Вдв
Решение дз №5

Евгений Турчанин

Вопрос 1

1. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{7^x+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\ln x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Решение:

1. Тк функции $\sin^2 x$ и 7^x - четные, то можно сказать что сумма интегралов с x и $-x$ равна начальному интегралу/2:

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{7^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{7^x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(-x)}{7^{-x}+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x(2+7^x+7^{1/x})}{2+7^x+7^{1/x}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x = \pi/2$$

Тогда ответ: $\pi/4$

2. $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 x + 2\cos x \sin x + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x + \cos x|\,\mathrm{d}x =$$
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\,\mathrm{d}x = 1+1 = 2$$

3. $$\int_{0}^{1} \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \frac{e^x}{x+1} - \frac{e^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} \frac{e^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Пусть $u = e^x;\ \ \mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x;\ \ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x;\ v = -\dfrac{1}{x+1}$

Тогда:

$$\int_{0}^{1} \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} \frac{e^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x - \left(-e^x\frac{1}{x+1} + \int_{0}^{1} e^x\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{e^x}{x+1} = \frac{e}{2} - 1$$

Ответ:

1. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{7^x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$
2. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x = 2$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{e}{2} - 1$

Вопрос 2

1. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$

2. $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Решение:

1. Пусть $I(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$, тогда:

$$I(t)'_t = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \frac{x^t-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\frac{x^t-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^t\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t+1}$$

$$I(t) = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \ln(t+1) + C$$

При $t = 0$, начальный интеграл равен 0 поэтому $C = 0$, и в начальном интеграле $t = 1$, поэтому ответ: $\ln 2$

2.

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Пусть $I(t) = \int_0^1 \frac{\ln(tx+t)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$, тогда:

$$I(t)'_t = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \frac{\ln(tx+t)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\ln(tx+t)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{t(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4t}$$

$$I(t) = \int \frac{\pi}{4t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\ln t + C$$

При t=1 ответ: $0 + C$, $C = \frac{\pi}{8}\ln 2$ - P.S. видимо так, я не успеваю дописать