# BÀI 2
# GIÁ TRỊ LỚN NHẤT (GTLN) VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (GTNN) CỦA HÀM SỐ

**1. Định nghĩa**

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền $D$.

• Số $M$ gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $D$, kí hiệu $M=\max\limits_{D} f(x)$ nếu: $f(x)\le M, \forall x\in D$ và tồn tại $x_o\in D$ sao cho $f(x_o)=M$.

• Số $m$ gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $D$, kí hiệu $m=\min\limits_{D} f(x)$ nếu: $f(x)\ge m, \forall x\in D$ và tồn tại $x_o\in D$ sao cho $f(x_o)=m$.

**Chú ý:** Khi tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số mà không chỉ rõ tập $D$ thì ta tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên cả tập xác định của nó.

**2. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm.**

Để tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên một khoảng, đoạn hay nửa khoảng, ta có thể lập bảng biến thiên của hàm số trên tập hợp đó. Căn cứ vào bảng biến thiên, ta tìm được giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số.

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$, có thể một số hữa hạn điểm. Nếu $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữa hạn điểm thuộc khoảng $(a;b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ như sau:

• ***Bước 1:*** Tìm các điểm $x_1,x_1,...,x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng hoặc không tồn tại.

• ***Bước 2:*** Tính $f(x_1), f(x_2),..., f(x_n), f(a), f(b)$.

• ***Bước 3:*** So sánh các giá trị vừa tính được ở bước 2 và kết luận

+ Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

+ Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

**Nhận xét:**

• Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases}\max\limits_{[a,b]} f(x)=f(b)\\ \min\limits_{[a,b]} f(x)=f(a)\end{cases}$

• Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases}\max\limits_{[a,b]} f(x)=f(a)\\ \min\limits_{[a,b]} f(x)=f(b)\end{cases}$

# DẠNG 1
# TÌM GTLN VÀ GTNN DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây ***đúng***?

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $y$ | 0 | ↗ | 5 | ↘ | 1 | ↗ | 4 |

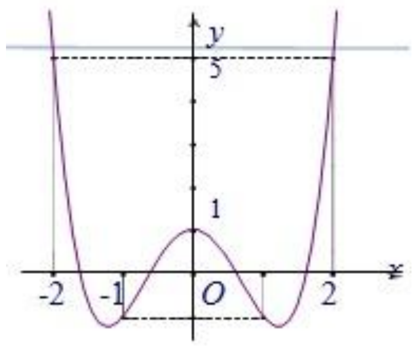
**A.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. **B.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(3)$. **C.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. **D.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

**Lời giải**

**Chọn** **A.**

Từ bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(0) = 5$

**Câu 2:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.




Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$.

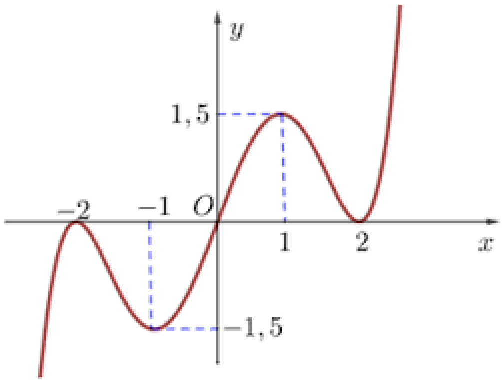
**A.** 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn** **C.**

Từ đồ thị ta có: $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 5$

**Câu 3:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.




Gọi $M$ và $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) + 2024$ cho trên đoạn $[-2;2]$. Giá trị $M - m$ bằng:

**A.** $M - m = 0$ **B.** $M - m = -2024$ **C.** $M - m = 4048$ **D.** $M - m = 3$

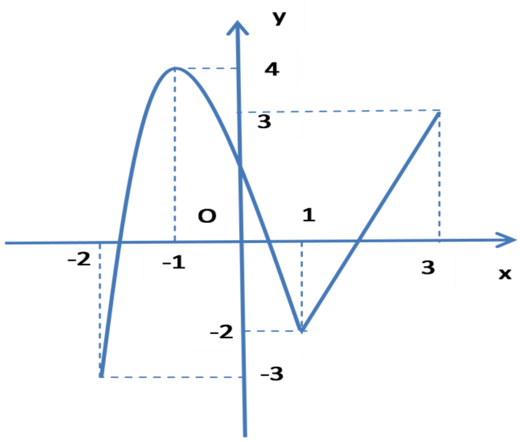
**Lời giải**

**Chọn D.**

Từ đồ thị ta có:

$$\begin{cases} \min\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-1) = -1{,}5 \\ \max\limits_{[-2;2]} f(x) = f(1) = 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \min\limits_{[-2;2]} g(x) = f(-1) = -1{,}5 + 2024 \\ M = \max\limits_{[-2;2]} g(x) = f(1) = 1{,}5 + 2024 \end{cases} \Rightarrow M - m = 3$$

**Câu 4:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [-2;3] có đồ thị như hình vẽ dưới đây.




Gọi $m, M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$. Giá trị của $2m - 3M$ bằng:

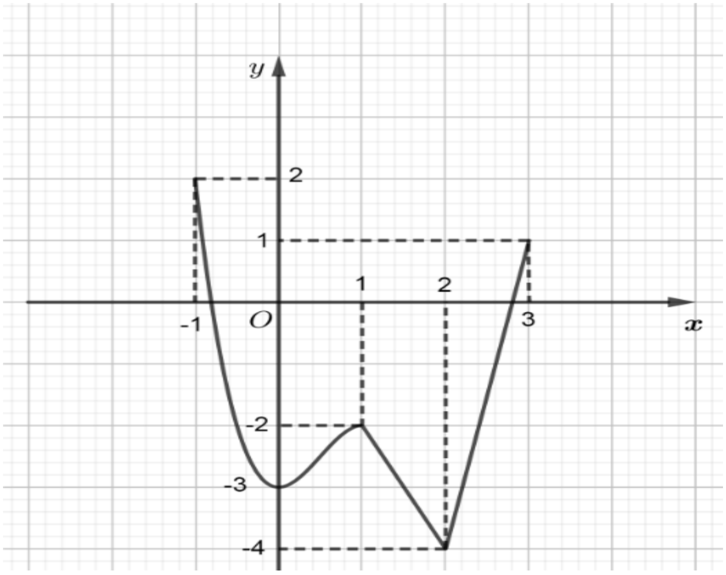
**A.** $-13$. **B.** $-18$. **C.** $-16$. **D.** $-15$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m = \min\limits_{[-2;3]} f(x) = f(-2) = -3 \\ M = \max\limits_{[-2;3]} f(x) = f(-1) = 4 \end{cases} \Rightarrow 2m - 3M = -18$

**Câu 5:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.




Gọi $M,m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M+m$ là

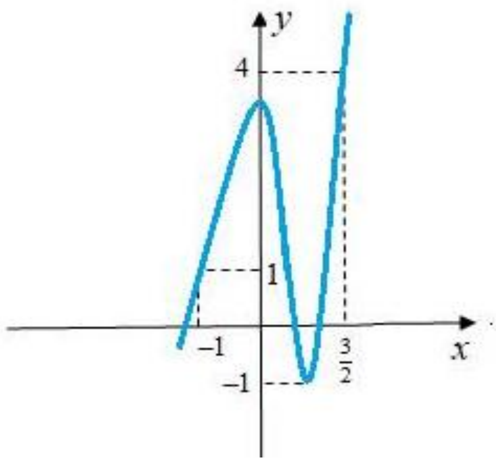
**A.** 2. **B.** $-6$. **C.** $-5$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m=\min\limits_{[-1;3]} f(x)=f(-2)=-4 \\ M=\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(-1)=2 \end{cases} \Rightarrow M+m=-2$

**Câu 6:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:




Gọi $M$ và $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1;\dfrac{3}{2}\right]$. Giá trị của $M+m$ bằng

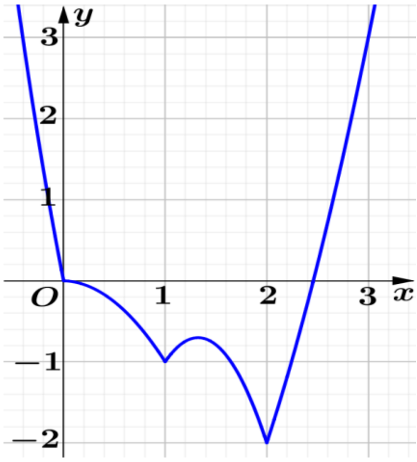
**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** $5$. **C.** $4$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m = \min\limits_{\left[-1;\frac{3}{2}\right]} f(x) = -1 \\ M = \max\limits_{\left[-1;\frac{3}{2}\right]} f(x) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 4 \end{cases} \Rightarrow M + m = 3$

**Câu 7:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $M$ và $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng?




**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m = \min\limits_{[0;3]} f(x) = f(2) = -2 \\ M = \max\limits_{[0;3]} f(x) = f(3) = 3 \end{cases} \Rightarrow M + m = 1$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 8:** Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m=1$ | $-4$ | | $y=\dfrac{x+m^2}{x-1}$ | | $[-1;0]$ | | $2$ |
| $-m^2$ | | $+$ | $\dfrac{1-m^2}{2}$ | $m^2$ | $y=\dfrac{2mx+1}{m-x}$ | $+$ | |
| $[2;3]$ | $0$ | $\nearrow$ | $m$ | $\searrow$ | $0.$ | $\nearrow$ | $6$ |

