Câu 1: Biết hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$. Hàm số $y = f\left(\dfrac{4x}{x^2+1}\right)$ có tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là

A. $M+m$. **B.** $2M+m$. **C.** $M+2m$. **D.** $2M+2m$.

Lời giải

Chọn. **A.**

Đặt $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$, $x \in [0;2]$.

Ta có: $g'(x) = \dfrac{-4x^2+4}{\left(x^2+1\right)^2}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0;2]$.

Bảng biến thiên:

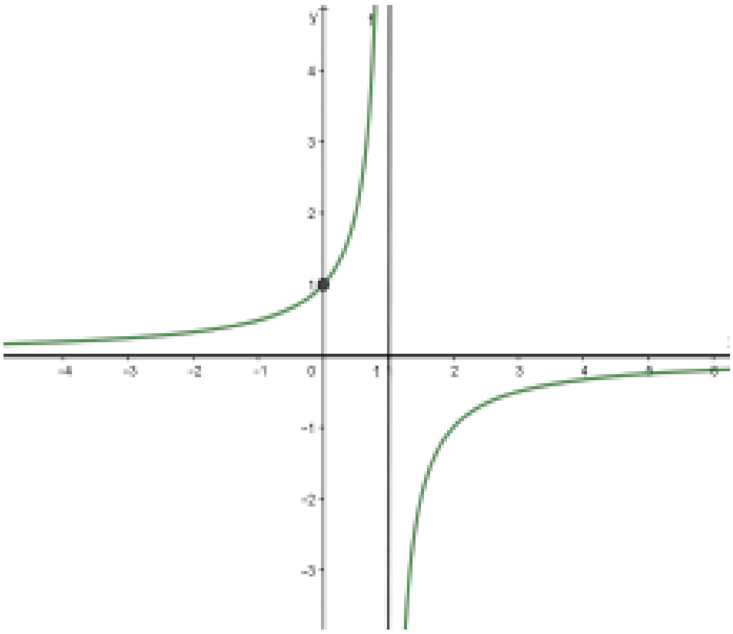
x	0		1		2
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	2	↘	$\frac{8}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $0 \le g(x) \le 2$.

Do đó: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[0;2]$ khi và chỉ khi hàm số $y = f\left[g(x)\right]$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[0;2]$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\dfrac{4x}{x^2+1}\right)$ là $M+m$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ và $g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)$trên đoạn $\left[-3;-1\right]$.



A. -2. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn. **B.**

Từ hình vẽ ta có: TCN là $y=\dfrac{a}{c}=0\Leftrightarrow a=0$.

TCĐ là $x=-\dfrac{d}{c}=1\Leftrightarrow c=-d$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $\dfrac{b}{d}=1\Leftrightarrow b=d\left(d\neq 0\right)$.

Khi đó $f\left(x\right)=\dfrac{d}{-dx+d}=\dfrac{1}{-x+1}\Rightarrow g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)=\dfrac{1}{-\dfrac{1}{-x+1}+1}=\dfrac{-x+1}{-x}$.

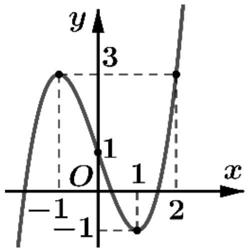
TXĐ hàm $g\left(x\right)$ là $D_g=\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}\Rightarrow$hàm số $g\left(x\right)$ xác định trên $\left[-3;-1\right]$.

$g'\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}$, với $\forall x\in\left[-3;-1\right]$.

$g\left(-3\right)=\dfrac{4}{3}$, $g\left(-1\right)=2$.

Vậy $\max\limits_{\left[-3;-1\right]} g\left(x\right)=2$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(2x^3+x-1\right)+m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]} g\left(x\right)=-10$.

A. $m=3$. **B.** $m=-12$. **C.** $m=-13$. **D.** $m=6$.

Lời giải

Chọn. C.

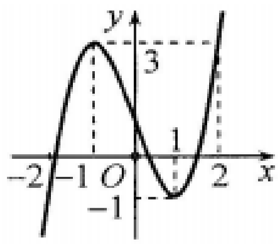
Đặt $t\left(x\right)=2x^3+x-1$ với $x\in\left[0;1\right]$. Ta có $t'\left(x\right)=6x^2+1>0,\ \forall x\in\left[0;1\right]$.

Suy ra hàm số $t\left(x\right)$ đồng biến nên $x\in\left[0;1\right]\Rightarrow t\in\left[-1;2\right]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\max\limits_{[-1;2]} f\left(t\right)=3\Rightarrow \max\limits_{[-1;2]}\left[f\left(t\right)+m\right]=3+m$.

Theo yêu cầu bài toán ta cần có: $3+m=-10\Leftrightarrow m=-13$..

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Khi đó GTLN của hàm số $y=f\left(\sqrt{4-x^2}\right)$ trên nửa khoảng $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ là

A. 3. **B.** -1. **C.** 0. **D.** Không tồn tại

Lời giải

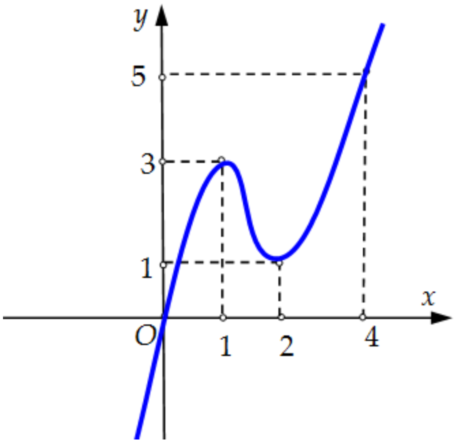
Chọn. A.

