МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Харківський політехнічний інститут»

ЗБІРНИК
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

У двох частинах

Частина 1

За редакцією Н. О. Чікіної

Харків
«Підручник НТУ «ХПІ»
2012

УДК 51(076)
ББК 22.1
З-41

Колектив авторів:
Н.О. Чікіна, І.В. Антонова, Л.О. Балака, І.М. Католік,
Т.С. Полянська,О.М. Прохорова, І.А. Токмакова, Н.М. Томілко,
Н.В. Черемська, Т.Т. Черногор, І.І. Щетинська, І.М. Юхно

Рецензенти:

В.А. Ванін, д-р техн. наук, провідний науковий співробітник Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Подгорного НАН України

Є.Л. Піротті, д-р техн. наук, професор кафедри комп’ютерної математики і математичного моделювання НТУ "ХПІ"

Затверджено редакційно-видавничою радою НТУ "ХПІ,
(протокол № 1 від 24.06. 2010 р.)

.

З-41 Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. – Ч. 1 / Н. О. Чікіна, І. В. Антонова, Л. О. Балака [та ін.] ; за ред. Н.О. Чікіної. – Харків : Підручник НТУ «ХПІ», 2012. – 224 с.

ISBN 978-966-2426-50-2 (повне вид.)
ISBN 978-966-2426-51-9 (ч. 1)

Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики містить задачі і приклади варіантів до усіх основних розділів курсу. Наведено відповіді до кожного завдання варіантів РГЗ.

Призначено для студентів та викладачів вищих технічних навчальних закладів

Іл. 16. Бібліогр.: 14 назв.

УДК 51(076)
ББК 22.1

ISBN 978-966-2426-50-2 (повне вид.)
ISBN 978-966-2426-51-9 (ч. 1)

ПЕРЕДМОВА

Однією з форм активізації самостійної роботи студентів є система розрахунково-графічних завдань (РГЗ). Застосування системи РГЗ рекомендовано діючою програмою з вищої математики для інженерно-технічних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів.

«Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики» групи авторів – викладачів кафедри вищої математики НТУ «ХПІ» – охоплює навчальні програми з курсу вищої математики для студентів електротехнічних, машинобудівних і хіміко-технологічних спеціальностей.

Збірник складається з двох частин, кожна з яких містить 7 розділів. Кожний розділ містить 7–12 індивідуалізованих (30 варіантів) завдань, усього близько 3800 завдань. Це робить можливим використання цього «Збірника» викладачами як збірника задач з курсу вищої математики. Окрім варіантів завдань, кожний розділ «Збірника» містить приклади розв’язування типових задач РГЗ і відповіді до кожного завдання розроблених варіантів РГЗ. У кожному розділі «Збірника» надається список літератури, рекомендованої для самостійного ознайомлення, що містить як традиційні класичні підручники та інші навчальні видання за радянських часів, так і навчально-методичні видання кафедри за останні 15 років.

У першу частину збірника увійшли такі теми: «Елементи лінійної алгебри » (Полянська Т.С.), «Векторна алгебра й аналітична геометрія» (Чікіна Н.О., Антонова І.В.), «Границі і неперервність» (Черногор Т.Т.), «Диференціальне числення функції однієї змінної» (Щетинська І.І.), «Невизначений інтеграл» (Юхно І.М., Католік І.М.), «Визначений інтеграл і його застосування» (Прохорова О.М., Токмакова І.А., Балака Л.О.), «Функції кількох змінних» (Томілко Н.М., Черемська Н.В.).

Автори

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Розрахунково-графічне завдання розділу «Елементи лінійної алгебри» складається з 8 практичних завдань, що охоплюють правила виконання дій над матрицями, обчислення визначників, розв’язання матричних рівнянь, пошук рангу матриці, розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) за правилом Крамера, матричним методом, дослідження і розв’язок довільних неоднорідних СЛАР, а також побудову фундаментальної системи розв’язків однорідної СЛАР. Для успішного виконання запропонованих завдань варто ознайомитись і розібрати відповідний теоретичний матеріал [3, 4, 5, 8, 9, 10, 12], а також відповісти на контрольні питання.

Контрольні питання

1. Поняття матриці. Типи матриць.
2. За якими правилами виконуються дії над матрицями:
   а) транспонування матриці,
   б) множення матриці на число,
   в) додавання двох матриць,
   г) добуток двох матриць,
   д) піднесення матриці в цілу невід’ємну степінь?
3. Поняття визначника. Основні властивості визначників.
4. Як обчислити визначник:
   а) розкладанням за елементами рядка чи стовпця,
   б) зведенням до трикутного вигляду,
   в) за правилом трикутника?
5. Поняття оберненої матриці. Для яких матриць існують обернені?
6. Як знайти обернену матрицю?
7. Поняття рангу матриці.
8. Методи обчислення рангу матриці.

9. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Сумісні, несумісні, визначені й невизначені СЛАР.

10. Правило Крамера розв’язання СЛАР. Які СЛАР розв’язуються за цим правилом?

11. Які СЛАР і як розв’язуються за допомогою матриці, оберненої до матриці системи?

12. Теорема Кронекера-Капеллі.

13. Метод Гауса розв’язання СЛАР.

14. Фундаментальна система розв’язків однорідної СЛАР.

Зразок розв’язання прикладів контрольного завдання

Приклад 1. Виконати дії:

а) знайти $5A-2B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ -3 & 7 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,

б) знайти добуток матриць $A\cdot B^T$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

а) Щоб помножити матрицю на число, треба кожний елемент матриці помножити на це число, а при додаванні двох матриць одного розміру, треба додати відповідні елементи цих матриць.

Тому одержимо:

$$5A-2B=5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ -3 & 7 & 2 & -4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -15 & 20 \\ 10 & 35 & -10 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 4 & -10 & -2 \\ 6 & -14 & -4 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -25 & 18 \\ 16 & 21 & -14 & 3 \end{pmatrix}.$$

б) Транспонуємо матрицю B:

$$B^T=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 6 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матриця A має розмір 3×4, матриця B^T – 4×3. Оскільки число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B^T, то матриці A і B^T можна перемножити, і матриця $A\cdot B^T=C$ має розмір 3×3.

Елементи матриці C обчислюємо за формулою:

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+a_{i4}b_{4j},\quad (i,j=1,2,3)$.

$c_{11}=4\cdot 2+3\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+2\cdot 0=4$,

$c_{12}=4\cdot(-3)+3\cdot 6+(-1)\cdot(-2)+2\cdot(-1)=6$,

$c_{13}=4\cdot 5+3\cdot(-4)+(-1)\cdot 0+2\cdot 4=16$,

$c_{21}=(-1)\cdot 2+4\cdot(-1)+2\cdot 1+0\cdot 0=-4$,

$c_{22}=(-1)\cdot(-3)+4\cdot 6+2\cdot(-2)+0\cdot(-1)=23$,

$c_{23}=(-1)\cdot 5+4\cdot(-4)+2\cdot 0+0\cdot 4=-21$,

$c_{31}=2\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+3\cdot 1+(-2)\cdot 0=8$,

$c_{32}=2\cdot(-3)+(-1)\cdot 6+3\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1)=-16$,

$c_{33}=2\cdot 5+(-1)\cdot(-4)+3\cdot 0+(-2)\cdot 4=6$.

У результаті одержимо:

$$C=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 16\\ -4 & 23 & -21\\ 8 & -16 & 6\end{pmatrix}.$$

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -25 & 18\\ 16 & 21 & -14 & 3\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 16\\ -4 & 23 & -21\\ 8 & -16 & 6\end{pmatrix}$.

Приклад 2. Задано багаточлен $f(x)=-2x^2+4x-3$. Знайти $f(A)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2\\ 4 & -4 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Відповідно до означення багаточлена від матриці одержимо: $f(A)=-2\cdot A^2+4\cdot A-3E$, де E – одинична матриця третього порядку.

Знаходимо спочатку A^2:

$$A^2=\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&-4&3\\2&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&-4&3\\2&1&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot3+(-1)\cdot4+2\cdot2 & 3\cdot(-1)+(-1)\cdot(-4)+2\cdot1 & 3\cdot2+(-1)\cdot3+2\cdot(-1)\\ 4\cdot3+(-4)\cdot4+3\cdot2 & 4\cdot(-1)+(-4)\cdot(-4)+3\cdot1 & 4\cdot2+(-4)\cdot3+3\cdot(-1)\\ 2\cdot3+1\cdot4+(-1)\cdot2 & 2\cdot(-1)+1\cdot(-4)+(-1)\cdot1 & 2\cdot2+1\cdot3+(-1)\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}9&3&1\\2&15&-7\\8&-7&8\end{pmatrix}.$$

Тоді $f(A)=(-2)\cdot\begin{pmatrix}9&3&1\\2&15&-7\\8&-7&8\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&-4&3\\2&1&-1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}-18&-6&-2\\-4&-30&14\\-16&14&-16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12&-4&8\\16&-16&12\\8&4&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&-10&6\\12&-49&26\\-8&18&-23\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix}-9&-10&6\\12&-49&26\\-8&18&-23\end{pmatrix}$.

Приклад 3. Обчислити визначник $\Delta=\begin{vmatrix}2&-3&1&6\\3&-1&0&2\\1&-4&-3&5\\-3&2&1&-1\end{vmatrix}$ двома способами: а) розкладанням за елементами рядка (або стовпця), б) зведенням до трикутного вигляду.

Розв'язання.

а) Розкладемо даний визначник за елементами другого рядка, користуючись формулою: $\Delta=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik},\ i=1,...,n\,(n=4)$.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-3&1&6\\3&-1&0&2\\1&-4&-3&5\\-3&2&1&-1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-3&1&6\\-4&-3&5\\2&1&-1\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2&1&6\\1&-3&5\\-3&1&-1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-4&-3\\-3&1&1\end{vmatrix}=$$

$$=-3\cdot 24-1\cdot(-66)+2\cdot(-30)=-66.$$

б) Зведемо визначник до трикутного вигляду, користуючись властивостями визначника:

$\begin{vmatrix}2&-3&1&6\\3&-1&0&2\\1&-4&-3&5\\-3&2&1&-1\end{vmatrix}=$	міняємо місцями перший і третій стовпці
$=-\begin{vmatrix}1&-3&2&6\\0&-1&3&2\\-3&-4&1&5\\1&2&-3&-1\end{vmatrix}=$	додаємо до третього рядка перший, помножений на 3, до четвертого рядка – перший, помножений на (–1)
$=-\begin{vmatrix}1&-3&2&6\\0&-1&3&2\\0&-13&7&23\\0&5&-5&-7\end{vmatrix}=$	додаємо до третього рядка другий, помножений на (–13), до четвертого рядка – другий, помножений на 5
$=-\begin{vmatrix}1&-3&2&6\\0&-1&3&2\\0&0&-32&-3\\0&0&10&3\end{vmatrix}=$	міняємо місцями третій і четвертий стовпці

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -32 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \left\| \text{додаємо третій рядок до четвертого} \right\|$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & -22 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(-22) = -66.$$

Відповідь: –66.

Приклад 4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді $A\cdot X = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Якщо $\det A \neq 0$, то розв'язок цього рівняння знаходиться за формулою $X = A^{-1}\cdot B$.

