Задачи на мощность числовых множеств

Определение: *Взаимно однозначное соответствие (биекция)* - соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует один и только один элемент другого множества, и обратно.

Определение: Два множества называются *эквивалентными*, если между ними возможно установить взаимно однозначное соответствие. Относительно двух эквивалентных множеств говорят, что они имеют *одинаковую мощность*. Обозначение: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Замечание: На вопрос, что такое мощность множества, можно ответить так: мощность - это то, что есть общего у всех эквивалентных между собой множеств *(определение через абстракцию)*. Обозначение мощности множества $\mathbf{A}$: $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$, $\big|\mathbf{A}\big|$.

Определение: Всякое множество $\mathbf{A}$, эквивалентное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, называется *исчислимым*, или *счётным*. Обозначение $\aleph_0$.

Определение: Если множества $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ не эквивалентны, но

$$\exists \mathbf{B}_1 \subset \mathbf{B}, \ \text{ что } \ \mathbf{B}_1 \sim \mathbf{A} \quad \text{и} \quad \nexists \mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}, \ \text{ что } \ \mathbf{A}_1 \sim \mathbf{B},$$

то мы считаем, что $\overline{\overline{\mathbf{A}}} < \overline{\overline{\mathbf{B}}}$.

0.1. Докажите, что из любого бесконечного множества $\mathbf{A}$ можно выделить счётное подмножество $\mathbf{D}$.

0.2. Докажите, что всякое бесконечное подмножество счётного множества счётно.

0.3. Докажите, что объединение счётного множества попарно непересекающихся счётных множеств есть счётное множество.

0.4. Пусть $\mathbf{E}$ - бесконечное множество, $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ – не более, чем счётное множество и множество $\mathbf{E} \setminus \mathbf{D}$ - бесконечно. Докажите, что множества $\mathbf{E} \setminus \mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ равномощны.

0.5. Докажите, что если к *произвольному* бесконечному множеству $\mathbf{A}$ прибавить конечное или счётное множество $\mathbf{B}$ новых элементов, то это не изменит его мощности, то есть выполнено $\big(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}\big) \sim \mathbf{A}$.

0.6. Пусть $\mathbf{A}$ - произвольное бесконечное множество. Докажите существование множества $\mathbf{B}$ (такого, что $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, и $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$– бесконечно), мощность которого равна мощности $\mathbf{A}$.

0.7. *(теорема Кантора об алгебраических числах)*

Число $a \in \mathbb{R}$ называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого уравнения вида: $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$, где $b_j \in \mathbb{Z}$. Докажите, что множество всех алгебраических чисел счётно.

Замечание: Так как множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ несчётно, то существуют *трансцендентные* (не алгебраические) числа.

Определение: Назовём всякое множество, эквивалентное множеству точек отрезка $[0;1]$, *множеством мощности континуум.* Обозначение $\mathfrak{c}$.

0.8. Докажите, построив взаимно однозначное соответствие, что

- множества $[0;1)$, $(0;1]$ и $(0;1)$ имеют мощность континуума.
- множества $\mathbb{R}$, $(0;+\infty)$, $[0;+\infty)$, $(-\infty;0]$ и $(-\infty;0)$ имеют мощность континуума.

0.9. Установите эквивалентность полусегмента $(0;1]$ и единичного квадрата $(0;1]\times(0;1]$.

0.10. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством иррациональных чисел и множеством действительных чисел.

0.11. Докажите, что объединение:

- счётного числа непересекающихся множеств мощности континуума имеет мощность континуума.
- континуума непересекающихся множеств мощности континуума имеет мощность континуума.

0.12. *(теорема Кантора)* Пусть $\mathbf{X}$— произвольное множество, а $2^{\mathbf{X}}$— множество всех его подмножеств, включая $\emptyset$ и $\mathbf{X}$. Докажите, что множества $\mathbf{X}$ и $2^{\mathbf{X}}$ не равномощны.

Определение: Назовём мощность множества всех подмножеств сегмента $[0;1]$ мощностью *гиперконтинуума.*

0.13. Докажите, что множество всех действительных однозначных функций на отрезке $[0;1]$ имеет мощность гиперконтинуума.

0.14. Докажите, что множество всех двоичных последовательностей имеет мощность континуум.

Утверждение *(Метод математической индукции):*

Пусть $M \subset \mathbb{N}$ - такое множество, что:

1) $1 \in M$ *(база индукции)*;

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ из того, что $n \in M$ следует, что $(n+1) \in M$ *(индукционный переход)*;

Тогда $M = \mathbb{N}$.

1.1. *(2)* • Докажите, что

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Как найти сумму квадратов, если ответ неизвестен?