Đặt $t=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow t'=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Ta có: $t'=0\Leftrightarrow x=0\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ do $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ nên $t\in\left(1;2\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, $x\in\left(1;2\right]$ ta suy ra GTLN bằng 3.

Câu 5: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right) = f\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3\right)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $M + m$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

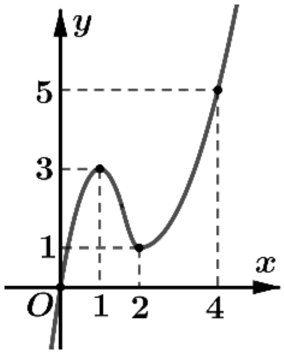
Lời giải

Chọn. A.

Đặt $t = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3 = \sin x + 3$. Ta có: $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in \left[2;4\right]$.

Từ đồ thị ta thấy: $\forall t \in \left[2;4\right] \Rightarrow 1 \le f\left(t\right) \le 5 \Rightarrow \begin{cases} M = \max\limits_{\mathbb{R}} g\left(x\right) = 5 \\ m = \min\limits_{\mathbb{R}} g\left(x\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow M + m = 6.$

Câu 6: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $M,\ m$ lần lượt là GTLN – GTNN của hàm số $g\left(x\right)=f\left[2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right]$.



Tổng $M+m$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

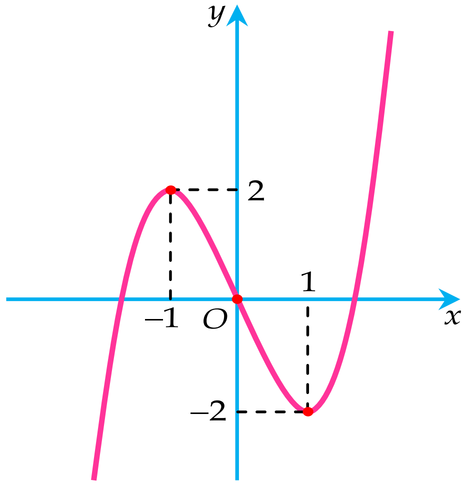
Chọn. **C.**

Ta có $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vì $0\le\sin^2 2x\le 1,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\le 1,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 1\le 2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\le 2.$

Dựa vào đồ thị suy ra $\begin{cases}M=\max g\left(x\right)=f\left(1\right)=3\\ m=\min g\left(x\right)=f\left(2\right)=1\end{cases}\Rightarrow M+m=4.$

Câu 7: Cho x,y thoả mãn $5x^2+6xy+5y^2=16$ và hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=f\left(\dfrac{x^2+y^2-2}{x^2-y^2-2xy+4}\right)$. Tính M^2+m^2.



A. $M^2+m^2=4$. **B.** $M^2+m^2=1$. **C.** $M^2+m^2=25$. **D.** $M^2+m^2=2$.

Lời giải

Chọn. **A.**

Ta có: $t=\dfrac{x^2+y^2-2}{x^2-y^2-2xy+4}=\dfrac{8x^2+8y^2-16}{8x^2-8y^2-16xy+2.16}=\dfrac{3x^2-6xy+3y^2}{18x^2-4xy+2y^2}$.

TH1: Xét $y=0\Rightarrow t=\dfrac{1}{6}\Rightarrow f(t)=m\in(0;-2)$.

TH2: Xét $y\neq 0\Rightarrow t=\dfrac{3\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-6.\dfrac{x}{y}+3}{18\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-4.\dfrac{x}{y}+2}$. Đặt $u=\dfrac{x}{y}$, ta có: $t=\dfrac{3u^2-6u+3}{18u^2-4u+2}$.

Xét $g(u)=\dfrac{3u^2-6u+3}{18u^2-4u+2}; g'(u)=\dfrac{96u^2-96u}{(18u^2-4u+2)^2}; g'(u)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\u=1\end{array}\right.$.

Ta lại có: $\lim\limits_{u\to+\infty}g(u)=\lim\limits_{u\to-\infty}g(u)=\dfrac{1}{6}$. Từ đó lập bảng biến thiên ta có

u	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(u)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(u)$	$\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

Từ bảng biến ta có $0\le g(u)\le\dfrac{3}{2}\Rightarrow 0\le t\le\dfrac{3}{2}$.Quan sát đồ thị ta ta thấy rằng:

$\max\limits_{\left[0;\frac{3}{2}\right]}P=0$; $\min\limits_{\left[0;\frac{3}{2}\right]}P=-2$. Vậy $M^2+m^2=4$..

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{21}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$			4				5		
	$-\infty$	↗		↘	2	↗		↘	$+\infty$

Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. $M.m>10$. **B.** $\frac{M}{m}>2$. **C.** $M-m>3$. **D.** $M+m>7$.

