

Матан инд
Вариант №18

Евгений Турчанин

Вопрос 1

Найти площадь фигуры, ограниченную кривыми:

1. $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2$

2. $x = 2 \cos t - \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t$

Решение:

1. Перейдем в полярные координаты:

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$r^4 = a^2 r^2 \cos^2 \varphi \Rightarrow r = \pm a \cos \varphi,$$

Площадь фигуры в полярных координатах равна:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{a^2}{4} \left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{a^2 \pi}{2}.$$

2. Для поиска площади фигуры воспользуемся формулой:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |x(t)y'(t) - x'(t)y(t)| \, dt.$$

Посчитаем производные:

$$x'(t) = -2 \sin t + 2 \sin 2t,$$

$$y'(t) = 2 \cos t - 2 \cos 2t.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2 \cos t - \cos 2t)(2 \cos t - 2 \cos 2t) - (-2 \sin t + 2 \sin 2t)(2 \sin t - \sin 2t) \, dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 t - 4 \cos t \cos 2t - 2 \cos 2t \cos t + 2 \cos^2 2t + 4 \sin^2 t - 2 \sin t \sin 2t - 4 \sin 2t \sin t + 2 \sin^2 2t) \, dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 6 - 6 \cos 2t \cos t - 6 \sin 2t \sin t \, dt = 3 \int_0^{2\pi} 1 \, dt - 3 \int_0^{2\pi} \cos 2t \cos t \, dt - 3 \int_0^{2\pi} \sin 2t \sin t \, dt = \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

Ответ:

1. $\frac{a^2 \pi}{2}$.

2. 6π .

Вопрос 2

Найти длину кривой, заданной уравнением:

1. $r = \frac{2}{\cos^4(\varphi/4)}$
2. $2(y^2 + z^2) = x$, $z \cos 2x - y \sin 2x = 0$, $0 \leq x < \pi/4$

Решение:

1. В полярных координатах длина кривой равна:

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + r_\phi'^2} d\varphi$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{4}{\cos^8(\varphi/4)} + \frac{4 \sin^2(\varphi/4)}{\cos^{10}(\varphi/4)}} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2}{\cos^5(\varphi/4)} d\varphi = 8 \int_0^{2\pi} \frac{d(\varphi/4)}{\cos^5(\varphi/4)}, \end{aligned}$$

возьмем интеграл по частям, $u = \frac{1}{\cos^3(t)}$, $dv = \frac{dt}{\cos^2(t)}$

$$\int \frac{dt}{\cos^5(t)} = \frac{1}{\cos^3(t)} \operatorname{tg}(t) - \int \frac{3 \tan^2(t)}{\cos^3(t)} dt = \frac{1}{\cos^3(t)} \operatorname{tg}(t) - \int \frac{3}{\cos^5 t} dt + \int \frac{3}{\cos^3 t} dt,$$

по аналогии для $\frac{1}{\cos^3(t)}$:

$$\int \frac{1}{\cos^3(t)} dt = \frac{1}{\cos(t)} \operatorname{tg}(t) - \int \frac{1}{\cos^3 t} dt + \int \frac{dt}{\cos t},$$

ну а $\int \frac{dt}{\cos t} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin t + 1}{\sin t - 1} \right|$, тогда

$$\int \frac{dt}{\cos^5 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{4 \cos^3 t} + \frac{\operatorname{tg} t}{8 \cos t} + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{\sin t + 1}{\sin t - 1} \right|,$$

тогда в подстановке от 0 до 2π

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi/4}{\cos^5 \varphi/4} = \frac{1}{4} \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi/4}{4 \cos^3 \varphi/4} + \frac{\operatorname{tg} \varphi/4}{8 \cos \varphi/4} + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{\sin \varphi/4 + 1}{\sin \varphi/4 - 1} \right| \right]_0^{2\pi} = \infty,$$

получается, что длина кривой бесконечна ~~не предел~~

2. Выразим y , z через x :

$$z \cos 2x - y \sin 2x = 0 \Rightarrow z(\cos^2 x - \sin^2 x) - 2y \sin x \cos x = 0 \Rightarrow z(1 - \operatorname{tg}^2 x) - 2y \operatorname{tg} x = 0,$$

отсюда

$$z = \frac{2y \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

с другой стороны

$$z = \sqrt{\frac{x - 2y^2}{2}} \Rightarrow,$$

объединяем и получаем

$$\frac{4y^2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - 2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x} = \frac{x - 2y^2}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{x(1 - 2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)}{2(1 + 2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{x}(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{\sqrt{2}(1 + \operatorname{tg}^2 x)},$$

тогда

$$z = \sqrt{\frac{x - \frac{x(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2}}{2}} = \sqrt{\frac{4x \operatorname{tg}^2 x}{2}} = \sqrt{2x} \operatorname{tg} x.$$

Для вычисления длины кривой есть формула

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx,$$

подставим производные

$$L = \int_0^{\pi/4}$$

Вопрос 3