Обчислимо $\det A$ за правилом трикутника:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 16 + 0 - 10 - 0 - 12 = -7.$$

$\det A = -7 \neq 0$, отже, матриця A – невироджена і для неї існує обернена матриця, яку обчислюємо за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де A_{ik} – алгебраїчні доповнення елемента a_{ik} матриці A $\left(i,k = 1,2,3\right)$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 5 & -1\end{vmatrix}=4,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & -1\end{vmatrix}=-11,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-17,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=8,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=13.$$

Тоді $A^{-1}=\frac{1}{-7}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 4 & -11 & 8\\ 3 & -17 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\\ -\frac{4}{7} & \frac{11}{7} & -\frac{8}{7}\\ -\frac{3}{7} & \frac{17}{7} & -\frac{13}{7}\end{pmatrix}$. Тому

$$X=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 4 & -11 & 8\\ 3 & -17 & 13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & -5\\ 4 & 2 & 6\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & -1 & -17\\ 24 & 18 & 110\\ 46 & 31 & 156\end{pmatrix}.$$

Перевірка. Підставимо знайдену матрицю в рівняння:

$$A\cdot X=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 4 & 1 & 0\\ 5 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -17\\ 24 & 18 & 110\\ 46 & 31 & 156\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -5\\ 4 & 2 & 6\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}=B,$$

отже, X дійсно є розв'язком рівняння.

Відповідь: $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & -1 & -17\\ 24 & 18 & 110\\ 46 & 31 & 156\end{pmatrix}$.

Приклад 5. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 5 & 4\\ -3 & 1 & 2 & -2\\ 4 & 5 & 1 & -3\\ 3 & 3 & 8 & -1\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Щоб знайти ранг матриці A зведемо її за допомогою елементарних перетворень до трикутної або трапецієвидної форми:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

додаємо до першого рядка другий

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

додаємо до другого рядка перший, помножений на (–3), до третього – перший, помножений на 4, до четвертого – перший, помножений на 3

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & -19 & -8 \\ 0 & -3 & 29 & 5 \\ 0 & -3 & 29 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

додаємо до другого рядка третій, помножений на 2, до четвертого – третій, помножений на (–1)

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 39 & 2 \\ 0 & -3 & 29 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

додаємо до третього рядка другий, помножений на 3

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 39 & 2 \\ 0 & 0 & 146 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Ранг матриці A дорівнює числу ненульових рядків матриці B. Отже $\mathrm{Rg}\,A = 3$.

Відповідь: 3.

Приклад 6. Розв'язати систему: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \end{cases}$

а) за правилом Крамера, б) матричним методом.

Розв'язання. а) Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -33.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за правилом Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де $\Delta_i \quad (i = 1, 2, 3)$ отримаємо, якщо у Δ замінимо $i-$тий стовпець стовпцем правих частин системи.

Обчислимо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -66, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 33, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 14 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -99.$$

Отже: $x_1 = \dfrac{-66}{-33} = 2, \quad x_2 = \dfrac{33}{-33} = -1, \quad x_3 = \dfrac{-99}{-33} = 3.$

Перевірка. Підставляючи знайдений розв'язок у систему рівнянь, одержимо: $\begin{cases} 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 14, \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -4, \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -1. \end{cases}$

Отже розв'язок знайдено правильно.

б) Введемо такі матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

і запишемо систему як матричне рівняння: $A \cdot X = B$.

Це рівняння має єдиний розв'язок $X = A^{-1} \cdot B$, тому що $\Delta = \det A \neq 0$. Знайдемо A^{-1}:

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -5, & A_{12} = -1, & A_{13} = -8, \\ A_{21} = 1, & A_{22} = -13, & A_{23} = -5, \\ A_{31} = -8, & A_{32} = 5, & A_{33} = 7. \end{array}$$

Отже: $A^{-1} = -\frac{1}{33}\begin{pmatrix} -5 & 1 & -8 \\ -1 & -13 & 5 \\ -8 & -5 & 7 \end{pmatrix}$. Тоді:

$$X = -\frac{1}{33}\begin{pmatrix} -5 & 1 & -8 \\ -1 & -13 & 5 \\ -8 & -5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{33}\begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ -99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, розв'язком системи є $x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3$.

Відповідь: $(2;-1;3)$.

Приклад 7. Дослідити системи рівнянь за теоремою Кронекера-Капеллі і розв'язати за методом Гауса ті з них, які мають розв'язок.

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 7, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -2, \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

Розв'язання.

а) Випишемо розширену матрицю системи:

$$\overline{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right),$$

де A – матриця системи, B – матриця-стовпець правих частин рівнянь.

Будемо за допомогою елементарних перетворень знаходити одночасно ранги матриць A і $\overline{A}$ (при цьому над стовпцями будемо, при необхідності, проводити тільки одне перетворення – перестановку перших чотирьох стовпців разом із відповідними невідомими).

Проводимо обчислення:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right)\sim$$

додаємо до другого рядка перший, помножений на (–1), до третього – перший, помножений на (–2), до четвертого – перший, помножений на (–3)

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & -7 & 7 \end{array}\right)\sim$$

додаємо до третього рядка другий, помножений на $(-0,5)$, до четвертого – другий, помножений на (–2)

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right)\sim$$

додаємо до четвертого рядка третій, помножений на (–3)

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Отже виходить, що $\mathrm{Rg}\,A=\mathrm{Rg}\,\overline{A}=4$. За теоремою Кронекера-Капеллі система має єдиний розв'язок.

Одержана матриця є розширеною матрицею системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2-\ \ x_3+2x_4=\ 0, \\ \quad -2x_2+4x_3-4x_4=\ 6, \\ \qquad\qquad -x_3+\ \ x_4=-1, \\ \qquad\qquad\qquad -2x_4=-2, \end{cases}$$

яка еквівалентна заданій системі рівнянь.

З останнього рівняння $x_4=1$. Підставляючи його в третє рівняння, знаходимо $x_3=2$, з другого рівняння знаходимо $x_2=-1$, а з першого – $x_1=1$.

Таким чином, розв'язком заданої системи рівнянь є $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=1$.

б) Випишемо розширену матрицю системи :

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

і будемо одночасно шукати $\mathrm{Rg}\,A$ і $\mathrm{Rg}\,\overline{A}$.

Міняючи місцями перший і другий рядки, одержимо:

$$\overline{A}\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)\sim$$

додаємо до другого рядка перший, помножений на (–2),до третього – перший, помножений на (–4)

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -14 \end{array}\right)\sim$$

додаємо до третього рядка другий, помножений на (–1)

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right).$$

Отже, $\mathrm{Rg}\,A=2$, а $\mathrm{Rg}\,\overline{A}=3$.

Якщо $\mathrm{Rg}\,A\neq\mathrm{Rg}\,\overline{A}$, то за теоремою Кронекера-Капеллі така система не має розв'язку.

в) Випишемо розширену матрицю системи в) і одночасно будемо знаходити ранги матриць A та $\overline{A}$.

$$\overline{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \end{array}\sim$$

додаємо до другого рядка перший, помножений на (–2), до третього – перший, помножений на (–4)

$$\sim\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & -10 & 1 & -9 & -1 \end{array}\right) \end{array}\sim$$

міняємо місцями другий та четвертий стовпці

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -7 & -3 \\ 0 & -9 & 1 & -10 & -1 \end{array}\right)\sim \end{array}$$

додаємо до третього рядка другий, помножений на (–3)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & -14 & 11 & 8 \end{array}\right). \end{array}$$

Оскільки $\mathrm{Rg}\,A = \mathrm{Rg}\,\overline{A} = 3$, то за теоремою Кронекера-Капеллі система має розв'язок, і оскільки число невідомих $n = 4 > 3$, то система є невизначеною, тобто має безліч розв'язків.

Одержана матриця є розширеною матрицею системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 - x_3 + 3x_2 = 1, \\ \quad\; - 3x_4 + 5x_3 - 7x_2 = -3, \\ \qquad\qquad - 14x_3 + 11x_2 = 8, \end{cases}$$

яка еквівалентна заданій системі.

Виберемо як базисні невідомі x_1, x_4, x_3, а за вільну невідому – x_2 і перенесемо її в праву частину, тобто одержимо таку систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 - x_3 = 1 - 3x_2, \\ \quad\; - 3x_4 + 5x_3 = -3 + 7x_2, \\ \qquad\qquad - 14x_3 = 8 - 11x_2. \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему відносно базисних невідомих, отримаємо:

$$x_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}x_2, \quad x_3 = -\frac{4}{7} + \frac{11}{14}x_2, \quad x_4 = \frac{1}{21} - \frac{43}{42}x_2.$$

Надаючи вільній невідомій довільне значення $x_2 = C$, запишемо загальний розв'язок системи у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6}C, \\ x_2 = C, \\ x_3 = -\dfrac{4}{7} + \dfrac{11}{14}C, \\ x_4 = \dfrac{1}{21} - \dfrac{43}{42}C. \end{cases}$$

Відповідь: а) $(1; -1; 2; 1)$, б) $\mathrm{Rg}\, A = 2$, а $\mathrm{Rg}\, \overline{A} = 3$ – така система не має розв'язку, в) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6}C, \\ x_2 = C, \\ x_3 = -\dfrac{4}{7} + \dfrac{11}{14}C, \\ x_4 = \dfrac{1}{21} - \dfrac{43}{42}C, \qquad \textit{де} \quad C - \textit{стала}. \end{cases}$

Приклад 8. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Випишемо матрицю системи і знайдемо її ранг.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

до другого рядка додаємо перший, помножений на (–2), до третього – перший, помножений на (–3), до четвертого – перший, помножений на (-1)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

додаємо до третього і четвертого рядків другий, помножений на (-1)

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже $\text{Rg}A = 2$, а число невідомих $n = 4$. Система є невизначеною, тому що $\text{Rg}A < n$.

Одержана матриця є матрицею однорідної системи

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ \qquad 5x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0, \end{cases}$$

яка еквівалентна заданій системі.

Виберемо як базисні невідомі x_1, x_2, а за вільні невідомі – x_3, x_4 і перенесемо їх до правих частин рівнянь. Тоді одержимо систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3x_4 - x_3, \\ \qquad 5x_2 = -8x_4 + 3x_3. \end{cases}$$

З цієї системи знайдемо базисні невідомі, виражаючи їх через вільні:

$$x_1 = -\frac{2}{5}x_3 + \frac{7}{5}x_4, \quad x_2 = \frac{3}{5}x_3 - \frac{8}{5}x_4.$$

Надаючи вільним невідомим довільні значення $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, запишемо загальний розв'язок системи у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5}C_1 + \frac{7}{5}C_2, \\ x_2 = \frac{3}{5}C_1 - \frac{8}{5}C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$$

Надаючи сталим значення $C_1 = 5$, $C_2 = 0$, а потім $C_1 = 0$, $C_2 = 5$ одержимо два частинних розв'язки системи:

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ і } \vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ці розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків заданої системи лінійних рівнянь.

Загальний розв'язок системи можна записати так: $\overrightarrow{X} = C_1\overrightarrow{X}_1 + C_2\overrightarrow{X}_2$.

Відповідь: фундаментальна система розв’язків системи: $(-2; 3; 5; 0)$, $(7; -8; 0; 5)$.

