Лекция 5 часть 1 мат анализ

Что прошел?

1. Свойства счетных множеств
2. Пример Кантора
3. Теорема (Кантора-Бернштейна)
4. Теорема Кантора

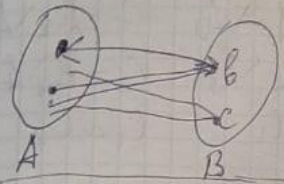
Мат.анализ лекция 5 5.01.2021г

Свойства счетных мн-в.

1) $B \subset A$ и A счетно $\Rightarrow$ B не более чем счетно

<u>Д-во:</u> 1) $f: B \to f(B)$ обозн f

Страница 1



<u>Д-во:</u> Определим $g: B \to A$ след. образом $g(B)$ = какой-то элемент непустого (сюр) $\{a: f(a) = b\}$

Т.к f-функция, то g-инъекция

По (1) B не более чем счетно

2) Если A-счетно и B-счетно, то $A \times B$-счетно

Следствие: $A_1, \dots, A_n$-счетное

$A_1 \times \dots \times A_n$ - счетное мн-во индукция

3) Объединение не более чем счетного набора не бол. чем счетных мн-во н.б.ч.с.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$

$(n, m) \to a_{f(n)\, g(m)}$

сюрьекция

<u>Пример</u>. $\mathbb{Q}$-счетно

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$-счетно

$\Rightarrow \mathbb{Q}$ н.б.ч.с

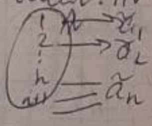
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q}$-счетно

<u>Д-во:</u> A_α

$\alpha \in I$ - не б. ч. счетно

$A_\alpha = \{a_{\alpha\beta} \mid \beta \in J$ - н.б.ч.с$\}$

Если мн-во н.б.ч.с., то сущ сюрьекция из ~~него в мн-во~~ натур. ~~чисел~~. $\mathbb{N}$ в него



$f: \mathbb{N} \to I$ - сюрь

$g: \mathbb{N} \to J$ - сюрь

4) Если A-бесконечное, то сущ. счетное $B \subset A$ $A \neq \varnothing$ $a_1 \in A$

$A \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$ $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$ $a_1 \dots a_n$

$a_{n+1} \in A \setminus \{a_1 \dots a_n\}$

$\{a_n\} \subset A$

Пример Кантора

$\{0, 1\}^\infty$ = мн-во всех послед. из 0 и 1 - не счетно

Предположим что можно занумер. эти послед. натур. чис

I $\boxed{0}110\dots$ 1-вый 1 2 из 2 n из n $\square\ \square \dots \square \dots$

II $1\boxed{1}10\dots$ негатив $0 \Leftrightarrow 1$

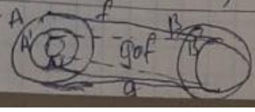
II $\square$ $\square\ \boxed{0} \dots \square$ - НЕТ

не то, что каждый

Теорема (Кантора-Бернштейна)

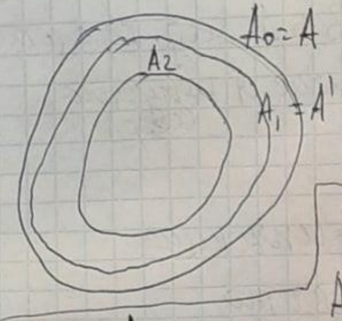
Если $A \sim B' \subset B$ и $B \sim A' \subset A$ то $A \sim B$

<u>Д-во.</u>



$A \sim A_2$

Страница 2



$A_0 \sim A_2 \overset{?}{\Rightarrow} A_0 \sim A_1$

Это будем д-ть.

$C_0 = A_0 \setminus A_1$ $C_1 = A_2 \setminus A_3$

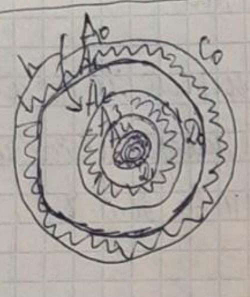
$C_1 = A_2 \setminus A_3$ $C_2 = A_4 \setminus A_5$

$C_0 \sim C_1$ $C_1 \sim C_2$

$A_0 \xrightarrow{h} A_2$ $h: A_0 \setminus A_1 \to A_2 \setminus A_3$

$A_0 \supset A_1 \xrightarrow{h} A_3 \subset A_2$

$C_1 \xrightarrow{h} C_2 \xrightarrow{h} C_3 \to$



$A_3 = h(A_1)$

$A_4 = h(A_2)$

$A_{2n+1} = h(A_{2n-1})$

$A_{2n} = h(A_{2n-2})$

C_0 - кольца

D_0 - междушки (0-центр)

$A_0 = C_0 \cup D_0 \cup C_1 \cup D_1 \ldots$

$A_1 = D_0 \cup C_1 \cup D_1 \cup \ldots$

Теорема (Кантора) $A \not\sim 2^A$

Д-во: Предположим противное

$f: A \to 2^A$ - биекция

$a \to f(a)$ - мн-во

$C = \{a : a \notin f(a)\} \subset A$ сущ $b \in A : f(b) = C$

$? \, b \in f(b) \Rightarrow b \notin f(b)$ No

$? \, b \notin f(b) \Rightarrow b \in C = f(b)$ No | против.

в 2^A есть ~~на~~ бор подмн вида $\{a\}$, где $a \in A$

Этот набор равномощен A

$A \sim C \subset 2^A$

$A \sim 2^A$

$2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}$