Санкт-Петербургский национальный исследовательский институт информационных технологий, механики и оптики

Физический факультет

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2.8
"Определение коэффициента вязкости воздуха методом капилляра"

Группа: Z3144
Студент: Турчанин Евгений

---

1 Цели работы

1. Экспериментальная проверка закономерностей движения физического маятника.
2. Определение вязкости воздуха при комнатной температуре.

2 Задачи

Получить зависимость изменения давления в сосуде с течением времени.

3 Теоретическое введение

Вязкость (внутреннее трение) – свойство газов и жидкостей (текучих сред) сопротивляться перемещению одной их части относительно другой. Вязкость проявляется в возникновении сил внутреннего трения между слоями среды, движущимися друг относительно друга или относительно поверхности твердого тела. Явление вязкости – одно из явлений переноса, поскольку действующие между слоями силы приводят к переносу импульса между слоями среды. На микроскопическом уровне возникновение силы внутреннего трения обусловлено двумя процессами: во-первых, молекулы, переходя из одного слоя в другой, переносят средний импульс своего слоя в соседний, во-вторых, на границе между слоями происходит взаимное выравнивание импульсов молекул за счет сил межмолекулярного взаимодействия. Первый механизм передачи импульса преобладает в разреженных газах, второй – в жидкостях.
Рассмотрим течение среды в направлении оси Ox (см. Рис. 1) такое, что скорость слоев уменьшается в направлении оси Oy. На границе ab между двумя слоями, происходит перенос проекции импульса частиц среды в направлении оси Oy. С макроскопической точки зрения это означает, что на границе слоёв возникает сила трения F, стремящаяся затормозить верхний, более быстрый, слой и ускорить нижний, более медленный. Эта сила называется силой вязкого (или внутреннего) трения.

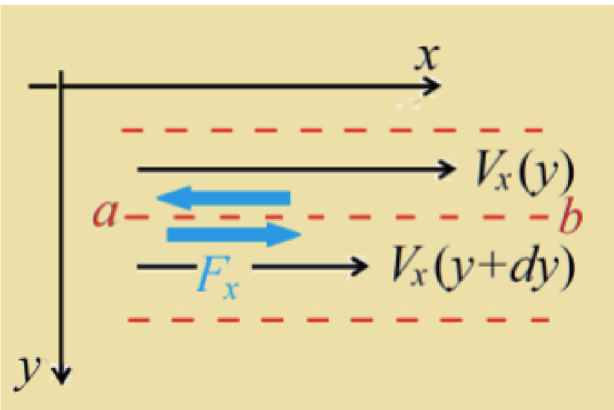


Рис. 1: На границе ab между соседними слоями, имеющими разную скорость, действует сила F_x внутреннего трения.

Для многих сред величина силы внутреннего трения F_x, действующая на участке площадью границы между слоями, пропорциональна площади участка и градиенту скорости слоев. В этом случае на слой, лежащий ниже границы ab на рисунке 1, действует сила

$$F_x = -\eta \frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}y} \Delta S \qquad (1)$$

На слой, лежащий выше границы, действует такая же по модулю сила, но направленная противоположно. Коэффициент пропорциональности в формуле (1) называется коэффициентом динамической вязкости. Этот коэффициент численно равен модулю силы, действующей на единицу площади поверхности каждого из взаимодействующих слоёв, при градиенте скорости, численно равном единице. В системе СИ коэффициент динамической вязкости измеряется в · . Закон вязкого трения (1) был установлен Ньютоном и носит его имя, а среда, в которой он выполняется, называются ньютоновской жидкостью. Примерами ньютоновской жидкости являются все низкомолекулярные вещества в жидком состоянии и их гомогенные смеси. Закону (1) подчиняется и течение не сильно разреженных газов

Принято подразделять течение по его характеру на ламинарное и турбулентное. Ламинарным называется такое течение, при котором микрообъемы (частицы) среды движутся по устойчивым траекториям и среду можно рассматривать как набор слоев движущихся с разными скоростями. Турбулентным (вихревым) течением называется такое, при котором движение частиц среды становится неустойчивым и хаотичным. Такое течение сопровождается перемешиванием и пульсациями скорости и давления. Для потока с заданными геометрическими границами по мере достижения достаточно больших скоростей ламинарное течение переходит в турбулентное (см. Приложение 1)

При стационарном ламинарном течении ньютоновской несжимаемой жидкости по длинной трубке круглого сечения в ней почти на всём протяжении за исключением небольших областей вблизи концов устанавливается параболическое распределение скоростей (см. Рис. 2):

$$v(r) = v_0(1 - r^2/R^2), \tag{2}$$

где $v(r)$ – скорость движения жидкости на расстоянии r от оси трубки; v_0 – скорость на оси трубки; R – радиус трубки.

