Лекция 6 часть 1 мат анализ

Что прошел?

1. Определение поля
2. Определение упорядоченного поля.
3. Определение вещественных чисел
4. Утверждение о неполноте рациональных чисел
5. Бесконечный десятичные дроби
6. Сравнение десятичных дробей
7. Теорема о выполнении аксиомы полноты для вещественных чисел
8. Определение точной верхней и нижней грани
9. Принцип полноты Вейерштрасса

$a \in A$ $\quad$ $?\, b \in f(b) \Rightarrow b \notin f(b)$ No | против.

$?\, b \notin f(b) \Rightarrow b \in C = f(b)$ No

Этот набор равномощен $A$

$A \sim C \subset 2^A$

$A \nsim 2^A$

$2^{\mathbb{N}} \nsim \mathbb{N}$

Мат. анализ лекция 6
06.01.2021

Опр: мн-во $F$ с операциями "+" и "•" называется полем, если выполняются след. условия.

1) $(F, +)$ – абелева группа $\quad a+b=b+a \quad a+(b+c)=(a+b)+c$

$\exists 0: 0+a=a+0=a$

$\forall a$ сущ $(-a)$: $a+(-a)=(-a)+a=0$

2) $(F\setminus\{0\}, \cdot)$ – абелева группа

$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ ← для всех $a,b,c$ из $F$

сущ $1\neq 0$ $\quad 1\cdot a=a\cdot 1=a$

для $\forall a\neq 0$ сущ $a^{-1}$: $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$

$a\cdot b=b\cdot a$ ← для $\forall a,b$ из $F$

3) Дистрибутив. $a(b+c)=ab+ac$

Пример: $\mathbb{Q}$ $\quad$ 2) $\mathbb{Z}_p$ $p$-прост

$\mathbb{Z}$ $\quad m\sim n \Leftrightarrow m-n \,\vdots\, p$

классы эквивалентности: $0, 1, \dots, p-1$

$\mathbb{Z}_p$ $\quad \underbrace{1+1+\dots+1}_{p}=0$ поле характеристики $p$

$\mathbb{Q}$ $\quad 1, 1+1, 1+1+1, \dots$, поле харак. 0
не будет 0

$A_3$
$A_3$ –

Опр: поле $F$ – называется упорядоченным, если на $F$ задан линейный порядок такой, что
1) $a \le b \Leftrightarrow a+c \le b+c$
2) $a < b$ и $c \ge 0 \Rightarrow ac \le bc$

Пример: $\mathbb{Q}$

Утв: $1>0$ Док-во: предположим противное
$1<0 \mid -1$ (вычитаем)
$0<-1 \mid \cdot(-1)$
$0<1$ противоречие
$1>0 \quad 1+1>1>0$

Упорядоченное поле всегда имеет характ. 0

Замечания:
1) элементы упорядоченного поля вида $1, 1+1, \dots, \underbrace{1+1+\dots+1}_{n}, \dots$ отождеств. с мн-вом натур. чисел и обозначаются $\mathbb{N}$
2) Элементы вида $\frac{m}{n} = m \cdot n^{-1}$, где $m \in \mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $n \in \mathbb{N}$ назовем дробями, а мн-во назовем – мн-во рац. чисел

Опр: мн-во $\mathbb{R}$ назов мн-вом действит или веществен если $\mathbb{R}$ упорядоченное поле, на котором выполняется аксиома полноты.
Если $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \varnothing$ и "$A \le B$", т.е $a \le b$ $\forall a \in A$ и $\forall b \in B$, то сущ. $c \in \mathbb{R}$, которое разделяет $A$ и $B$, $a \le c \le b$ $\forall a \in A$ и всех $b \in B$

$A \le B$, $c$

дырок нет

Утв: в $\mathbb{Q}$ есть дырки, например
между $\{x: x>0$ и $x^2<2\}$ и $\{x: x>0$ и $x^2>2\}$ ($B$)
этими элементов нет ($\mathbb{Q}$)

Предположим сущ $c$: $A \le c \le B$
1) $c^2>2$
2) $c^2<2$
3) $c^2=2$

Д-во: $A \le B$
$x^2<2 \quad y^2>2$
$y^2 > x^2 \quad (y-x)(y+x)>0$
$y-x>0 \quad y>x$

2) $c^2<2$ найдем $\varepsilon>0$: $(c+\varepsilon)^2<2$
$c^2+2c\varepsilon+\varepsilon^2<2 \quad 2c\varepsilon+\varepsilon^2<2-c^2$
$\varepsilon(2c+\varepsilon)<2-c^2 \quad (\varepsilon<1)$
$\varepsilon(2c+1)<2-c^2$

$\varepsilon = \frac{2-c^2}{(2c+1)\cdot 2024}$ След: $c+\varepsilon \in A$ и $c+\varepsilon>c$, а это противор.

