Лекция 8 часть 1 мат анализ

Что прошел?

1. Теорема об ограниченности
2. Теорема об отделимости
3. Теорема о двух полицейских
4. Переход к пределу о неравенствах
5. Теорема об арифметики пределов
6. Теорема Вейерштрасса
7. И доказательство

послед-ти

Мат. анализ лекция 8
11.01.2021г.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n > N \ |a_n - a| < \varepsilon$

Утв: число пределов ≤ 1

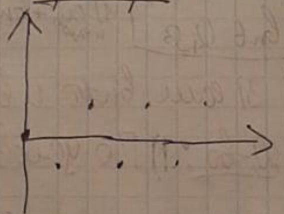
$\exists N_1: \forall n > N_1 \ a_n \in I_a$

$\exists N_2: \forall n > N_2 \ a_n \in I_b$

Противор.

Пусть $n > \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $a_n \in I_a \cap I_b = \varnothing$

Пример: $a_n = (-1)^n$ предела нет



Теорема (об ограниченности)

Если послед-ть a_n сходится, то a_n ограничена, т.е. сущ. отрезок содержащий все члены последовательности $\frac{1}{n}$ $[0,1]$

n

Замечание: в качестве такого отрезка всегда можно выбрать отрезок от $[-c, c]$, т.е. $|a_n| \leq c$

Д-во: $a_n \to a$

a_n с $n > N$

$a_1, a_2, \ldots a_n$

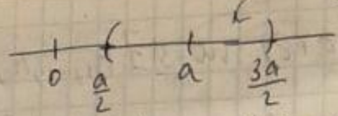
$m, Б$

$[\min\{\alpha, m\}, \max\{\beta, Б\}]$

Теорема (об отделимости)

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a > 0$, то $\exists N: \forall n > N \ a_n > \frac{a}{2} > 0$

отделено от 0

Д-во: 

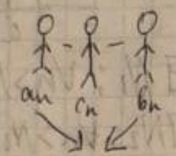
$\exists N: \forall n > N \ a_n >$

Теорема (о двух полицейских)

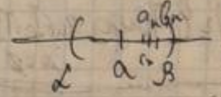
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ и

$\exists N: \forall n > N \quad a_n \le c_n \le b_n$,

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$



Д-во:



Для всякого $(\alpha, \beta) \ni a$

$\exists N_a: \forall n > N_a \quad a_n \in (\alpha, \beta)$;

$\exists N_b: \forall n > N_b \quad b_n \in (\alpha, \beta)$

$\tilde{N} = \max\{N, N_a, N_b\}$

$\forall n > \tilde{N}$

$\alpha < a_n \le c_n \le b_n < \beta$

Пример: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1 \qquad 2 = 1+1$

$1 < \sqrt[n]{2} \le 1 + \frac{1}{n}$

$(1+x)^n \ge 1 + nx$

$\left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{n} < \varepsilon$

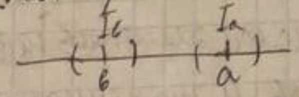
$1 + \frac{y}{n} \ge \sqrt[n]{1+y}$

Теорема (переход к пределу в неравенствах)

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и $\exists N$:

$\forall n > N \quad a_n \le b_n \quad a \le b$

Д-во: (от противного) Пусть $b < a$



$\exists N_b: \forall n > N_b \quad b_n \in I_b$, $\exists N_a: \forall n > N_a \quad a_n \in I_a$

Пусть $n > N_a, N_a, N_b$ по условию $a_n \le b_n$

по построению $a_n > b_n$ (I_a, I_b)

Теорема (арифметика пределов)

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

3) если $b_n \ne 0$ и $b \ne 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Д-во: 1) По условию $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_a: \forall n > N_a \ |a_n - a| < \varepsilon$

$\exists N_b: \forall n > N_b \ |b_n - b| < \varepsilon$

Пусть $N = \max\{N_a, N_b\}$

$\forall n > N \quad |(a_n + b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon$

2) $|a_n b_n - a \cdot b| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - a \cdot b| \le |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$

По условию

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_a: \forall n > N_a \ |a_n - a| < \varepsilon$

$\exists N_b: \forall n > N_b \ |b_n - b| < \varepsilon$

кроме того, b_n - огр. послед

$|b_n| \le C \quad \forall n \ (C > 0)$

Пусть $\tilde{N} = \max\{N_a, N_b\}$

$\forall n > \tilde{N} \quad |a_n b_n - ab| < C \cdot \varepsilon + |a| \cdot \varepsilon = (C + |a|) \cdot \varepsilon$

3) Достаточно проверить что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ По условию $b \ne 0$

Пусть $b > 0$ По теореме об отделимости $\exists N_0: \forall n > N_0 \quad b_n > \frac{b}{2} > 0$

по условию $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_b: \forall n > N_b \ |b_n - b| < \varepsilon$

Пусть $\tilde{N} = \max\{N_a, N_b\}$ $\forall n > \tilde{N}$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{b_n \cdot b} \le \frac{|b_n - b|}{\frac{b^2}{2}} < \frac{2\varepsilon}{b^2}$$

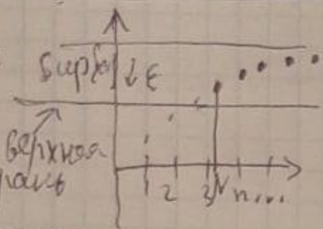
Пример:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2018}+n^{2017}+1}{n^{2018}+n^{2015}+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^{2018}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^{3}+2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{2018}} = 1$$

Теорема (Вейерштрасса) Если послед-ть $\{a_n\}$ не убывает и ограничена сверху, то сущ. предел $\lim_{n\to\infty} a_n$ и этот предел равен $\sup\{a\}$.

Если послед-ть $\{a_n\}$ не возрастает и ограничена снизу, то сущ. предел $\lim_{n\to\infty} a_n$ и этот пред равен $\inf\{a\}$.

Д-во: т.к мн-во знач $\{a_n\}$ огр. сверху, то по принципу полноты Вейерштрасса сущ. точная верхняя грань ($\sup\{a_n\} = A$)



$\forall \varepsilon > 0$ число $A - \varepsilon$ не является верхней гранью. След-но, сущ $a_N > A - \varepsilon$

Из-за монотонности a_n верно, что

$A - \varepsilon < a_N \le a_n$ $\forall n > N$

Таким образом $\forall n > N$ $A - \varepsilon < a_n \le A$ (sup)

$|a_n - A| < \varepsilon$

Пример: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Проверим, что a_n возраст. и ограничена сверху.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,n^k} =$$

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}$$

$n \nearrow$ $1 - \frac{m}{n} \nearrow$

каждое слагаемое растет и кол-во растет $\Rightarrow$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow$

Каждое слагаемое $\le \frac{1}{k!}$

Следовательно $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =$

$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \; < 3$

Опр: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$,

число e

$2 < e < 3$ $e = 2{,}7\underline{1828}\,1828\dots$

$k! \ge 2^{k-1}$ поинд д-ть