

BÀI 2**GIÁ TRỊ LỚN NHẤT (GTLN) VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (GTNN) CỦA HÀM SỐ****1. Định nghĩa**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D .

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D , kí hiệu $M = \max_D f(x)$ nếu:

$$f(x) \leq M, \forall x \in D \text{ và tồn tại } x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = M.$$

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D , kí hiệu $m = \min_D f(x)$ nếu:

$$f(x) \geq m, \forall x \in D \text{ và tồn tại } x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = m.$$

Chú ý: Khi tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số mà không chỉ rõ tập D thì ta tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên cả tập xác định của nó.

2. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm.

Để tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên một khoảng, đoạn hay nửa khoảng, ta có thể lập bảng biến thiên của hàm số trên tập hợp đó. Căn cứ vào bảng biến thiên, ta tìm được giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số.

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$, có thể một số hữu hạn điểm. Nếu $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a; b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ như sau:

- Bước 1:** Tìm các điểm x_1, x_2, \dots, x_n thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng hoặc không tồn tại.

- Bước 2:** Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$.

- Bước 3:** So sánh các giá trị vừa tính được ở bước 2 và kết luận

+ Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

+ Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Nhận xét:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì:
$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = f(b) \\ \min_{[a,b]} f(x) = f(a) \end{cases}$$
- Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì:
$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = f(a) \\ \min_{[a,b]} f(x) = f(b) \end{cases}$$

DẠNG 1**TÌM GTLN VÀ GTNN DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

x	-1	0	2	3	
y'	+	0	-	0	+
y	<pre>graph LR; 0 --> 5; 5 --> 1; 1 --> 4</pre>				

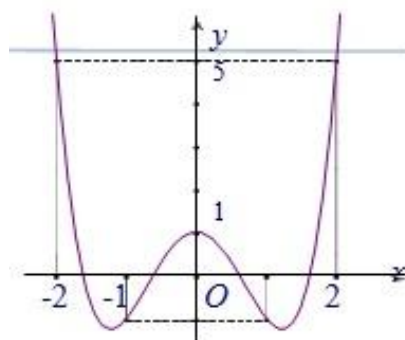
- A.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. **B.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$. **C.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. **D.** $\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Chọn A.

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0) = 5$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$.

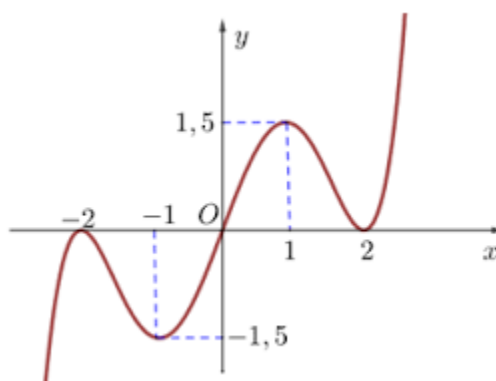
- A.** 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị ta có: $\max_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 5$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) + 2024$ cho trên đoạn $[-2; 2]$. Giá trị $M - m$ bằng:

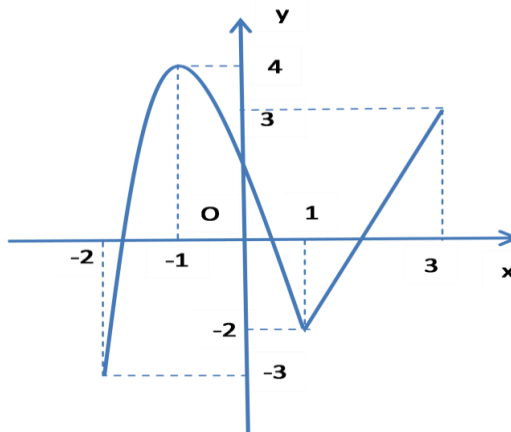
- A.** $M - m = 0$ **B.** $M - m = -2024$ **C.** $M - m = 4048$ **D.** $M - m = 3$

Lời giải

Chọn **D.**

Từ đồ thị ta có:

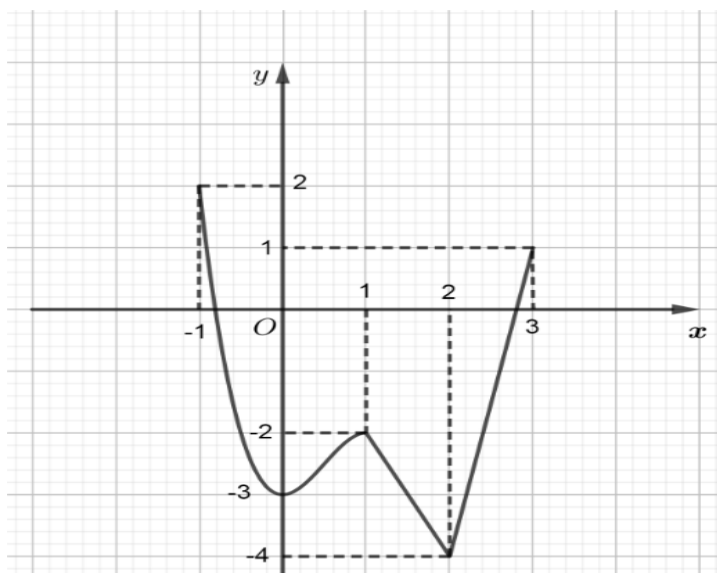
$$\begin{cases} \min_{[-2;2]} f(x) = f(-1) = -1,5 \\ \max_{[-2;2]} f(x) = f(1) = 1,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \min_{[-2;2]} g(x) = f(-1) = -1,5 + 2024 \\ M = \max_{[-2;2]} g(x) = f(1) = 1,5 + 2024 \end{cases} \Rightarrow M - m = 3$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;3]$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$.Giá trị của $2m - 3M$ bằng:**A.** -13.**B.** -18.**C.** -16.**D.** -15.

Lời giải

Chọn **B.**

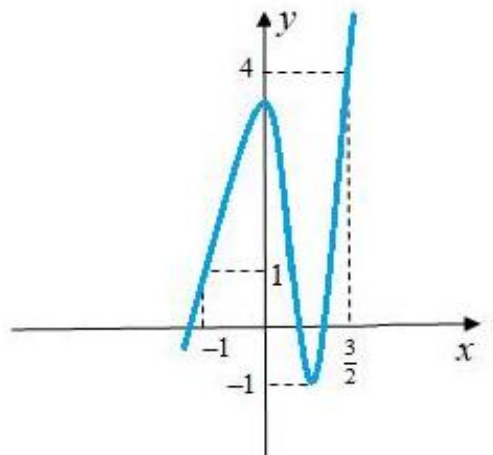
$$\text{Từ đồ thị ta có: } \begin{cases} m = \min_{[-2;3]} f(x) = f(-2) = -3 \\ M = \max_{[-2;3]} f(x) = f(-1) = 4 \end{cases} \Rightarrow 2m - 3M = -18$$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M + m$ là**A.** 2.**B.** -6.**C.** -5.**D.** -2.

Lời giải

Chọn **D.**

$$\text{Từ đồ thị ta có: } \begin{cases} m = \min_{[-1;3]} f(x) = f(-2) = -4 \\ M = \max_{[-1;3]} f(x) = f(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow M + m = -2$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ sau:

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$. Giá trị của $M + m$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 5.

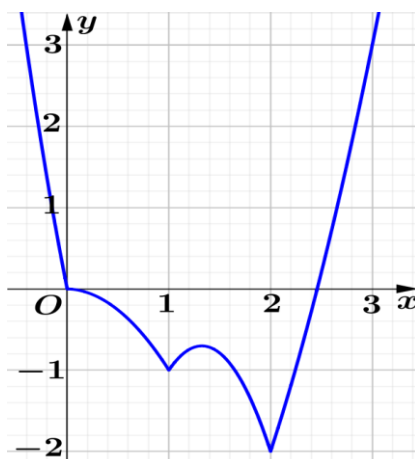
C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn **D.**

$$\text{Từ đồ thị ta có: } \begin{cases} m = \min_{\left[-1; \frac{3}{2}\right]} f(x) = -1 \\ M = \max_{\left[-1; \frac{3}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \end{cases} \Rightarrow M + m = 3$$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; 3]$. Giá trị của $M + m$ bằng?

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn **D.**

Từ đồ thị ta có:
$$\begin{cases} m = \min_{[0;3]} f(x) = f(2) = -2 \\ M = \max_{[0;3]} f(x) = f(3) = 3 \end{cases} \Rightarrow M + m = 1$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 8: Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4; 2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

$m = 1$	-4	$y = \frac{x+m^2}{x-1}$	$[-1; 0]$	2
$-m^2$	+	$\frac{1-m^2}{2}$	m^2	$y = \frac{2mx+1}{m-x}$ +
$[2; 3]$	0	m	0.	6

- A.** Hàm số có giá trị lớn nhất 27.
B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -5.
C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-4; 2)$.
D. Hàm số có điểm cực tiểu $(1; -5)$.

Lời giải

- A.** Hàm số có giá trị lớn nhất 27. **ĐÚNG**
B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -5. **ĐÚNG**
C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-4; 2)$. **SAI**
D. Hàm số có điểm cực tiểu $(1; -5)$. **ĐÚNG**

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+		-	0	+
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

- A.** Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
D. Hàm số có đúng hai cực trị.

Lời giải

- A.** Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1. **SAI**
B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1. **SAI**

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$. **ĐÚNG**

D. Hàm số có đúng hai cực trị. **ĐÚNG**

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$-$	$-$	0	$+$	0	$-$

A. $\max_{(-1;1]} f(x) = f(0)$. B. $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$.

C. $\min_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$. D. $\min_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$.