Lời giải

Chọn. **B.**

Đặt $t=x^2-2x$. Ta có $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]\Leftrightarrow -\frac{5}{2}\le x-1\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow 0\le(x-1)^2\le\frac{25}{4}$

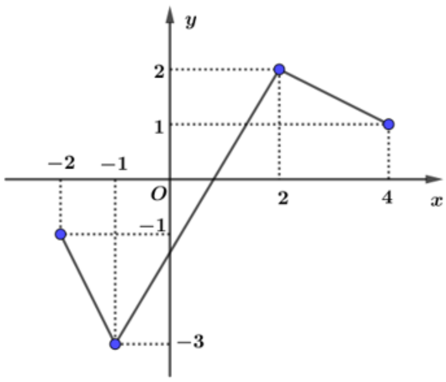
$\Leftrightarrow -1\le(x-1)^2-1\le\frac{21}{4}$ nên $t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]$.

Xét hàm số $y=f(t), t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]$

Từ bảng biến thiên suy ra:

$$m=\min_{t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]} f(t)=f(1)=2, M=\max_{t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]} f(t)=f\left(\frac{21}{4}\right)=5\Rightarrow\frac{M}{m}>2.$$

Câu 9: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị trên đoạn $\left[-2;\ 4\right]$ như hình vẽ bên. Tìm $\max\limits_{[-2;\ 4]}\left|f\left(x\right)\right|$.



A. $\left|f\left(0\right)\right|$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn. C.

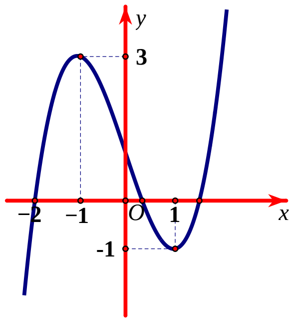
*** Phương pháp tìm GTLN của hàm trị tuyệt đối:**

$$\max\limits_{[a;b]}\left|f\left(x\right)\right|=\max\left\{\left|\max\limits_{(a;b)}f\left(x\right)\right|;\left|\min\limits_{[a;b]}f\left(x\right)\right|\right\}$$

Dựa vào đồ thị ta có: $\max\limits_{[-2;\ 4]}f\left(x\right)=2$ khi $x=2$ và $\min\limits_{[-2;\ 4]}f\left(x\right)=-3$ khi $x=-1$.

Vậy $\max\limits_{[-2;\ 4]}\left|f\left(x\right)\right|=3$ khi $x=-1$.

Câu 10: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[-1;1]$ lần lượt là M,m. Tính giá trị của biểu thức $T=673M-2019m$.

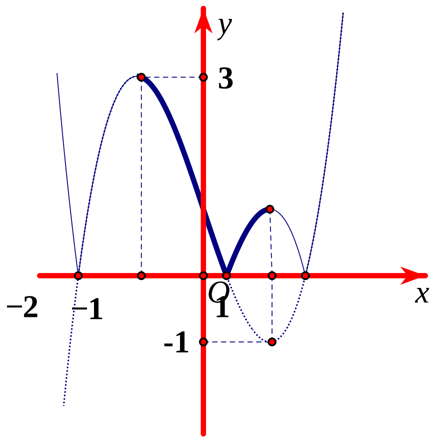
A. $T=2019$. **B.** $T=0$. **C.** $T=4038$. **D.** $T=2692$.

Lời giải

Chọn. **A.**

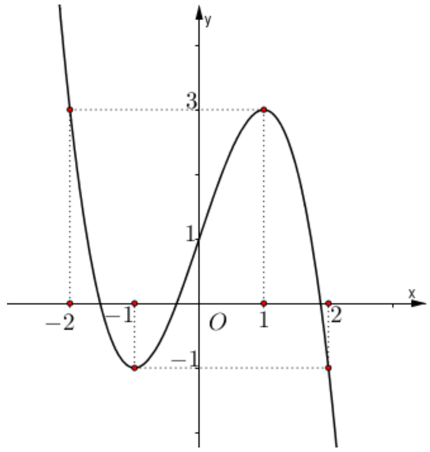
• Vẽ đồ thị của hàm số $y=|f(x)|$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ở phía trên trục hoành, lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ở phía dưới trục hoành qua trục hoành, xóa bỏ phần đồ thị phía dưới trục hoành.

• Từ đó suy ra phần đồ thị của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[-1;1]$



Dựa vào phần đồ thị đó, ta được $M=3, m=0$ nên $T=2019$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f\left(2x-1\right)\right|$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$. Tính giá trị $M-m$.

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

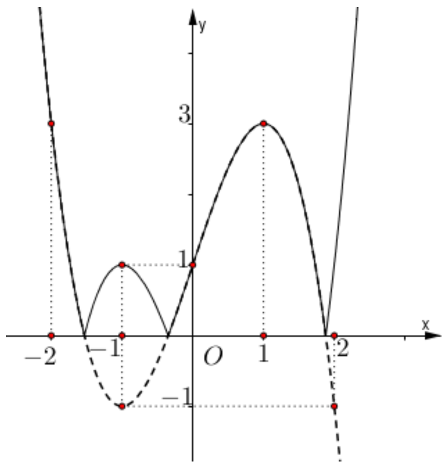
Lời giải

Chọn. **C.**

Đặt $t=2x-1$.

