Лекция 7 часть 1 мат анализ

Что прошел?

1. Аксиомы Архимеда
2. Определение отрезка
3. Принцип полноты Кантора
4. Доказательство несчетности отрезка.
5. Определения континуального множества.
6. Предел последовательности
7. Эквивалентные определения предела последовательности
8. Теорема о единственности предела последовательности

Д-во: применяем аксиому полноты

$A \leq B = \{\text{верхние грани}\}$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, c

Т.к. $c \geq A$, то c – верхняя грань

Т.к. $c \leq B$, то c – наименьшая верхняя грань

$c = \sup A$

Мат. анализ лекция 7
07.01.2021г

Аксиома Архимеда

Мн-во $\mathbb{N}$ не огранич. сверху в $\mathbb{R}$

Д-во: Предположим против. т.е $\mathbb{N}$ огр. сверху по принципу полноты Вейерштрасса сущ $a = \sup \mathbb{N}$; $a-1 < \sup \mathbb{N} \Rightarrow a-1$ – не верхняя грань $\Rightarrow$ сущ. $n \in \mathbb{N}$ такое что $a-1 < n$. Добавляем 1

$a < n+1$ – это противоречит $a = \sup \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$, c

c

Следствие: $0 < a < b \Rightarrow$ сущ. $n \in \mathbb{N}$ $an > b$ Д-во: делим на a $n > \frac{b}{a}$ и потом по аксиоме Архимеда

$\frac{1}{10}$, 0, 1, m, a

$n \leq a \leq n+1$

$\exists m$ $\frac{m}{10} \leq a \leq \frac{m+1}{10}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Для отрезков, интерв, полу-интерв $\{a, b\}$ число $b-a$ называется длиной

$|x| = \max\{x, -x\}$

$|x-y| = \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ y-x, & y > x \end{cases}$

величина $|x-y|$ назыв расст от x до y.

Последоват. множества A – это функция $f : \mathbb{N} \to A$ только вместо записи $f(n)$ пишем a_n

Далее пишем $\{a_n\}$

Утверждение: (неравенство Δ)

$||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$

Принцип полноты Кантора или теорема о вложенных отрезках

Пусть $\underbrace{[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \ldots}_{\text{послед. влож. отрезков}}$

Тогда 1) $\bigcap_n [a_n, b_n] \neq \varnothing$

2) Если для всякого $\varepsilon > 0$ сущ n такое что $b_n - a_n < \varepsilon$, то пересеч. $\bigcap_n [a_n, b_n]$ состоит ровно из одной точки

Д-во: выводим из принцип полн. Вей

$A = \{a_n\}$

Любой правый конец явл. верхней гранью A.

Предположим

a_m $b_m < a_n$ b_n

Эти отрезки не перес. противоречие вложенности

Следовательно $a_n \leq b_m$ a_n b_m

По принципу полноты Вейерштрасса сущ. $c = \sup A$ $c \leq b_m$ (для всякого m)

$c \geq a_n$ (для всякого n) $\Rightarrow c \in [a_n; b_n]$ для всякого n

1-ое доказано

2-е Доказ-ем) $a_n \; c_1 \; c_2 \; b_n$ $b_n - a_n \geq c_2 - c_1$ $\varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{2}$ нет отрезка

$\forall$ - для всякого
$\exists$ - существует
$:$ - такой что

След-вие: $a<b$
$[a,b]$ не является счётным мн-вом

Д-во: (нет x_1, нет, x_n из a)
Предположим, что отрезок счетен:
$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ldots$ - все его элементы
По теореме есть общая c?
$c = x_n$! - нет т.к. на n-шаге мы взяли отрезок в котором нет x_n

Опр: мн-ва равномощные отрезку $[a,b]$ с $a<b$ или $\mathbb{R}$, называются континуальными.

Предел последовательности:

Пусть $\{a_n\}$ - пос-ть вещ. чисел
Опр: число a назыв. пределом последовательности $\{a_n\}$ при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \; |a_n - a| < \varepsilon$. Обозначения $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$

Пример $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\quad$ $\frac{1}{n} < \varepsilon \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$

Надо проверить, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \forall n > N \; |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ $\;\frac{1}{n}\;$ Годится $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ (см. акс. Архим)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \forall n > N \; \frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad \frac{1}{\varepsilon} < 2^n$

По нер. Бернулли $2^n = (1+1)^n \geq 1+n \quad N \geq \frac{1}{\varepsilon}$
$n > N \quad 2^n \geq n+1 > N > \frac{1}{\varepsilon}$

число a не является пределом $\{a_n\}$
$\exists \varepsilon > 0 \; \forall N \; \exists n > N: |a_n - a| \geq \varepsilon$

Утв: след. утв. эквивалентны:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
2) для всякого интервала, содерж. a, в нем лежат все члены послед. начиная с некоторого номера N
$\forall (\alpha, \beta) \ni a \; \exists N: \forall n > N \; a_n \in (\alpha, \beta)$
3) во всяком интервале, содержащем a, лежат все члены пос-ти, кроме конечного числа
$\forall (\alpha, \beta) \ni a \; \exists$ номера $n_1, \ldots, n_N: a_n \in (\alpha, \beta) \; \forall n \notin \{n_1 \ldots n_N\}$

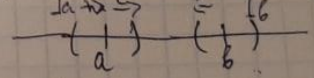
Д-во: 1) $\Rightarrow$ 2)
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \forall n > N \; |a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
Пусть $a \in (\alpha, \beta)$ $\quad \alpha \; \varepsilon \; a \; \varepsilon \; \beta$
$\varepsilon = \min\{a-\alpha, \beta - a\}$ по 1 найдётся
$\exists N: \forall n > N \; a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \to (\alpha, \beta)$
2) $\Rightarrow$ 3) $\forall (\alpha, \beta) \ni a \; \exists N: \forall n > N \; a_n \in (\alpha, \beta)$
$a_n \notin (\alpha, \beta)$ возможно только для $n \in \{1, \ldots, N\}$

3) $\Rightarrow$ 1) $\forall \varepsilon > 0$ рассмотрим $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ по 3) $\exists\, n_1, \ldots, n_N$ $\forall n \notin \{n_1, \ldots, n_N\}$ $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ $\tilde{N} = \max\{n_1, \ldots, n_N\}$ $\forall n > \tilde{N}$ $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, т.е. $|a_n - a| < \varepsilon$

Теорема: у последовательности число пределов ≤ 1

Следствие: отбрасывание или добавление конечного числа элементов не влияет на сходимость и значения предела послед-ти

Д-во: предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ $(a \neq b, a < b)$ $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$



$\exists N_1: \forall n > N_1 \ a_n \in I_a$

$\exists N_2: \forall n > N_2 \ a_n \in I_b$

Пусть $n > \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $a_n \in I_a \cap I_b = \emptyset$ Противор.