При этом объем жидкости, проходящий в единицу времени через сечение трубки подчиняется формуле Пуазейля:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi R^4}{8\eta l}(P_1 - P_2), \tag{3}$$

Здесь $\mathrm{d}V$ – объем жидкости, проходящей через сечение трубки за время $\mathrm{d}V$; R – радиус трубки; P_1, P_2 давления в двух сечениях

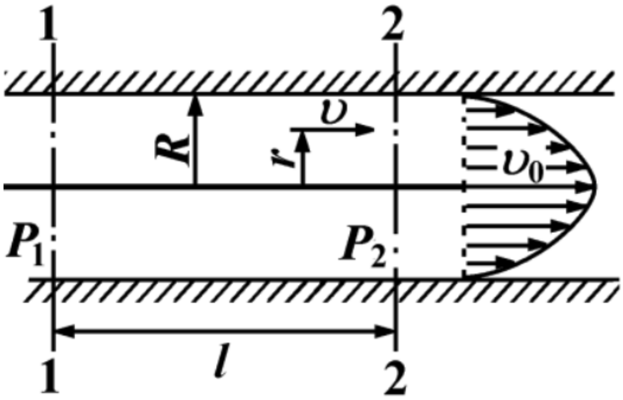


Рис. 2: Распределение скорости жидкости в сечении круглой трубки при ламинарном течении. В соответствии с формулой Пуазейля (2) объем жидкости протекающей в единицу времени через сечение трубки определяется отношением разности давлений P_1 и P_2 в двух сечениях к расстоянию l между сечениями.

трубки, находящихся друг от друга на расстоянии l.

В лабораторной работе изучается процесс вытекания воздуха в атмосферу из большого сосуда (см Рис. 4) через капилляр – длинную трубку с малым внутренним диаметром ($d < 1$ мм). В сосуде с помощью насоса создается избыточное по отношению к атмосфере давление. После отключения насоса по мере вытекания воздуха давление в сосуде падает. Быстрота вытекания воздуха и зависимость давления в сосуде от времени зависят от атмосферного давления P_a, объема сосуда V_c , радиуса R капилляра, его длины L и вязкости воздуха η. Измерение зависимости давления в сосуде $P_c(t)$ от времени позволяет по известным параметрам установки вычислить вязкость воздуха.

Формула (3) выводится в предположении, что среда, текущая

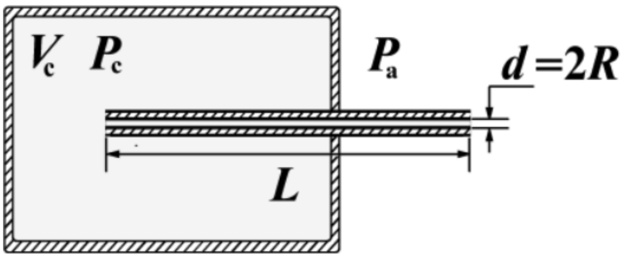


Рис. 3: Основная часть лабораторной установки – сосуд достаточно большого объема V_c, в котором создается давление P_c больше, чем давление P_a в окружающей атмосфере и тонкий капилляр длиной L и радиусом R, соединяющий сосуд с атмосферой.