Покажем, что ни один из вариантов невозможен
3) $c^2=2 \quad c=\frac{p}{q}$ – несократ НОД$(p,q)=1$
$p^2=2q^2 \Rightarrow p=2k$ и $4k^2=2q^2 \quad 2k^2=q^2 \Rightarrow q=2m$
$p$ и $q \vdots 2$ – противоречие

Утв: в $\mathbb{R}$ сущ $x>0$: $x^2=2$ это $x=\sqrt{2}$
Д-во: уже сделано.

Бесконечные десятичные дроби
$a_0, a_1, a_2 \dots a_n \dots \quad a_0 \in \mathbb{Z}$
$a_k \in \{0,1,\dots 9\}$ $k \ge 1$
послед с 9999… начиная с некотор. номера запрещены

**Пример:** $10 \cdot 0{,}999\ldots - 9 = 9{,}999\ldots - 9 = 9 + \overset{x}{0{,}999\ldots}$ ($10x = 9 + x$)

$0{,}999\ldots = 1{,}000\ldots$

Отношение порядка:

$a_0, a_1, a_2, \ldots \leq b_0, b_1, b_2, \ldots$

обе $\geq 0$ ($a_0$ и $b_0 \geq 0$)

$a_0 < b_0$ или $a_0 = b_0$ и $a_1 < b_1$ или…

**Теорема:** 1) На мн-ве бесконечн десятичных дробей выполнена аксиома полноты (докажем)

2) мн-во бескон. десят. дробей является моделью множества $\mathbb{R}$ (б/д)

**Д-во (1):** проведем д-во только в случае когда $A$ и $B$ состоят из неотрицательных чисел.

По условию: $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ и $A \leq B$

Строим разделитель $c = c_0, c_1, c_2, \ldots$

$c_0 = \min b_0$, которое встречается в $B$

теперь смотрим только на дроби в $B$ которые начинаются с $c_0, \ldots$

$c_1 - \min b_1$, которое встречается в $B$ в дробях вида $c_0, b_1$

$c_2 - \min b_2$ которое встреч. в $B$ среди дробей, начинающихся с $c_0, c_1, b_2\ldots$

и т.д.

Докажем, что построенная дробь $c = c_0, c_1, c_2, \ldots$ разделяет $A$ и $B$

Ясно, что $c \leq b$ для всякого $b \in B$

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$

? $a_0 > c_0$ т.к. тогда $a_0, a_1, \ldots >$ дроби из $B$, начинающ. с $c_0$.

$a_0 = c_0$ $a_1 > c_1$ — нет т.к. тогда $a_0, a_1, \ldots >$ дроби из $B$ начинающ. с $c_0, c_1, \ldots$

и т.д.

Осталось проверить, что $c_0, c_1, \ldots$ — допустимая запись т.е. нет девяток

**Опр:** если $c \geq a$, для всякого $a \in A$, то $c$ — называется верхней гранью $A$. Если у $A$ есть хотя бы одна верхняя грань то $A$ называется ограниченным сверху множеством. Наименьшая из верхних граней называется точной верхней гранью и обозначается $\sup A$

Если $c \leq a$ для всякого $a \in A$, то $c$ называется нижней гранью $A$. Если у $A$ сущ. хотя бы одна нижняя грань, то $A$ называется ограниченным снизу множеством. Наибольшая нижняя грань $A$ называется точной нижней гранью и обозначается $\inf A$

**Теорема** (принцип полноты Вейерштрасса)

Если $A$ не пусто ($A \neq \varnothing$) и ограничено сверху, то существует $\sup A$

Если $A \neq \varnothing$ и ограничено снизу, то сущ. $\inf A$.

<u>Д-во:</u> применяем аксиому полноты

$A \leqslant B = \{\text{верхние грани}\}$

$A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$

$c$

Т.к. $c \geq A$, то $c$ – верхняя грань

Т.к. $c \leq B$, то $c$ – наименьшая верхняя грань

$c - \sup A$.