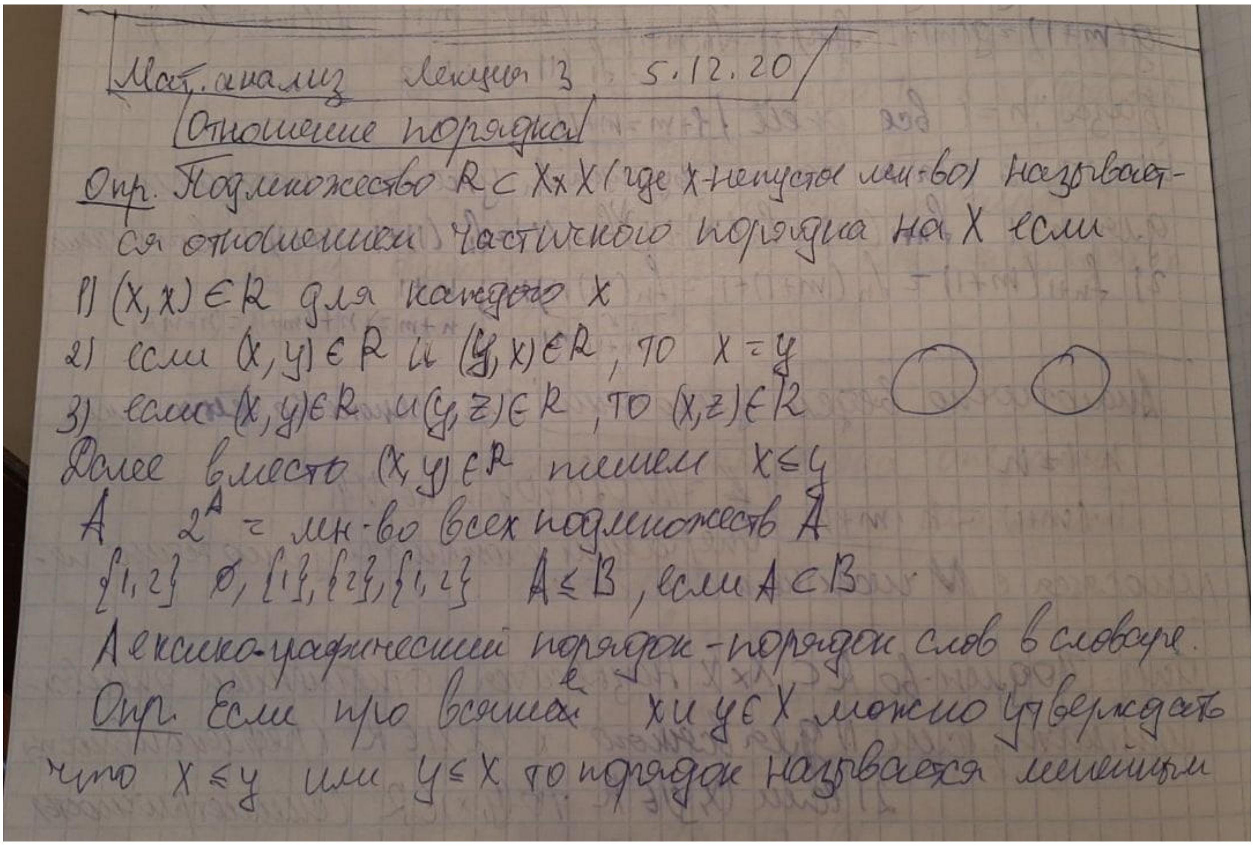
Лекция 3 часть 1 мат анализ

Что прошел?

1. Отношение порядка
2. Что такое линейный порядок?
3. Полная мат индукция
4. Основная теорема арифметики
5. Аксиома индукции и существование наименьшего
6. Операции с множествами
7. Круги Эйлера
8. Формула Моргана



Мат. анализ Лекция 3 5.12.20

Отношение порядка

Опр. Подмножество $R \subset X \times X$ (где X - непустое мн-во) называется отношением частичного порядка на X если

1) $(x, x) \in R$ для каждого x

2) если $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$, то $x = y$

3) если $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, то $(x, z) \in R$

Далее вместо $(x, y) \in R$ пишем $x \leq y$

A 2^A = мн-во всех подмножеств A

$\{1, 2\}$ $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ $A \leq B$, если $A \subset B$

Лексикографический порядок - порядок слов в словаре.

Опр. Если про всякие x и $y \in X$ можно утверждать что $x \leq y$ или $y \leq x$ то порядок называется линейным

$\mathbb{N}$ $n \le m \Leftrightarrow$ $m = n$ или $m = n + k$ для некоторого k

Полная индукция

$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$

База A_1 - истина

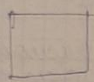
Шаг: $(A_1, \dots, A_n) \Rightarrow A_{n+1}$

все A_n истинны

Утв. (без док-ва) На мн-ве натуральных чисел существ. единственный линейный порядок при котором $n \le n+1$

$n < m$, если $n \ne m$ и $n \le m$

Задача:



$n \ge 6$

можно разрезать на n квадратов

$n = 2$.