по трубке не сжимаема и имеет плотность, независящую от давления. При течении газа вместе с изменением давления будет меняться и его плотность, поэтому формула, строго говоря, будет справедлива только для небольших расстояний l, на которых давление и плотность будут меняться незначительно. Если в качестве такого расстояния взять бесконечно малое смещение $\mathrm{d}x$ вдоль трубки, то формула (3) преобразуется к виду

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{P(x) - P(x + \mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}, \tag{4}$$

где $P(x)$ - давление в точке с координатой x. Перейдем в этом уравнении от прошедшнего объема $\mathrm{d}V$ к перенесенной массе $\mathrm{d}m$:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{p\,\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi R^4 \rho}{8\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}, \tag{5}$$

где ρ - плотность газа.
В лабораторной работе изучается течение воздуха при давлениях на несколько десятков процентов превышающих атмосферное. При таких давлениях воздух ведет себя как идеальный газ, и в состоянии термодинамического равновесия при температуре T для массы m газа выполняется уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{M}RT, \tag{6}$$

где V - объём, занимаемый газом, M - молярная масса газа, R - универсальная газовая постоянная. Плотность газа ρ в соответствии с этим уравнением выражается через параметры состояния газа следующим образом

$$\rho = \frac{PM}{RT}, \tag{7}$$

При дальнейшем рассмотрении будем полагать, что течение газа происходит достаточно медленно, чтобы формула (7) выполнялась в каждом сечении капилляра, и уравнение Менделеев-Клапейрона (6) было справедливо для газа в сосуде в каждый момент времени. Кроме того будем считать температуру газа постоянной. Тогда плотность газа по уравнению (7) будет пропорциональна давлению.
Теоретически вязкость η идеального газа определяется соотношением

$$\eta = \frac{1}{3}V_{\text{ср}}\lambda\rho, \tag{8}$$

где $V_{\text{ср}}$ - средняя арифметическая скорость молекул газа; λ - средняя длина свободного пробега молекул. Средняя скорость молекул зависит только от температуры газа:

$$V_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \tag{9}$$

и при постоянной температуре не зависит от плотности газа. Средняя длина свободного пробега молекул газа определяется концентрации молекул n:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \tag{10}$$

и, поскольку концентрация связана с плотностью соотношением: $n = \rho/m_0$, где m_0 - масса одной молекулы, из формулы (10) следует, что средняя длина свободного пробега зависит от плотности обратно

пропорционально. Таким образом, при постоянной температуре в формуле вязкости (8) множитель $V_{\text{ср}}$ не зависит от плотности, множитель λ изменяется обратно пропорционально плотности. Следовательно, сама вязкость не зависит от плотности.
При стационарном течении газа по капилляру масса, переносимая в единицу времени через каждое сечение капилляра должна быть одинакова, т. е. поток массы $\mathrm{d}m\ \mathrm{d}t = const$ на всем протяжении капилляра. При этом из-за независимости вязкости от плотности из формулы (5) следует, что на всем протяжении капилляра $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \sim \frac{1}{\rho}$, или с учетом соотношения (7)

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \sim \frac{1}{P} \tag{11}$$

Обозначив коэффициент пропорциональности в этой формуле K, запишем формулу (11) в виде

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{K}{P} P\,\mathrm{d}P = K\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

Чтобы найти выражение для коэффициента K, проинтегрируем второе уравнение (12) от координаты x_0 начала капилляра до координаты $x_1 = x_0 + L$ конца капилляра (см. Рис. 4). Учитывая, что давление $P(x_0)$ на входе капилляра равно давлению P_c в сосуде, а давление на выходе капилляра $P(x_1)$ равно атмосферному давлению P_a в результате интегрирования получим

$$\frac{1}{2}\left(P_a^2 - P_c^2\right) = KL \tag{13}$$

Отсюда

$$K = -\frac{(P_c^2 - P_a^2)}{2L} \tag{14}$$

Используя написанное выше, найдем соотношение между быстротой изменения давления в сосуде $\frac{\mathrm{d}P_c}{\mathrm{d}t}$ и текущим значением P_c этого давления. Пусть из сосуда за время $\mathrm{d}t$ выходит масса $\mathrm{d}m$. При этом давление газа в соответствие с уравнением (6) изменяется на $\mathrm{d}P_c = -\,\mathrm{d}mRT/(V_cM)$, следовательно:

$$\frac{\mathrm{d}P_c}{\mathrm{d}t} = -\frac{RT}{V_cM}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{15}$$

