

Матан инд
Вариант №19

Евгений Турчанин

Вопрос 1

Доказать что: $\frac{1^4}{1 \cdot 3} + \frac{2^4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^4}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}$

Решение: Докажем через индукцию:

1. Покажем что для $n = 1$ верно:

$$\frac{1(1+1)(1^2+1+1)}{6(2+1)} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{1^4}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

2. Пусть верно для n

3. Тогда докажем, что верно для $n + 1$:

$$\underbrace{\frac{1^4}{1 \cdot 3} + \frac{2^4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^4}{(2n-1) \cdot (2n+1)}}_{\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}} + \frac{(n+1)^4}{(2n+1) \cdot (2n+3)} \Rightarrow$$

Нужно доказать, что:

$$\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)} + \frac{(n+1)^4}{(2n+1) \cdot (2n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)(n^2+3n+3)}{6(2n+3)}$$

~~Трудно не заметить, что так оно и есть~~ Давайте покажем, что это так:

Сократим все на $n + 1$ и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{n(2n+3)(n^2+n+1)}{6(2n+1)(2n+3)} + \frac{6(n+1)^3}{6(2n+1) \cdot (2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+2)(n^2+3n+3)}{6(2n+1)(2n+3)}$$

Сократим на знаменатели и раскроем скобки:

$$2x^4 + 11x^3 + 23x^2 + 21x + 6 = 2x^3 + 11x^2 + 23x + 21 + 6 \Rightarrow$$

$$0 = 0$$

Ч.Т.Д.

Вопрос 2

Доказать что:

$$\sum_{k=1}^k \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Решение: Докажем опять ~~двадцать~~ через индукцию:

1. Покажем что для $n = 1$ верно:

$$\frac{1}{1^2} = 1$$
$$2 - \frac{1}{1} = 1$$
$$1$$

2. Пусть верно для n

3. Тогда докажем, что верно для $n + 1$:

Те нужно доказать что верно:

$$\underbrace{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{\leq 2 - \frac{1}{n}} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{(2n-1)(n+1)^2 + n}{(n+1)^2 n} \leq \frac{(2n+1)(n+1)n}{(n+1)^2 n}$$

Сократим на знаменатель:

$$(2n-1)(n+1)^2 + n \leq (2n+1)(n+1)n$$

Раскроем скобки:

$$2n^3 + 4n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1 + n \leq 2n^3 + 2n^2 + n^2 + n \Rightarrow$$
$$-1 \leq 0$$

Ч.Т.Д.

Вопрос 3

$$C_n^0 C_{2n}^n + C_n^1 C_{2n}^{n-1} + C_n^2 C_{2n}^{n-2} \dots C_n^n C_{2n}^0 = C_{3n}^n$$

Решение: Докажем по индукции:

1. Покажем что для $n = 1$ верно:

$$C_1^0 C_2^1 + C_1^1 C_2^0 = 1 \cdot 2 + 1 = 3$$
$$C_3^1 = 3$$

Ну, показал получается

2. Пусть верно для n

3. Тогда докажем, что верно для $n + 1$:

Нужно показать, что верно:

$$C_{n+1}^0 C_{2n+2}^{n+1} + C_{n+1}^1 C_{2n+2}^n \dots C_{n+1}^{n+1} C_{2n+2}^0 = C_{3n+3}^{n+1}$$

Перепишем эти выражения в виде сумм: $\sum_{k=0}^n C_{2n+2}^k$