**A.** Hàm số có giá trị lớn nhất $27$.

**B.** Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $-5$.

**C.** Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-4;2)$.

**D.** Hàm số có điểm cực tiểu $(1;-5)$.

**Lời giải**

**A.** Hàm số có giá trị lớn nhất $27$. **ĐÚNG**

**B.** Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $-5$. **ĐÚNG**

**C.** Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-4;2)$. **SAI**

**D.** Hàm số có điểm cực tiểu $(1;-5)$. **ĐÚNG**

**Câu 9:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**A.** Hàm số có giá trị cực tiểu bằng $1$.

**B.** Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $0$ và giá trị nhỏ nhất bằng $-1$.

**C.** Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

**D.** Hàm số có đúng hai cực trị.

**Lời giải**

**A.** Hàm số có giá trị cực tiểu bằng $1$. **SAI**

**B.** Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $0$ và giá trị nhỏ nhất bằng $-1$. **SAI**

**C.** Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$. **ĐÚNG**

**D.** Hàm số có đúng hai cực trị. **ĐÚNG**

**Câu 10:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**A.** $\max\limits_{(-1;1]} f(x)=f(0)$. **B.** $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)$.

**C.** $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x)=f(-1)$. **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x)=f(0)$.

**Lời giải**

**A.** $\max\limits_{(-1;1]} f(x)=f(0)$. **SAI**

**B.** $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)$. **SAI**

**C.** $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x)=f(-1)$. **SAI**

**D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x)=f(0)$. **ĐÚNG**

**Câu 11:** Hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | |
| y | 0 | ↗ | 1 | ↘ | 0 |

Xét trên tập xác định của hàm số.

**A.** Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.

**B.** Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0.

**C.** Không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

**D.** Hàm số có một điểm cực trị.

**Lời giải**

**A.** Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0. **ĐÚNG**

**B.** Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0. **SAI**

**C.** Không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số. **SAI**

**D.** Hàm số có một điểm cực trị. **ĐÚNG**

## DẠNG 2
## TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN $[a;b]$

**Phương pháp:**

• ***Bước 1:*** Tìm các điểm $x_1, x_1, ..., x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng hoặc không tồn tại.

• ***Bước 2:*** Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a), f(b)$.

• ***Bước 3:*** So sánh các giá trị vừa tính được ở bước 2 và kết luận

+ Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

+ Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

$$\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f(x)=\max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\} \\ \min\limits_{[a,b]} f(x)=\min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\} \end{cases}$$

**Nhận xét:**

• Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f(x)=f(b) \\ \min\limits_{[a,b]} f(x)=f(a) \end{cases}$

• Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left[a;b\right]$ thì: $\begin{cases}\max\limits_{[a,b]} f\left(x\right)=f\left(a\right)\\ \min\limits_{[a,b]} f\left(x\right)=f\left(b\right)\end{cases}$

**Chú ý:** Có thể dùng bảng biến thiên để tìm max – min của hàm số trên **một đoạn** $\left[a;b\right]$.

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 12:** Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$ bằng

**A.** $-12$. **B.** $10$. **C.** $15$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn** **C.**

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$, ta có:

$f'\left(x\right)=3x^2-6x-9$.

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in\left[-2;2\right]\\ x=3\notin\left[-2;2\right]\end{array}\right.$.

$f\left(-2\right)=8$; $f\left(-1\right)=15$; $f\left(2\right)=-12$.

Suy ra $\max\limits_{[-2;2]} f\left(x\right)=f\left(-1\right)=15$.

**Câu 13:** Trên đoạn $\left[1;5\right]$, hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

**A.** $x=5$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=4$.

**Lời giải**

**Chọn** **B.**

**Cách 1:** Ta có $x\in\left[1;5\right]$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$x+\dfrac{4}{x}\ge 2\sqrt{x.\dfrac{4}{x}}=4$ suy ra hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $4$ khi $x=\dfrac{4}{x}\Rightarrow x=2$.

**Cách 2:** Ta có $y'=1-\dfrac{4}{x^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x^2=4\Rightarrow x=2$ (vì $x\in\left[1;5\right]$).

Khi đó $y\left(1\right)=5$, $y\left(2\right)=4$ và $y\left(5\right)=\dfrac{29}{5}$.

Do đó $\min\limits_{[1;5]} y=4$ tại $x=2$.

**Cách 3: Dùng Casio**

**Câu 14:** Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $CC'//BB'$. đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

**A.** $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $x=2$.

**Lời giải**

**Chọn** **A.**

Ta có $y'=3x^2-3$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;3] \\ x = -1 \notin [0;3] \end{array}\right.$

Lại có $y(0) = 4; y(1) = 2; y(3) = 22$.

Vậy $\min_{[0;3]} y = y(1) = 2$.