1.2. Докажите, что сумма кубов $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ является точным квадратом. Например, $1 = 1^2,\ 1+8 = 9 = 3^2,\ 1+8+27 = 36 = 6^2$ и т.д.

1.3. *(бином Ньютона)*

(а) • Докажите, что для $\forall n \in \mathbb{N};\ a, b \in \mathbb{R}$ выполнено равенство:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ - *биномиальный коэффициент.*

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

n=0 1 (a+b)ⁿ
n=1 1 1
n=2 1 2 1
n=3 1 3 3 1
n=4 1 4 6 4 1
n=5 1 5 10 10 5 1
n=6 1 6 15 20 15 6 1
. . . .

Замечание: Биномиальные коэффициенты легко получаются из *треугольника Паскаля.* В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух, расположенных над ним чисел. Продолжать треугольник можно бесконечно.

(б) ⋆ Сформулируйте и докажите бином Ньютона для ***отрицательных*** целых n.

1.4. *(неравенство Бернулли)*
Пусть $x_i \cdot x_j \geqslant 0,\ \ x_i > -1,$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Докажите, что

$$(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \ldots \cdot (1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + \ldots + x_n.$$

1.5. • Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - строго положительные числа, такие что $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Докажите, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n$.

1.6. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 2$. Докажите, что

а) $\dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$, *б)* • $2 < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ *(неравенство числа* e*).*

1.7. • Докажите, что $\left(\dfrac{n}{3}\right)^n < n!$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.8. *(а)* • Докажите, используя метод математической индукции, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2, \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}.$$

(б) Докажите данное неравенство без использования метода математической индукции.

(в) Усильте неравенство из пункта (а), доказав равенство

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

1.9. • Докажите, что $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} < 2$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.10. *(неравенства между "обыкновенными средними")*

Пусть $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i > 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Обозначим

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \qquad G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}, \qquad \Gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Докажите, что $A_n \geqslant G_n \geqslant \Gamma_n$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

<u>**Замечание:**</u> Выражения A_n называется *средним арифметическим*, G_n - *средним геометрическим*, Γ_n - *средним гармоническим* чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

<u>**Замечание:**</u> Отметим, что равенство в данных неравенствах возможно тогда и только тогда, когда выполнено: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

1.11. *(8)* Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Докажите, что $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

1.12. *(7)* Докажите, что если $x > -1$, то справедливо неравенство

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx, \quad (n \in \mathbb{N},\ n > 1)$$

причём знак равенства имеет место лишь при $x = 0$.

1.13. *(9)* Докажите следующие неравенства:

(а) $2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)! > [(n+1)!]^n$ при $n\in\mathbb{N}, n>1$

(б) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ при $n\in\mathbb{N}$.

1.14. Докажите, что для любых $x\in(0;2\pi)$ и $n\in\mathbb{N}$ выполняется тождество:

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx \;=\; \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}.$$

1.15. Докажите, что для $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство:

$$\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}} < \sqrt{n}+1.$$

1.16. Пусть $k,n\in\mathbb{N}$. Докажите, что $C_n^k \leqslant \left(\dfrac{e\cdot n}{k}\right)^k$, где $e-$ *основание натурального логарифма.*

1.17. *(видоизменённый треугольник Паскаля)*

На листке бумаги выписаны числа $1,1$. Вписав между ними их сумму, получим числа $1,2,1$. Повторив операцию еще раз, получим $1,3,2,3,1$. После трёх операций: $1,4,3,5,2,5,3,4,1$. Какова будет сумма всех чисел после 55 операций?

1.18. Из чисел от 1 до $2n$ произвольно выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел всегда найдутся два, одно из которых делится на другое.

1.19. Пусть $p\geqslant 1-$ произвольное действительное число. Докажите, что для любых неотрицательных $a_1,\ldots,a_n$ справедливо неравенство

$$a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p \leqslant (a_1+a_2+\cdots+a_n)^p.$$

1.20. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что каждое из чисел $n,\ n+1,\ n+2$ является суммой двух квадратов. *Например:*

$$0=0^2+0^2,\ 1=0^2+1^2,\ 2=1^2+1^2.$$

1.21. Докажите равенство

$$\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{i_1}\cdots\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} i_k \;=\; C_{m+k}^{k+1}.$$

1.22. Докажите, что n различных прямых, лежащих в одной плоскости, разбивают эту плоскость на области, которые могут быть закрашены красной и синей красками так, что все смежные области (т.е. области, имеющие общий отрезок прямой) будут закрашены разными красками.