Lời giải

A. $\max_{(-1;1]} f(x) = f(0)$. **SAI**

B. $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$. **SAI**

C. $\min_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$. **SAI**

D. $\min_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$. **ĐÚNG**

Câu 11: Hàm số $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	0	1	0

Xét trên tập xác định của hàm số.

A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0.

C. Không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

D. Hàm số có một điểm cực trị.

Lời giải

A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0. **ĐÚNG**

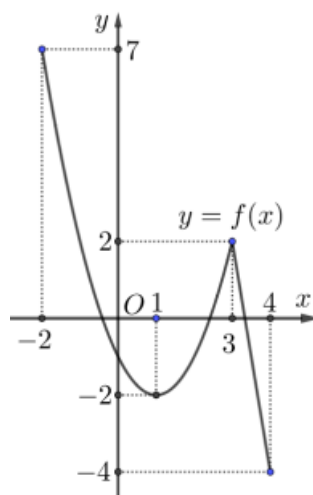
B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0. **SAI**

C. Không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số. **SAI**

D. Hàm số có một điểm cực trị. **ĐÚNG**

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng

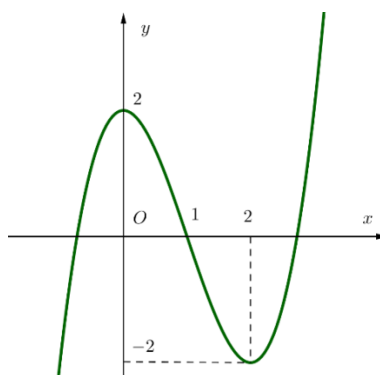


Lời giải

Đáp án: 3

Từ đồ thị ta có:
$$\begin{cases} m = \min_{[-2;4]} f(x) = f(1) = -2 \\ M = \max_{[-2;4]} f(x) = f(-2) = 7 \end{cases} \Rightarrow M + m = 3$$

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[0; 2]$. Khi đó

$M + m$ là

Lời giải

Đáp án: $M + m = 3$

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN $[a; b]$ **Phương pháp:**

• **Bước 1:** Tìm các điểm x_1, x_2, \dots, x_n thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng hoặc không tồn tại.

• **Bước 2:** Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$.

• **Bước 3:** So sánh các giá trị vừa tính được ở bước 2 và kết luận

+ Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

+ Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = \max \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \\ \min_{[a,b]} f(x) = \min \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \end{cases}$$

Nhận xét:

• Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì:
$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = f(b) \\ \min_{[a,b]} f(x) = f(a) \end{cases}$$

• Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì:
$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = f(a) \\ \min_{[a,b]} f(x) = f(b) \end{cases}$$

Chú ý: Có thể dùng bảng biến thiên để tìm max – min của hàm số trên **một đoạn** $[a; b]$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 14: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng

A. -12.

B. 10.

C. 15.

D. -2.

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2; 2]$, ta có:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-2; 2] \\ x = 3 \notin [-2; 2] \end{cases}.$$

$$f(-2) = 8; f(-1) = 15; f(2) = -12.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[-2; 2]} f(x) = f(-1) = 15.$$

Câu 15: Trên đoạn $[1; 5]$, hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x = 5$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = 4$.

Lời giải

Chọn B.**Cách 1:** Ta có $x \in [1; 5]$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4 \text{ suy ra hàm số } y = x + \frac{4}{x} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất là } 4 \text{ khi } x = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 2.$$

Cách 2: Ta có $y' = 1 - \frac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ (vì $x \in [1; 5]$).

$$\text{Khi đó } y(1) = 5, y(2) = 4 \text{ và } y(5) = \frac{29}{5}.$$

Do đó $\min_{[1;5]} y = 4$ tại $x = 2$.**Cách 3: Dùng Casio****Câu 16:** Trên đoạn $[0; 3]$, hàm số $CC' // BB'$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x = 1$.

B. $x = 0$.

C. $x = 3$.

D. $x = 2$.

Lời giải**Chọn A.**Ta có $y' = 3x^2 - 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 3] \\ x = -1 \notin [0; 3] \end{cases}$$

Lại có $y(0) = 4; y(1) = 2; y(3) = 22$.Vậy $\min_{[0;3]} y = y(1) = 2$.**Câu 17:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[0; 2]$ là:

A. $\min_{[2; 4]} y = 0$.

B. $\min_{[2; 4]} y = 3$.

C. $\min_{[2; 4]} y = 5$.

D. $\min_{[2; 4]} y = 7$.

Lời giải**Chọn B.**Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 2) \\ x = -1 \notin (0; 2) \end{cases}$$

$$y(1) = 3; y(0) = 5; y(2) = 7. \text{ Do đó } \min_{[0;2]} y = y(1) = 3$$

Câu 18: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1; 3]$ là:

A. $\max_{[1; 3]} f(x) = 0$.

B. $\max_{[1; 3]} f(x) = \frac{13}{27}$.

C. $\max_{[1; 3]} f(x) = -6$.

D. $\max_{[1; 3]} f(x) = 5$.

Lời giải**Chọn B.**Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; 3]$

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 16x + 16; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \notin (1; 3) \\ x = \frac{4}{3} \in (1; 3) \end{cases}$$

$$f(1) = 0; f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{27}; f(3) = -6.$$

$$\text{Do đó } \max_{x \in [1;3]} f(x) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{27}$$

Câu 19: Hàm số $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-5; -3]$ bằng:

A. $-\frac{13}{12}$.

B. $\frac{11}{6}$.

C. $-\frac{47}{60}$.

D. $-\frac{11}{6}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 0\}$$

$$\text{Ta có: } y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} < 0; \forall x \in D$$

BBT:

x	-5	-3
y'	$-$	
y	$-\frac{47}{60}$	$-\frac{11}{6}$

Từ BBT ta thấy, hàm số có giá trị lớn nhất bằng $-\frac{47}{60}$.

Câu 20: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$ là:

A. $\min_{[0;3]} y = -3$.

B. $\min_{[0;3]} y = \frac{1}{2}$.

C. $\min_{[0;3]} y = -1$.

D. $\min_{[0;3]} y = 1$.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0; 3]$

$$\text{Ta có } y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \text{ với } \forall x \in [0; 3]. \quad y(0) = -1; y(3) = \frac{1}{2}. \text{ Do đó } \min_{x \in [0;3]} y = y(0) = -1$$

Câu 21: Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$ lần lượt là:

A. $\frac{17}{3}; 3$

B. $\frac{17}{3}; -5$.

C. $3; -5$.

D. $-3; 5$.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số xác định, liên tục trên đoạn $[0; 2]$

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}; \quad y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (0; 2) \\ x = -2 \notin (0; 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(0) = 3; y(2) = \frac{17}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [0;2]} y = y(2) = \frac{17}{3}; \min_{x \in [0;2]} y = y(0) = 3$$

Câu 22: Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{1-x^2}$. Khi đó $M + m$ bằng

- A. 2. B. 1. C. 0. D. -1.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = [-1;1]$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$

$$y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}; \text{ với } -1 < x < 1. y' = 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y(\pm 1) = 0; y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}; y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } M = \max_{[-1;1]} y = y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}; m = \min_{[-1;1]} y = y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow M + m = 0$$

Câu 23: Hàm số $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

- A. $\sqrt{2}$; 1. B. 1; 0. C. 2; $\sqrt{2}$. D. 2; 1.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = [-1;1]$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Khi đó: } y(-1) = \sqrt{2}; y(0) = 2; y(1) = \sqrt{2}$$

\Rightarrow Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2, giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$

Câu 24: Hàm số $y = \cos 2x - 3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; \pi]$ bằng:

- A. -4. B. -3. C. -2. D. 0.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = -2\sin 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}; (k \in \mathbb{Z})$

$$\text{Vì } x \in [0; \pi] \Rightarrow x \in \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi\right\}. \text{ Do đó: } y(0) = -2; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 \Rightarrow \min y = -4$$

Câu 25: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5\cos x - \cos 5x$ với $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ là:

- A. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 4.$ B. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 3\sqrt{2}.$ C. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 3\sqrt{3}.$ D. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = -1.$

Lời giải**Chọn A.**Ta có $y = 5\cos x - \cos 5x$ nên $y' = -5\sin x + 5\sin 5x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + k2\pi \\ 5x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Trên } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], y' = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$$

$$y(0) = 4; y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}; y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } \min_{x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 4 = y(0)$$

Câu 26: Hàm số $y = \cos^2 x - 2\cos x - 1$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; \pi]$ lần lượt bằng $y_1; y_2$. Khi đó tích $y_1 \cdot y_2$ có giá trị bằng:

A. $\frac{3}{4}$.

B. -4 .

C. $\frac{3}{8}$.

D. 1 .

Lời giải**Chọn B.**TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = -2\sin x \cos x + 2\sin x = -2\sin x(\cos x - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2\sin x(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $x \in [0; \pi] \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = \pi$.

$$\text{Khi đó: } y(0) = -2; y(\pi) = 2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 \cdot y_2 = -4.$$

Câu 27: Hàm số $y = \cos 2x - 4\sin x + 4$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\frac{\pi}{2}; 0$.

B. $5; 1$.

C. $5; -1$.

D. $9; 1$.

Lời giải**Chọn C.**TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = -2\sin 2x - 4\cos x = -4\cos x(\sin x + 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}. \text{ Khi đó } y(0) = 5; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Câu 28: Hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ có giá trị lớn nhất là M , giá trị nhỏ nhất là m . Khi đó $M - m$ bằng

A. $2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

B. 1.

C. $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$.

D. -1 .

Lời giải

Chọn B.