Контрольні завдання за темою «Елементи лінійної алгебри»

Завдання 1. Виконати дії: а) знайти $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, б) обчислити $A \cdot B^T$, де матриці A і B та числа α і β, відповідно дорівнюють:

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2, \beta = -4.$

2. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & -6 & 7 \\ -3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 2 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3, \beta = -5.$

3. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -7 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\alpha = -4, \beta = 2.$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & -3 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = -2, \beta = -1.$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 & 0 \\ 9 & 1 & -8 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 9 \\ 7 & -3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = -3, \beta = 4.$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -4 & 3 \\ 9 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 8 & -7 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = 5, \beta = -2.$

7. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3, \beta = -5.$

8. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 & -9 \\ 2 & -7 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & 4 & -5 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\alpha = -2, \beta = 4.$

9. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 8 & -7 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 7 & 8 \\ 6 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = 5, \beta = -3.$

10. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 5 \\ 6 & 8 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & 2 & -2 & 9 \end{pmatrix}$, $\alpha = -1, \beta = 3.$

11. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 7 \\ -8 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = -2, \beta = -3.$

12. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $\alpha = 4, \beta = -5.$

13. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 7 & -6 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$, $\alpha = -3, \beta = -2.$

14. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ 9 & -8 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ -1 & 4 & -2 & 9 \\ 8 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\alpha = -1, \beta = 4.$

15. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 6 & -6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha = -2, \beta = 4.$

16. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & -7 \\ 8 & 1 & -9 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3, \beta = -4.$

17. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 6 & -1 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2, \beta = -1.$

18. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 7 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = -4, \beta = 2.$

19. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \\ 5 & -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3, \beta = -2.$

20. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha = 4, \beta = -3.$

21. $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ -7 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $\alpha = -1, \beta = -3.$

22. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 5 & 7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 2 \\ 4 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2, \beta = -4.$

23. $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = -3, \beta = 2.$

24. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha = -2, \beta = 4.$

25. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\alpha = -3, \beta = 2.$

26. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $\alpha = 4, \beta = -3.$

27. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 & 2 \\ 5 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = -3, \beta = 2.$

28. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $\alpha = -1, \beta = 2.$

29. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = 5, \beta = -3.$

30. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha = -4, \beta = 2.$

Завдання 2. Знайти $f(A)$, якщо задана матриця A і многочлен $f(x)$:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $f(x) = -x^2 + 6x - 2.$

2. $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 5.$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ -3 & 5 & 4 \\ 9 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = -3x^2 - x + 7.$

4. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 4x - 2.$

5. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ -7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $f(x) = -2x^2 + 5x - 7.$

6. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$, $f(x) = 4x^2 - 2x + 3.$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = 3x^2 - 4x + 2.$

8. $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \\ -8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x) = -4x^2 + 5x - 6.$

9. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 7 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $f(x) = -3x^2 + x - 7$.

10. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -3 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x) = 5x^2 + 2x - 3$.

11. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $f(x) = -2x^2 + 5x + 7$.

12. $\begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$.

13. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x) = -5x^2 + 3x - 8$.

14. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$.

15. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$.

16. $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$.

17. $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $f(x) = -6x^2 - x + 2$.

18. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

19. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x) = -3x^2 + 7x + 2$.

20. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = -6x^2 + 2x - 3$.

21. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = -4x^2 - 2x + 2$.

22. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x) = 5x^2 + 4x - 3$.

23. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $f(x)=3x^2+3x-2$.

24. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x)=-x^2+5x-3$.

25. $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x)=-2x^2+3x-5$.

26. $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $f(x)=4x^2-3x+1$.

27. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x)=-5x^2-x+3$.

28. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x)=6x^2-3x+5$.

29. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x)=-5x^2+3x+4$.

30. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $f(x)=-x^2+3x-5$.

Завдання 3. Обчислити визначник 4-го порядку двома способами:
а) розкладанням за елементами рядка (або стовпця),
б) зведенням до трикутного вигляду:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. **12.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. **14.** $\begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. **15.** $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. **17.** $\begin{vmatrix} -3 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. **18.** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$. **20.** $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$. **21.** $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **23.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **24.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. **26.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. **27.** $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$. **29.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & -3 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. **30.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Завдання 4. Розв’язати матричні рівняння:

1. а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 6 & 21 \\ 15 & -13 & -13 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 23 \\ -5 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 14 & -21 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 31 & -29 \\ 4 & -16 & 14 \end{pmatrix}$.

4. а) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 21 & 4 \\ -11 & 16 & 22 \end{pmatrix}$.

5. а) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 19 & 46 \\ 18 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -22 & -15 \end{pmatrix}$, **б)** $X \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -14 \\ -5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

7. а) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -11 & 8 \\ 26 & 8 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

8. а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ -18 & 6 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 12 & 1 \\ 7 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

9. а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 11 & 18 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -11 & -6 & 7 \end{pmatrix}$.

10. а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -9 & -16 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ -14 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

11. а) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -12 & -10 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -2 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

12. а) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 13 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

13. а) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 4 & 11 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

14. а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 24 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 & -4 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

15. а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -6 & 13 \\ 9 & -17 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -13 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

16. а) $\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 21 & -7 \\ -18 & 2 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -19 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

17. а) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 19 & 27 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

18. а) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -9 & 14 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

19. а) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -6 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

20. а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -11 & -8 \\ -37 & -32 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 11 & -13 & 4 \end{pmatrix}$.

21. а) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 30 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 5 & -3 & -11 \end{pmatrix}$.

22. а) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 5 & -1 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

23. а) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -1 & 23 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 15 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

24. а) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 23 & -6 & -7 \end{pmatrix}$.

25. а) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -13 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

26. а) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 4 & -1 \\ 7 & 5 & -7 \end{pmatrix}$.

27. а) $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -12 & 3 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -9 & 5 \\ 22 & -10 & 7 \end{pmatrix}$.

28. а) $\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 16 & 14 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -9 & 3 \\ 4 & 20 & 4 \end{pmatrix}$.

29. а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -11 & -5 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 16 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

30. а). $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -22 & 13 \\ 4 & -31 \end{pmatrix}$, **б)** $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 12 & 1 & -12 \end{pmatrix}$.

Завдання 5. Знайти ранг матриці:

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 1 & 3 \\ -1 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -6 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 10 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 6 \\ 6 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 10 & 10 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & -2 & 0 & -7 \\ 3 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 8 & -1 \\ 6 & -8 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & -12 & 4 \end{pmatrix}$. **11.** $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **12.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & -5 \\ -1 & -2 & 6 & -4 \\ 3 & -5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & 1 & -7 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ -4 & -6 & -8 & -10 \end{pmatrix}$. **17.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 10 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. **18.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. **20.** $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ 7 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. **21.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 2 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **23.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ -5 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. **26.** $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 & 5 \\ 5 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. **27.** $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ -5 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 7 & -3 & 12 \end{pmatrix}$. **29.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. **30.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.

Завдання 6. Розв’язати систему рівнянь двома способами: а) за правилом Крамера, б) матричним методом:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ -x_1 + 4x_3 = 4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 12. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 = -4, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = -10, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 = -7. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -3, \\ 5x_1 - 2x_3 = 11. \end{cases}$

21. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 14. \end{cases}$

23. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -12. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_3 = 12. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 19, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -13, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -16, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = -17. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 16. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 13. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$

Завдання 7. Дослідити дані системи за теоремою Кронекера-Капеллі і розв'язати ті з них, які мають розв'язок:

а)

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -4, \\ 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 = -6. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 1, \\ 10x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 8, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2, \\ 6x_1 - 2x_2 - 3x_4 = 5. \end{cases}$

16. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -7, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -3, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -8, \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 16, \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = -6, \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ 3x_1 - 4x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -4. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -4, \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 3, \\ -x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -7, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -4. \end{cases}$

23. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -6. \end{cases}$

25. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 11, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 7, \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

б)

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5, \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 + 7x_4 = -1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 10x_4 = -3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 11x_2 + 6x_3 - 3x_4 = -5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 11x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -1, \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -4, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 \qquad\quad + 2x_4 = 2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad\quad - 3x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 \qquad\quad = -2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \qquad\quad = -1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 7, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = -5, \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2, \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-1, \\ 2x_1-x_2-3x_3+x_4=5, \\ 3x_1+x_2-2x_3-3x_4=4, \\ 3x_1+x_2-x_3+x_4=-2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=0, \\ 2x_1-x_2+x_3+4x_4=3, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+5x_4=1, \\ x_1+3x_2-3x_3+x_4=1. \end{cases}$

в)

1. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+2x_4=-4, \\ 2x_1-3x_2-x_3+x_4=-4, \\ x_1-5x_2-4x_3-x_4=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3+3x_4=-8. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+2x_3-x_4=1, \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=-1, \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=2, \\ 3x_1-x_2+x_3-8x_4=-4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3-x_4=1, \\ 2x_1+x_2-3x_3-x_4=-3, \\ x_1-5x_3-x_4=-7, \\ 3x_1+x_2-8x_3-2x_4=-10. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1-x_2+5x_3-2x_4=3, \\ 3x_1+2x_2+2x_3+3x_4=-1, \\ x_1+4x_2-8x_3+7x_4=-7, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+5x_4=-4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-3x_3-x_4=-4, \\ 4x_1-2x_2+2x_3+5x_4=2, \\ x_1+5x_3+6x_4=6, \\ 2x_1-2x_2-8x_3-7x_4=-10. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=1, \\ 3x_1+x_2-2x_3+2x_4=4, \\ x_1-x_2-4x_3-2x_4=2, \\ 3x_1-x_2-7x_3-2x_4=5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+2x_4=-2, \\ 2x_1-2x_2+x_3+5x_4=11, \\ 4x_1-5x_3+9x_4=7, \\ x_1-3x_2+4x_3+3x_4=13. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+3x_2-3x_3-2x_4=2, \\ 2x_1-2x_2+4x_3+x_4=-1, \\ 3x_1+x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1+14x_2-16x_3-9x_4=9. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=2, \\ x_1-3x_2+x_3+2x_4=3, \\ 2x_1-5x_2+2x_3+x_4=5, \\ 4x_1-9x_2+4x_3-x_4=9. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=3, \\ 2x_1-x_2-2x_3+3x_4=-7, \\ 3x_1-3x_2+x_3+2x_4=-4, \\ x_1+x_2-5x_3+4x_4=-10. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 8, \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 - 3x_4 = 5. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -4, \\ x_1 + x_3 - 3x_4 = 6. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 11x_2 + 11x_3 - 4x_4 = -3. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - x_3 - 10x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 24, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ 4x_1 + 3x_2 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 7x_3 = 1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 13x_2 - 14x_3 - 10x_4 = -14. \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 9, \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 15, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 4x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -4. \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -2, \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 5x_4 = -5. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = -7. \end{cases}$

Завдання 8. Для однорідної системи знайти фундаментальну систему розв’язків:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 13x_4 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 13x_4 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 + 9x_4 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 10x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 + 8x_4 = 0, \\ 8x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 8x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 12x_3 + 8x_4 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - 10x_4 = 0, \\ 3x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 12x_3 - 18x_4 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 12x_3 - 6x_4 = 0, \\ 2x_1 - 8x_2 - 17x_3 + 13x_4 = 0, \\ 3x_1 - 11x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 14x_2 + 7x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 - 12x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 7x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0, \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 7x_3 - 13x_4 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - 6x_2 - 9x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 12x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 19x_3 + 9x_4 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА Й АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Розрахунково-графічне завдання розділу «Векторна алгебра й аналітична геометрія» складається з 8 практичних завдань, що охоплюють дії над векторами, скалярний, векторний і мішаний добутки та їх фізичні й геометричні застосування, задачі аналітичної геометрії на площині (пряма, криві другого порядку), і у просторі (площина, пряма). Для успішного виконання запропонованих завдань варто ознайомитись і розібрати відповідний теоретичний матеріал [3, 4, 5, 8, 9, 10, 12], а також відповісти на контрольні питання.

Контрольні питання

1. Вектори. Лінійні операції над векторами.
2. Проекція вектора на вісь.
3. Дії над векторами, що задані в координатній формі. Напрямні косинуси. Довжина вектора. Відстань між двома точками.
4. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами. Умова перпендикулярності векторів.
5. Векторний добуток двох векторів, його властивості, фізичні й геометричні застосування.
6. Мішаний добуток трьох векторів, його властивості, геометричні застосування. Умова компланарності трьох векторів.
7. Пряма на площині. Кутовий коефіцієнт.
8. Кут між прямими на площині. Відстань від точки до прямої на площині.
9. Канонічні рівняння кривих другого порядку.
10. Площина. Нормальний вектор площини. Рівняння площини, що проходить через три задані точки. Кут між двома площинами.
11. Пряма у просторі. Напрямний вектор прямої. Канонічні й параметричні рівняння прямої. Загальний вигляд прямої у просторі. Кут між прямими у просторі. Кут між прямою і площиною.
12. Відстань від точки до площини, до прямої у просторі.