**Câu 15:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[0;2]$ là:

**A.** $\min\limits_{[2;\ 4]} y = 0.$ **B.** $\min\limits_{[2;\ 4]} y = 3.$ **C.** $\min\limits_{[2;\ 4]} y = 5.$ **D.** $\min\limits_{[2;\ 4]} y = 7.$

**Lời giải**

**Chọn B.**

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \quad \in (0;2) \\ x = -1 \notin (0;2) \end{array}\right.$

$y(1) = 3; y(0) = 5; y(2) = 7$. Do đó $\min\limits_{[0;2]} y = y(1) = 3$

**Câu 16:** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1;3]$ là:

**A.** $\max\limits_{[1;\ 3]} f(x) = 0.$ **B.** $\max\limits_{[1;\ 3]} f(x) = \frac{13}{27}.$ **C.** $\max\limits_{[1;\ 3]} f(x) = -6.$ **D.** $\max\limits_{[1;\ 3]} f(x) = 5.$

**Lời giải**

**Chọn B.**

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;3]$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 16x + 16$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \quad \notin (1;3) \\ x = \frac{4}{3} \quad \in (1;3) \end{array}\right.$

$f(1) = 0; f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{27}; f(3) = -6.$

Do đó $\max\limits_{x \in [1;3]} f(x) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{27}$

**Câu 17:** Hàm số $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-5;-3]$ bằng:

**A.** $-\frac{13}{12}$. **B.** $\frac{11}{6}$. **C.** $-\frac{47}{60}$. **D.** $-\frac{11}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2;-1;0\}$

Ta có: $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} < 0; \forall x \in D$

BBT:

| $x$ | $-5$ | | -3 |
|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | |
| $y$ | $-\frac{47}{60}$ | $\searrow$ | $\frac{-11}{6}$ |

Từ BBT ta thấy, hàm số có giá trị lớn nhất bằng $-\frac{47}{60}$.

**Câu 18:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là:

**A.** $\min\limits_{[0;\,3]} y=-3.$ **B.** $\min\limits_{[0;\,3]} y=\frac{1}{2}.$ **C.** $\min\limits_{[0;\,3]} y=-1.$ **D.** $\min\limits_{[0;\,3]} y=1.$

**Lời giải**

**Chọn C.**

Hàm số đã cho liên tục trên [0;3]

Ta có $y'=\frac{2}{(x+1)^2}>0$ với $\forall x\in[0;3]$. $y(0)=-1; y(3)=\frac{1}{2}$. Do đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y=y(0)=-1$

**Câu 19:** Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{2x^2+3x+3}{x+1}$ trên đoạn [0;2] lần lượt là:

**A.** $\frac{17}{3}; 3$ **B.** $\frac{17}{3}; -5.$ **C.** $3; -5.$ **D.** $-3; 5.$

**Lời giải**

**Chọn A.**

Hàm số xác định, liên tục trên đoạn $[0;2]$

Ta có $y'=\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow 2x^2+4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \quad \notin(0;2) \\ x=-2\notin(0;2)\end{array}\right.$

$\Rightarrow y(0)=3;\ y(2)=\frac{17}{3}$.

Vậy $\max\limits_{x\in[0;2]} y=y(2)=\frac{17}{3}; \min\limits_{x\in[0;2]} y=y(0)=3$

**Câu 20:** Gọi $M$ là giá trị lớn nhất và $m$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\sqrt{1-x^2}$. Khi đó $M+m$ bằng

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-1$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

TXĐ: $D=[-1;1]$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$

$y'=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; với $-1<x<1$. $y'=0\Leftrightarrow 1-2x^2=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y(\pm1)=0; y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}; y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$

Do đó $M=\max\limits_{[-1;1]} y=y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}; m=\min\limits_{[-1;1]} y=y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}\Rightarrow M+m=0$

**Câu 21:** Hàm số $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

**A.** $\sqrt{2}$; 1. **B.** 1; 0. **C.** 2; $\sqrt{2}$. **D.** 2; 1.

**Lời giải**

**Chọn C.**

TXĐ: $D=[-1;1]$.

Ta có: $y'=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

$y'=0\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=\sqrt{1+x}\Leftrightarrow x=0$

Khi đó: $y(-1)=\sqrt{2}$; $y(0)=2$; $y(1)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $2$, giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$

**Câu 22:** Hàm số $y=\cos 2x-3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;\pi]$ bằng:

**A.** $-4$. **B.** $-3$. **C.** $-2$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=-2\sin 2x$; $y'=0\Leftrightarrow\sin 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2};(k\in\mathbb{Z})$

Vì $x\in[0;\pi]\Rightarrow x\in\left\{0;\frac{\pi}{2};\pi\right\}$. Do đó: $y(0)=-2$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4 \Rightarrow \min y=-4$

**Câu 23:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=5\cos x-\cos 5x$ với $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ là:

**A.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=4.$ **B.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=3\sqrt{2}.$ **C.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=3\sqrt{3}.$ **D.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=-1.$

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $y=5\cos x-\cos 5x$ nên $y'=-5\sin x+5\sin 5x$

$$y'=0\Leftrightarrow\sin 5x=\sin x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x=x+k2\pi\\5x=\pi-x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{2}\\x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\end{array}\right.$$

Trên $\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, $y'=0\Leftrightarrow x\in\left\{0;-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$

$y(0)=4$; $y\left(-\frac{\pi}{6}\right)=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}$; $y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$.