Пусть доказано для $\le n$

докажем для $n+1$.

$n+1$ - простое то все ок

$n+1$ - сост $n+1 = n_1 \cdot n_2$

$1 < n_1 < n+1$ $1 < n_2 < n_2 + 1$

$n_1 \le n$, $n_2 \le n$

n_1 и n_2 либо простые либо раскладываются

Основная теорема арифметики

Всякое натур. число > 1 либо является простым либо раскладывается в произведение простых един. образом с точностью до порядка множителей.

Сведение полной к обычной (индукции)

$A_1, \dots A_n, \dots$

B_n - все $A_1, \dots, A_n$ - истинны

A_1 - истина $\Leftrightarrow B_1$ - истина

$A_1, \dots, A_n \Rightarrow A_{n+1} \Leftrightarrow B_n \Rightarrow B_{n+1}$

B_n - применим обычн. индукцию

B_n - истинны тогда и все A_n - истинны.

Запись полной индукции на языке теор. множ.

Пусть $M \subset \mathbb{N}$ Если $1 \in M$ и $\{k; k \le n\} \subset M \Rightarrow n+1 \in M$ то $M = \mathbb{N}$

Далее используем это как аксиому индукции

Теорема: Пусть мн-во $\mathbb{N}$ удовл. аксиомам Пеано 1)-3) и на $\mathbb{N}$ задано отношение линейного порядка причем $n \le n+1$

Тогда аксиома индукции равносильна следующему $\Rightarrow$ существ. в каждом непустом подмножестве наименьшего элемента.

<u>Д-во</u>: Аксиома индукции $\Rightarrow$ существов. наименьшего

Пусть $B \subset \mathbb{N}$ $B \neq \emptyset$ предположим противное т.е в B нет наименьшего $M = \mathbb{N} \setminus B$ $1 \in M$

все $\{k : k \leq n\} \subset M$ то $n+1 \in M$ По аксиоме инд. $M = \mathbb{N}$

<u>Противоречие</u>, что $B \neq \emptyset$

2) существ наим $\Rightarrow$ акс. инд.

Пусть $M \subset \mathbb{N}$; $1 \in M$ $\{k \leq n\} \subset M \Rightarrow n+1 \in M$

Предположим что $\mathbb{N} / M \neq \emptyset$

Пусть $n \in \mathbb{N} \setminus M$ $n \neq 1$ $n = m+1$

n-наим.

$\{k : k \leq m\} \subset M \Rightarrow m+1 \in M$

$n \in M$ и $n \in \mathbb{N} \setminus M$ противоречие

Операции с множествами

1) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$

объединение

$\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \{x \mid$ сущ α, для котор. $x \in A_{\alpha}\}$

2) $A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$

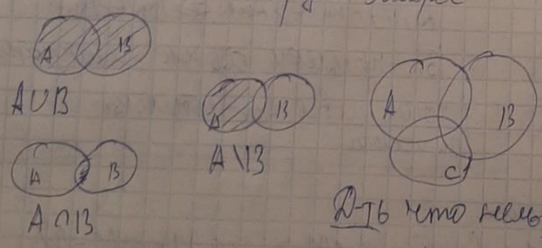
пересеч

$\bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \{x \mid x \in A_{\alpha}$, для всякого $\alpha\}$

3) $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$

разность

Круги Эйлера



<u>Д-ть</u> что нельзя построить для 4 множеств.

Свойства множеств.

(I) $A \cap B = B \cap A$ коммутатив

$A \cup B = B \cup A$

(II) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ассоциативность

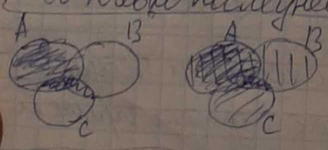
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(III) Дистрибутивность

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Д-во только последнее из (III)



$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow$ $x \in A$ или $x \in B \cap C$ $\Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$ и $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$ и $x \in A$ или $x \in C \Leftrightarrow x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$.

Доказано $\rightarrow$ $\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(IV) Формула Моргана

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

$C \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (C \setminus A_\alpha)$

$C \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (C \setminus A_\alpha)$

Д-во:

$x \in C \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha \Leftrightarrow x \in C$ и $x \notin \bigcup_\alpha A_\alpha$

$\Leftrightarrow x \in C$ и $x \notin A_\alpha$, для всякого α.

$\Leftrightarrow x \in C \setminus A_\alpha$ для всякого $\alpha \Leftrightarrow$

$x \in \bigcap_\alpha (C \setminus A_\alpha)$