Зразок розв’язання прикладів контрольного завдання

Приклад 1. Відомо, що $\overrightarrow{MC}$ спрямований у напрямку бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$, де $A(4;0;10)$, $B(1;5;2)$ і $M(2;3;4)$. Знайти координати точки C, якщо $\left|\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{42}$.

Розв’язання. Якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, то вектор $\vec{c}$ за умови, що $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, спрямований у напрямку бісектриси кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Порівняємо довжини векторів $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$: $\overrightarrow{MA} = (2;-3;6)$, тоді $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = 7$, а $\overrightarrow{MB} = (-1;2;-2)$, $\left|\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$, тобто $\left|\overrightarrow{MA}\right| \neq \left|\overrightarrow{MB}\right|$. Візьмемо замість вектора $\overrightarrow{MB}$ такий вектор $\overrightarrow{MB_1}$, що $\overrightarrow{MB_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MB}$ і $\left|\overrightarrow{MB_1}\right| = \left|\overrightarrow{MA}\right|$.

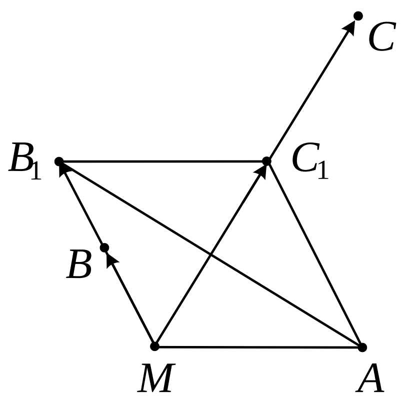


Рисунок 2.1

Очевидно, $\overrightarrow{MB_1} = \frac{7}{3} \cdot \overrightarrow{MB}$, тобто $\overrightarrow{MB_1} = \left(-\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; -\frac{14}{3}\right)$. Тоді вектор $\overrightarrow{MC_1}$, такий, що $\overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB_1}$, буде направлений у напрямку бісектриси кута між векторами $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$ (рис. 2.1), тобто $\overrightarrow{MC_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MC}$.

У такому разі існує таке дійсне число $\lambda \neq 0$, що $\overrightarrow{MC} = \lambda \cdot \overrightarrow{MC_1}$, а значить, і $\left|\overrightarrow{MC}\right| = \lambda \cdot \left|\overrightarrow{MC_1}\right|$. Знайдемо множник λ. За умови задачі $\left|\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{42}$. Знайдемо $\left|\overrightarrow{MC_1}\right|$: $\overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB_1} = \left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$, тоді $\left|\overrightarrow{MC_1}\right| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{25}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$. Очевидно, $\lambda = 3$, звідки $\overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MC_1}$, тобто $\overrightarrow{MC} = (-1;5;4)$, тоді $C(0;7;7)$.

Відповідь: $C(0;7;7)$.

Приклад 2. Знайти висоти паралелограма, що побудований на векторах $\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=2,\quad |\vec{b}|=\sqrt{3},$ а кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 30^0.

Розв'язання. Якщо відома площа паралелограма $S_{\square}$, то його висоти h_p і h_q (рис. 2.2) можна знайти за формулами: $h_p=\dfrac{S_{\square}}{|\vec{p}|},\quad h_q=\dfrac{S_{\square}}{|\vec{q}|}$.

Площа паралелограма, що побудований на векторах $\vec{p}$ і $\vec{q}$, обчислюється за формулою: $S_{\square}=|\vec{p}\times\vec{q}|$, тобто

$$S_{\square}=\left|\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right|=\left|\vec{a}\times\vec{a}-2\vec{a}\times\vec{b}+3\vec{b}\times\vec{a}-6\vec{b}\times\vec{b}\right|=5\left|\vec{b}\times\vec{a}\right|.$$

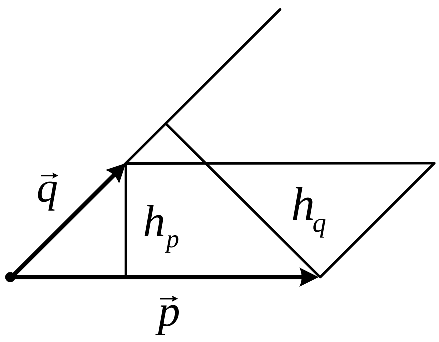


Рисунок 2.2

За означенням векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\left|\vec{b}\times\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin\varphi$, де φ – кут між цими векторами. Тоді $S_{\square}=5\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}=5\cdot\sqrt{3}$.

З властивостей скалярного добутку маємо:

$$|\vec{p}|=\sqrt{\vec{p}^{\,2}}=\sqrt{\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{4+6\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+9\cdot 3}=7,$$

$$|\vec{q}|=\sqrt{\vec{q}^{\,2}}=\sqrt{\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{4-4\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+4\cdot 3}=2$$

Таким чином, $h_p=\dfrac{S_{\square}}{|\vec{p}|}=\dfrac{5\sqrt{3}}{7},\quad h_q=\dfrac{S_{\square}}{|\vec{q}|}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{5\sqrt{3}}{7},\quad \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

Приклад 3. Установити лінійну незалежність векторів $\vec{p}=(1;2;3),\ \vec{q}=(-1;3;2)$ і $\vec{r}=(0;1;2)$. Знайти координати α,β,γ вектора $\vec{x}=(2;1;3)$ у базисі $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$.

Розв'язання. Вектори $\vec{p}, \vec{q}$ і $\vec{r}$ простору R^3 лінійно незалежні, якщо вони не є компланарними. З умови компланарності трьох векторів маємо: $\left(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\right) = 0$, тобто мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю.

Перевіримо компланарність векторів $\vec{p}, \vec{q}$ і $\vec{r}$:

$$\left(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= -(2+3) + 2 \cdot (3+2) = 5 \neq 0,$ таким чином, вектори $\vec{p}, \vec{q}$ і $\vec{r}$ лінійно незалежні.

Розкласти вектор $\vec{x}$ за базисом $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ означає знайти такі числа α, β, γ, що $\vec{x} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$. Числа α, β і γ у такому випадку називаються координатами вектора $\vec{x}$ у базисі $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$. Переходячи від цього векторного рівняння до рівнянь по координатах, маємо:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2, \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 1, \\ 3\alpha + 2\beta + 2\gamma = 5. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_\beta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -5,\ \Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10,$$

тоді маємо: $\alpha = \dfrac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \dfrac{5}{5} = 1,\ \beta = \dfrac{\Delta_\beta}{\Delta} = \dfrac{-5}{5} = -1,\ \gamma = \dfrac{\Delta_\gamma}{\Delta} = \dfrac{10}{5} = 2.$

Таким чином, $\vec{x} = \vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$.

Відповідь: $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 2.$

Приклад 4. Знайти площу прямокутника, якщо відомі рівняння двох його сторін $l_1: 3x - 2y + 6 = 0$ і $l_2: 2x + 3y + 14 = 0$ та одна з його вершин $A(-2;1)$.

Розв'язання. Перевіримо, чи належить точка A хоча б одній з заданих прямих. Підставляючи координати точки A в рівняння заданих прямих, отримаємо для $l_1: 3\cdot(-2)-2\cdot 1+6=-2\neq 0$, а для $l_2: 2\cdot(-2)+3\cdot 1+14=13\neq 0$, тобто точка A не належить заданим прямим.

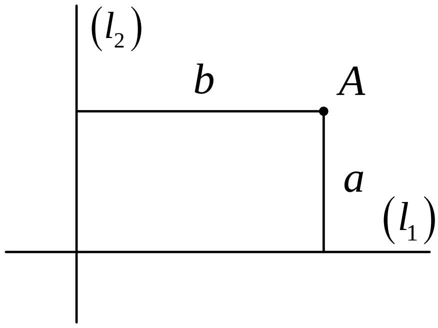


Рисунок 2.3

Площу прямокутника знайдемо, якщо будуть відомі відстані a і b від точки A до прямих l_1 і l_2 (рис. 2.3).

Відстань d від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої $l:\ Ax+By+C=0$ обчислюється за формулою:

$$d(M_0,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Тоді $d(A,l_1)=\dfrac{|3\cdot(-2)-2\cdot 1+6|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, тобто $a=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$,

$d(A,l_2)=\dfrac{|2\cdot(-2)+3\cdot 1+14|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}$, тобто $b=\sqrt{13}$.

Отже, площа прямокутника $S=a\cdot b=2$ (кв. од.).

Відповідь: 2 кв. од.

Приклад 5. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(-1;2)$ під кутом 45^0 до прямої (M_1M_2), якщо $M_2(2;3)$.

Розв'язання. На площині існують дві такі прямі l_1 і l_2, що задовольняють умовам задачі (рис. 2.4).

Скористаємося формулою обчислення кута φ між прямими l_1 і l_2:

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|,$$

де k_1 і k_2 – кутові коефіцієнти прямих.

Знайдемо кутовий коефіцієнт k_1 прямої (M_1M_2) за формулою: $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, тобто $k_1=\dfrac{3-2}{2+1}=\dfrac{1}{3}.$ Оскільки $\operatorname{tg}45^0=1,$ то $\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\pm 1,$ або $1+k_1\cdot k_2=\pm(k_2-k_1),$ звідки при $k_1=\dfrac{1}{3}$ маємо:

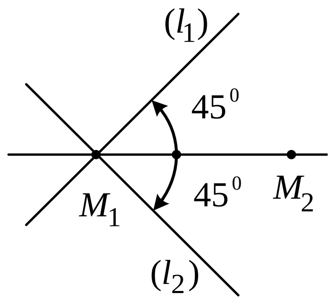


Рисунок 2.4

1) $1+\dfrac{1}{3}\cdot k_2=k_2-\dfrac{1}{3},$ або $\dfrac{2}{3}\cdot k_2=\dfrac{4}{3},\quad k_2^{(1)}=2;$

2) $1+\dfrac{1}{3}\cdot k_2=\dfrac{1}{3}-k_2,$ або $\dfrac{4}{3}\cdot k_2=-\dfrac{2}{3},\quad k_2^{(2)}=-\dfrac{1}{2}.$

Далі скористаємось рівнянням прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ у відомому напрямку, тобто з відомим кутовим коефіцієнтом k: $y-y_0=k(x-x_0).$

Шукані прямі l_1 і l_2 проходять через точку $M_1(-1;2)$ і мають кутові коефіцієнти $k_2^{(1)}=2$ і $k_2^{(2)}=-\dfrac{1}{2}$. До речі, прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, що підтверджується відповідною умовою: $k_2^{(1)}\cdot k_2^{(2)}=-1.$

Отже, $l_1:\quad y-2=2(x+1),$ або $y-2x-4=0,$

$l_2:\quad y-2=-\dfrac{1}{2}(x+1),$ або $2y+x-3=0.$

Відповідь: $y-2x-4=0,\ 2y+x-3=0.$

Приклад 6. Установити, яка лінія визначається рівнянням, і побудувати цю лінію: а) $4x^2-y^2+16x+2y+11=0$, б) $y=-2-\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x}$.

Розв'язання. а) Задане рівняння кривої зведемо до канонічного вигляду:

$$4(x^2+4x+4)-16-(y^2-2y+1)+1+11=0,$$

звідки отримаємо: $4(x+2)^2-(y-1)^2=4.$ Поділивши останнє рівняння на число 4, отримаємо: $\dfrac{(x+2)^2}{1}-\dfrac{(y-1)^2}{4}=1.$ Таким чином, задана крива є гіперболою, дійсна вісь якої задається рівнянням $y=1$. Центр симетрії гіперболи знаходиться у точці $O_1(-2;1)$, а її піввісі $a=1$, $b=2$.