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \left(x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right] \right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2.$$

$$\text{Vậy } \max_{\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]} f(x) = 2, \min_{\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]} f(x) = 1.$$

Câu 29: Hàm số $y = \sqrt{1 + 2\sin x \cdot \cos x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tại điểm có hoành độ là:

A. $x = \frac{\pi}{4}$.

B. $x = \frac{\pi}{6}$.

C. $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$.

D. $x = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y = \sqrt{1 + 2\sin x \cdot \cos x} = \sqrt{1 + \sin 2x}; y' = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ vì } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Khi đó: } y(0) = 1; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Câu 30: Hàm số $y = \sin x + \cos x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. $-2; 2$.

B. $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$.

C. $0; 1$.

D. $-1; 1$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Ta có: } y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \Rightarrow \min y = -\sqrt{2}; \max y = \sqrt{2}$$

Câu 31: Hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. $-2; 1$.

B. $0; 2$.

C. $\frac{1}{2}; 1$.

D. $0; 1$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Mà $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow \min y = \frac{1}{2}, \max y = 1$.

Câu 32: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng

A. $\frac{\ln 2}{2}$.

B. $\frac{\ln 3}{3}$.

C. $\frac{3}{e^2}$.

D. $\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn A.

Xét $y = f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[2; 3]$

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = e \in [2; 3]$$

$$\text{Có } f(2) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,3466; f(e) = \frac{1}{e} \approx 0,3679; f(3) = \frac{\ln 3}{3} \approx 0,366,$$

$$\text{Suy ra } \min_{x \in [2; 3]} f(x) = \frac{\ln 2}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng $\frac{\ln 2}{2}$.

Câu 33: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng:

A. $2e^4$

B. $-e^2$

C. $2e^2$

D. $-2e^2$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $f'(x) = 2(x^2 - 2)e^{2x} + 2xe^{2x} = 2(x^2 + x - 2)e^{2x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-1; 2] \\ x = -2 \notin [-1; 2] \end{cases}$$

$$\text{Và } f(-1) = -e^{-2}; f(2) = 2e^4; f(1) = -e^2$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng $-e^2$ tại $x = 1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 34: Cho hàm số $y = \sqrt{5 - 4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

A. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1; 1]} y = \sqrt{5}$ và $\min_{[-1; 1]} y = 0$.

B. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1; 1]} y = 1$ và $\min_{[-1; 1]} y = -3$.

C. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1; 1]} y = 3$ và $\min_{[-1; 1]} y = 1$.

D. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1; 1]} y = 0$ và $\min_{[-1; 1]} y = -\sqrt{5}$.

Lời giải

- A.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = \sqrt{5}$ và $\min_{[-1;1]} y = 0$. **SAI**
- B.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = 1$ và $\min_{[-1;1]} y = -3$. **SAI**
- C.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = 3$ và $\min_{[-1;1]} y = 1$. **ĐÚNG**
- D.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\max_{[-1;1]} y = 0$ và $\min_{[-1;1]} y = -\sqrt{5}$. **SAI**

Điều kiện xác định: $5 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4}$.

Suy ra hàm số xác định với $\forall x \in [-1;1]$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$

Ta có $y' = \frac{-2}{\sqrt{5-4x}} < 0, \forall x \in [-1;1]$.

Do đó $\max_{[-1;1]} y = y(-1) = 3; \min_{[-1;1]} y = y(1) = 1$

Câu 35: Cho hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2;4]$.

- A.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[2;4]} y = 6$.
- B.** Giá trị lớn nhất của hàm số là $\max_{[2;4]} y = \frac{13}{2}$
- C.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[2;4]} y = -6$.
- D.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[2;4]} y = \frac{25}{4}$.

Lời giải

- A.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[2;4]} y = 6$. **ĐÚNG**
- B.** Giá trị lớn nhất của hàm số là $\max_{[2;4]} y = \frac{13}{2}$ **ĐÚNG**
- C.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[2;4]} y = -6$. **SAI**
- D.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[2;4]} y = \frac{25}{4}$. **SAI**

Hàm số đã cho liên tục trên $[2;4]$

Ta có $y' = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 & \notin (2;4) \\ x = 3 & \in (2;4) \end{cases}$

Ta có $y(2) = \frac{13}{2}; y(3) = 6; y(4) = \frac{25}{4}$. Do đó $\min_{x \in [2;4]} y = y(3) = 6$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 36: Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $x = 0$

$$y = x^3 + 3x^2 + 1$$

$$y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \notin [-1; 2] \end{cases}$$

$$y(-1) = 3; y(0) = 1; y(2) = 21.$$

Vậy GTNN trên đoạn $[-1; 2]$ của hàm số bằng 1 tại $x = 0$.

Câu 37: Hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt là bao nhiêu?:

Lời giải

Đáp án: $\max_{[-1;2]} y = y(1) = \sqrt{2}$, $\min_{[-1;2]} y = y(-1) = 0$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có: $y' = \frac{-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Do $y(-1) = 0, y(1) = \sqrt{2}, y(2) = \frac{3}{\sqrt{5}}$ nên

$$\max_{[-1;2]} y = y(1) = \sqrt{2}, \min_{[-1;2]} y = y(-1) = 0$$

Câu 38: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$.