Với $x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow t\in\left[-1;0\right]$.

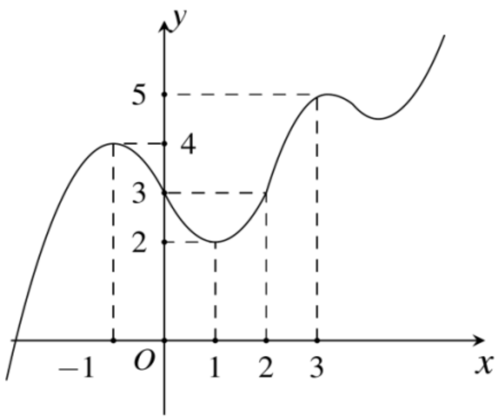
Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(t\right)\right|$ có dạng



Suy ra với $t\in\left[-1;0\right]$ ta có $m=0$, $M=1$.

Vậy $M-m=1$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M, m theo thứ tự làGTLN, GTNN của hàm số $y = f\left(\left|x-2\right|\right)$ trên đoạn $\left[-1,5\right]$. Tổng $M+m$ bằng

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải

Chọn. C.

Ta có $-1 \le x \le 5 \Rightarrow -3 \le x-2 \le 3 \Rightarrow 0 \le \left|x-2\right| \le 3$

Do đó $\forall x \in \left[-1;5\right]$, $0 \le \left|x-2\right| \le 3$.

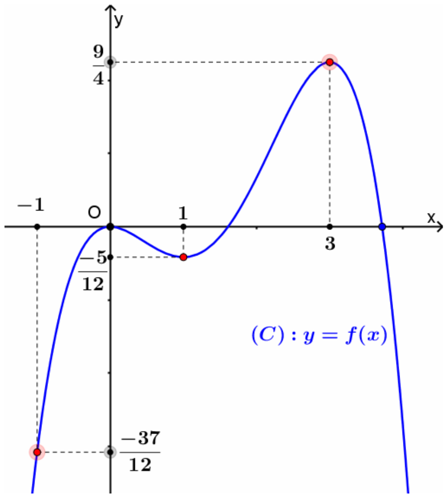
Đặt $t = \left|x-2\right|$ với $t \in \left[0;3\right]$.

Xét hàm số $y = f\left(t\right)$ liên tục $\forall t \in \left[0;3\right]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $\max\limits_{[0;3]} f(t) = 5$, $\min\limits_{[0;3]} f(t) = 2$.

Suy ra $m = 2$, $M = 5$ nên $M + m = 7$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $\left(C\right)$ như hình vẽ.



Gọi M , m theo thứ tự là GTLN-GTNN của hàm số $y=f\left(\left|-x^3+3x^2-1\right|\right)$ trên đoạn $\left[-1;3\right]$. Tích $M.m$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{-111}{16}$. **C.** $\frac{-45}{48}$. **D.** $\frac{185}{144}$.

Lời giải

Chọn. C.

Hàm số $y=g\left(x\right)=-x^3+3x^2-1$ liên tục trên đoạn $\left[-1;3\right]$;

+ $g'\left(x\right)=-3x^2+6x=-3x\left(x-2\right)$; $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

+ Vì $\begin{cases}g\left(-1\right)=3\\g\left(0\right)=-1\\g\left(2\right)=3\\g\left(3\right)=-1\end{cases}$ nên $\begin{cases}\min\limits_{[-1;3]}g\left(x\right)=-1\\\max\limits_{[-1;3]}g\left(x\right)=3\end{cases}\Rightarrow -1\le g\left(x\right)\le 3,\forall x\in\left[-1;3\right]$.

$\Rightarrow 0\le\left|g\left(x\right)\right|\le 3,\forall\in\left[-1;3\right]$.

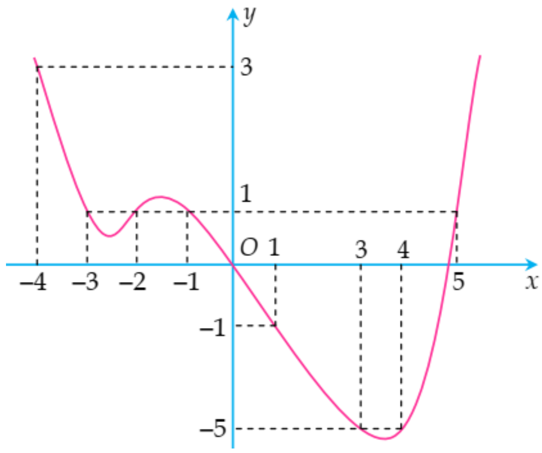
Từ đồ thị $\left(C\right): y=f\left(x\right)$;

+ $m=\min\limits_{[-1;3]}f\left(\left|g\left(x\right)\right|\right)=\frac{-5}{12}$ khi $\left|g\left(x\right)\right|=1$ tại $x=0\vee x=1\vee x=3$....

+ $M=\max\limits_{[-1;3]}f\left(\left|g\left(x\right)\right|\right)=\frac{9}{4}$ khi $\left|g\left(x\right)\right|=3$ tại $x=-1\vee x=2$.