На прямій $y=1$ від точки $O_1(-2;1)$ вліво і вправо відкладемо відрізки довжиною $a=1$. Пряма $y=1$ є дійсною віссю гіперболи, а отримані точки $A_1(-3;1)$ і $A_2(-1;1)$ є вершинами гіперболи.

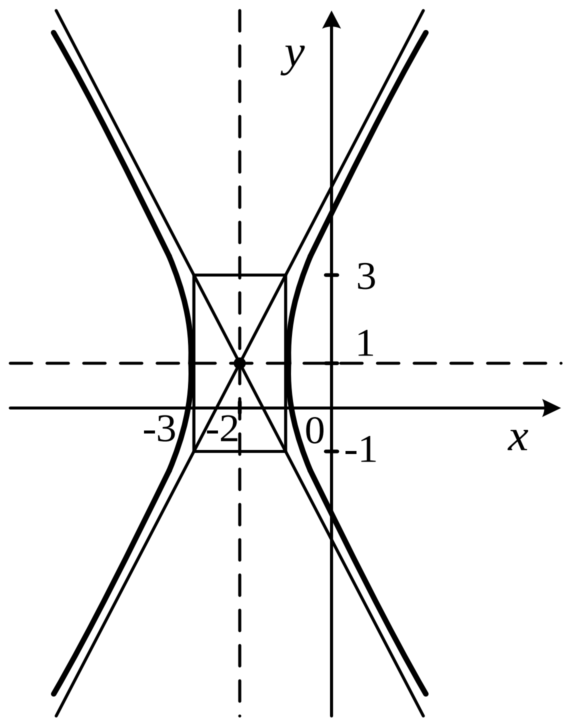


Рисунок 2.5

На прямій $x=-2$ від точки $O_1(-2;1)$ донизу і доверху відкладемо відрізки довжиною $b=2$. Пряма $x=-2$ є для цієї гіперболи уявною віссю і гіпербола її не перетинає. Побудуємо прямокутник, сторони якого паралельні дійсній і уявній осям гіперболи, а отримані вище точки є серединами його сторін. Побудуємо асимптоти гіперболи. Асимптотами гіперболи є прямі, яким належать діагоналі побудованого прямокутника.

Тепер можна будувати гіперболу (рис. 2.5).

б) Задане рівняння $y=-2-\frac{1}{2}\sqrt{1-x}$ кривої зведемо до канонічного вигляду: $y+2=-\frac{1}{2}\sqrt{1-x}$, звідки $(y+2)^2=-\frac{1}{4}(x-1)$.

Таким чином, задана крива є параболою з вершиною в точці $O_1(1;-2)$, параметр якої $p=\frac{1}{2}$, а вісь симетрії задається рівнянням $y=-2$. Але з рівняння $y+2=-\frac{1}{2}\sqrt{1-x}$ витікає, що $y+2\le 0$, або $y\le -2$, тобто рівняння, що задане, визначає частину параболи $(y+2)^2=-\frac{1}{4}(x-1)$, яка лежить нижче прямої $y=-2$ (рис. 2.6).

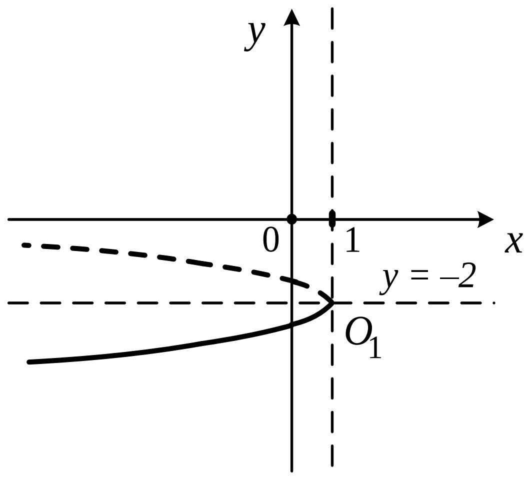


Рисунок 2.6

Приклад 7. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(2;0;-1)$ і $B(5;2;3)$ паралельно осі OX.

Розв'язання. Скористаємось рівнянням площини в загальному вигляді:

$$\alpha: \quad Ax+By+Cz+D=0.$$

За умови задачі площина паралельна осі OX, тоді її рівняння буде мати вигляд: $By+Cz+D=0$, або $\beta y+\gamma z+1=0$, де $\beta=\dfrac{B}{D}$, $\gamma=\dfrac{C}{D}$. Підставляючи в останнє рівняння координати точок A і B, отримаємо систему рівнянь: $\begin{cases} -\gamma+1=0, \\ 2\beta+3\gamma+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=-2, \\ \gamma=1. \end{cases}$

Отже, шукане рівняння площини: $-2y+z+1=0$, або $2y-z-1=0$.

Відповідь: $2y-z-1=0$.

Приклад 8. При якому значенні λ пряма l: $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z-1=0 \end{cases}$ паралельна площині α: $5x-3y+\lambda z-7=0$? Чи належить пряма l площині α?

Розв'язання. Пряма l паралельна площині α, якщо напрямний вектор $\vec{s}$ прямої перпендикулярний нормальному вектору $\vec{n}$ площини, тобто $\vec{s}\cdot\vec{n}=0$.

Знайдемо напрямний вектор $\vec{s}$ прямої l. Пряма l задана як перетин двох площин з нормальними векторами $\overrightarrow{n_1}=(3;-2;1)$ і $\overrightarrow{n_2}=(4;-3;4)$. У цьому випадку $\vec{s}\parallel\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]$. Обчислимо векторний добуток векторів $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$:

$$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & -3 & 4\end{vmatrix}=\vec{i}(-8+3)-\vec{j}(12-4)+\vec{k}(-9+8)=-5\vec{i}-8\vec{j}-\vec{k}.$$

Таким чином, як напрямний вектор прямої l можна взяти вектор $\vec{s}=(5;8;1)$. З рівняння площини α одержимо $\vec{n}=(5;-3;\lambda)$, тоді за умови перпендикулярності векторів $\vec{s}$ і $\vec{n}$ маємо: $\vec{s}\cdot\vec{n}=25-24+\lambda=0$, звідки $\lambda=-1$.

Перевіримо, чи належить пряма l площині α. Для цього достатньо перевірити, чи належить площині будь-яка точка прямої. Нехай це буде точка, в якій пряма l перетинає координатну площину XOY, тобто точка $P_1(x;y;0)$. Тоді з рівняння прямої маємо:

$$\begin{cases}3x-2y+3=0,\\ 4x-3y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-2y+3=0,\\ x-y-2=0\end{cases}\Rightarrow P_1(-7;-9;0).$$

Підставляючи координати точки P_1 у рівняння площини, отримаємо: $5\cdot(-7)-3\cdot(-9)-7=-15\neq 0$, тобто пряма не належить площині.

Відповідь: $\lambda=-1$; пряма не належить площині.

Приклад 9. Знайти проекцію P_1 точки $P(-1;4;-4)$ на площину, що проходить через точки $M_1(1;-1;1), M_2(-2;1;3), M_3(4;-5;-2)$.

Розв'язання. Рівняння площини α, що проходить через три точки, має вигляд:

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$

Отже, $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -2-1 & 1+1 & 3-1 \\ 4-1 & -5+1 & -2-1 \end{vmatrix} = 0$, або $\alpha: \quad 2x-3y+6z-11=0.$

Точку P_1 знайдемо як точку перетину прямої $\left(PP_1\right)$ і площини α. Якщо точка P_1 є проекцією точки P на площину α, то пряма $\left(PP_1\right)$ перпендикулярна площині α, а тому напрямний вектор $\vec{s}$ прямої і нормальний вектор $\vec{n}$ площини паралельні.

З рівняння площини α отримаємо $\vec{n}=\left(2;-3;6\right)$ і візьмемо $\vec{s}=\vec{n}$, тобто $\vec{s}=\left(2;-3;6\right)$. Для знаходження точки P_1 запишемо параметричне рівняння прямої $\left(PP_1\right)$ $x=2t-1, y=-3t+4, z=6t-4, t\in R$ і складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x=2t-1, \\ y=-3t+4, \\ z=6t-4, \\ 2x-3y+6z-11=0. \end{cases}$$

Звідки маємо: $2\left(2t-1\right)-3\left(-3t+4\right)+6\left(6t-4\right)-11=0$, тобто $t=1$. Отримане значення параметру t відповідає точці P_1 у параметричному рівнянні прямої $\left(PP_1\right)$, тому координати точки P_1: $x_1=1, y_1=1, z_1=2$.

Відповідь: $P_1\left(1;1;2\right)$.

Контрольні завдання за темою «Векторна алгебра й аналітична геометрія»

Завдання 1.

1. Задано три вектори $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k},\ \vec{b}=\left(4;0;-1\right),\ \vec{c}=\left(-4;3;0\right)$. Обчислити $np_{\vec{c}}\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)$.

2. Дві сили $\overrightarrow{F_1}=\left(4;-5;0\right)$ і $\overrightarrow{F_2}=\left(-1;3;6\right)$ прикладені до однієї точки. Обчислити, яку роботу виконує рівнодіюча цих сил, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з положення $A(0;4;-2)$ до положення $B(2;-3;1)$.

3. Задано вектори $\vec{a}=(-2;1;4)$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$. Обчислити $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)$, попередньо спростивши.

4. Знайти вектор $\vec{x}$, що колінеарний вектору $\vec{a}=(-2;3;1)$ і задовольняє умові $\vec{x}\cdot\vec{a}=-7$.

5. Задано вершини трикутника $A(4;6;-4)$, $B(1;2;-3)$, $C(5;3;0)$. Визначити зовнішній кут при вершині B трикутника.

6. Визначити, при якому λ вектори $\vec{a}=-2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$ і $\vec{b}=(\lambda;1;2)$ взаємно перпендикулярні.

7. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь, яка утворює з координатними осями OX і OY кути $\alpha=60^0$ і $\beta=120^0$ відповідно, а з віссю OZ – тупий кут γ, якщо $A(-2;-3;1)$, $B(4;3;-5)$.

8. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$. Обчислити $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$, якщо $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=2$.

9. Три сили $\overrightarrow{F_1}=(-1;2;3)$, $\overrightarrow{F_2}=(-2;-4;2)$ і $\overrightarrow{F_3}=(5;-2;-1)$ прикладені до однієї точки. Обчислити, яку роботу виконує рівнодіюча цих сил, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з положення $M_1(1;-4;2)$ до положення $M_2(3;-1;6)$.

10. Задано вектори $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=(4;5;-1)$. Обчислити $\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+5\vec{b}\right)$, попередньо спростивши.

11. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно утворюють один до одного кути в 30^0. Знайти модуль вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, якщо відомо, що $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\left|\vec{c}\right|=2$.

12. Вектор $\vec{x}$, що колінеарний вектору $\vec{a}=(2;3;-1)$, утворює тупий кут з віссю OY. Знайти координати вектора $\vec{x}$, якщо відомо, що $\left|\vec{x}\right|=2\sqrt{14}$.

13. Знайти проекцію вектора $\vec{a}=\left(\sqrt{2};-4;6\right)$ на вісь, яка складає з координатними осями OX і OZ кути $\alpha=45^0$ і $\gamma=60^0$ відповідно, а з віссю OY – тупий кут β.

14. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Обчислити $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)$, якщо $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=3$.

15. Задано три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},$ які задовольняють умові $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=0$. Обчислити $\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c},$ якщо $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\left|\vec{c}\right|=1$,

16. Задано точки $A\left(2;-1;4\right)$, $B\left(4;-2;3\right)$, $C\left(5;-3;1\right)$. Знайти проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}\right)$ на вісь вектора $\overrightarrow{AC}$.

17. Задано вершини трикутника $A\left(3;1;4\right)$, $B\left(3;2;5\right)$, $C\left(1;2;4\right)$. Визначити синус внутрішнього кута при вершині C трикутника.