Lời giải

Đáp án: $y = 2$

Hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ có tập xác định $D = [2; 4]$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ x \in (2; 4) \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y(2) = \sqrt{2}, y(3) = 2, y(4) = \sqrt{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ là 2

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$.

Câu 39:

Lời giải

Đáp án: $\min_{[-2;2]} y = y(-2) = -2$

TXĐ: $D = [-2; 2]$. Hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

$$y(-2) = -2; y(2) = 2; y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

Vậy $\min_{[-2;2]} y = y(-2) = -2$

Câu 40: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x$ trên $[0; \pi]$.

Lời giải

Đáp án: $\max_{[0;\pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ta có $y' = 2\cos x - 4\sin^2 x \cdot \cos x = 2\cos x(1 - 2\sin^2 x) = 2\cos x \cdot \cos 2x$

Nên $y' = 0 \Leftrightarrow 2\cos x \cdot \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$

Trên $(0; \pi)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}$

$y(0) = 0$; $y(\pi) = 0$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\max_{[0;\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Câu 41: Tìm có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos x(\sin x + 1)$ trên đoạn $[0; \pi]$.

Lời giải

Đáp án: $\pm \frac{3\sqrt{3}}{4}$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -\sin x(\sin x + 1) + \cos^2 x = -2\sin^2 x - \sin x + 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Vì $x \in [0; \pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6}$

Khi đó: $y(0) = 1$; $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$; $y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$; $y(\pi) = -1$

Câu 42: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^{x+1} - \frac{4}{3} \cdot 8^x$ trên $[-1; 0]$

Lời giải

Đáp án: $y_{\min} = \frac{2}{3}$

$y' = 2^{x+1} \ln 2 - \frac{4}{3} \cdot 8^x \ln 8 = 0 \Leftrightarrow 2^x - 2 \cdot (2^x)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 0 \\ 2^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1/2 \end{cases}$

Xét $y(-1) = 5/6$; $y(-1/2) = 0,9428$; $y(0) = 2/3$. Ta có: $y_{\min} = \frac{2}{3}$.

DẠNG 3

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG $(a; b)$

NỬA KHOẢNG $(a; b]$; $[a; b)$.

Phương pháp: Dùng bảng biến thiên để tìm max – min. Phương pháp này thường dùng cho bài toán tìm GTLN và GTNN trên **một khoảng $(a; b)$ hoặc nửa khoảng $[a; b)$, $(a; b]$.**

- **Bước 1:** Tính $f'(x)$
- **Bước 2:** Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- **Bước 3:** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

Câu 43: Hàm số $y = (x-1)^2 + (x+3)^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

- A. 3. B. -1. C. 10. D. 8.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y = (x-1)^2 + (x+3)^2 = 2x^2 + 4x + 10$.

Ta có: $y' = 4x + 4$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		0	
		$-$	$+$
y	$+\infty$	8	$+\infty$

Từ BBT ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Câu 44: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là:

- A. $\min_{(1;+\infty)} y = -1$. B. $\min_{(1;+\infty)} y = 3$. C. $\min_{(1;+\infty)} y = 5$. D. $\min_{(2;+\infty)} y = \frac{-7}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Làm tự luận

Hàm số xác định với $\forall x \in (1; +\infty)$

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(1; +\infty)$

Ta có $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

Bảng biến thiên

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $\min_{x \in (1; +\infty)} f(x) = f(2) = 3$

Cách 2: Dùng Casio: Dùng chức năng **SOLVE**.

Bước 1: Nhập $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ vào màn hình.

Bước 2: Sau đó nhấn dấu **SHIFT** **ALPHA** **CALC** rồi nhập $-\frac{7}{3}$ của **đáp án D**

Lúc này màn hình: $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\frac{7}{3}$

Bước 3: Nhấn dấu **SHIFT** **CALC**. Máy hỏi X ?

Bước 4: Ta nhập $X = 2$ với $2 \in (1; +\infty)$.

Bước 5: Nhấn dấu **=**. kết quả $X = \frac{1}{3}$ và $\frac{1}{3} \notin (1; +\infty)$

\Rightarrow loại **D**.

Ta tiếp tục làm tương tự với **đáp án A**:

Bước 1: nhấn dấu **REPLAY** \triangleright rồi nhập -1 của **đáp án A**

Lúc này màn hình: $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -1$

Bước 2: Nhấn dấu **SHIFT** **CALC**. Máy hỏi X ?

Bước 3: Ta nhập $X = 2$ với $2 \in (1; +\infty)$.

Bước 4: Nhấn dấu **=**. kết quả $X = 0$ và $0 \notin (1; +\infty)$

\Rightarrow loại **A**.

Ta tiếp tục làm tương tự với **đáp án B**:

Bước 1: nhấn dấu **REPLAY** \triangleright rồi nhập 3 của **đáp án B**

Lúc này màn hình: $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = 3$

Bước 2: Nhấn dấu **SHIFT** **CALC**. Máy hỏi X ?