Vậy $\min\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=4=y(0)$

**Câu 24:** Hàm số $y=\cos^2 x-2\cos x-1$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;\pi]$ lần lượt bằng $y_1;y_2$. Khi đó tích $y_1.y_2$ có giá trị bằng:

**A.** $\frac{3}{4}$. **B.** $-4$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=-2\sin x\cos x+2\sin x=-2\sin x(\cos x-1)$

$y'=0\Leftrightarrow -2\sin x(\cos x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.(k\in Z)$

Vì $x\in[0;\pi]\Rightarrow x=0$ hoặc $x=\pi$.

Khi đó: $y(0)=-2;\ y(\pi)=2\Rightarrow\begin{cases}y_1=-2\\ y_2=2\end{cases}\Rightarrow y_1.y_2=-4$.

**Câu 25:** Hàm số $y=\cos 2x-4\sin x+4$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là:

**A.** $\frac{\pi}{2};0$. **B.** 5; 1. **C.** 5; $-1$. **D.** 9; 1.

**Lời giải**

**Chọn C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=-2\sin 2x-4\cos x=-4\cos x(\sin x+1)$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$

Vì $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$. Khi đó $y(0)=5;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

**Câu 26:** Hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$ có giá trị lớn nhất là $M$, giá trị nhỏ nhất là $m$. Khi đó $M-m$ bằng

**A.** $2-\frac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{\sqrt{3}}-1$. **D.** $-1$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

$f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\left(x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]\right)$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,\ f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=2.$

Vậy $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)} f(x)=2,\ \min\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)} f(x)=1.$

**Câu 27:** Hàm số $y=\sqrt{1+2\sin x.\cos x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tại điểm có hoành độ là:

**A.** $x=\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $x=\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $x=\dfrac{\pi}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\sqrt{1+2\sin x.\cos x}=\sqrt{1+\sin 2x}$; $y'=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$

$y'=0\Leftrightarrow \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}=0\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$, vì $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$

Khi đó: $y(0)=1;\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2};\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.$

**Câu 28:** Hàm số $y=\sin x+\cos x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

**A.** $-2;\ 2$. **B.** $-\sqrt{2};\ \sqrt{2}$. **C.** $0;\ 1$. **D.** $-1;\ 1$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Vì $-1\le\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1\Leftrightarrow -\sqrt{2}\le\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}\Rightarrow \min y=-\sqrt{2};\max y=\sqrt{2}$

**Câu 29:** Hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

**A.** $-2;\ 1$. **B.** $0;\ 2$. **C.** $\dfrac{1}{2};\ 1$. **D.** $0;\ 1$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x$.

Mà $0\le\sin^2 2x\le 1\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x\le 1\Rightarrow \min y=\dfrac{1}{2},\ \max y=1.$

**Câu 30:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

**A.** $\frac{\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{\ln 3}{3}$. **C.** $\frac{3}{e^2}$. **D.** $\frac{1}{e}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Xét $y=f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[2;3]$

$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$; $y'=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=e\in[2;3]$

Có $f(2)=\frac{\ln 2}{2}\approx 0,3466$; $f(e)=\frac{1}{e}\approx 0,3679$; $f(3)=\frac{\ln 3}{3}\approx 0,366$,

Suy ra $\underset{x\in[2;3]}{Min} f(x)=\frac{\ln 2}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng $\frac{\ln 2}{2}$.

**Câu 31:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x^2-2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

**A.** $2e^4$ **B.** $-e^2$ **C.** $2e^2$ **D.** $-2e^2$

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $f'(x)=2(x^2-2)e^{2x}+2xe^{2x}=2(x^2+x-2)e^{2x}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[-1;2] \\ x=-2\notin[-1;2] \end{array}\right.$$.

Và $f(-1)=-e^{-2}$; $f(2)=2e^4$; $f(1)=-e^2$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x^2-2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng $-e^2$ tại $x=1$.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 32:** Cho hàm số $y=\sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1;1]$.

**A.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max\limits_{[-1;1]} y=\sqrt{5}$ và $\min\limits_{[-1;1]} y=0$.

**B.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max\limits_{[-1;1]} y=1$ và $\min\limits_{[-1;1]} y=-3$.

**C.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max\limits_{[-1;1]} y=3$ và $\min\limits_{[-1;1]} y=1$.

**D.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max\limits_{[-1;1]} y=0$ và $\min\limits_{[-1;1]} y=-\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**A.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max\limits_{[-1;1]} y=\sqrt{5}$ và $\min\limits_{[-1;1]} y=0$. **SAI**

**B.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max\limits_{[-1;1]} y=1$ và $\min\limits_{[-1;1]} y=-3$. **SAI**

**C.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max\limits_{[-1;1]} y=3$ và $\min\limits_{[-1;1]} y=1$. **ĐÚNG**

**D.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max\limits_{[-1;1]} y=0$ và $\min\limits_{[-1;1]} y=-\sqrt{5}$. **SAI**

Điều kiện xác định: $5-4x \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{5}{4}$.

Suy ra hàm số xác định với $\forall x \in [-1;1]$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$

Ta có $y' = \frac{-2}{\sqrt{5-4x}} < 0, \forall x \in [-1;1]$.