1.23. $\star$ Предположим, что некоторые из чисел $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ равны $+1$, остальные равны -1. Докажите, что выполняется тождество:

$$2\sin\left(\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_1\,\alpha_2}{2} + \ldots + \frac{\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}\right) = \alpha_1\sqrt{2+\alpha_2\sqrt{2+\alpha_3\sqrt{2+\ldots+\alpha_n\sqrt{2}}}}.$$

1.24. $\star$ *(теорема Шпернера)*

Пусть $\mathbf{A}$ - некоторое множество, состоящее из n элементов. Рассмотрим набор подмножеств $\mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_k$ из $\mathbf{A}$ такой, что ни одно из множеств не является частью другого. Докажите следующее неравенство: $k \leqslant C_n^{[n/2]}$.

Метод математической индукции

Утверждение справедливо для всякого натурального n, если: 1) оно справедливо для $n = 1$ и 2) из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального $n = k$ следует его справедливость для $n = k + 1$.

► Предположим противное, т.е. предположим, что утверждение справедливо не для всякого натурального n. Тогда существует такое натуральное m, что:

1. утверждение для n=m несправедливо,
2. для всякого n, меньшего m, утверждение справедливо (иными словами, m есть первое натуральное число, для которого утверждение несправедливо).

Очевидно, что $m > 1$, так как для $n = 1$ утверждение справедливо (условие 1). Следовательно, m - *1* —натуральное число. Выходит, что для ***натурального*** числа m - *1* утверждение справедливо, а для следующего натурального числа m оно несправедливо. Это противоречит условию 2). ■

Конечно, при доказательстве принципа математической индукции мы пользовались тем, что *в любой совокупности натуральных чисел содержится наименьшее число.* Легко видеть, что это свойство в свою очередь можно вывести как следствие из принципа математической индукции. Таким образом, оба эти предположения равносильны. Любое из них можно принять за одну из аксиом, определяющих натуральный ряд, — тогда другое будет теоремой. Обычно за аксиому принимают сам принцип математической индукции,называя его ***аксиомой натуральных чисел.***

Предположим, что $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$.

Определение: Множество $\mathbf{X}$ - *ограничено сверху (снизу)*, если

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbf{X} \ \Rightarrow x \leqslant C \ \ (x \geqslant C),$$

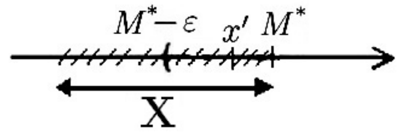
где C - *верхняя (нижняя) грань множества.*
Множество $\mathbf{X}$ - *ограничено*, если $\exists C : \forall x \in \mathbf{X} \ \Rightarrow |x| \leqslant C$.

Утверждение: Множество $\mathbf{X}$ - ограничено тогда и только тогда, когда $\mathbf{X}$ ограничено сверху и снизу.

Определение: $M^* = \sup \mathbf{X}$ - *точная верхняя грань множества* $\boldsymbol{X}$, если:

1) $\forall x \in \mathbf{X} \implies x \leqslant M^*$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x' \in \mathbf{X} : x' > M^* - \varepsilon$.

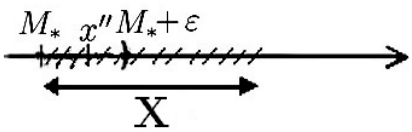


Таким образом, sup$\mathbf{X}$ есть наименьшая из верхних граней этого множества.

Определение: $M_* = \inf \mathbf{X}$ - *точная нижняя грань множества* $\boldsymbol{X}$, если:

1) $\forall x \in \mathbf{X} \implies x \geqslant M_*$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x'' \in \mathbf{X} : x'' < M_* + \varepsilon$.



Таким образом, inf$\mathbf{X}$ есть наибольшая из нижних граней этого множества.

Теорема: Если множество вещественных чисел содержит хотя бы один элемент и ограничено сверху (снизу), то у этого множества существует точная верхняя (нижняя) грань.

Определение: Если $\exists \ x^* \in \mathbf{X} : \forall x \in \mathbf{X}$ выполнено $x \leqslant x^*$, то x^* называется *наибольшим элементом множества*$\mathbf{X}$. Обозначение: $x^* = \max \mathbf{X}$.

Определение: Если $\exists \ x_* \in \mathbf{X} : \forall x \in \mathbf{X}$ выполнено $x \geqslant x_*$, то x_* называется *наименьшим элементом множества*$\mathbf{X}$. Обозначение: $x_* = \min \mathbf{X}$.