Vậy $m.M=\frac{-45}{48}$.

Câu 14: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(\left|3-2\sqrt{6x-9x^2}\right|\right)$

.

Giá trị biểu thức $T=3M-m$ bằng

A. $T=2$. **B.** $T=0$. **C.** $T=-8$. **D.** $T=14$.

Lời giải

Chọn. **A.**

Điều kiện: $6x-9x^2\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le\dfrac{2}{3}$.

Với $x\in\left[0;\dfrac{2}{3}\right]$ ta có: $0\le\sqrt{6x-9x^2}=\sqrt{-9\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+1}\le 1$.

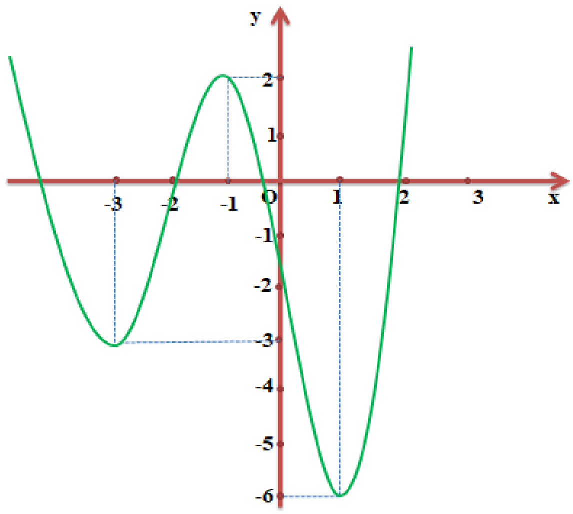
$\Rightarrow 0\ge -2\sqrt{6x-9x^2}\ge -2\Leftrightarrow 3\ge 3-2\sqrt{6x-9x^2}\ge 1$.

Đặt $u=\left|3-2\sqrt{6x-9x^2}\right|\Rightarrow 1\le u\le 3$.

Xét hàm số $y=f\left(u\right)$ với $u=\left|3-2\sqrt{6x-9x^2}\right|$ trên đoạn $\left[1;3\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $M=-1; m=-5\Rightarrow T=3M-m=-3+5=2$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f(x-1)\right|$ trên đoạn $\left[-3;3\right]$. Tìm M.

A. $M=0$. **B.** $M=6$. **C.** $M=5$. **D.** $M=2$.

Lời giải

Chọn. B.

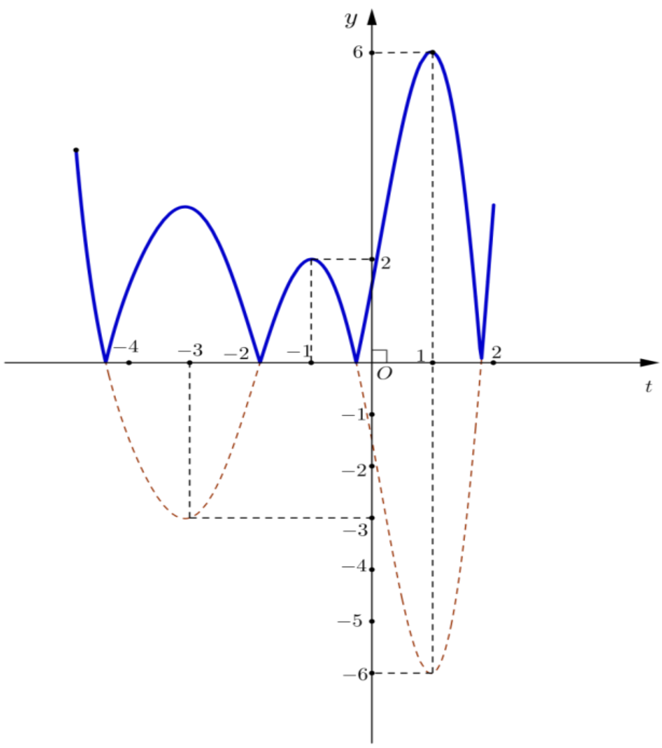
Đặt $t=x-1$ Do $x\in\left[-3;3\right]\Rightarrow t\in\left[-4;2\right]$. Xét hàm $y=\left|f(t)\right|$ trên $\left[-4;2\right]$.

Cách vẽ đồ thị hàm $y=\left|f(t)\right|$ trên $\left[-4;2\right]$

- Giữ nguyên đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ứng với phần phía trên trục hoành ta được nhánh (I).

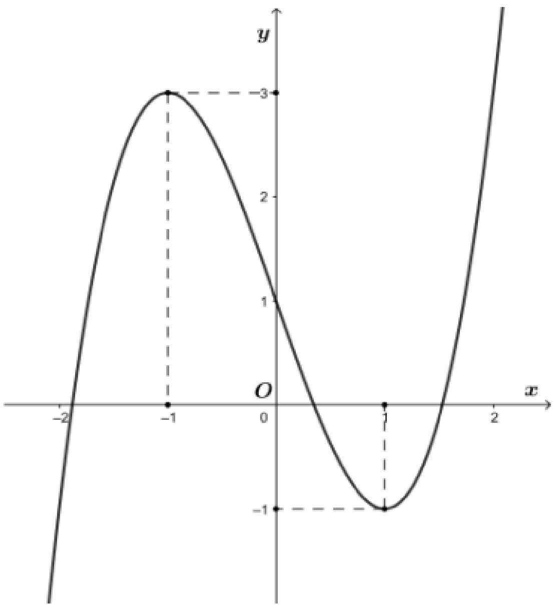
- Lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành qua trục hoành ta được nhánh (II).

