Докажем через индукцию:

1. Покажем что для $n=1$ верно:

$$\frac{1(1+1)(1^2+1+1)}{6(2+1)}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{1^4}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$$

2. Пусть верно для n

3. Тогда докажем, что верно для $n+1$:

$$\underbrace{\frac{1^4}{1\cdot 3}+\frac{2^4}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^4}{(2n-1)\cdot(2n+1)}}_{\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}}+\frac{(n+1)^4}{(2n+1)\cdot(2n+3)}\Rightarrow$$

Нужно доказать, что:

$$\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}+\frac{(n+1)^4}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)(n^2+3n+3)}{6(2n+3)}$$

~~Трудно не заметить, что так оно и есть~~ Давайте покажем, что это так:
Сократим все на $n+1$ и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{n(2n+3)(n^2+n+1)}{6(2n+1)(2n+3)}+\frac{6(n+1)^3}{6(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{(2n+1)(n+2)(n^2+3n+3)}{6(2n+1)(2n+3)}$$

Сократим на знаменатели и раскроем скобки:

$$2x^4+11x^3+23x^2+21x+6=2x^3+11x^2+23x+21+6\Rightarrow$$

$$0=0$$

Ч.Т.Д.

Вопрос 2

Доказать что:

$$\sum_{k=1}^{k}\frac{1}{k^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$$

Решение: Докажем опять ~~двадцатьпять~~ через индукцию:

1. Покажем что для $n=1$ верно:

$$\frac{1}{1^2}=1$$

$$2-\frac{1}{1}=1$$

1

2. Пусть верно для n

3. Тогда докажем, что верно для $n+1$:
   Те нужно доказать что верно:
$$\underbrace{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}_{\leqslant 2-\frac{1}{n}}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}$$
   Приведем к общему знаменателю:
$$\frac{(2n-1)(n+1)^2+n}{(n+1)^2n}\leqslant\frac{(2n+1)(n+1)n}{(n+1)^2n}$$
   Сократим на знаменатель:
$$(2n-1)(n+1)^2+n\leqslant(2n+1)(n+1)n$$
   Раскроем скобки:
$$2n^3+4n^2+2n-n^2-2n-1+n\leqslant 2n^3+2n^2+n^2+n\Rightarrow$$
$$-1\leqslant 0$$
   Ч.Т.Д.

Вопрос 3

$C_n^0C_{2n}^n+C_n^1C_{2n}^{n-1}+C_n^2C_{2n}^{n-2}\ldots C_n^nC_{2n}^0=C_{3n}^n$

Решение: Докажем по индукции:

1. Покажем что для $n=1$ верно:
$$C_1^0C_2^1+C_1^1C_2^0=1\cdot 2+1=3$$
$$C_3^1=3$$
   Ну, показал получается

2. Пусть верно для n

3. Тогда докажем, что верно для $n+1$:
   Нужно показать, что верно:
$$C_{n+1}^0C_{2n+2}^{n+1}+C_{n+1}^1C_{2n+2}^n\ldots C_{n+1}^{n+1}C_{2n+2}^0=C_{3n+3}^{n+1}$$
   Перепишем эти выражения ввиде суммы:
$$\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^kC_{2n+2}^{n+1-k}=\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^kC_{2n+2}^{n+1-k}+1$$
   По формуле $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$ перепишем наше выражение:
$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k+C_n^{k-1})(C_{2n}^{n+1-k}+2C_{2n}^{n-k}+C_{2n}^{n-1-k})+1$$
   Перепишем это выражение через факториалы:
$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\right)\left(\frac{2n!}{(n+1-k)!(n-1+k)!}+2\frac{2n!}{(n-k)!(n+k)!}+\frac{2n!}{(n-1-k)!(n+1+k)!}\right)=$$
$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!(n+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)}\right)\left(\frac{2n!((n+k)(n+k+1)+2(n+1-k)(n+k+1)+(n-k)(n+1-k))}{(n-k)!(n+k)!(n+1-k)(n+k+1)}\right)\Rightarrow$$