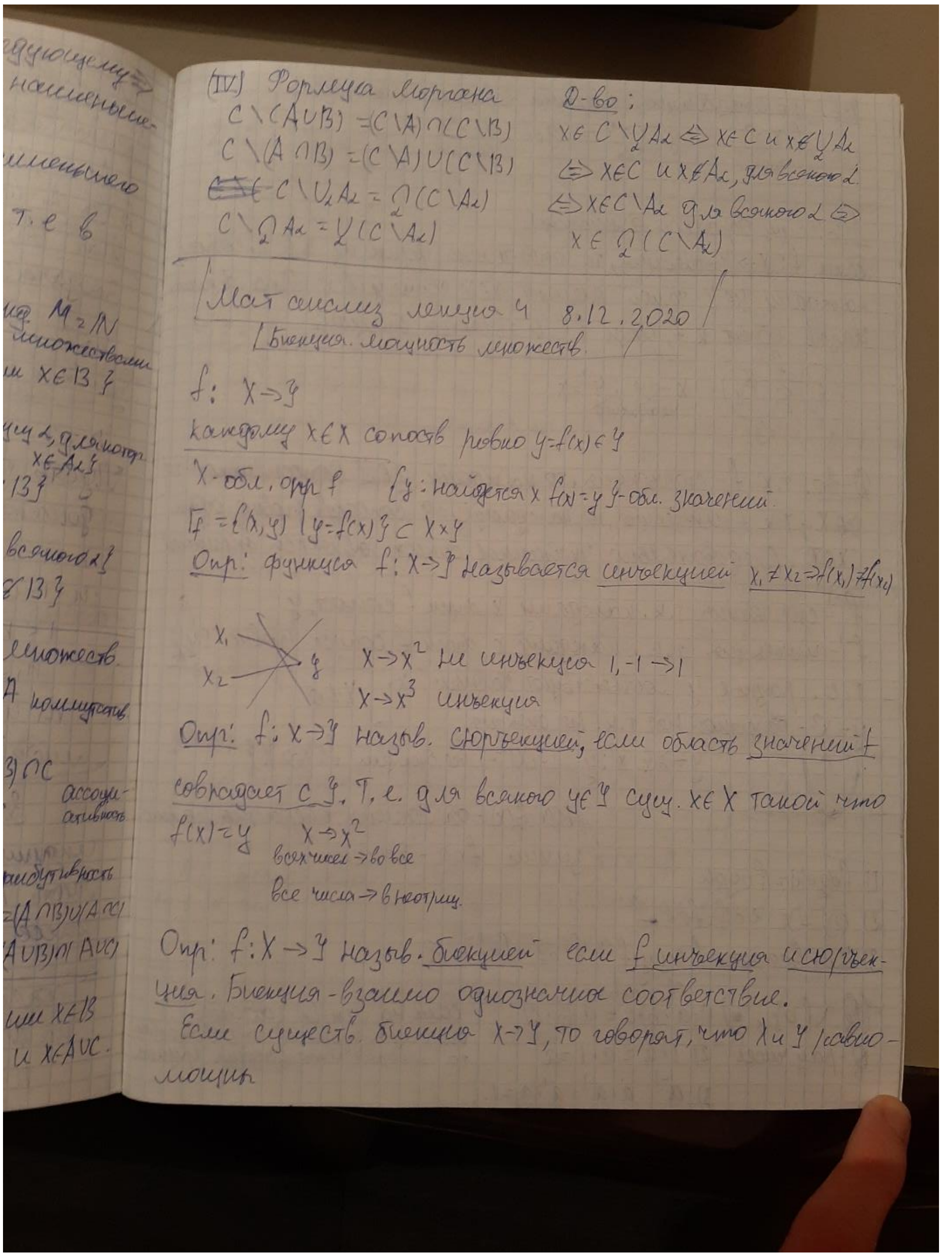
Лекция 4 часть 1 мат анализ
Что прошел?

1. Определение инъекции, сюръекции и биекции
2. Что такое обратная функция?
3. Что значит равномощны
4. Что такое пустое множество?
5. Что такое бесконечное множество?
6. Счетное множество



(IV) Формула Моргана

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

$C \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (C \setminus A_\alpha)$

$C \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (C \setminus A_\alpha)$

Д-во:

$x \in C \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha \Leftrightarrow x \in C$ и $x \notin \bigcup_\alpha A_\alpha$ $\Leftrightarrow x \in C$ и $x \notin A_\alpha$, для всякого α $\Leftrightarrow x \in C \setminus A_\alpha$ для всякого $\alpha \Leftrightarrow$ $x \in \bigcap_\alpha (C \setminus A_\alpha)$

Мат анализ лекция 4 8.12.2020

Биекция. Мощность множеств.

$f: X \to Y$

каждому $x \in X$ сопост ровно $y = f(x) \in Y$

X - обл. опр f $\{y :$ найдется x $f(x) = y\}$ - обл. значений

$\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\} \subset X \times Y$

Опр: функция $f: X \to Y$ называется инъекцией $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

x_1, x_2, y

$x \to x^2$ не инъекция $1, -1 \to 1$

$x \to x^3$ инъекция

Опр: $f: X \to Y$ назыв. сюръекцией, если область значений f совпадает с Y. Т. е. для всякого $y \in Y$ сущ. $x \in X$ такой что $f(x) = y$

$x \to x^2$

всех чисел → во все

все числа → в неотриц.

Опр: $f: X \to Y$ назыв. биекцией если f инъекция и сюръекция. Биекция - взаимно однозначное соответствие.