Hợp của hai nhánh (I) và (II) ta được đồ thị hàm số $y=\left|f(t)\right|$ trên $\left[-4;2\right]$ như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị suy ra $M=6$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $M=\max\limits_{R}\left|f\left(\sin^2 2x\right)\right|, m=\min\limits_{R}\left|f\left(\sin^2 2x\right)\right|$. Tổng $M+m$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn. B.

$\forall x\in R, 0\le X=\sin^2 2x\le 1$

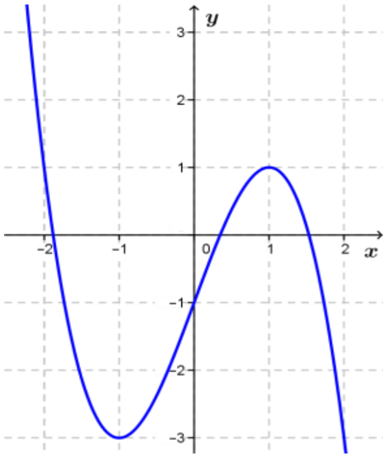
Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ trên R ta có $\max\limits_{[0;1]} f\left(X\right)=1=f\left(0\right), \min\limits_{[0;1]} f\left(X\right)=-1=f\left(1\right)$.

Vì $\min\limits_{[0;1]} f\left(X\right)=-1<0<\max\limits_{[0;1]} f\left(X\right)=1$ nên

$M=\max\limits_{R}\left|f\left(\sin^2 2x\right)\right|=\left|\min\limits_{[0;1]} f\left(X\right)\right|=\max\limits_{[0;1]} f\left(X\right)=1, m=\min\limits_{R}\left|f\left(\sin^2 2x\right)\right|=0$

Vậy $M+m=1$.

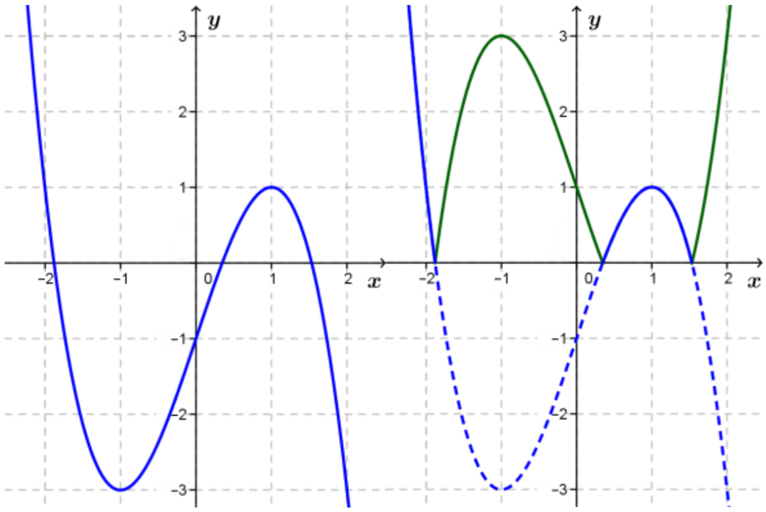
Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $g(x)=\left|f\left(2\sin^4 x+2\cos^4 x-2\right)\right|$ trên $\mathbb{R}$. Tính $T=M-m$.



A. 2. **B.** 0. **C.** 3.. **D.** 1.

Lời giải

Chọn. **A.**



Xét hàm số: $g(x)=\left|f\left(2\sin^4 x+2\cos^4 x-2\right)\right|$.

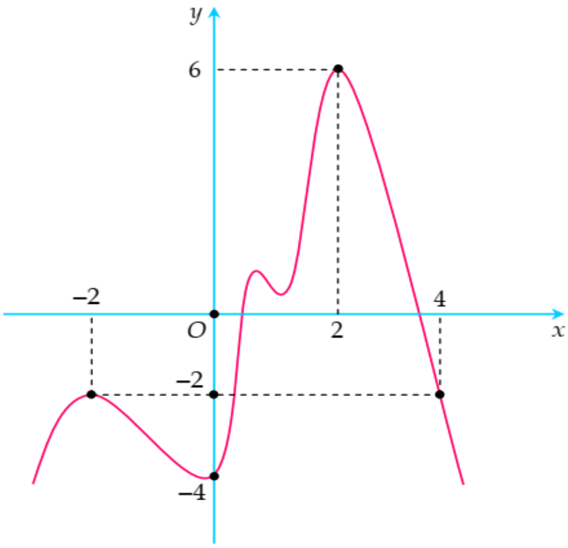
Đặt $t=2\sin^4 x+2\cos^4 x-2=2\left[\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right]-2=-4\sin^2 x\cos^2 x$

$\Rightarrow t=-\sin^2 2x\ \left(-1\le t\le 0\right)$. Suy ra hàm số $g\left(x\right)$ có dạng $\left|f\left(t\right)\right|\left(-1\le t\le 0\right)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $\left|f\left(x\right)\right|$, ta có:

$Max\, g\left(x\right)=\underset{t\in[-1;0]}{Max}\left|f\left(t\right)\right|=3\Rightarrow M=3;\ Min\, g\left(x\right)=\underset{t\in[-1;0]}{Min}\left|f\left(t\right)\right|=1\Rightarrow m=1$. Nên $M-m=2$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới:



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \left|\frac{1}{3} f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\right)\right|$. Khi đó tổng $m + M$ là

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Vì $0 \le |\sin x| \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{\pi}{3}|\sin x| \le \frac{\pi}{3}$.