Bước 3: Ta nhập $X = 2$ với $2 \in (1; +\infty)$.

Bước 4: Nhấn dấu **=**. kết quả $X = 2$ và $2 \in (1; +\infty)$

\Rightarrow Chọn **đáp án B**.

Câu 45: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ bằng

A. $\min_{\mathbb{R}} y = 3$.

B. $\min_{\mathbb{R}} y = 5$.

C. $\min_{\mathbb{R}} y = 3 + \sqrt{5}$.

D. $\min_{\mathbb{R}} y = 0$.

Lời giải

Chọn **B**.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R}

Ta có $y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		0	
		$-$	$+$
y	$+\infty$	5	$+\infty$

Do đó $\min_{\mathbb{R}} y = y(1) = 5$

Câu 46: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1}$ là:

A. không có giá trị nhỏ nhất.

B. có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

C. có giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $D = [-1; +\infty)$.

Ta có: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0, \forall x \in (-1; +\infty)$

Bảng biến thiên:

x	-1	$+\infty$
y'		$+$
y	0	$+\infty$

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x = -1$

Câu 47: Cho hàm số $y = x - \sqrt{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm có hoành độ $x = 1$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D = [1; +\infty)$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$

BBT:

x	1	$\frac{5}{4}$	$+\infty$		
y'		-	0	+	
y	1				0

\swarrow \searrow
 $\frac{3}{4}$

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1

Câu 48: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x + \sqrt{1+9x^2}}{8x^2 + 1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. D. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn **C.**

Ta có: $y = \frac{x + \sqrt{1+9x^2}}{8x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1} - x}$.

Hàm số y đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$ khi hàm số $f(x) = \sqrt{9x^2 + 1} - x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có: $f'(x) = \frac{9x}{\sqrt{9x^2 + 1}} - 1 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6\sqrt{2}}$

$\min_{(0; +\infty)} f(x) = f\left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \max_{(0; +\infty)} y = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Câu 49: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ là:

- A. Không tồn tại. B. 1. C. π . D. -1.

Lời giải

Chọn **D.**

$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, y' = 0 \Leftrightarrow x = \pi \left(x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \right)$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$		
y'		$+$	0	$-$	
y			-1		

$-\infty \swarrow \searrow -\infty$

Vậy $\max_{\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)} y = -1$ và $\min_{\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)} y$ không tồn tại.

Câu 50: Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng:

- A. 0. B. 1. C. -1. D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn **B.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x$

Mà $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\cos 2x \leq 1 \Rightarrow \max y = 1$.

Câu 51: Hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

- A. 1; -1. B. 2; 0. C. $\frac{1}{4}; -1$. D. $1; \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn **D.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

Mà: $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow \min y = \frac{1}{4}; \max y = 1$.

DẠNG 4 TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ

Câu 52: Hàm số $y = x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2}$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ là:

- A. $3; \frac{112}{9}$. B. 1; 4. C. $1; \frac{112}{9}$. D. $4; \frac{112}{9}$.

Lời giải

Chọn **D.**

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{1}{x} \left(2 \leq t \leq \frac{10}{3} \right) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

Khi đó hàm số trở thành: $y = t^2 + t - 2 \Rightarrow y' = 2t + 1 > 0; \forall t \in \left[2; \frac{10}{3} \right]$

\Rightarrow Hàm số đồng biến $\forall t \in \left[2; \frac{10}{3} \right]$.

\Rightarrow Hàm số đạt giá trị lớn nhất = 4, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất = $\frac{112}{9}$

Câu 53: Hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 63]$ là:

- A. 2; 12. B. 1; 2. C. 0; 2. D. 0; 12.

Lời giải

Chọn **A.**

TXĐ: $D = [-1; +\infty)$.

Đặt $t = \sqrt[6]{x+1}$ ($1 \leq t \leq 2$)

Khi đó hàm số trở thành: $y = t^3 + t^2 \Rightarrow y' = 3t^2 + 2t > 0; \forall t \in [1; 2]$

$\Rightarrow \min y = y(1) = 2; \max y = y(2) = 12.$

Câu 54: Hàm số $y = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 4]$ lần lượt là:

A. $\frac{8}{3}; 0.$

B. $\frac{8}{3}; -\frac{8}{3}.$

C. $0; -\frac{8}{3}.$

D. $\frac{24}{5}; 0.$

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $D = [0; +\infty).$

Đặt $t = \sqrt{x}; (x \in [0; 4] \Rightarrow 0 \leq t \leq 2).$

Khi đó hàm số trở thành: $y = t + \frac{t}{t+1} \Rightarrow y' = 1 + \frac{1}{(t+1)^2} > 0$

\Rightarrow hàm số đồng biến $\forall t \in [0; 2]$

$\Rightarrow \min y = y(0) = 0; \max y = y(2) = \frac{8}{3}.$

Câu 55: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - 4\sqrt{(x+4)(4-x)} + 5$ bằng

