Матан Лаба

Павел Андреев, Григорий Горбушкин, Евгений Турчанин

Вавилонский метод

1. Покажем, что данная последовательность сходится куда надо. Предположим, что она действительно сходится, тогда пусть A - то, куда она сходится, тогда:

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right) \Rightarrow A = \sqrt{a}$$

Покажем, что данная последовательность вообще сходится:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) - x_{n-1} = -\frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n-1}}$$

Нужно показать больше или меньше нуля это выражение, для этого сравним два числа:

$$\frac{1}{2}x_{n-1} \leqslant \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n-1}} \Rightarrow x_{n-1}^2 \leqslant a \Rightarrow \text{тк } x_{n-1} > \sqrt{a} \Rightarrow \text{Убывает}$$

Покажем в явном виде, что $x_{n-1} > \sqrt{a}$

   (a) Покажем для n=2:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) + \frac{a}{\frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)}\right) = \frac{1}{4}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) + \frac{a}{\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)}$$

   Теперь ~~гениальный финт ушами~~ по неравенству Каши~~на~~:

$$\frac{1}{4}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) + \frac{a}{\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{4}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) \cdot \frac{a}{\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)}} = a \Rightarrow x_2 \geqslant \sqrt{a}$$

   (b) Пусть верно для n-1

   (c) Покажем что верно для n:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{4}x_{n-1} \cdot \frac{a}{x_{n-1}}} = \sqrt{a}$$

Отсюда получаем и ограниченность ~~И вообще кто молодец? Я молодец! Правильно? Правильно!~~

2. Из выше написанного следует что $\frac{x_n}{\sqrt{a}} - 1 \geqslant 0$

Покажем что $\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2(1+\varepsilon_n)}$:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{\sqrt{a}} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{a}{x_n\sqrt{a}} - 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2 + a - 2x_n\sqrt{a}}{\sqrt{a}x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{\sqrt{a}x_n}\right)$$

Ну это очевидно равно $\frac{\varepsilon_n^2}{2(1+\varepsilon_n)}$

Теперь покажем что $\varepsilon_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}\min(\varepsilon_{n+1}^2, \varepsilon_{n+1})$

$$\varepsilon_{n+2} = \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{2(1+\varepsilon_{n+1})} \Rightarrow \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{(1+\varepsilon_{n+1})} \leqslant \min(\varepsilon_{n+1}^2, \varepsilon_{n+1})$$

Рассмотрим три случая:

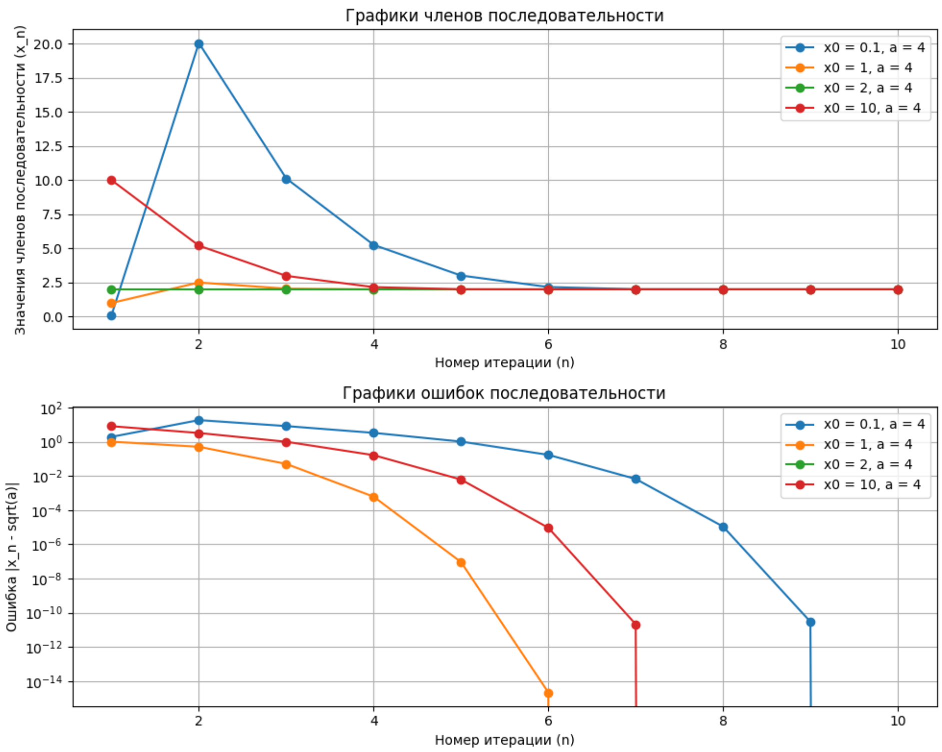
(a) $0 < \varepsilon_{n+1} < 1 \Rightarrow \varepsilon_{n+1} > \varepsilon_{n+1}^2 \Rightarrow \dfrac{\varepsilon_{n+1}^2}{(1+\varepsilon_{n+1})} \leqslant \varepsilon_{n+1}^2 \Rightarrow \dfrac{1}{1+\varepsilon_{n+1}} \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+\varepsilon_{n+1}} < 1$