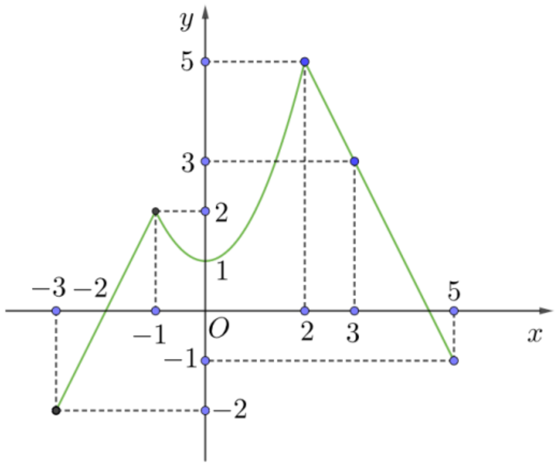
Trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ hàm số sin luôn tăng nên suy ra $\sin 0 \le \sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right) \le \sin\frac{\pi}{3}$.

Hay $0 \le \sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right) \le \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right) \in [0; 2]$

Quan sát đồ thị ta thấy: $\frac{1}{3} f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\right) \in \left[-\frac{4}{3}; 2\right]$

Từ đó $\max y = 2; \min y = 0$.

Câu 19: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-3;5\right]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(\left|3\cos x+4\sin x\right|-2\right)$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải

Chọn. A.

Đặt $t=\left|3\cos x+4\sin x\right|-2$.

$\forall x\in\mathbb{R}$ ta có: $\left(3\cos x+4\sin x\right)^2\le\left(3^2+4^2\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=25$.

Suy ra $0\le\left|3\cos x+4\sin x\right|\le 5\Leftrightarrow -2\le\left|3\cos x+4\sin x\right|-2\le 3$.

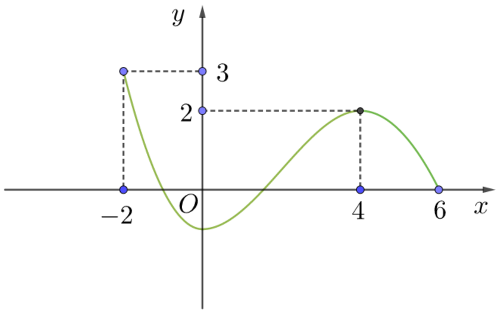
Vậy $t\in\left[-2;3\right]$

Khi đó hàm số $y=f\left(\left|3\cos x+4\sin x\right|-2\right)$ trở thành: $y=f\left(t\right)$ với $t\in\left[-2;3\right]$.

Do đó, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(\left|3\cos x+4\sin x\right|-2\right)$ bằnggiá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(t\right)$ trên đoạn $\left[-2;3\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ ta có: $\min\limits_{\mathbb{R}} f\left(\left|3\cos x+4\sin x\right|-2\right)=\min\limits_{[-2;3]} f\left(t\right)=f(-2)=0$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-2;6\right]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(\left|x\right|+1\right)$ trên đoạn $\left[-2;4\right]$. Giá trị của M bằng

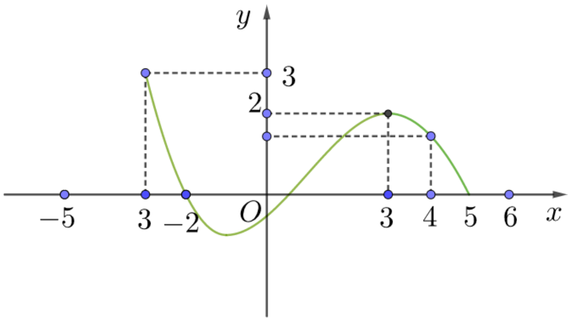
A. 3. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

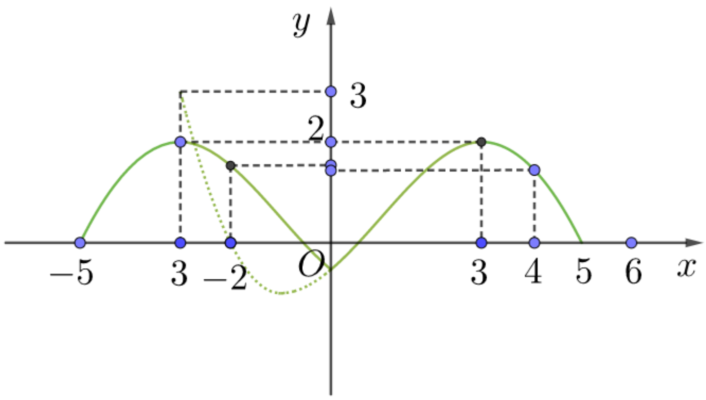
Chọn. C.

