**Câu 1:** Cho hàm số $f(x)=ax^4+2(a+4)x^2-1$ với $a$ là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng

**A.** $-17$. **B.** $-16$. **C.** $-1$. **D.** $1$

**Lời giải**

**Chọn. A.**

Từ giả thiết ta có $f'(1)=0$

$\Rightarrow 4a+4(a+4)=0$

$\Leftrightarrow a=-2$

và $f(x)=-2x^4+4x^2-1$

Ta có $f(0)=-1; f(1)=1; f(2)=-17$

Vậy $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=-17$.

**Câu 2:** Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ ($m$ là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

**A.** $m>4$. **B.** $3<m\le 4$. **C.** $m<-1$. **D.** $1\le m<3$

**Lời giải**

**Chọn. A.**

Ta có $y'=\dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$

* TH 1. $-1-m>0 \Leftrightarrow m<-1$ suy ra $y$ đồng biến trên $[2;4]$ suy ra

$\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(2)=\dfrac{2+m}{1}=3 \Leftrightarrow m=1$ (loại)

* TH 2. $-1-m<0 \Leftrightarrow m>-1$ suy ra $y$ nghịch biến trên $[2;4]$ suy ra

$\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(4)=\dfrac{4+m}{3}=3 \Leftrightarrow m=5$ suy ra $m>4$.

**Câu 3:** Số các giá trị tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x-m^2-1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên $[0;4]$ bằng $-6$ là

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn.** **B.**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Có $y'=\dfrac{m^2-m+1}{(x-m)^2}>0$, $\forall x\in D$ (do $m^2-m+1=\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$, $\forall m\in\mathbb{R}$).

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$.

Suy ra $\max\limits_{[0;4]} f(x)=f(4)$

Để hàm số đã cho có giá trị lớn nhất trên $[0;4]$ bằng $-6$ thì

$$\begin{cases} m\notin[0;4] \\ f(4)=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\notin[0;4] \\ \dfrac{3-m^2}{4-m}=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\notin[0;4] \\ m^2+6m-27=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\notin[0;4] \\ \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-9 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m=-9.$$

Vậy có một giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 4:** Cho hàm số $y=\left|x^2+2x+a-4\right|$. Tìm $a$ để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.** $a=2$. **B.** $a=1$. **C.** 4. **D.** $a=3$.

**Lời giải**

**Chọn.** **D.**

Ta có $y=\left|x^2+2x+a-4\right|=\left|(x+1)^2+a-5\right|$. Đặt $u=(x+1)^2$ khi đó $\forall x\in[-2;1]$ thì $u\in[0;4]$

Ta được hàm số $f(u)=|u+a-5|$. Khi đó.

$\max\limits_{x\in[-2;1]} y=\max\limits_{u\in[0;4]} f(u)=\max\{f(0),f(4)\}=\max\{|a-5|;|a-1|\}$.

Trường hợp 1: $|a-5|\ge|a-1|\Leftrightarrow a\le 3\Rightarrow \max\limits_{u\in[0;4]} f(u)=5-a\ge 2\Leftrightarrow a=3$.

Trường hợp 2: $|a-5|\le|a-1|\Leftrightarrow a\ge 3\Rightarrow \max\limits_{u\in[0;4]} f(u)=a-1\ge 2\Leftrightarrow a=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\max\limits_{x\in[-2;1]} y=2\Leftrightarrow a=3$.

**Câu 5:** Gọi S là tập giá trị của tham số $m$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=|x^2-4x+m|$ trên đoạn $[1;4]$ bằng $6$. Tổng các phần tử của S bằng

**A.** $-4$. **B.** $4$. **C.** $-10$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn. B.**

+ Đặt $g(t)=t^2-4t+m$ với $t\in[1;4]$. Đạo hàm: $g'(t)=2t-4$; $g'(t)=0\Leftrightarrow t=2$.

+ Suy ra giá trị nhỏ nhất: $\min f(x)=\min\{|m-3|;|m-4|;|m|\}$

Xét $|m-4|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=10\\m=-2\end{array}\right.$. Ta thấy $m=10$ thỏa mãn.

Xét $|m-3|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=9\\m=-3\end{array}\right.$ (không thỏa mãn).

Xét $|m|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6\\m=-6\end{array}\right.$. Ta thấy $m=-6$ thỏa mãn.

**Câu 6:** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x^2-9x+m|$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng $16$. Số phần tử của $S$ là

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn. D.**

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+m$ trên đoạn $[-2;4]$.

$f'=3x^2-6x-9$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

$f(-2)=-2+m;\ f(-1)=5+m;\ f(3)=-27+m;\ f(4)=-20+m$

$\Rightarrow\min\limits_{[-2;4]}f(x)=m-27;\max\limits_{[-2;4]}f(x)=m+5\ \Rightarrow\max\limits_{[-2;4]}|f(x)|=\max\{|m-27|;|m+5|\}$.