A. $\max_{[-4;4]} y = 10.$

B. $\max_{[-4;4]} y = 5 - 2\sqrt{2}.$

C. $\max_{[-4;4]} y = -7.$

D. $\max_{[-4;4]} y = 5 + 2\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện $-4 \leq x \leq 4$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4; 4]$

Đặt $t = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = x+4 + 4-x + 2\sqrt{(x+4)(4-x)} \Rightarrow \sqrt{(x+4)(4-x)} = \frac{t^2-8}{2}$

Ta có $y = t - 4\left(\frac{t^2-8}{2}\right) + 5 = -2t^2 + t + 21 = f(t)$

Tìm điều kiện của t : Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}$ với $x \in [-4; 4]$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; g(-4) = 2\sqrt{2}; g(0) = 4; g(4) = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \min_{x \in [-4;4]} g(x) = 2\sqrt{2}; \max_{x \in [-4;4]} g(x) = 4 \Rightarrow t \in [2\sqrt{2}; 4]$

$f'(t) = -4t + 1 < 0 \forall t \in [2\sqrt{2}; 4] \Rightarrow f(t)$ là hàm nghịch biến trên $[2\sqrt{2}; 4]$

$\max_{[-4;4]} y = f(2\sqrt{2}) = 5 + 2\sqrt{2}$

Câu 56: Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số: $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$ là:

A. $M = -1; m = \frac{-3}{2}.$

B. $M = 3; m = -1.$

C. $M = 3; m = \frac{-3}{2}.$

D. $M = \frac{3}{2}; m = -3.$

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đặt $t = \sin x$, $-1 \leq t \leq 1$. Khi đó $y = f(t) = 2t^2 + 2t - 1$

$$f'(t) = 4t + 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \in [-1; 1] \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}; f(-1) = -1; f(1) = 3$$

$$\text{Vậy } \min_R y = -\frac{3}{2}, \max_R y = 3.$$

Câu 57: Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^4 x - 4\sin^2 x + 5$ là:

- A.** $M = 2; m = -5$. **B.** $M = 5; m = 2$. **C.** $M = 5; m = -2$. **D.** $M = -2; m = -5$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Đặt } t = \sin^2 x, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow y = f(t) = t^2 - 4t + 5. f'(t) = 2t - 4; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \notin [0; 1]$$

$$f(0) = 5; f(1) = 2. \text{ Vậy } \min_R y = 2, \max_R y = 5$$

Câu 58: Hàm số $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4$ có giá trị lớn nhất bằng:

- A.** -6 . **B.** -7 . **C.** 8 . **D.** 9 .

Lời giải

Chọn D.

$$y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4 = -2\sin^3 x - 6\sin^2 x - 6\sin x + 7$$

$$\text{Đặt } t = \sin x (-1 \leq t \leq 1).$$

$$\text{Xét hàm } y = -2t^3 - 6t^2 - 6t + 7 \text{ trên đoạn } [-1; 1]$$

$$y' = -6t^2 - 12t - 6 \Rightarrow y' = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Ta có: } y(-1) = 9, y(1) = -7$$

Vậy hàm số $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4$ có giá trị lớn nhất bằng 9.

Câu 59: Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

- A.** $M = m + \frac{2}{3}$. **B.** $M = m + 1$. **C.** $M = \frac{3}{2}m$. **D.** $M = m + \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Đặt } t = \sin x, -1 \leq t \leq 1 \Rightarrow y = f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1}, f'(t) = \frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [-1; 1] \\ t = -2 \notin [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow f(0) = 1, f(-1) = 0, f(1) = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } M = 1, m = 0$$

Câu 60: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(x+2)(x+4)(x+6) + 5$ trên nửa khoảng $[-4; +\infty)$ là:

- A.** $\min_{[-4; +\infty)} y = -8$. **B.** $\min_{[-4; +\infty)} y = -11$. **C.** $\min_{[-4; +\infty)} y = -17$. **D.** $\min_{[-4; +\infty)} y = -9$.

Lời giải

Chọn B.

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-4; +\infty)$

Ta có: $y = (x^2 + 6x)(x^2 + 6x + 8) + 5$.

Đặt $t = x^2 + 6x$. Khi đó $y = t^2 + 8t + 5$

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 6x$ với $x \geq -4$.

Ta có $g'(x) = 2x + 6$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

x	$-\infty$	-4	-3	$+\infty$
$g'(x)$			$- \quad 0 \quad +$	
$g(x)$		-8	-9	$+\infty$

Suy ra $t \in [-9; +\infty)$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = h(t) = t^2 + 8t + 5$ với $t \in [-9; +\infty)$.

Ta có $h'(t) = 2t + 8$; $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -4$;

$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-9	-4	$+\infty$
$h(x)$			$- \quad 0 \quad +$	
$h(x)$		14	-11	$+\infty$

Vậy $\min_{[-4; +\infty)} y = -11$