Лекция 1 часть 1 мат анализ

1. Множество
2. Как можно задать множество
3. Парадокс Рассела
4. Свойства включения
5. Аксиомы Пеано
6. Метод мат индукции
7. Теорема (неравенство Бернулли)
8. Доказательство теоремы с помощью мат индукции

Мат анализ по Шапошникову (сем 1 часть 1)

Лекция I 15.11.2020 г

Множество - это набор, совокупность, собрание объектов, которые называются элементами множества.

$a \in A$ - а принад A $a \notin A$ - а не принад A

A - мн-во

∅ - пустое мн-во. Про всякий объект можно утверждать что он этому мн-ву не принадлежит. $\{x: x \neq x\}$

Как можно задать множество?

1) Перечисление {список студ группы}

2) Способ указания свойства $\{x: x^2 = 1\}$

Парадокс Рассела

K - набор множеств, которые не содержат себя в качестве элемента.

$K \in K$?

1) Предположим, что да $K \in K$ - противоречие

2) Предположим, что нет $K \notin K$ но по опр $K \in K$

Аксиоматика Френкеля-Цермело

1) ∅ - пустое множество.

2) Включение: $A \subset B$ (A является подмножеством B) ⟹ если $a \in A \xRightarrow{\text{следует}} a \in B$

Свойства включения

1) $A \subset A$

2) $A \subset B$ и $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Опр. $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

3) $\emptyset \subset A$ во всяком A

Д-во (3 п). Докажем от противного.

Не выполняется, что $a \in \emptyset \Rightarrow a \in A$

Значит существуют $a \in \emptyset$ и $a \notin A$ - это невозможно так как в ∅ нет элементов.

Множество натуральных чисел

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots, n, \ldots\}$

назыв след и обозначается $(n+1)$

Аксиомы Пеано

1) Для всякого n существует единственный элемент, который

2) Существует единственный элемент, который никакому не следует. Называется единица (1).
3) У всякого элемента, отличного от 1, существует единственный элемент за который он следует.
4) Аксиома индукции. Если множество $M \subset N$ таково что $1 \in M$ и $n \in M \Rightarrow (n+1) \in M$, то $M = \mathbb{N}$

n - это номера
База: $1 \in M$.
Шаг: для всякого $n \in M \Rightarrow$
$\Rightarrow n+1 \in M \mid \xRightarrow{\text{аксиома индукции}} M = \mathbb{N}$ значит все A_n - истинны.

Метод математической индукции

$A_1, A_2, \dots, A_n$ - утверждения
Хотим доказать что все A_n - истинны.
A_1 - истинно (база)
Для всякого n $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ (шаг)
$\Rightarrow$ все A_n истинны

Рассмотрим множество $M = \{n : A_n \text{ - истинно}\}$

Пусть теперь выполняется метод мат. индукции
Д-м. утверж. аксиомы индукции.
Пусть $M \subset \mathbb{N}$ $1 \in M, n \in M \Rightarrow (n+1) \in M$.
$A_n : n \in M$, A_1 - истинно, $A_n \Rightarrow A_{n+1} \Rightarrow$ все A_n - истинны $M = \mathbb{N}$

Теорема (неравенство Бернулли)

Для всякого натурального n и $x \geq -1$ верно $(1+x)^n \geq 1+nx$

Д-во:

База $n=1$. ok
$(1+x) \geq 1+x$

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx} \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x$$

Шаг: предположим, что для n верно $(1+x)^n \geq 1+nx$. Докажем, что $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Теорема (Бином Ньютона)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \qquad 0! = 1.$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots$$

Д-во: (I) способ
$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b) = \sum C_n^k a^k b^{n-k}$.

II способ индукция
База $n=1$ $(a+b)^1 = C_1^0 b + C_1^1 a = b + a$
Шаг: предположим что для n доказано
Докажем для $n+1$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \overset{\text{предположение индукции}}{=} (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}\right)$$

$a \times$: $\ldots a^{k+1} b^{\overset{(n+1)-(k+1)}{n-k}}$

$b \times$: $a^k b^{n-k+1}$

Заметим что слагаемые имеют вид $\ldots a^m b^{n+1-m}$ $m = 0 \ldots \cancel{n+n}$ $n+1$

Слагаемое с буквами $a^m b^{n+1-m}$ получается из

$\underbrace{C_n^{m-1} a^{m-1} b^{n+1-m}}_{\cdot a}$ и $\underbrace{C_n^m a^m b^{n+1-m}}_{\cdot b}$

помеченный результат после умножения

Следовательно коэффициент при $a^m b^{n+1-m}$ равен

$C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m$