+) Trường hợp 1: Nếu $|m-27|\le|m+5|$ $(*)$

$\Rightarrow\max\limits_{[-2;4]}|f(x)|=|m+5|\Rightarrow|m+5|=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=11\\m=-21\end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện $(*)\Rightarrow m=11$.

+) Trường hợp 1: Nếu $|m-27|>|m+5|$ $(**)$

$\Rightarrow\max\limits_{[-2;4]}|f(x)|=|m-27|\Rightarrow|m-27|=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=43\\m=11\end{array}\right.$ (Không thỏa mãn điều kiện $(**)$).

Vậy $S=\{11\}\Rightarrow S$ có 1 phần tử.

**Câu 7:** Cho hàm số $y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27\right|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

**A.** $26$. **B.** $18$. **C.** $28$. **D.** $16$.

**Lời giải**

**Chọn. B.**

Xét $u=x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27$ trên đoạn $[-3;-1]$ ta có: $u'=3x^2+2x+m^2+1>0,\ \forall x$.

Do đó $A=\max\limits_{[-3;-1]} u=u(-1)=26-m^2$; $a=\min\limits_{[-3;-1]} u=u(-3)=6-3m^2$.

Do $\mathrm{M}=\max\limits_{[-3;-1]} y=\max\left\{\left|26-m^2\right|,\left|6-3m^2\right|\right\}$ và $4M\ge 3\left|26-m^2\right|+\left|6-3m^2\right|\ge 72$.

Vậy $M\ge 18$.

Dấu bằng xảy ra khi $\left|26-m^2\right|=\left|6-3m^2\right|=18 \Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt{2}$.

**Câu 8:** Cho hàm số $y=\left|x^2+x+m\right|$. Tổng tất cả giá trị thực của tham số $m$ để $\min\limits_{[-2;\,2]} y=2$ bằng

**A.** $-\dfrac{31}{4}$. **B.** $-8$. **C.** $-\dfrac{23}{4}$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn. C.**

Xét hàm số $u=x^2+x+m$ trên đoạn $[-2;2]$, có: $u'=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Khi đó: $\begin{cases} \max\limits_{[-2;2]} u = max\left\{u(-2),u\left(-\dfrac{1}{2}\right),u(2)\right\}=m+6 \\ \min\limits_{[-2;2]} u=\min\left\{u(-2),u\left(-\dfrac{1}{2}\right),u(2)\right\}=m-\dfrac{1}{4} \end{cases}$.

▪ Nếu $m-\dfrac{1}{4}\ge 0$ hay $m\ge\dfrac{1}{4}$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y=m-\dfrac{1}{4}=2 \Leftrightarrow m=\dfrac{9}{4}$ (thỏa mãn).

▪ Nếu $m+6\le 0$ hay $m\le -6$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y=-m-6=2 \Leftrightarrow m=-8$ (thỏa mãn).

▪ Nếu $-6<m<\dfrac{1}{4}$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y=0$ (không thỏa mãn).

Vậy có hai số thực $m=\dfrac{9}{4}$ và $m=-8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Tổng các giá trị đó bằng $-\dfrac{23}{4}$.

**Câu 9:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực $m$ sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

**A.** 0. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2

**Lời giải**

**Chọn. D.**

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$, ta có $f'(x)=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $m$ | $\searrow$ | $-2+m$ | $\nearrow$ | $2+m$ |

*TH1* : $2+m<0 \Leftrightarrow m<-2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3 \Leftrightarrow m=-1$ (loại).

*TH2* : $\begin{cases} 2+m>0 \\ m<0 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<0$. Khi đó : $\left|m-2\right|=2-m>2>2+m$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3 \Leftrightarrow m=-1$ (thỏa mãn).

*TH3* : $\begin{cases} m>0 \\ -2+m<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<2$. Khi đó : $\left|m-2\right|=2-m<2<2+m \Rightarrow \max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=2+m$

$2+m=3 \Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn).

*TH4*: $-2+m>0 \Leftrightarrow m>2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=2+m$

$2+m=3 \Leftrightarrow m=1$ (loại).

**Câu 10:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+m^2-m-3\right|$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ không vượt quá 15?

**A.** 3. **B.** **C.** 5. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn. A.**

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+m^2-m-3$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$.

Ta có $f'\left(x\right)=3x^2+2x+\left(m^2+1\right)=2x^2+\left(x+1\right)^2+m^2>0, \forall x\in\left[-1;2\right]$

Suy ra hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên đoạn $\left[-1;2\right]\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=f\left(-1\right)=-m-4\\ \max\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=f\left(2\right)=3m^2-m+11\end{cases}$.