18. Вектор $\vec{b}$, що колінеарний вектору $\vec{a}=\left(2;-4;-6\right)$, утворює з віссю OZ гострий кут. Знайти координати вектора $\vec{b}$, якщо відомо, що $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{14}$.

19. Обчислити внутрішні кути трикутника ABC, якщо $A\left(2;3;2\right)$, $B\left(4;0;8\right)$, $C\left(8;5;-1\right)$. Чи є цей трикутник рівнобедрений?

20. Знайти вектор $\vec{b}$, що колінеарний вектору $\vec{a}=\left(1;3;-4\right)$ і задовольняє умові $\vec{a}\cdot\vec{b}=-52$.

21. Задано вектори $\vec{a}=\left(2;-1;4\right)$ і $\vec{b}=3\vec{j}-2\vec{k}$. Обчислити $\left(3\vec{b}+2\vec{a}\right)^2$, попередньо спростивши.

22. Знайти проекцію вектора $\vec{a}=\left(-3;4;1\right)$ на вісь, яка утворює з координатними осями рівні тупі кути.

23. Обчислити, яку роботу виконує сила $\vec{F}=\left(-2;3;5\right)$, якщо точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з положення

$M(2;-3;-1)$ до положення $N(5;2;1)$. Визначити кут прикладання даної сили.

24. Задано точки $A(3;-1;-4)$, $B(1;-2;3)$ і $C(5;4;2)$. Знайти на осі OY таку точку D, щоб вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ були взаємно перпендикулярні.

25. Задано вектори $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ і $\vec{b}=(-1;4;5)$. Знайти проекцію вектора $3\vec{a}-2\vec{b}$ на вісь вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(1;-2;3)$ і $B(4;2;3)$.

26. При яких значеннях λ будуть перпендикулярні вектори $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ і $\vec{a}-\lambda\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=2$?

27. Задано точки $A(2;0;4)$, $B(0;-3;5)$, $C(-2;-5;-1)$, $D(6;7;-5)$. Перевірити колінеарність векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$. Установити, який з них довший за іншого і в скільки разів, як вони напрямлені – в одну або в протилежні сторони.

28. Знайти вектор $\vec{c}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(4;5;-1)$ і $\vec{b}=(-3;6;4)$ та задовольняє умові $\vec{c}\cdot\left(\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}\right)=5$.

29. Знайти модуль вектора $\vec{c}=\vec{a}-3\vec{b}$, якщо відомо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні і $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$.

30. Перевірити, що чотири точки $A(3;-2;2)$, $B(-3;1;0)$, $C(-6;3;1)$, $D(6;-3;5)$ є вершинами трапеції $ABCD$. Знайти косинуси внутрішніх кутів трапеції при більшій основі.

Завдання 2.

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{5\pi}{6}$. Обчислити $\left|\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\right|$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$.

2. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1;-2;3)$, $B(2;-1;5)$, $C(-2;-6;0)$.

3. Сила $\overrightarrow{F} = (-3;4;-1)$ прикладена до точки $A(1;2;3)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту $\overrightarrow{M}$ цієї сили відносно точки $B(3;-1;5)$.

4. Знайти довжину висоти трикутника з вершинами $A(3;-4;2)$, $B(1;-2;0)$, $C(-1;-1;2)$, яка опущена з вершини B на сторону AC.

5. Знайти вектор $\vec{x}$, що перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (-2;1;0)$ і $\vec{b} = (1;3;-1)$ та задовольняє умові $\vec{x} \cdot \left(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\right) = 6$.

6. Вектор $\vec{c}$, що перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (2;1;3)$ і $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{k}$, утворює з віссю OX гострий кут. Знайти вектор $\vec{c}$, якщо $\left|\vec{c}\right| = 2\sqrt{6}$.

7. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Обчислити $\left|\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} + 3\vec{b}\right)\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$.

8. Знайти площу паралелограма, що побудований на векторах $\vec{p} = 3\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b}$, якщо відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 30^0$.

9. Обчислити $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$, якщо відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$.

10. Знайти значення λ, при яких площа паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a} = (-1;2;-3)$ і $\vec{b} = (3;\lambda;4)$, дорівнює $3\sqrt{5}$ кв. од.

11. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1;-1;2)$, $B(3;0;3)$, $C(2;-4;-1)$.

12. Знайти довжину висоти трикутника з вершинами $A(-1;4;3)$, $B(2;6;1)$, $C(0;4;2)$, що опущена з вершини A на сторону BC.

13. Три сили $\overrightarrow{F_1} = (-2;0;3)$, $\overrightarrow{F_2} = (1;-1;2)$ і $\overrightarrow{F_3} = (3;4;-2)$ прикладені до точки $B(1;-1;-2)$. Визначити момент $\overrightarrow{M}$ рівнодіючої цих сил відносно точки $A(5;-3;-4)$, а також його величину.

14. Вектор $\vec{x}$, що перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(-2;3;1)$ і $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$, утворює з віссю OZ гострий кут. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо $|\vec{x}|=\sqrt{6}$.

15. Знайти вектор $\vec{c}$, що перпендикулярний до векторів $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{k}$ і $\vec{b}=(-1;4;-4)$ та задовольняє умові $\vec{c}\cdot\left(2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}\right)=-3$.

16. Знайти площу трикутника, що побудований на векторах $\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b}$ і $\vec{q}=5\vec{a}-\vec{b}$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=30^0$.

17. Обчислити $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=9$.

18. Задано вектори $\vec{a}=(2;-3;1)$ і $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$. Обчислити $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)$, попередньо спростивши.

19. Знайти вектор $\vec{c}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(2;1;-1)$ і $\vec{b}=(-4;3;3)$, а $|\vec{c}|=\sqrt{35}$.

20. Відомо, що $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$. Обчислити $\left|\left(\vec{b}-4\vec{a}\right)\times\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\right|$, якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

21. Сила $\vec{F}=(3;1;-2)$ прикладена до точки $A(2;1;-1)$. Знайти напрямні косинуси і величину моменту цієї сили відносно початку координат.

22. При якому λ площа паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a}=(1;-2;-3)$ і $\vec{b}=(\lambda;0;4)$, буде дорівнювати $5\sqrt{5}$ кв. од.?

23. Задано три послідовні вершини паралелограма $ABCD$: $A(2;-2;1)$, $B(1;0;2)$ і $C(0;-1;3)$. Знайти довжину висоти паралелограма, що опущена з вершини B на сторону AD.

24. Обчислити $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}\right|$, якщо $A(4;2;-1)$, $B(3;4;0)$ і $C(3;-1;4)$.

25. Вектор $\vec{a}$, що перпендикулярний до осі OY і вектора $\vec{b}=(3;5;1)$, утворює гострий кут з віссю OZ. Знайти вектор $\vec{a}$, якщо $|\vec{a}|=2\sqrt{10}$.

26. Знайти вектор $\vec{c}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$ і $\vec{b}=(1;-2;4)$ і задовольняє умові $\vec{c}\cdot\left(-\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}\right)=-11$.

27. Знайти площу трикутника, що побудований на векторах $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=30^0$.

28. Задано три послідовні вершини паралелограма $ABCD$: $A(6;3;1)$, $B(2;1;4)$ і $C(7;0;3)$. Знайти його площу.

29. Знайти $|\vec{a}\times\vec{b}|$ і косинус кута між векторами $\vec{a}=(-1;-2;2)$ і $\vec{b}=(2;6;-3)$.

30. При яких значеннях λ площа трикутника, що побудований на векторах $\vec{a}=(-3;-1;\lambda)$ і $\vec{b}=(4;2;1)$, буде дорівнювати $\dfrac{\sqrt{38}}{2}$ кв. од.?

Завдання 3.

1. Визначити, правою або лівою є трійка векторів $\vec{a}=(3;-1;4)$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=(-1;5;2)$.

2. Задано вектори $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=(0;5;-1)$, $\vec{c}=3\vec{i}+\vec{k}$. Обчислити $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\vec{c}\left(\vec{b}-3\vec{a}\right)$, попередньо спростивши.

3. Обчислити об'єм піраміди з вершинами в точках $A(1;3;0)$, $B(2;0;4)$, $C(0;4;5)$ і $D(4;7;9)$.

4. Чи лежать точки $A(1;-2;0)$, $B(-2;3;1)$, $C(5;2;6)$ і $D(4;0;-2)$ в одній площині?

5. Задано вершини піраміди $A(2;3;-1)$, $B(1;5;-3)$, $C(0;4;-2)$ і $D(-1;3;2)$. Знайти довжину висоти піраміди, що опущена з вершини D.

6. Знайти об'єм паралелепіпеда, що побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, якщо $A(3;4;-5)$, $B(0;-1;2)$, $C(5;3;-2)$ і $D(7;1;-3)$.

7. При якому значенні λ вектори $\vec{a}=(1;2;-3)$, $\vec{b}=(-1;4;2)$ і $\vec{c}=(0;\lambda;-1)$ будуть компланарні?

8. Визначити, чи компланарні вектори $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{b}=(1;5;-3)$, $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$. У разі їх некомпланарності визначити, яку трійку (праву або ліву) вони утворюють.

9. Задано вектори $\vec{a}=(1;3;4)$, $\vec{b}=3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=(1;2;-1)$. Обчислити $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{c}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$, попередньо спростивши.

10. Чи лежать точки $A(1;-2;4)$, $B(0;5;6)$, $C(2;-3;1)$ і $D(1;4;3)$ в одній площині?

11. Задано вершини піраміди $A(1;-2;3)$, $B(-1;2;4)$, $C(0;5;6)$ і $D(2;3;5)$. Знайти довжину висоти піраміди, що опущена з вершини A.

12. Об'єм паралелепіпеда, що побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, дорівнює 34 куб. од., $A(-3;2;1)$, $B(1;5;4)$, $D(-2;7;3)$. Знайти координати вершини С, якщо відомо, що вона лежить на осі OZ.

13. При яких значеннях λ вектори $\vec{a}=(1;2;4)$, $\vec{b}=(-2;\lambda;-1)$ і $\vec{c}=(-1;5;\lambda)$ будуть компланарні?

14. Визначити, чи компланарні вектори $\vec{a}=(1;-2;4)$, $\vec{b}=(-2;4;-7)$, $\vec{c}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

15. Задано вектори $\vec{a}=(1;4;-2)$, $\vec{b}=2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=(-2;3;-1)$. Обчислити $\vec{a}\left(2\vec{b}-\vec{c}\right)\left(\vec{c}+3\vec{b}\right)$, попередньо спростивши.

16. Перевірити, чи лежать точки $A(-2;3;1)$, $B(-5;4;2)$, $C(2;1;3)$ і $D(-1;2;4)$ в одній площині.

17. Знайти об'єм піраміди, що побудована на векторах $2\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},$ $3\vec{a}-\vec{c},$ якщо вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ взаємно перпендикулярні і $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4,$ $|\vec{c}|=5.$

18. Яку трійку (праву або ліву) утворюють вектори $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CD},$ якщо $A(3;5;0),\ B(-1;2;2),\ C(-4;3;5)$ і $D(-1;3;4)$?

19. Знайти об'єм паралелепіпеда, що побудований на векторах $\vec{a}+\vec{c},\ \vec{b}+2\vec{c},\ 3\vec{a},$ якщо $\vec{a}=(1;2;-1),\ \vec{b}=3\vec{i}-\vec{k},\ \vec{c}=(-2;3;-1).$

20. Об'єм тетраедра $V=4{,}5$ куб. од., три його вершини знаходяться у точках $A(3;0;4),\ C(4;-1;-2)$ і $D(1;-2;3).$ Знайти координати четвертої вершини $B,$ якщо відомо, що вона лежить на осі OX.

21. При якому λ об'єм паралелепіпеда, що побудований на векторах $\vec{a}=2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=(\lambda;-4;2), \vec{c}=(5;2\lambda;1),$ буде дорівнювати 100 куб. од.?

