Нахождение длины кривой

Даны уравнения, задающие кривую:

$$2(y^2+z^2) = x \tag{1}$$
$$z\cos(2x) - y\sin(2x) = 0 \tag{2}$$
$$0 \le x < \pi/4 \tag{3}$$

Требуется найти длину этой кривой.

1. Параметризация кривой

Из уравнения (1) получаем:

$$y^2 + z^2 = \frac{x}{2}$$

Поскольку $x \ge 0$, мы можем положить $R(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$. Тогда $y^2 + z^2 = R(x)^2$. Параметризуем y и z с помощью угла $\theta(x)$:

$$y(x) = R(x)\cos(\theta(x)) = \sqrt{\frac{x}{2}}\cos(\theta(x))$$
$$z(x) = R(x)\sin(\theta(x)) = \sqrt{\frac{x}{2}}\sin(\theta(x))$$

Подставим эти выражения в уравнение (2):

$$\sqrt{\frac{x}{2}}\sin(\theta(x))\cos(2x) - \sqrt{\frac{x}{2}}\cos(\theta(x))\sin(2x) = 0$$

Если $x > 0$, то $\sqrt{\frac{x}{2}} \neq 0$. Разделив на $\sqrt{\frac{x}{2}}$, получим:

$$\sin(\theta(x))\cos(2x) - \cos(\theta(x))\sin(2x) = 0$$

Используя формулу синуса разности углов $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$, получаем:

$$\sin(\theta(x) - 2x) = 0$$

Это означает, что $\theta(x) - 2x = n\pi$ для некоторого целого числа n. Следовательно, $\theta(x) = 2x + n\pi$.

Подставляем $\theta(x)$ обратно в выражения для $y(x)$ и $z(x)$:

$$y(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}\cos(2x + n\pi)$$
$$z(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}\sin(2x + n\pi)$$

Рассмотрим два случая для n:

- Если n четное ($n = 2k$ для целого k): $\cos(2x+2k\pi) = \cos(2x)$ и $\sin(2x+2k\pi) = \sin(2x)$. Тогда первая ветвь кривой:

$$y_1(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}\cos(2x), \quad z_1(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}\sin(2x)$$

- Если n нечетное ($n = 2k+1$ для целого k): $\cos(2x + (2k+1)\pi) = -\cos(2x)$ и $\sin(2x+(2k+1)\pi) = -\sin(2x)$. Тогда вторая ветвь кривой:

$$y_2(x) = -\sqrt{\frac{x}{2}}\cos(2x), \quad z_2(x) = -\sqrt{\frac{x}{2}}\sin(2x)$$

Кривая состоит из двух симметричных ветвей. Длина каждой ветви одинакова. Рассчитаем длину одной ветви (например, первой) и умножим на 2. Параметрическое представление одной ветви кривой: $\vec{r}(x) = (x, y_1(x), z_1(x))$. Для удобства далее $y(x) = y_1(x)$ и $z(x) = z_1(x)$.

$$y(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}\cos(2x), \quad z(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}\sin(2x)$$

2. Вычисление производных

Нам нужны производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$. Пусть $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}x^{1/2}$. Тогда $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{2x}}$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\cos(2x)\right) = f'(x)\cos(2x) + f(x)(-\sin(2x)\cdot 2) \\ &= \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{2x}} - 2\sqrt{\frac{x}{2}}\sin(2x) = \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{2x}} - \sqrt{2x}\sin(2x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\sin(2x)\right) = f'(x)\sin(2x) + f(x)(\cos(2x)\cdot 2) \\ &= \frac{\sin(2x)}{2\sqrt{2x}} + 2\sqrt{\frac{x}{2}}\cos(2x) = \frac{\sin(2x)}{2\sqrt{2x}} + \sqrt{2x}\cos(2x)\end{aligned}$$

3. Вычисление элемента длины дуги

Найдем сумму квадратов производных:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= \left(\frac{\cos(2x)}{2\sqrt{2x}} - \sqrt{2x}\sin(2x)\right)^2 \\ &= \frac{\cos^2(2x)}{8x} - 2\cdot\frac{\cos(2x)}{2\sqrt{2x}}\cdot\sqrt{2x}\sin(2x) + (\sqrt{2x}\sin(2x))^2 \\ &= \frac{\cos^2(2x)}{8x} - \cos(2x)\sin(2x) + 2x\sin^2(2x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 &= \left(\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{2x}} + \sqrt{2x}\cos(2x)\right)^2 \\ &= \frac{\sin^2(2x)}{8x} + 2\cdot\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{2x}}\cdot\sqrt{2x}\cos(2x) + (\sqrt{2x}\cos(2x))^2 \\ &= \frac{\sin^2(2x)}{8x} + \sin(2x)\cos(2x) + 2x\cos^2(2x)\end{aligned}$$

Суммируя:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 &= \frac{\cos^2(2x)+\sin^2(2x)}{8x} + 2x(\sin^2(2x)+\cos^2(2x)) \\ &= \frac{1}{8x} + 2x\end{aligned}$$

Элемент длины дуги ds для кривой, заданной функциями $y(x)$ и $z(x)$, вычисляется по формуле:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$$

Тогда:

$$ds = \sqrt{1 + \frac{1}{8x} + 2x}dx = \sqrt{\frac{8x+1+16x^2}{8x}}dx = \sqrt{\frac{(4x+1)^2}{8x}}dx$$

Поскольку $0 \le x < \pi/4$, то $4x+1>0$, поэтому $|4x+1| = 4x+1$.

$$ds = \frac{4x+1}{\sqrt{8x}}dx = \frac{4x+1}{2\sqrt{2}\sqrt{x}}dx$$

4. Интегрирование для нахождения длины одной ветви

Длина одной ветви L_1 вычисляется как интеграл от $x=0$ до $x=\pi/4$:

$$L_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{4x+1}{2\sqrt{2}\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{4x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$L_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} (4x^{1/2} + x^{-1/2}) dx$$

Интегрируем:

$$\int (4x^{1/2} + x^{-1/2}) dx = 4\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{8}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C$$

Вычисляем определенный интеграл (интеграл является несобственным в точке $x = 0$, но он сходится):

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{8}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2}\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(\frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{3/2} + 2\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/2}\right) - \left(\frac{8}{3}(0)^{3/2} + 2(0)^{1/2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{8}{3}\frac{\pi\sqrt{\pi}}{4^{3/2}} + 2\frac{\sqrt{\pi}}{4^{1/2}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{8}{3}\frac{\pi\sqrt{\pi}}{8} + 2\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\pi\sqrt{\pi}}{3} + \sqrt{\pi}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{3} + 1\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{\pi + 3}{3} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}(\pi + 3)}{6\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Рационализируем знаменатель:

$$L_1 = \frac{\sqrt{\pi}(\pi + 3)\sqrt{2}}{6\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}(\pi + 3)}{12}$$

5. Общая длина кривой

Кривая состоит из двух симметричных ветвей, поэтому общая длина L равна $2L_1$:

$$L = 2 \cdot L_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2\pi}(\pi + 3)}{12}$$

$$L = \frac{\sqrt{2\pi}(\pi + 3)}{6}$$

Окончательный ответ: Длина кривой равна $\frac{\sqrt{2\pi}(\pi + 3)}{6}$.