Khi đó $\max\limits_{[-1;2]} y=\max\limits_{[-1;2]}\left|f\left(x\right)\right|=\max\left\{\left|-m-4\right|;\left|3m^2-m+11\right|\right\}\le 15\Leftrightarrow\begin{cases}\left|-m-4\right|\le 15\\ \left|3m^2-m+11\right|\le 15\end{cases}$

$\begin{cases}-15\le m+4\le 15\\ -15\le 3m^2-m+11\le 15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-19\le m\le 11\\ 3m^2-m-4\le 0\\ 3m^2-m+26\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-19\le m\le 11\\ -1\le m\le\dfrac{4}{3}\end{cases}$. Với $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-1;0;1\right\}$.

**Câu 11:** Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|2x^3-6x^2+m\right|$, gọi $A$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[1;3\right]$. Số giá trị nguyên của tham số $m$ để $A<2020$ là

**A.** 4031. **B.** 4032. **C.** 4033. **D.** 2019.

**Lời giải**

**Chọn. A.**

Xét $u\left(x\right)=2x^3-6x^2-m$ trên đoạn $\left[1;3\right]$. Ta có hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $\left[1;3\right]$.

$u'\left(x\right)=6x^2-12x$.

$u'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin\left(1;3\right)\\ x=2\in\left(1;3\right)\end{array}\right.$.

Khi đó: $\begin{cases}\max\limits_{[1;3]}\text{u(x)}=\max\left\{u\left(1\right);u\left(2\right);u(3)\right\}=m\\ \min\limits_{[1;3]}\text{u}(x)=\min\left\{u\left(1\right);u\left(2\right);u(3)\right\}=m-8\end{cases}$.

$A=\max\left\{\left|m\right|;\left|m-8\right|\right\}$.

Yêu cầu $A<2020\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|m\right|<2020\\ \left|m\right|\ge\left|m-8\right|\end{cases}\\ \begin{cases}\left|m-8\right|<2020\\ \left|m-8\right|\ge\left|m\right|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2020<m<2020\\ m\ge 4\end{cases}\\ \begin{cases}-2012<m<2028\\ m\le 4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4\le m<2020\\ -2012<m\le 4\end{array}\right.$.

Vậy có 4031 số nguyên $m$ để $A<2020$.

**Câu 12:** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|x^4-8x^2+m\right|$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ bằng 5. Tổng tất cả các phần tử của $S$ bằng

**A.** $-7$. **B.** 7. **C.** $5$. **D.** $-5$.

**Lời giải**

**Chọn.** **B.**

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^4-8x^2+m, x\in\left[-1;1\right]$, ta có $g'\left(x\right)=4x^3-16x$; $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\end{array}\right.$.

$g\left(-1\right)=g\left(1\right)=-7+m$, $g\left(0\right)=m$.

Do đó: $\max\limits_{[-1;1]} f\left(x\right)=\max\left\{\left|-7+m\right|,\left|m\right|\right\}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|-7+m\right|=5\\\left|-7+m\right|\ge\left|m\right|\end{cases}\\\begin{cases}\left|m\right|=5\\\left|m\right|\ge\left|-7+m\right|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=5\end{array}\right.$

Vậy $s=\left\{2;5\right\}$. Vậy tổng các giá trị của $S$ bằng 7.

**Câu 13:** Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y=f\left(x\right)=\left|3x^4+4x^3-12x^2+m-1\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-1;2\right]$ bằng $2020$.

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$

**Lời giải**

**Chọn.** **C.**

Đặt $g\left(x\right)=3x^4+4x^3-12x^2+m-1$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$

Ta có $g'\left(x\right)=12x^3+12x^2-24x\Rightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Khi đó

$$\left[\begin{array}{l}M=\max\limits_{[-1;2]} g\left(x\right)=\max\left\{g\left(-1\right);g\left(0\right);g\left(1\right);g\left(2\right)\right\}=\max\left\{m-14;m-1;m-6;m+31\right\}=m+31\\m=\min\limits_{[-1;2]} g\left(x\right)=\min\left\{g\left(-1\right);g\left(0\right);g\left(1\right);g\left(2\right)\right\}=\min\left\{m-14;m-1;m-6;m+31\right\}=m-14\end{array}\right.$$

Vậy $\min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=\min\left\{\left|m+31\right|;\left|m-14\right|\right\}=2020$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|m+31\right|=2020\\\left|m+31\right|\le\left|m-14\right|\end{cases}\\\begin{cases}\left|m-14\right|=2020\\\left|m+31\right|\ge\left|m-14\right|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2051\\m=2034\end{array}\right.$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

**Câu 14:** Gọi $S$ là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá $20$. Tổng các phần tử của $S$ bằng

**A.** $210$.　　**B.** $-195$.　　**C.** $105$.　　**D.** $300$

**Lời giải**

**Chọn. C.**

Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20$ trên đoạn $[0;2]$

Ta có $g'(x)=x^3-19x+30$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5\notin[0;2] \\ x=2 \\ x=3\notin[0;2] \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | $-5$ | $0$ | | $2$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | | $+$ | $0$ | $-$ $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | | | $g(0)$ | $\nearrow$ | $g(2)$ | | |

$g(0)=m-20$; $g(2)=m+6$.