Do đó $\max\limits_{[-1;1]} y = y(-1) = 3; \min\limits_{[-1;1]} y = y(1) = 1$

**Câu 33:** Cho hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2;4]$.

**A.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min\limits_{[2;4]} y = 6$.

**B.** Giá trị lớn nhất của hàm số là $\max\limits_{[2;4]} y = \frac{13}{2}$

**C.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min\limits_{[2;4]} y = -6$.

**D.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min\limits_{[2;4]} y = \frac{25}{4}$.

**Lời giải**

**A.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min\limits_{[2;4]} y = 6$. **ĐÚNG**

**B.** Giá trị lớn nhất của hàm số là $\max\limits_{[2;4]} y = \frac{13}{2}$ **ĐÚNG**

**C.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min\limits_{[2;4]} y = -6$. **SAI**

**D.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min\limits_{[2;4]} y = \frac{25}{4}$. **SAI**

Hàm số đã cho liên tục trên [2;4]

Ta có $y' = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2-9}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -3 & \notin (2;4) \\ x = 3 & \in (2;4) \end{array}\right.$

Ta có $y(2) = \frac{13}{2}; y(3) = 6; y(4) = \frac{25}{4}$. Do đó $\min\limits_{x \in [2;4]} y = y(3) = 6$

## DẠNG 3
## TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG $(a;b)$ NỬA KHOẢNG $(a;b]$; $[a;b)$.

**Phương pháp:** Dùng bảng biến thiên để tìm max – min. Phương pháp này thường dùng cho bài toán tìm GTLN và GTNN trên **một khoảng** $(a;b)$ **hoặc nửa khoảng** $[a;b)$, $(a;b]$

.

• ***Bước 1:*** Tính $f'(x)$ $f'(x)$.

• ***Bước 2:*** Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

• ***Bước 3:*** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

**Câu 34:** Hàm số $y=(x-1)^2+(x+3)^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

**A.** $3$. **B.** $-1$. **C.** $10$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=(x-1)^2+(x+3)^2=2x^2+4x+10$.

Ta có: $y'=4x+4$; $y'=0\Leftrightarrow x=-1$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $8$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ BBT ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $8$.

**Câu 35:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là:

**A.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y=-1.$ **B.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y=3.$ **C.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y=5.$ **D.** $\min\limits_{(2;+\infty)} y=\dfrac{-7}{3}.$

**Lời giải**

**Chọn B.**

**Cách 1: Làm tự luận**

Hàm số xác định với $\forall x\in(1;+\infty)$

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(1;+\infty)$

Ta có $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$

$f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

Bảng biến thiên

| $x$ | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\|\ +\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có: $\min\limits_{x\in(1;+\infty)} f(x)=f(2)=3$

**Cách 2: Dùng Casio:** Dùng chức năng $\boxed{SOLVE}$.

***Bước 1:*** Nhập $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ vào màn hình.

***Bước 2:*** Sau đó nhấn dấu $\boxed{SHIFT}\boxed{ALPHA}\boxed{CALC}$ rồi nhập $-\dfrac{7}{3}$ của **đáp án D**

Lúc này màn hình: $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=-\dfrac{7}{3}$

***Bước 3:*** Nhấn dấu $\boxed{SHIFT}\boxed{CALC}$. Máy hỏi $X$?

***Bước 4:*** Ta nhập $X=2$ với $2\in(1;+\infty)$.

***Bước 5:*** Nhấn dấu $\boxed{=}$. kết quả $X=\dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{1}{3}\notin(1;+\infty)$

$\Rightarrow$ **loại** **D.**

Ta tiếp tục làm tương tự với **đáp án A:**

***Bước 1:*** nhấn dấu $\boxed{REPLAY \triangleright}$ rồi nhập $-1$ của **đáp án A**

Lúc này màn hình: $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=-1$

***Bước 2:*** Nhấn dấu $\boxed{SHIFT}\boxed{CALC}$. Máy hỏi $X$?

***Bước 3:*** Ta nhập $X=2$ với $2\in(1;+\infty)$.

***Bước 4:*** Nhấn dấu $\boxed{=}$. kết quả $X=0$ và $0\notin(1;+\infty)$

$\Rightarrow$ **loại** **A.**

Ta tiếp tục làm tương tự với **đáp án B:**

***Bước 1:*** nhấn dấu $\boxed{REPLAY \triangleright}$ rồi nhập $3$ của **đáp án B**

Lúc này màn hình: $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=3$

***Bước 2:*** Nhấn dấu $\boxed{SHIFT}\boxed{CALC}$. Máy hỏi $X$?

***Bước 3:*** Ta nhập $X=2$ với $2\in(1;+\infty)$.

***Bước 4:*** Nhấn dấu $\boxed{=}$. kết quả $X=2$ và $2\in(1;+\infty)$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án** **B.**

**Câu 36:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3+\sqrt{x^2-2x+5}$ bằng

**A.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=3$. **B.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=5$. **C.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=3+\sqrt{5}$. **D.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=0$.