22. Задано вектори $\vec{p}=(2;-4;1),\ \vec{q}=(2;-1;3),$ і $\vec{r}=3\vec{j}-\vec{k}.$ Обчислити $2\vec{p}(\vec{r}-3\vec{q})(\vec{q}+\vec{r}),$ попередньо спростивши.

23. Знайти об'єм піраміди, що побудована на векторах $\vec{a}-\vec{c},\ \vec{a}+2\vec{b},$ $\vec{b}-3\vec{c},$ якщо вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ взаємно перпендикулярні і $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,$ $|\vec{c}|=4.$

24. При яких значеннях λ об'єм піраміди, що побудована на векторах $\vec{a}=(3;1;5),\ \vec{b}=(-4;-2;\lambda)$ і $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k},$ буде дорівнювати $\frac{4}{3}$ куб. од.?

25. При якому значенні x точка $P(x;2;2)$ буде лежати в площині точок $A(-3;1;3),\ B(2;-1;0),$ і $C(1;4;5)$?

26. Знайти об'єм піраміди, що побудована на векторах $2\vec{a},\ \vec{a}+\vec{b},$ $\vec{a}-\vec{c}+2\vec{b},$ якщо $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b},$ $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,$ $|\vec{c}|=6,$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=30^0.$

27. Задано вершини $A(7;1;2)$, $B(5;-1;3)$, $C(6;3;-2)$ і $D(4;-2;1)$ паралелепіпеда, що побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Знайти довжину висоти, що опущена з вершини D паралелепіпеда на площину, до якої належать вершини A, B, C.

28. Задано вектори $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k},\ \vec{b}=(3;-2;4),\ \vec{c}=\vec{i}-2\vec{k}.$ Обчислити $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-2\vec{c}\right)\left(3\vec{b}+\vec{c}\right)$, попередньо спростивши.

29. При яких значеннях λ вектори $\vec{a}=(1;2\lambda;3)$, $\vec{b}=(3;-1;4)$ і $\vec{c}=(-2;-1;\lambda)$ будуть компланарні?

30. Яку трійку (праву або ліву) утворюють вектори $2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{c}-\vec{a}$ і $\vec{b}-2\vec{c},$ якщо $\vec{a}=(1;-1;3),\ \vec{b}=(3;-2;-4),\ \vec{c}=2\vec{i}-\vec{j}$?

Завдання 4.

Установити лінійну незалежність векторів $\vec{p},\ \vec{q}$ і $\vec{r}$. Розкласти вектор $\vec{x}$ за базисом $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

1. $\vec{p}=(1;0;2),\quad \vec{q}=(-2;1;0),\quad \vec{r}=(2;-1;1),\quad \vec{x}=(0;-1;2).$

2. $\vec{p}=(1;4;1),\quad \vec{q}=(4;5;3),\quad \vec{r}=(2;3;1),\quad \vec{x}=(1;10;1).$

3. $\vec{p}=(1;-9;-5),\quad \vec{q}=(-2;1;3),\quad \vec{r}=(-3;-5;2),\quad \vec{x}=(-1;11;6).$

4. $\vec{p}=(4;-17;0),\quad \vec{q}=(6;-11;1),\quad \vec{r}=(-5;22;0),\quad \vec{x}=(-3;-17;-2).$

5. $\vec{p}=(2;-5;0),\quad \vec{q}=(-1;4;-7),\quad \vec{r}=(2;-3;-10),\quad \vec{x}=(0;2;-10).$

6. $\vec{p}=(-1;3;-4),\quad \vec{q}=(1;-1;6),\quad \vec{r}=(0;-5;1),\quad \vec{x}=(1;-4;9).$

7. $\vec{p}=(0;-7;2),\quad \vec{q}=(1;-6;5),\quad \vec{r}=(1;2;-3),\quad \vec{x}=(-3;3;-5).$

8. $\vec{p}=(1;-4;7),\quad \vec{q}=(3;-7;3),\quad \vec{r}=(1;-3;-2),\quad \vec{x}=(0;-4;9).$

9. $\vec{p}=(3;6;1),\quad \vec{q}=(0;1;0),\quad \vec{r}=(5;7;2),\quad \vec{x}=(1;7;0).$

10. $\vec{p}=(2;0;1),\quad \vec{q}=(7;0;4),\quad \vec{r}=(3;1;7),\quad \vec{x}=(1;0;-2).$

11. $\vec{p}=(2;-1;0),\quad \vec{q}=(-2;4;1),\quad \vec{r}=(5;-2;0),\quad \vec{x}=(1;-1;3).$

12. $\vec{p}=(1;0;0),\quad \vec{q}=(4;1;0),\quad \vec{r}=(-5;3;1),\quad \vec{x}=(3;-1;1).$

13. $\vec{p}=(1;-3;7),\quad \vec{q}=(0;1;5),\quad \vec{r}=(0;0;1),\quad \vec{x}=(1;4;1).$

14. $\vec{p}=(1;-2;4),\quad \vec{q}=(-2;5;-8),\quad \vec{r}=(0;-5;1),\quad \vec{x}=(0;1;2).$

15. $\vec{p}=(2;1;3)$, $\vec{q}=(1;7;-1)$, $\vec{r}=(0;5;-2)$, $\vec{x}=(1;3;0)$.

16. $\vec{p}=(3;4;5)$, $\vec{q}=(4;1;7)$, $\vec{r}=(0;-1;0)$, $\vec{x}=(1;2;4)$.

17. $\vec{p}=(0;2;-1)$, $\vec{q}=(2;5;0)$, $\vec{r}=(3;-9;7)$, $\vec{x}=(1;2;-1)$.

18. $\vec{p}=(1;0;2)$, $\vec{q}=(1;-1;1)$, $\vec{r}=(2;-3;2)$, $\vec{x}=(-2;5;0)$.

19. $\vec{p}=(2;3;0)$, $\vec{q}=(1;1;1)$, $\vec{r}=(-1;0;4)$, $\vec{x}=(0;3;1)$.

20. $\vec{p}=(1;-3;8)$, $\vec{q}=(0;1;-5)$, $\vec{r}=(0;0;1)$, $\vec{x}=(2;-1;3)$.

21. $\vec{p}=(2;0;0)$, $\vec{q}=(-4;1;0)$, $\vec{r}=(1;-1;-1)$, $\vec{x}=(0;-1;4)$.

22. $\vec{p}=(2;1;4)$, $\vec{q}=(1;1;3)$, $\vec{r}=(2;2;7)$, $\vec{x}=(0;6;-1)$.

23. $\vec{p}=(1;1;3)$, $\vec{q}=(2;1;5)$, $\vec{r}=(0;1;2)$, $\vec{x}=(2;1;0)$.

24. $\vec{p}=(-2;1;3)$, $\vec{q}=(1;8;2)$, $\vec{r}=(-2;3;4)$, $\vec{x}=(4;11;-1)$.

25. $\vec{p}=(1;2;1)$, $\vec{q}=(6;7;2)$, $\vec{r}=(1;14;10)$, $\vec{x}=(21;15;0)$.

26. $\vec{p}=(1;-11;6)$, $\vec{q}=(2;0;7)$, $\vec{r}=(1;6;2)$, $\vec{x}=(3;1;10)$.

27. $\vec{p}=(1;-1;5)$, $\vec{q}=(1;-5;6)$, $\vec{r}=(2;3;8)$, $\vec{x}=(6;0;27)$.

28. $\vec{p}=(0;1;0)$, $\vec{q}=(-1;-1;1)$, $\vec{r}=(3;4;-2)$, $\vec{x}=(-1;0;2)$.

29. $\vec{p}=(0;0;1)$, $\vec{q}=(4;1;10)$, $\vec{r}=(7;2;16)$, $\vec{x}=(0;3;2)$.

30. $\vec{p}=(-2;3;0)$, $\vec{q}=(3;-4;0)$, $\vec{r}=(6;0;1)$, $\vec{x}=(0;1;-1)$.

Завдання 5.

1. Задано вершини трикутника $A(-2;-2)$, $B(-2;4)$, і $C(5;2)$. Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини B на сторону AC, і медіани, що проведена з тієї ж вершини.

2. Задано вершини паралелограма $ABCD$: $A(-4;2)$, $B(3;1)$ і $C(9;-7)$. Знайти координати вершини D, рівняння сторін AB і AD і величину кута між ними.

3. Задано вершини чотирикутника $ABCD$: $A(-3;3)$, $B(3;7)$, $C(7;1)$ і $D(1;-3)$. Скласти рівняння його діагоналей і знайти точку O їх перетину. Чи є $ABCD$ квадратом?

4. Задано пряму $x-3y+10=0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $P(1;4)$ під кутом 45^0 до даної прямої. На заданій прямій знайти точку A, відстань від якої до точки P дорівнює 1.

5. Задано вершини трикутника $A(-4;-2)$, $B(-2;5)$, $C(6;4)$. Знайти довжину медіани трикутника, що проведена з вершини B. Скласти рівняння висоти, що опущена з тієї ж вершини.

6. Точка $A(-6;2)$ є вершиною квадрата $ABCD$, одна з його сторін лежить на прямій $4x-3y+5=0$. Обчислити площу квадрата і знайти координати тих його вершин, які належать заданій прямій.

7. Задано рівняння двох сторін прямокутника $ABCD$: $4x+3y+15=0$, $4x+3y-10=0$ і рівняння однієї з його діагоналей: $x+2y=0$. Скласти рівняння двох інших сторін прямокутника.

8. Знайти проекцію Q точки $P(1;2)$ на пряму $3x+4y+14=0$. Знайти відстань від точки P до точки, що симетрична їй відносно заданої прямої.

9. Задано вершини трикутника $A(-4;1)$, $B(6;3)$, $C(2;-3)$. Скласти рівняння середньої лінії трикутника, що паралельна стороні AC. Знайти кут між прямими AC і BC.

10. Перевірити, чи є чотирикутник $ABCD$ трапецією, якщо $A(-7;-6)$, $B(-8;1)$, $C(-5;5)$ і $D(2;6)$. Знайти довжину перпендикуляра, що опущений з вершини C на сторону AD.

11. Задано вершини чотирикутника $ABCD$: $A(-5;2)$, $B(3;8)$, $C(6;4)$ і $D(-2;-2)$. Скласти рівняння діагоналей чотирикутника і знайти його периметр. Чи є $ABCD$ прямокутником?

12. Задано рівняння двох сторін ромба $ABCD$ $7x-4y+37=0$, $x-8y+35=0$ і координати вершини $D(1;-2)$. Знайти довжини діагоналей ромба.

13. Задано вершини трикутника $A(3;-4)$, $B(-3;2)$, $C(6;2)$. Скласти рівняння висоти трикутника, що опущена з вершини A. Знайти внутрішній кут трикутника при вершині B.

14. Знайти точку Q, що симетрична точці $P(-4;5)$ відносно прямої $3x-4y+7=0$. Знайти відстань від точки P до заданої прямої.

15. Задано рівняння двох сторін прямокутника $ABCD$ $4x-3y+23=0$, $3x+4y-14=0$ і координати його вершини $D(3;-5)$. Скласти рівняння двох інших сторін прямокутника і знайти точку P перетину його діагоналей.

16. У квадраті $ABCD$ відомі дві протилежні вершини $B(-1;7)$ і $D(3;-3)$. Скласти рівняння діагоналей квадрата і знайти його площу.

17. Задано вершини трикутника $A(-4;-3)$, $B(-1;4)$, $C(6;1)$. Скласти рівняння висот трикутника і знайти його площу.

18. Задано вершини $A(-6;4)$, $B(1;5)$ і $C(9;-1)$ паралелограма $ABCD$. Скласти рівняння сторін паралелограма і знайти координати його вершини D.