Замечание: (*отличие* sup *и* inf *от* max *и* min):

Точная верхняя (нижняя) грань $\mathbf{X}$ может существовать, но не принадлежать данному множеству. Тогда как $\max \mathbf{X}$ и $\min \mathbf{X}$, *если они существуют*, напротив, всегда принадлежат множеству $\mathbf{X}$. С другой стороны, если $\exists \max \mathbf{X}$, то sup$\mathbf{X} = \max \mathbf{X}$ (если $\exists \min \mathbf{X}$, то inf$\mathbf{X} = \min \mathbf{X}$).

Утверждение (*Принцип Дирихле*): Если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика.

2.1. *(17)*

(а) • Пусть $\mathbf{X} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}$. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани данного множества.

(б) Покажите, что множество вещественных чисел $\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{7}\}$ не имеет наибольшего элемента. Укажите точную нижнюю грань этого множества.

(в) Покажите, что множество рациональных чисел $\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 3\}$ не имеет наименьшего элемента.

2.2. Пусть $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$. Докажите, что:

(а) • $\sup \mathbf{X} \leqslant \sup \mathbf{Y}$ *(б)* $\inf \mathbf{X} \geqslant \inf \mathbf{Y}$

2.3. Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$, $\mathbf{B} = \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$. Докажите, что:

(а) • $\sup \mathbf{A} = \max\{\sup \mathbf{X}\,; \sup \mathbf{Y}\}$; *(б)* $\sup \mathbf{B} \leqslant \min\{\sup \mathbf{X}\,; \sup \mathbf{Y}\}$;

(в) $\inf \mathbf{A} = \min\{\inf \mathbf{X}\,; \inf \mathbf{Y}\}$; *(г)* $\inf \mathbf{B} \geqslant \max\{\inf \mathbf{X}\,; \inf \mathbf{Y}\}$.

2.4. Пусть $\mathbf{X}$ - ограниченное множество; -$\mathbf{X}$ - множество чисел, противоположных числам $x \in \mathbf{X}$.

(а) • Выразите inf(-$\mathbf{X}$) через $\sup \mathbf{X}$; *(б)* Выразите sup(-$\mathbf{X}$) через $\inf \mathbf{X}$

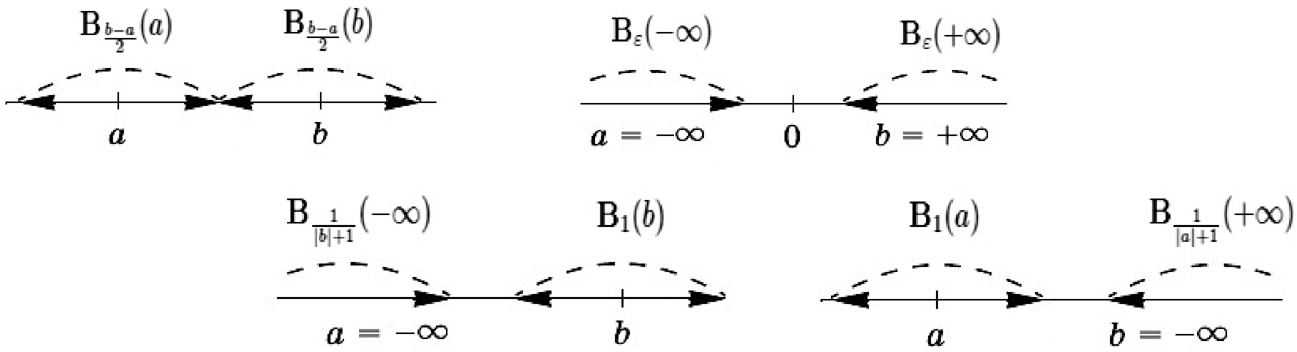
2.5. *(19)* Пусть $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})$ - множество *всех* сумм $x + y$, где $x \in \mathbf{X}$, $y \in \mathbf{Y}$. Докажите равенства:

(а) • $\inf(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \inf \mathbf{X} + \inf \mathbf{Y}$; *(б)* $\sup(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \sup \mathbf{X} + \sup \mathbf{Y}$.

2.6. *(20)* Пусть $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})$ - множество *всех* произведений $x \cdot y$, где $x \in \mathbf{X}$, $y \in \mathbf{Y}$, причем $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. Докажите равенства:

(а) • $\inf(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) = \inf \mathbf{X} \cdot \inf \mathbf{Y}$; *(б)* $\sup(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) = \sup \mathbf{X} \cdot \sup \mathbf{Y}$.

2.7. Докажите, что у любых двух различных точек расширенной числовой прямой (т.е. числовой прямой, включающей в себя $\pm\infty$) существуют непересекающиеся окрестности.