Xét hàm số $y=f\left(\left|x\right|+1\right)$. Ta thấy hàm số là hàm chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng. Khi $x\geq 0$ hàm số $y=f\left(\left|x\right|+1\right)$ trở thành $y=f\left(x+1\right)$.

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(x+1\right)$ như sau:

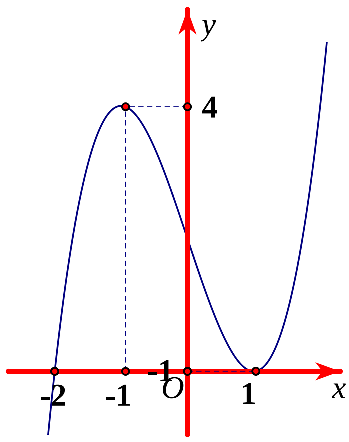


Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x+1\right)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|+1\right)$ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y=f\left(x+1\right)$ bên phải trục Oy qua trục Oy, ta được đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|+1\right)$ như sau:



Từ đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|+1\right)$ ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(\left|x\right|+1\right)$ trên đoạn $\left[-2;4\right]$ bằng 2.

Câu 21: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f(x^2+2x)\right|$ trên đoạn $[-2;0]$ lần lượt là M,m. Tính giá trị của biểu thức $T=M-3m$.

A. $T=3$. **B.** $T=-2$. **C.** $T=6$. **D.** $T=4$.

Lời giải

Chọn. B.

Xét hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ trên đoạn $[-2;0]$

Ta có $y'=(2x+2)\,f'\left(x^2+2x\right)$

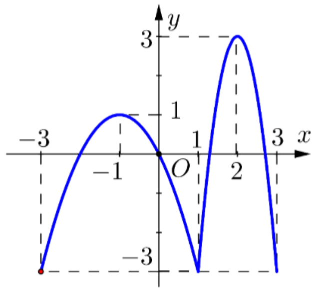
$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x^2+2x=-1\\x^2+2x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-2;0]\\x=-1\pm\sqrt{2}\notin[-2;0]\end{array}\right.$$

Tính $y(-2)=y(0)=f(0)=2;\ y(-1)=4$

$y=f\left(x^2+2x\right)$	2 $\nearrow$	4	$\searrow$ 2
$y=\lvert f(x^2+2x)\rvert$	2 $\nearrow$	4	$\searrow$ 2

Suy ra giá trị $M=4,m=2$ hay $T=-2$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| f\left(\sin 3x + \sin^3 x\right) \right|$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị $e^{\ln M} + 2019^m$ bằng ?

A. e.. **B.** 4.. **C.** 2009^{-3}.. **D.** 3.

Lời giải

Chọn. B.

Đặt $t = \sin 3x + \sin^3 x = 3\sin x$, Với $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3\sin x \in [-3;3] \Rightarrow t \in [-3;3]$

Hàm số trở thành $y = |f(t)|$.

Từ đồ thị hàm $f(t)$ trên đoạn $[-3;3]$ ta suy ra

$\min\limits_{[-3;3]} f(t) = -3,\ \max\limits_{[-3;3]} f(x) = 3 \Rightarrow \min\limits_{[-3;3]} |f(t)| = 0,\ \max\limits_{[-3;3]} |f(x)| = 3$

Vậy $e^{\ln M} + 2019^m = e^{\ln 3} + 2019^0 = 4$..

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng

A. $f(2)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(4)$. **D.** Không xác định.

Lời giải

Chọn. C.

Từ yêu cầu bài toán ta có bảng biến thiên cho hàm số $y = f(|x|)$ như sau

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[-2;4]} f(|x|) = f(4)$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		4		6		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\left|-x^2+2x+5\right|\right)$ trên $[-1;3]$ lần lượt là M, m. Tính $M+m$.

A. 13. **B.** 7. **C.** $f(2)-2$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Xét hàm số $g(x) = -x^2+2x+5$ trên $[-1;3]$.

Hàm số $g(x) = -x^2+2x+5$ xác định và liên tục trên $[-1;3]$ có

$g'(x) = -2x+2, g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1;3]$.

$g(1) = 6, g(-1) = 2, g(3) = 2$.

$\forall x \in [-1;3] \Rightarrow g(x) \in [2;6] \Rightarrow |g(x)| \in [2;6]$.

Đặt $t = |g(x)| = \left|-x^2+2x+5\right|$. Ta có: $y = f\left(\left|-x^2+2x+5\right|\right) = f(t)$.

$\forall x \in [-1;3] \Rightarrow t \in [2;6]$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(t)$ trên $[2;6]$

Ta có: $-2 = f(4) < f(2) < f(1) = 4$ nên

$M = \max\limits_{[2;6]} f(t) = \max\left\{f(2); f(4); f(6)\right\} = f(6) = 9$,

$m = \min\limits_{[2;6]} f(t) = \min\left\{f(2); f(4); f(6)\right\} = f(4) = -2$.

Vậy $M+m = 7$.