Подставим сюда выражение (4), в котором используем первую формулу (11), выражение (6) для плотности и выражение (14) для коэффициента K. В итоге получим следующее соотношение:

$$\frac{\mathrm{d}P_c}{\mathrm{d}t} = -\alpha(P_c^2 - P_a^2) \tag{16}$$

Коэффициент в этом уравнении зависит от вязкости газа и параметров установки:

$$\alpha = \frac{\pi R^4}{16\eta V_c L} \tag{17}$$

Разделив переменные в уравнении (16) получим:

$$\frac{\mathrm{d}P_c}{(P_c^2 - P_a^2)} = -\alpha\,\mathrm{d}t \tag{18}$$

Интегрирование этого уравнения от начального (при $t = 0$) значения давления P_{c0} до значения P_c в некоторый момент времени t дает:

$$\frac{1}{2P_a}\left[\ln\left(\frac{P_c - P_a}{P_c + P_a}\right) - \ln\left(\frac{P_{c0 - P_a}}{P_{c0} + P_a}\right)\right] = -\alpha t \tag{19}$$

Введем следующие обозначения:

$$X = \ln\left(\frac{P_c - P_a}{P_c + P_a}\right);\ X_0 = \ln\left(\frac{P_{c0} - P_a}{P_{c0} + P_a}\right);\ C = 2P_a\alpha \tag{20}$$

И перепишем уравнение (19) в виде

$$X = X_0 - Ct \tag{21}$$

Как видим, зависимость величины X от времени линейная с коэффициентом наклона $'C'$
В лабораторной работе измеряется зависимость $P_c(t)$ давления в сосуде от времени. С помощью первой формулы (20) для каждого значения давления P_c вычисляется величина X, тем самым находится

зависимость X(t). На основе зависимости X(t) определяется коэффициент C и по его значению вычисляется вязкость воздуха. Чтобы получить окончательное выражение для вязкости, подставим выражение α из формулы (17) в определение коэффициента C (последняя формула (20)) и разрешим получившееся уравнение относительно вязкости. Таким образом

$$\eta = \frac{\pi R^4 P_a}{8 V_c L C} \tag{22}$$

Используемый в работе сосуд имеет цилиндрическую форму и для определения его объема измеряются его высота H_c и диаметр основания D_c ,по которым вычисляется его объем:

$$V_c = \frac{1}{4}\pi D_c^2 H_C \tag{23}$$

4 Экспериментальная установка

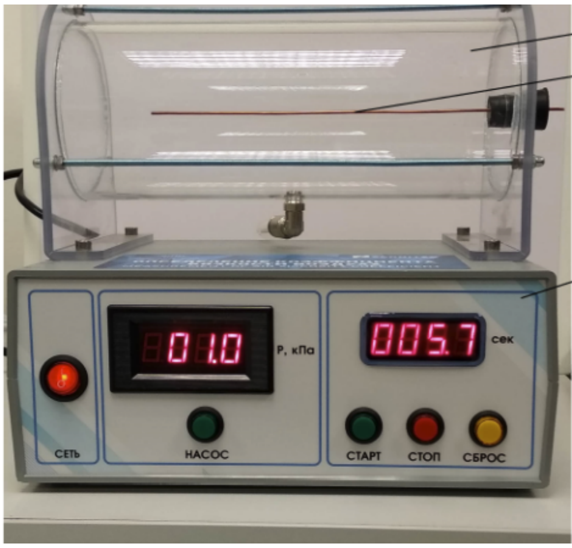


Рис. 4: Экспериментальная установка

1. Сосуд, в котором создается избыточное давление.
2. Капилляр, соединяющий сосуд с атмосферой.
3. Лицевая панель стенда Назначение кнопок и индикаторов, расположенных на лицевой панели следующее: – «СЕТЬ» – кнопка включения электрического питания стенда; – «P, кПа» – индикатор значения $\Delta P = P_c - P_a$, разности давлений в сосуде и в окружающей атмосфере ; – «НАСОС» – кнопка, при нажатом состоянии которой встроенный насос нагнетает воздух в сосуд; – «сек» – индикатор показаний встроенного секундомера; – «СТАРТ», «СТОП», «СБРОС» – кнопки запуска, останова и сброса показаний встроенного секундомера, соответственно

5 Обработка результатов

Параметр	H_c, мм	D_c, мм	D, мм	L, мм	$t_{\text{лаб}}$, $^\circ C$	$P_a \cdot 10^5$, Па
Значение	239.0	93.0	0.67	237	25	1.051
Погрешность измерения	0.5	0.5	0.01	1	1	0.001