**Lời giải**

**Chọn** **B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; $y'=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Do đó $\min\limits_{\mathbb{R}} y = y(1) = 5$

**Câu 37:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1}$ là:

**A.** không có giá trị nhỏ nhất.
**B.** có giá trị nhỏ nhất bằng $1$.
**C.** có giá trị nhỏ nhất bằng $-1$.
**D.** có giá trị nhỏ nhất bằng $0$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

TXĐ: $D = [-1; +\infty)$.

Ta có: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0, \ \forall x \in (-1; +\infty)$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x = -1$

**Câu 38:** Cho hàm số $y = x - \sqrt{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng:

**A.** Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3}{4}$ và không có giá trị lớn nhất.

**B.** Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng $1$.

**C.** Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

**D.** Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm có hoành độ $x = 1$ và giá trị lớn nhất bằng $1$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

TXĐ: $D = [1; +\infty)$.

Ta có: $y' = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{2\sqrt{x-1} - 1}{2\sqrt{x-1}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{x-1} - 1}{2\sqrt{x-1}} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{4}$

BBT:

| $x$ | $1$ | | $\frac{5}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{3}{4}$ | $\nearrow$ | $0$ |

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1

**Câu 39:** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là:

**A.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có: $y=\frac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}-x}$.

Hàm số $y$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ khi hàm số $f(x)=\sqrt{9x^2+1}-x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$

Ta có: $f'(x)=\frac{9x}{\sqrt{9x^2+1}}-1\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=0\\x\in(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{6\sqrt{2}}$

$\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f\left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\max\limits_{(0;+\infty)} y=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

**Câu 40:** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ là:

**A.** Không tồn tại. **B.** 1. **C.** $\pi$. **D.** $-1$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

$y'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $y'=0\Leftrightarrow x=\pi\left(x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\right)$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| |
| $y$ | \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| |

Vậy $\max\limits_{\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)} y=-1$ và $\min\limits_{\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)} y$ không tồn tại.

**Câu 41:** Hàm số $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng:

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $-1$. **D.** Không tồn tại.

**Lời giải**

**Chọn B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y=\sin^4 x-\cos^4 x=\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=-\cos 2x$

Mà $-1\le \cos 2x\le 1 \Leftrightarrow -1\le -\cos 2x\le 1 \Rightarrow \max y=1$.

**Câu 42:** Hàm số $y=\sin^6 x+\cos^6 x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

**A.** $1; -1$. **B.** $2; 0$. **C.** $\frac{1}{4}; -1$. **D.** $1; \frac{1}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y=\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

$=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

Mà: $0\le \sin^2 2x\le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\le 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\le 1 \Rightarrow \min y=\frac{1}{4}; \max y=1$.

## DẠNG 4
## TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ

**Câu 43:** Hàm số $y=x+\frac{1}{x}+x^2+\frac{1}{x^2}$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ là:

**A.** $3;\frac{112}{9}$. **B.** $1;4$. **C.** $1;\frac{112}{9}$. **D.** $4;\frac{112}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Đặt $t=x+\frac{1}{x}\left(2\le t\le \frac{10}{3}\right) \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

Khi đó hàm số trở thành: $y=t^2+t-2 \Rightarrow y'=2t+1>0; \forall t\in\left[2;\frac{10}{3}\right]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến $\forall t\in\left[2;\frac{10}{3}\right]$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị lớn nhất = 4, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất $=\frac{112}{9}$

**Câu 44:** Hàm số $y=\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;63]$ là:

**A.** $2;12$. **B.** $1;2$. **C.** $0;2$. **D.** $0;12$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

TXĐ: $D=\left[-1;+\infty\right)$.

Đặt $t=\sqrt[6]{x+1}\ \left(1\le t\le 2\right)$

Khi đó hàm số trở thành: $y=t^3+t^2\Rightarrow y'=3t^2+2t>0;\forall t\in\left[1;2\right]$

$\Rightarrow \min y=y\left(1\right)=2;\ \max y=y\left(2\right)=12$.

**Câu 45:** Hàm số $y=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;4\right]$ lần lượt là:

**A.** $\dfrac{8}{3};0$. **B.** $\dfrac{8}{3};-\dfrac{8}{3}$. **C.** $0;-\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{24}{5};0$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

TXĐ: $D=\left[0;+\infty\right)$.

Đặt $t=\sqrt{x};\left(x\in\left[0;4\right]\Rightarrow 0\le t\le 2\right)$.

Khi đó hàm số trở thành: $y=t+\dfrac{t}{t+1}\Rightarrow y'=1+\dfrac{1}{\left(t+1\right)^2}>0$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến $\forall t\in\left[0;2\right]$

$\Rightarrow \min y=y\left(0\right)=0;\ \max y=y\left(2\right)=\dfrac{8}{3}$.