(b) $\varepsilon_{n+1} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+1} < 1$

(c) $\varepsilon_{n+1} > 1 \Rightarrow \dfrac{\varepsilon_{n+1}^2}{(1+\varepsilon_{n+1})} \leqslant \varepsilon_{n+1} \Rightarrow \varepsilon_{n+1}^2 \leqslant \varepsilon_{n+1}^2 + 1 \Rightarrow 0 < 1$

Ну и мое любимое

ЧТД



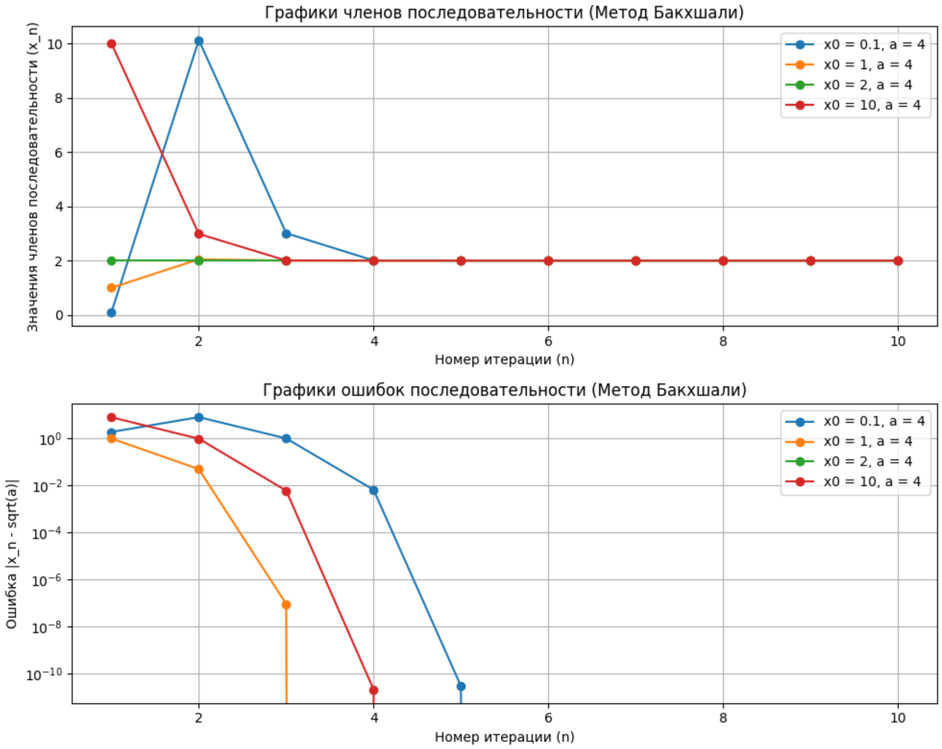
Видно что ошибка уменьшается квадратично, скорость сходимости зависит от начального значения.

Метод Бакхшали

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) + \frac{a}{\left(x_0 + \dfrac{a}{x_0}\right)} = \frac{x_0^4 + 6ax_0 + a^2}{4x_0^2 + 4ax_0}$$

Посчитаем одну итерацию второго метода:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{a - x_n^2}{2x_n} - \frac{(a - x_n^2)^2}{8\left(x_n + \dfrac{a - x_n^2}{2x_n}\right)x_n^2} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} - \frac{(a - x_n^2)^2}{8\left(x_n + \dfrac{a - x_n^2}{2x_n}\right)x_n^2} = \frac{x_0^4 + 6ax_0 + a^2}{4x_0^2 + 4ax_0}$$



Интерактивный метод с двумя переменными