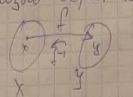
Если существ. биекция $X \to Y$, то говорят, что X и Y равномощны

Страница 1

Утв: композиция биекции является биекцией

$f: X \to Y$ и $g: X \to Y \Rightarrow g \circ f: X \to Z$
биек биек биекция

Утв: (сущ. обратной функции)
Если $f: X \to Y$ - биекция, то определена функ из Y в X, сопост каждому $y \in Y$ такой элемент $x \in X$, что $y = f(x)$. Эта функция назыв обрат. к f, обозн f^{-1} и является биекцией.



$X \to Y: y^2 = x$
не функция

Д-во: т.к f - сюрьекция, то каждому $y \in Y$ сопост какой-то $x \in X$, т.к f - инъекция, то каждому $y \in Y$ сопостов. ровно один $x \in X$. Следовательно указанное сопост. является функцией

f^{-1} - сюрьекция т.к. каждому x функ f сопост. y
f^{-1} - инъекция т.к. каждому x функ. f сопост. ровно 1 y, т.е. разные y соответствуют разным x.

$X \neq \emptyset$

$y = x^2$ - обратной нет т.к. не биекция

$y \to x \quad x^2: y$

$G(X) = \{$все биекции $f: X \to X\}$

На $G(x)$ - определена операция композиции $f \circ g$ - биекция

1) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
2) $e(x) = x \quad e \circ f = f \circ e = f$
3) Для всякого f сущ f^{-1}: $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = e$

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
$\mathbb{Q}$ - рац. чисел

Свойства
1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
2) $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
3) $a^{-1} \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Если на мн-ве задана операция удовлетв. 3 свойствам то говорят что задана группа ей

в X, сопост

Эта функция

какой-то

вно один

функций

вно 1 y,

ся компо-

на

свойствам

группа

Утв: $\{a, b\} \subset A$ Тогда $A \setminus \{a\}$ равномощно $A \setminus \{b\}$

Д-во: Пусть $D = A \setminus \{a, b\}$ $A \setminus \{a\} = D \cup \{b\}$, $A \setminus \{b\} = D \cup \{a\}$

~~$f(x) =$~~ $f: A \setminus \{a\} = D \cup \{b\} \to D \cup \{a\} = A \setminus \{b\}$

Свойства равномощных множеств.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in D \\ a, & x = b \end{cases}$$

$A \sim B$ ($\sim$ - равномощно)

1) $A \sim A$

2) $A \sim B$ то $B \sim A$

3) $A \sim B$ и $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

искомая биекция

Утв: $\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\} \sim \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq m\} \Rightarrow n = m$

Д-во: по индукции n

База: $n = 1$ Предположим что $m \neq 1$. Тогда $f(1) \neq m$ или $f(1) \neq 1$
f-биекция

$\Rightarrow f$ не сюръекция. Следов. $m = 1$.

Предположим, что для n доказано. Докажем для $n+1$

$\{1, 2, \ldots, n, n+1\} \xrightarrow{f} \{1, 2, \ldots, m\}$. Если $m = 1$, то все доказано. база и $m \neq 1$

$\{1, 2, \ldots n\} \xrightarrow{f} \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{f(n+1)\} \sim \{1, 2, \ldots, m-1\}$

По предположению индукции $n = m - 1 \mid +1$

$n + 1 = m$

Опр: пустое множество $\varnothing$ является конечным и состоит из 0 элементов. Множество A является конечным и состоит из n элементов, если $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$

$\mathbb{N}$ - бесконечно
(т.е не является конечным)

Д-во: $f: \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$

Идем от противного $f(1) + \ldots + f(m) + 1 > f(k)$, $k = 1, \ldots, m$

f - не сюръекция

Мн-во простых чисел бесконечно $p_1, p_2, \ldots, p_m$ - все простые

$f: \{1, \ldots, m\} \to$ простые числа $p_1 \cdot p_2 \cdots p_m + 1$
биекция

Опр: Мн-во A счетное, если $A \sim \mathbb{N}$

Примеры: 1) $\mathbb{N}$ – счетные мн-ва

2) $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ $\quad n \to n+1$

3) $\mathbb{N}$ $\{-n\}$ $\{0\}$ $\mathbb{N}$

Свойства счетных множеств.

1. Если A счетно и $B \subset A$, то B - конечно или счетно (не более чем счетно)

Д-во: $a_1 a_2 a_3 \ldots$

$B = \varnothing$ - все Ок

Пусть $B \neq \varnothing$ $k_1 = \min\{k : a_k \in B\}$

$b_1 = a_{k_1}$

Если $B \setminus \{b_1\} = \varnothing$, то B - конечно и все Ок

Если $B \setminus \{b_1\} \neq \varnothing$, то $k_2 = \min\{k : a_k \in B \setminus \{b_1\}\}$

$b_2 = a_{k_2}$

Если уже построили $\{b_1 \ldots b_n\}$, то либо $B \setminus \{b_1, \ldots, b_n\} = \varnothing$ и построение закончено, либо $B \setminus \{b_1, \ldots, b_n\} \neq \varnothing$ $k_{n+1} = \min\{k : a_k \in B \setminus \{b_1, \ldots, b_n\}\}$ $b_{n+1} = a_{k_{n+1}}$ и т.д. Получаем набор $\{b_n\}$

Верно, что $B = \{b_n\}$ - ?

$\boxed{k_n \geq n}$

$k_1 \geq 1$ $\quad k_{n+1} > k_n$ т.к берем min

по предположению индукции $k_n \geq n \Rightarrow k_{n+1} \geq n+1$

Предположим, что построение не прервалось на конечном шаге и какой-то $a_m \in B$ не получил номера $\Rightarrow k_n < m$ для всех n, но $k_{m+1} \geq m+1 > m$ - противоречие