Таблица 1: Параметры установки и условия проведения эксперимента

ΔP, кПа	t, с	X	ΔP, кПа	t, с	X	ΔP, кПа	t, с	X
14	0	-2,8	14	0	-2,8	14	0	-2,8
12,8	1	-2,9	12,7	1	-2,9	12,7	1	-2,9
11,9	2	-2,9	11,8	2	-2,9	11,8	2	-2,9
11	3	-3,0	11	3	-3,0	10,9	3	-3,0
10,3	4	-3,1	10,3	4	-3,1	10,2	4	-3,1
9,8	5	-3,1	9,6	5	-3,1	9,5	5	-3,1
9	6	-3,2	8,9	6	-3,2	8,8	6	-3,2
8,4	7	-3,3	8,4	7	-3,3	8,1	7	-3,3
7,8	8	-3,3	7,8	8	-3,3	7,5	8	-3,4
7,2	9	-3,4	7,3	9	-3,4	7	9	-3,4
6,7	10	-3,5	6,8	10	-3,5	6,6	10	-3,5
6,2	11	-3,6	6,2	11	-3,6	6,1	11	-3,6
5,8	12	-3,6	5,8	12	-3,6	5,7	12	-3,6
5,4	13	-3,7	5,4	13	-3,7	5,3	13	-3,7
5,1	14	-3,7	5,1	14	-3,7	5	14	-3,8
4,7	15	-3,8	4,7	15	-3,8	4,6	15	-3,8
4,4	16	-3,9	4,4	16	-3,9	4,3	16	-3,9
4,1	17	-4,0	4,1	17	-4,0	4	17	-4,0
3,8	18	-4,0	3,8	18	-4,0	3,7	18	-4,1
3,5	19	-4,1	3,5	19	-4,1	3,4	19	-4,1
3,3	20	-4,2	3,3	20	-4,2	3,2	20	-4,2
3	20,7	-4,3	3	20,9	-4,3	3	20,5	-4,3

Таблица 2: Полученные данные

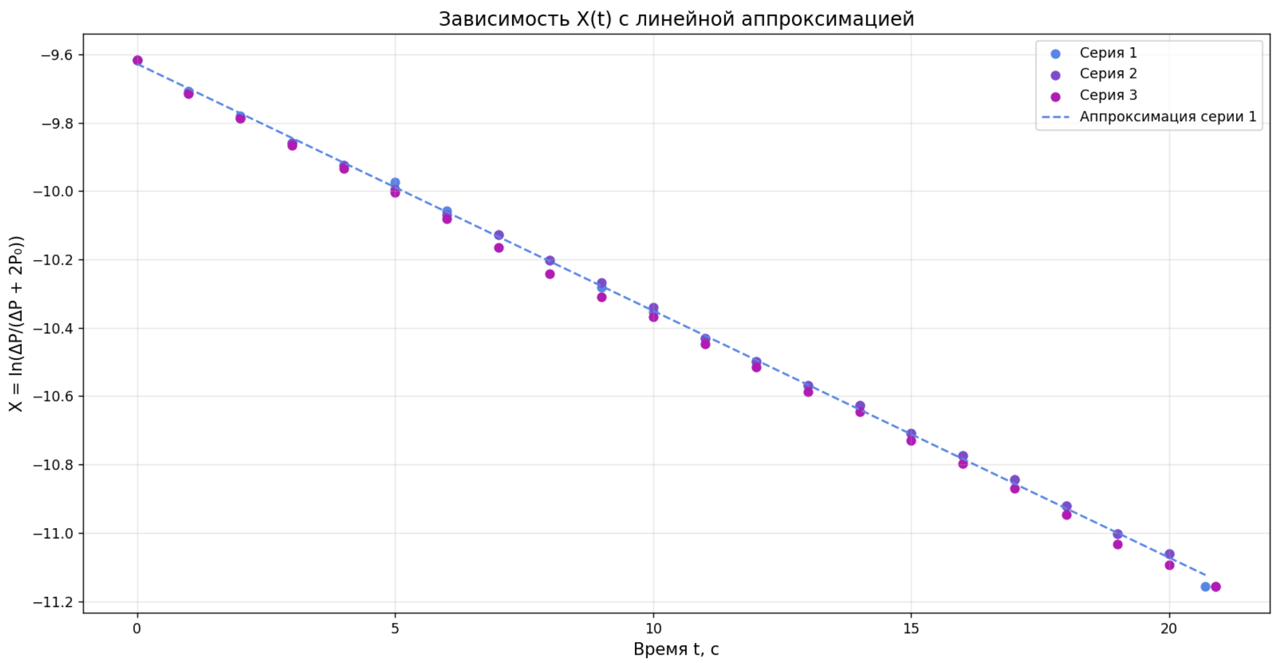
Рассчет X в Таблице 2 производится по следующей формуле:

$$X = \ln\left(\frac{\Delta P}{\Delta P + 2P_a}\right)$$

Рассчитаем $X_{1,1}$:

$$X_{1,1} = \ln\left(\frac{14}{14 + 2 \cdot 105.1}\right) = -2.8$$

Аналогичный рассчет производим для каждого измерения всех серий (вычесленные значения приведены в таблице). Строим график $X(t)$.



;

Рис. 5: График зависимости $X(t)$

Видно, что график X(t) для всех трех серий близок к прямолинейному, а значит для воздуха применим закон ламинарного течения идеального газа по капилляру. По методу МНК вычисляем коэффициенты линейной апроксимации и строим получившуюся прямую (уже приведена на графике зависимости $X(t)$).

МНК для первой серии:

$$\bar{t} = \frac{1}{22} \cdot \sum t_i = 10.48$$

$$\overline{X} = \frac{1}{22} \cdot \sum X_i = -3.5$$

$$C_1 = \frac{\sum (t_i - \bar{t})(X_i - \bar{X})}{(t_i - \bar{t})^2} = -0.0723$$

Также находим погрешность полученного значения:

$$\Delta C_1 = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \hat{X}_i)^2}{20 \cdot \sum (t_i - \bar{t})^2}} = 0.0004,$$

где

$$\hat{X}_i = C_1 t_i + X_0$$

Аналогично рассчитываем C для остальных серий. Таким образом:

$$C_1 = (-72.3 \pm 0.4) \cdot 10^{-3}$$

$$C_2 = (-71.8 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}$$

$$C_3 = (-72.6 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}$$

$$C = \frac{w_1 C_1 + w_2 C_2 + w_3 C_3}{w_1 + w_2 + w_3} = 72.2 \cdot 10^{-3}$$

$$w_i = \frac{1}{\Delta C_i}$$

$$\Delta C = \frac{1}{\sqrt{w_1 + w_2 + w_3}} = 0.2 \cdot 10^{-3}$$

Также по форуле объема цилиндра находим V_c, а также погрешность:

$$V_c = \frac{1}{4} \pi D_c^2 H_c = 1.623 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$\Delta V_c = \sqrt{\left(\frac{2\pi D_c H_c}{2} \Delta D_c\right)^2 + \left(\frac{\pi D_c^2}{2} \Delta H_c\right)^2} = 0.004 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

Таким образом, рассчитываем коэффициент вязкости воздуха η:

$$\eta = \frac{\pi D^4 P_a}{32 V_c L C} = 1.87 \cdot 10^{-5}$$

$$\Delta\eta = \sqrt{\left(\frac{4\pi D^3 P_a}{32 V_C L C} \Delta D\right)^2 + \left(\frac{\pi D^4}{32 V_C L C} \Delta P_a\right)^2 + \left(\frac{\pi D^3 P_a}{32 V_C^2 L C} \Delta V_c\right)^2 + \left(\frac{\pi D^3 P_a}{32 V_C L^2 C} \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\pi D^3 P_a}{32 V_C L C^2} \Delta C\right)^2} = 0.03 \cdot 10^{-5}$$

6 Вывод

В ходе лабораторной работы была экспериментально проверена применимость закона ламинарного течения для воздуха при его прохождении через капилляр и получена вязкость воздуха. Табличное значение для вязкости $\approx 1.8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м$\cdot$ с), у нас же получилось $1.87 \cdot 10^{-5}$ кг/(м$\cdot$ с), что выходит за рамки погрешности, хотя и не на много. Погрешность может быть вызвана из-за нескольких факторов:

1. Недостаточное количество точек для построения прямой на графике, что вследствии влияет на точность коэффициента наклона

2. Так как эксперимент делался достаточно долго, температура в помещении могла меняться

В целом, результаты эксперимента совпадают с теоретическими данными, что говорит о правильности проведения эксперимента и приминимости закона ламинарного течения для воздуха.