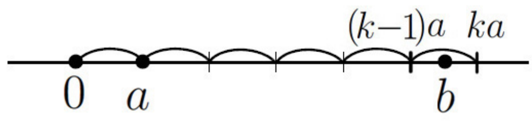
2.8. Докажите следующие утверждения:

(а) • ***теорема Архимеда:***

Каково бы ни было действительное число a, существует такое натуральное число n, что $n > a$, т.е. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \, : \, n > a$.

(б) ***следствие из теоремы Архимеда:***

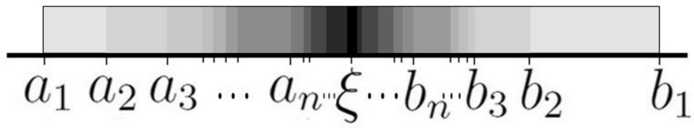
Каковы бы ни были числа a и b, $0 < a < b$, существует такое натуральное число k, что $(k-1)a \leqslant b < ka$.



(в) Пусть a и b $(a < b)$ - произвольные *действительные* числа. Тогда существует *рациональное* число c, заключенное между числами a и b.

2.9. *(16)* Покажите, что множество $\left\{\dfrac{m}{n}\right\}$ всех правильных рациональных дробей $\dfrac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и $m < n$, не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Найдите точные нижнюю и верхнюю грани этого множества.

Принцип вложенных отрезков



Определение: Система числовых отрезков

$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots, \;\; a_n \in \mathbb{R}, b_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots$

называется *системой вложенных отрезков*, если

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1,$$

т.е. каждый следующий отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ содержится в предыдущем $[a_n, b_n]$:

$$[a_1;\, b_1] \supset [a_2;\, b_2] \supset \ldots \supset [a_n;\, b_n] \supset \ldots .$$

2.10. *(непрерывность множества действительных чисел в смысле Кантора)*

(а) Докажите, что для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одно число, которое принадлежит всем отрезкам данной системы.

(б) Докажите, что отрезок $[0; 1]$ имеет имеет мощность большую, чем бесконечное множество $\mathbb{N}$, используя предыдущее утверждение.

2.11. Покажите, что для числовых промежутков других типов, нежели отрезки, предыдущее утверждение может уже не иметь места. То есть, найдётся система, например, вложенных интервалов, которая имеет пустое пересечение.

Замечание: Отметим, что существуют и такие системы вложенных интервалов, которые имеют непустое пересечение.

Определение: Пусть задана система отрезков

$$[a_n, b_n], \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad b_n \in \mathbb{R}, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Будем говорить, что *длина* $b_n - a_n$ *отрезков этой системы стремится к нулю*, если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$ такое, что для $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $b_n - a_n < \varepsilon$.

2.12. *(Лемма Кантора)*

Докажите, что для всякой суммы $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам данной системы, причём $\xi = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$.

2.13. Докажите, что из всякого бесконечного множества интервалов, объединение которых покрывает отрезок $[a; b]$ (т.е. любая точка этого отрезка содержится хотя бы в одном из интервалов данного объединения), можно выделить конечное подмножество интервалов, объединение которых также покрывает $[a; b]$.

2.14. $\star$ *(Теорема Хелли)*

Пусть $[a_n; b_n]$, $n \in \mathbb{N}$— последовательность отрезков на $\mathbb{R}$ таких, что каждые два из них имеют, по крайней мере, одну общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая каждому из отрезков.

2.15. $\star$ Пусть α - иррациональное число. Докажите, что для любых чисел $a < b$ можно выбрать *целые* числа m и n, для которых $a < m\alpha - n < b$. Можно ли выбрать числа m и n *натуральными*?

2.16. $\star$ Пусть G — открытое, не ограниченное сверху множество вещественных чисел. Существует ли такое $\alpha > 0$, что множество G содержит бесконечно много точек вида $n\alpha$, где $n \in \mathbb{N}$?

2.17. $\star$ Существует ли такой набор I интервалов, лежащих в интервале $(0; 1)$, что каждая рациональная точка интервала $(0; 1)$ принадлежит конечному числу интервалов из I, а каждая иррациональная точка этого отрезка - бесконечному числу интервалов из I.

Замечание: Обратим внимание на то, что набора интервалов $\widetilde{I}$ такого, что каждая рациональная точка интервала $(0; 1)$ принадлежит бесконечному числу интервалов из $\widetilde{I}$, а каждая иррациональная точка этого отрезка - конечному числу интервалов из $\widetilde{I}$, не существует.

2.18. $\star$ Пусть из каждой точки интервала $(0; 1)$ проведен отрезок положительной длины. Докажите, что сумма длин всех таких отрезков бесконечна.