Лекция 2 Шапошникова по математическому анализу

Что прошел?

1. Определение функции
2. Упорядоченная и неупорядоченная пара
3. Декартово произведение
4. Что такое график функции?
5. Операция о? Что это?
6. Индуктивные определения на N
7. Множество целых чисел
8. Определение множеств классов эквивалентности

Мат анализ Лекция 2. 28.11.20

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\alpha} C_{\alpha}^{k} x^{k} 1^{\alpha-k} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \dots$$

$$\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+q^3+\dots$$

$\alpha = -1$.

$$\boxed{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \frac{(-1)(-1-1)}{2} = 1}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

Опр. функцией f из множества X в мн-во Y ($f: X \to Y$) называется правило, соответствие, сопоставление, сопостав. каждому $x \in X$ ровно 1 y из Y.

$$\sqrt{1+x} = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

$$(1+x) = (1 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots)(1 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots)$$

$y = f(x)$ $\quad x \to y : y^2 = x$

$$1 + 2C_1 x + (C_1^2 + 2C_2) x^2 + \dots$$

$1 \to \{-1; 1\}$ это не функция
$x \to x^2$ - функция

Множество $\{x; y\}$ называется неупорядоченной парой элементов x и y.

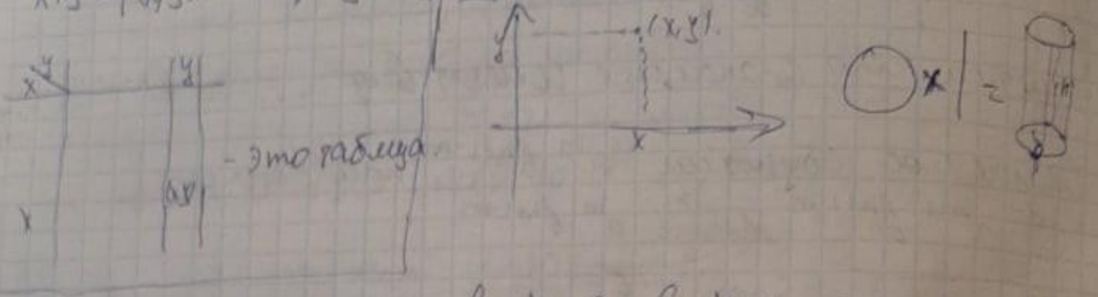
$C_1 = \frac{1}{2}$ $\quad C_1^2 + 2C_2 = 0$

$C_2 = -\frac{1}{8}$

Мн-во $\{x; \{x, y\}\}$ называется упорядоченной парой x-эл $\{x, y\}$ а пару обозначают (x, y)

Декартово произведение двух множеств $X \times Y$ называется мн-во упоряд. пар (x, y) где $x \in X$ и $y \in Y$.

$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, \text{ и } y \in Y\}$ $\boxed{\text{Примеры:}}$



Если задана функция $f: X \to Y$ в $X \times Y$ определено подмножество $\Gamma_f = \{(x,y) \mid y = f(x)\}$ Γ_f – график. Для каждого $x \in X$ сущ. $(x,y) \in \Gamma_f$ (каждому x сопост. y).

2) если $(x,y) \in \Gamma_f$ и $(x,z) \in \Gamma_f$, то $y = z$

На языке теории множеств говорят что задана функция из X в Y, если задано подмн-во $\Gamma \subset X \times Y$, удовлетв. св-м 1) и 2) ($X \to Y$ – взяли область опр. Y)

Опр. говорят, что на мн-ве X задана операция $\circ$ если задана функция из $X \times X \to X$ $\quad x_1 x_2 \Rightarrow (x_1, x_2) \to x_1 \circ x_2$

1) $\circ$ коммутативна, если $x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$

2) Ассоциативность $x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3$

Опр: на мн-ве функций определена операция композиции $f \circ g(x) = f(g(x))$ Утв. операция композиции ассоциативна т. е. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

$F(X) = \{f \mid f: X \to X\}$

$\circ$ - операция на F

$g: X \to Y \quad f: Y \to Z$

$f \circ g(x) = f(g(x))$

Д-во: $(f \circ g) \circ h(x) = f \circ g(h(x)) = f(g(h(x)))$

$f \circ (g \circ h)(x) = f(g \circ h(x)) = f(g(h(x)))$

~~Что~~ Индуктивные определения на $\mathbb{N}$

$n + m = ?$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$

$n+1$ = след. для n | Утв. для всякого $n\in\mathbb{N}$ сущ. един
если уже знаю, что такое $n+m$ | функция $f_n: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такая, что
для некоторого m, то $n+(m+1)=(n+m)+1$ | 1) $f_n(1)=n+1$ 2) $f_n(m+1) = f_n(m)+1$

Опр. $n+m=f_n(m)$

Д-во: единственна. Пусть таких две f_n и g.

$f_n(1)=g(1)=n+1$

$f_n(m+1)=f_n(m)+1$ и $g(m+1)=g(m)+1$

Докажем по индукции $f_n(m)=g(m)$ для всех m

База: $m=1$ Ok
Шаг: пусть $g(m)=f_n(m)$, то
$g(m+1)=g(m)+1=f_n(m)+1=f_n(m+1)$

Существование: по индукции (n)
$f_1(m)=m+1$ $\quad f_1(m+1)=\underbrace{(m+1)}_{f_1(m)}+1$
$f_1(1)=1+1=2$

База: $n=1$ все окей $\boxed{1+m=m+1}$

Шаг: Пусть для n такая функция f_n уже есть построим ее для $n+1$ $\quad f_{n+1}(m)=f_n(m)+1$; 1) $f_{n+1}(1)=f_n(1)+1=(n+1)+1$ - выполнено
2) $f_{n+1}(m+1)=f_n(m+1)+1=\underbrace{(f_n(m)+1)}_{f_{n+1}(m)}+1$; $n+1$
$n+m \Rightarrow n+(m+1)=(n+m)+1$

Аналогично введем умножение | Опр. Множество целых чисел
$n\cdot 1=n$
$n\cdot(m+1)=n\cdot m+n$

$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-n, n\in\mathbb{N}\}$
Операции сложения и умножения переносятся с $\mathbb{N}$ чисел как в школе.

Опр. Подмн-во $R\subset X\times X$ называется отношением эквивалентности, если 1) для всякого x $(x,x)\in R$ (рефлексивность)
2) если $(x,y)\in R$ то $(y,x)\in R$ (симметричность)
3) если $(x,y)\in R$ и $(y,z)\in R$, то $(x,z)\in R$ (транзитив

Далее пишем $x \sim y$ вместо $(x,y) \in R$

<u>Опр</u>: $R(a) = \{x \mid x \sim a\}$ — называется классом эквивалентн. с представителем a

<u>Утв</u>: $R(a) \cap R(b) \neq \emptyset \Rightarrow R(a) = R(b)$

<u>Д-во</u>: $c \in R(a) \cap R(b)$ $a \sim c$ и $b \sim c \Rightarrow a \sim b$.

Всякий x, эквивалентный b, эквивалентен a. И наоборот

$R(a) = R(b)$

3) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ $\frac{m}{n}$ $(m,n) \sim (p,q)$ $\frac{p}{q}$ $\Leftrightarrow mq = pn$

Мн-во классов эквивалентности называется мн-вом рациональных чисел (или дробей) и обозначается $\mathbb{Q}$