Để $\max\limits_{[0;2]}|g(x)|\le 20$ thì $\begin{cases} g(0)\le 20 \\ g(2)\le 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-20|\le 20 \\ |m+6|\le 20 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m\le 14$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $f(x)$.

Vậy tổng các phần tử của $f'(x)=x^2(x+2)(x^2+x-2)(x-1)^4$ là $f(x)$.

**Câu 15:** Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|x^4-4x^3+4x^2+a\right|$. Gọi $M$, $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[0;2\right]$. Có bao nhiêu số nguyên $a$ thuộc đoạn $\left[-3;3\right]$ sao cho $M\le 2m$?

**A.** $3$. **B.** $7$. **C.** $6$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn. D.**

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^4-4x^3+4x^2+a$.

$g'\left(x\right)=4x^3-12x^2+8x$; $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 4x^3-12x^2+8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $a$ | $\nearrow$ | $a+1$ | $\searrow$ | $a$ |

Do $2m\ge M>0$ nên $m>0$ suy ra $g\left(x\right)\ne 0\ \forall x\in\left[0;2\right]$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}a+1<0\\a>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<-1\\a>0\end{array}\right.$.

Nếu $a<-1$ thì $M=-a$, $m=-a-1\Rightarrow 2\left(-a-1\right)\ge -a\Leftrightarrow a\le -2$.

Nếu $a>0$ thì $M=a+1$, $m=a\Rightarrow 2a\ge a+1\Leftrightarrow a\ge 1$.

Do đó $a\le -2$ hoặc $a\ge 1$, do $a$ nguyên và thuộc đoạn $\left[-3;3\right]$ nên $a\in\left\{-3;-2;1;2;3\right\}$.

Vậy có $5$ giá trị của $a$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 16:** Cho hàm số $f(x)=(x-1)^2\left(ax^2+4ax-a+b-2\right)$, với $a$, $b\in\mathbb{R}$. Biết trên khoảng $\left(-\frac{4}{3};0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=-1$. Hỏi trên đoạn $\left[-2;-\frac{5}{4}\right]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại giá trị nào của $x$?

**A.** $x=-\frac{5}{4}$.  **B.** $x=-\frac{4}{3}$.  **C.** $x=-\frac{3}{2}$.  **D.** $x=-2$.

**Lời giải**

**Chọn.** **C.**

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=2(x-1)\left(2ax^2+5ax-3a+b-2\right)$.

Vì trên khoảng $\left(-\frac{4}{3};0\right)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=-1$ nên hàm số đạt cực trị tại $x=-1$ (cũng là điểm cực đại của hàm số) và $a>0$.

$\Rightarrow f'(-1)=0 \Leftrightarrow -4(-6a+b-2)=0 \Leftrightarrow b=6a+2$.

$\Rightarrow f'(x)=2a(x-1)\left(2x^2+5x+3\right)$.

Khi đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{3}{2} \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$ **. ( đều là các nghiệm đơn)**

Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ nên có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $CT$ | ↗ | $CĐ$ | ↘ | $CT$ | ↗ | $+\infty$ |

$\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ là điểm cực tiểu duy nhất thuộc $\left[-2;-\frac{5}{4}\right]$.

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-\frac{3}{2}$ trên đoạn $\left[-2;-\frac{5}{4}\right]$.

**Câu 17:** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+m\right|$ trên $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

**A.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$. **B.** $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn. A.**

Ta xét $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+m \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1-x}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow x=1\in[0;2]$

Mặt khác $f(0)=1+m;\ f(1)=\sqrt{2}+m;\ f(2)=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}+m$.

BBT

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1+m$ | $\nearrow$ | $\sqrt{2}+m$ | $\searrow$ | $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}+m$ |

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y=\max\left\{|m+1|;\left|m+\sqrt{2}\right|\right\}=M$ ( do $1+m<\dfrac{3\sqrt{5}}{5}+m<\sqrt{2}+m$)

Vì $\begin{cases} M\ge |m+1| \\ M\ge \left|-\sqrt{2}-m\right| \end{cases} \Rightarrow 2M\ge \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow M\ge \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

$M=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ khi $m+1=-\sqrt{2}-m=\pm\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ khi $m=-\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$