**Câu 46:** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x}-4\sqrt{(x+4)(4-x)}+5$ bằng

**A.** $\max\limits_{[-4;4]} y=10.$ **B.** $\max\limits_{[-4;4]} y=5-2\sqrt{2}.$ **C.** $\max\limits_{[-4;4]} y=-7.$ **D.** $\max\limits_{[-4;4]} y=5+2\sqrt{2}.$

**Lời giải**

**Chọn D.**

Điều kiện $-4\le x\le 4$. Nhận xét: Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-4;4\right]$

Đặt $t=\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x}\ \Rightarrow t^2=x+4+4-x+2\sqrt{(x+4)(4-x)}\Rightarrow\sqrt{(x+4)(4-x)}=\dfrac{t^2-8}{2}$

Ta có $\quad y=t-4\left(\dfrac{t^2-8}{2}\right)+5=-2t^2+t+21=f\left(t\right)$

Tìm điều kiện của *t*: Xét hàm số $g(x)=\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x}$ với $x\in[-4;4]$

$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$; $g(-4)=2\sqrt{2}$; $g(0)=4$; $g(4)=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[-4;4]} g(x)=2\sqrt{2}$; $\max\limits_{x\in[-4;4]} g(x)=4\ \Rightarrow\ t\in[2\sqrt{2};4]$

$f'(t)=-4t+1<0\ \forall t\in[2\sqrt{2};4]\ \Rightarrow\ f\left(t\right)$ là hàm nghịch biến trên $[2\sqrt{2};4]$

$\underset{[-4;4]}{Max}\, y = f(2\sqrt{2}) = 5 + 2\sqrt{2}$

**Câu 47:** Giá trị lớn nhất $M$, giá trị nhỏ nhất $m$ của hàm số: $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$ là:

**A.** $M = -1; m = \frac{-3}{2}$. **B.** $M = 3; m = -1$. **C.** $M = 3; m = \frac{-3}{2}$. **D.** $M = \frac{3}{2}; m = -3$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đặt $t = \sin x, -1 \le t \le 1$. Khi đó $y = f(t) = 2t^2 + 2t - 1$

$f'(t) = 4t + 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1}{2} \in [-1;1] \Rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-3}{2}; f(-1) = -1; f(1) = 3$

Vậy $\min_R y = \frac{-3}{2}, \max_R y = 3$.

**Câu 48:** Giá trị lớn nhất $M$, giá trị nhỏ nhất $m$ của hàm số $y = \sin^4 x - 4\sin^2 x + 5$ là:

**A.** $M = 2; m = -5$. **B.** $M = 5; m = 2$. **C.** $M = 5; m = -2$. **D.** $M = -2; m = -5$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Đặt $t = \sin^2 x, 0 \le t \le 1 \Rightarrow y = f(t) = t^2 - 4t + 5$. $f'(t) = 2t - 4$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \notin [0;1]$

$f(0) = 5; f(1) = 2$. Vậy $\underset{\mathbb{R}}{min}\, y = 2, \underset{\mathbb{R}}{max}\, y = 5$

**Câu 49:** Hàm số $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4$ có giá trị lớn nhất bằng:

**A.** $-6$. **B.** $-7$. **C.** $8$. **D.** $9$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

$y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4 = -2\sin^3 x - 6\sin^2 x - 6\sin x + 7$

Đặt $t = \sin x\,(-1 \le t \le 1)$.

Xét hàm $y = -2t^3 - 6t^2 - 6t + 7$ trên đoạn $[-1;1]$

$y' = -6t^2 - 12t - 6 \Rightarrow y' = 0$ vô nghiệm.

Ta có: $y(-1) = 9, y(1) = -7$

Vậy hàm số $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4$ có giá trị lớn nhất bằng 9.

**Câu 50:** Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi $M$ là giá trị lớn nhất và $m$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

**A.** $M = m + \frac{2}{3}$. **B.** $M = m + 1$. **C.** $M = \frac{3}{2}m$. **D.** $M = m + \frac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Đặt $t = \sin x, -1 \le t \le 1 \Rightarrow y = f(t) = \dfrac{t+1}{t^2+t+1}$, $f'(t) = \dfrac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \in [-1;1] \\ t = -2 \notin [-1;1] \end{array}\right. \Rightarrow f(0) = 1,\ f(-1) = 0,\ f(1) = \dfrac{2}{3}$. Vậy $M = 1, m = 0$

**Câu 51:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(x+2)(x+4)(x+6)+5$ trên nữa khoảng $[-4;+\infty)$ là:

**A.** $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -8$. **B.** $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -11$. **C.** $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -17$. **D.** $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -9$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-4;+\infty)$

Ta có: $y = (x^2+6x)(x^2+6x+8)+5$.

Đặt $t = x^2+6x$. Khi đó $y = t^2+8t+5$

Xét hàm số $g(x) = x^2+6x$ với $x \ge -4$.

Ta có $g'(x) = 2x+6; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $-8$ | $\searrow$ | $-9$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Suy ra $t \in [-9;+\infty)$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = h(t) = t^2+8t+5$ với $t \in [-9;+\infty)$.

Ta có $h'(t) = 2t+8$ ; $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -4$;

$\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | $-9$ | | $-4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | | $14$ | $\searrow$ | $-11$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -11$