19. Задано вершини чотирикутника $A(-4;7)$, $B(2;7)$, $C(5;3)$ і $D(5;-5)$. Перевірити, чи є чотирикутник трапецією, і скласти рівняння його діагоналей. Знайти довжину перпендикуляра, що опущений з вершини C на сторону AD.

20. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $P(-2;4)$, яка є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю пряму. Знайти площу трикутника, який відсікає пряма від координатного кута.

21. Задано вершини трикутника $A(-7;-7)$, $B(-2;3)$, $C(5;2)$. Знайти довжину висоти, що опущена з вершини B на сторону AC трикутника. Скласти рівняння медіани, що проведена з тієї ж вершини.

22. Задано дві протилежні вершини $A(-7;-3)$ і $C(5;5)$ ромба $ABCD$. Скласти рівняння діагоналей ромба і знайти його площу, якщо відомо, що довжина діагоналі AC удвічі більша за довжину діагоналі BD.

23. Задано вершини чотирикутника $A(-4;0)$, $B(-6;5)$, $C(2;6)$ і $D(6;-4)$. Знайти довжини його діагоналей і точку O їх перетину.

24. Знайти проекцію Q точки $P(4;7)$ на пряму, що проходить через точки $A(-4;5)$ і $B(6;-1)$. В якому відношенні λ точка Q поділяє відрізок AB?

25. Задано вершини трикутника $A(-6;-2)$, $B(-2;4)$, $C(2;-6)$. Знайти центр тяжіння P трикутника. Скласти рівняння сторін AB і AC та знайти кут між ними.

26. У прямокутнику $ABCD$ задано дві послідовні вершини $A(-6;1)$, $B(6;7)$ і точка перетину діагоналей $O(1;2)$. Скласти рівняння сторін прямокутника і знайти його площу.

27. Задано вершини чотирикутника $A(-5;-4)$, $B(-1;3)$, $C(7;4)$, $D(3;-3)$. Перевірити, чи є чотирикутник ромбом. Скласти рівняння діагоналей чотирикутника і знайти відношення їх довжин.

28. У паралелограмі $ABCD$ задано рівняння двох сторін $2x-3y+23=0$, $2x+3y-31=0$ і координати вершини $D(-4;-3)$. Знайти кут між діагоналями паралелограма.

29. У квадраті $ABCD$ задано рівняння однієї зі сторін $7x-3y+32=0$ і координати протилежних вершин $A(-5;-1)$ і $C(5;3)$. Знайти координати двох інших вершин квадрата і його площу.

30. У ромбі $ABCD$ задано рівняння двох сторін $2x+y-9=0$, $2x+11y+41=0$ і точка перетину діагоналей $E(-1;1)$. Скласти рівняння діагоналей ромба і знайти довжину його висоти.

Завдання 6.

Установити, які саме криві другого порядку (або їх частини) відповідають поданим рівнянням, зробити креслення. Вказати для еліпса або гіперболи центр $C(x_0;y_0)$ і величини напіввісей a і b, чи вершину $A(x_0;y_0)$і параметр p параболи.

1. **а)** $y^2-6x-6y+21=0$, **б)** $x=1+\sqrt{3-y^2-2y}$.

2. **а)** $x^2+4y^2-2x+16y+13=0$, **б)** $y=2-2\sqrt{3-x}$.

3. **а)** $x^2-4y^2-4x-8y-4=0$, **б)** $y=1+\frac{1}{2}\sqrt{12-x^2+4x}$.

4. **а)** $x^2+4x+2y+12=0$, **б)** $x=-1-\frac{3}{2}\sqrt{y^2-4y+8}$.

5. **а)** $x^2-4y^2+4x-24y-28=0$, **б)** $x=-2+\sqrt{2y-y^2}$.

6. **а)** $4x^2+y^2-16x+2y+13=0$, **б)** $y=-3-\sqrt{-2x-10}$.

7. **а)** $y^2-2x-2y-3=0$, **б)** $x=1+\frac{2}{5}\sqrt{21-y^2-4y}$.

8. **а)** $9x^2+4y^2+18x-16y-11=0$, **б)** $x=-2+\frac{4}{3}\sqrt{y^2+6y}$.

9. **а)** $x^2-2x-2y+7=0$, **б)** $y=2-\sqrt{-x^2-6x}$.

10. **а)** $4x^2+9y^2+8x+36y+4=0$, **б)** $y=1+2\sqrt{x-4}$.

11. **а)** $4x^2-9y^2+8x+36y-68=0$, **б)** $x=-1-\frac{4}{3}\sqrt{5-y^2+4y}$.

12. **а)** $y^2-4x+4y+16=0$, **б)** $x=2+\frac{4}{3}\sqrt{y^2+2y+10}$.

13. **а)** $4x^2-9y^2+24x-36y+36=0$, **б)** $y=5-\sqrt{-x^2-4x}$.

14. **а)** $16x^2+9y^2-64x-54y+1=0$, **б)** $y=-2+\sqrt{6x+6}$.

15. **а)** $y^2+6x-4y+10=0$, **б)** $x=2-\frac{3}{2}\sqrt{6y-y^2-5}$.

16. **а)** $9x^2-4y^2-18x-24y-63=0$, **б)** $y=3+\sqrt{21-x^2+4x}$.

17. **а)** $9x^2+16y^2-18x-64y-71=0$, **б)** $y=1-2\sqrt{x^2+4x}$.

18. **а)** $x^2+8x-4y+24=0$, **б)** $y=-1+\frac{2}{5}\sqrt{16-x^2-6x}$.

19. **а)** $25x^2-9y^2+150x-18y+441=0$, **б)** $x=-3-\sqrt{8-2y}$.

20. **а)** $x^2+4y^2+2x+24y+21=0$, **б)** $y=1-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+25}$.

21. **а)** $x^2+6x+6y-9=0$, **б)** $x=-1-\sqrt{12-y^2+4y}$.

22. **а)** $9x^2-4y^2+18x+24y+9=0$, **б)** $x=-4+\sqrt{6y-30}$.

23. а) $y^2+4x+6y-7=0,$ **б)** $y=2-\frac{3}{2}\sqrt{3-x^2+2x}.$

24. а) $4x^2+25y^2+24x-50y-39=0,$ **б)** $y=-2+\frac{2}{3}\sqrt{x^2+6x+18}.$

25. а) $16x^2-9y^2+64x+18y-89=0,$ **б)** $x=1-2\sqrt{6-3y}.$

26. а) $4x^2+y^2+16x-2y+1=0,$ **б)** $x=-1-\frac{2}{5}\sqrt{y^2-6y-16}.$

27. а) $4x^2-25y^2+8x+150y-321=0,$ **б)** $y=-2-\frac{4}{3}\sqrt{8-x^2-2x}.$

28. а) $x^2-4x+4y+24=0,$ **б)** $x=-1+2\sqrt{-y^2-6y-8}.$

29. а) $16x^2-9y^2-96x+18y+279=0,$ **б)** $x=2-2\sqrt{-2y-6}.$

30. а) $25x^2+9y^2+100x+54y-44=0,$ **б)** $y=-3+\frac{3}{2}\sqrt{x^2-2x-3}.$

Завдання 7.

1-10. Знайти точку M_0 перетину:

1) прямої, що проходить через точки $M_1(2;3;-4)$, $M_2(0;7;-1)$, і площини $5x+y+3z-7=0;$

2) прямої, що проходить через точку $M_1(1;-4;-3)$ паралельно прямій $\frac{x+6}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{-4}$, і площини $4x-3y+2z-35=0;$

3) прямої, що проходить через точки $M_1(4;-3;0)$, $M_2(-1;-2;5)$, і площини $7x+3y+5z-5=0;$

4) прямої, що проходить через точку $M_1(6;-1;5)$ паралельно прямій $x=3t+1,\quad y=-2t-5,\quad z=t-4,$ і площини $2x+5y-3z-6=0;$

5) прямої, що проходить через точки $M_1(2;3;-10)$, $M_2(-2;0;-5)$, і площини XOY;

6) прямої, що проходить через точки $M_1(3;-1;5)$, $M_2(6;5;0)$, і площини YOZ;

7) прямої, що проходить через точки $M_1(4;7;-1)$, $M_2(2;-7;3)$, і площини ZOX;

8) прямої, що проходить через точку $M_1(1;3;-5)$ паралельно прямій $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-6}{5}$, і площини XOY;

9) прямої, що проходить через точку $M_1(9;-4;6)$ паралельно прямій $x=-3t+4,\quad y=2t-1,\quad z=4t+5,$ і площини YOZ;

10) прямої, що проходить через точку $M_1(2;-3;5)$ паралельно прямій $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-5}{-3}=\dfrac{z}{-2}$, і площини ZOX.

11-16. Скласти параметричні рівняння прямої, що є перетином площин:

11) XOY і $4x-3y+z-7=0;$

12) YOZ і $2x-y+5z-12=0;$

13) ZOX і $x+2y-3z-10=0;$

14) XOY і $3x+2y-4z-5=0;$

15) YOZ і $2x-5y+z+14=0;$

16) ZOX і $2x+5y-3z+7=0.$

17-20. Скласти канонічні рівняння прямої:

17) $l:\begin{cases} x-2y+3z-8=0, \\ 2x+y-4z-1=0; \end{cases}$ **18)** $l:\begin{cases} 2x+3y-z+4=0, \\ x-4y+2z-9=0; \end{cases}$

19) $l:\begin{cases} x-2y+5z-6=0, \\ 3x+y-4z-4=0; \end{cases}$ **20)** $l:\begin{cases} 3x-y+2z-11=0, \\ x+5y-4z+7=0. \end{cases}$

21-30. Скласти рівняння площини, якщо відомо, що площина проходить:

21) через точки $A_1(3;2;-1)$, $A_2(0;-4;1)$ і $A_3(6;1;-2)$;

22) через початок координат і точки $A_1(2;1;0)$ і $A_2(-3;4;-1)$;

23) через точку $M_0(1;-2;3)$ паралельно векторам $\vec{a}=(2;-3;0)$ і $\vec{b}=(4;-1;3)$;

24) через точку $M_0(3;0;-4)$ паралельно двом прямим: $l_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$, $l_2: x=5t-3,\ y=t+4,\ z=2t-10;$

25) через точку $M_0(-1;2;4)$ і вісь OX;

26) через точку $M_0(2;-3;-1)$ і вісь OY;

27) через точку $M_0(3;1;5)$ і вісь OZ;

28) паралельно осі OX через точки $A_1(1;-2;-4)$ і $A_2(-2;0;6)$;

29) паралельно осі OY через точки $A_1(0;-4;5)$ і $A_2(1;3;-2)$;

30) паралельно осі OZ через точки $A_1(2;4;7)$ і $A_2(1;-3;5)$.

Завдання 8.

<u>1-5</u>. Знайти відстань від точки M_0 до прямої l:

1) $M_0(10;-2;4)$, $l:\dfrac{x-7}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$;

2) $M_0(1;3;-6)$, $l:\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$;

3) $M_0(3;-6;8)$, $l:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+4}{5}$;

4) $M_0(-1;-3;9)$, $l:\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-4}{-2}$;

5) $M_0(2;-4;-7)$, $l:\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z+3}{-1}$.

<u>6-10</u>. Знайти проекцію M_1 точки M_0 на пряму l:

6) $M_0(-3;-3;4)$, $l:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z}{5}$;

7) $M_0(-1;7;-5)$, $l:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{3}$;

8) $M_0(2;-4;3)$, $l:\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$;

9) $M_0(6;1;2)$, $l:\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{4}$;

10) $M_0(-2;3;-6)$, $l:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z+4}{3}$.

<u>11-15</u>. Знайти відстань від точки M_0 до площини α:

11) $M_0(-4;3;1)$, $\alpha: x+2y-2z-18=0$;

12) $M_0(5;3;5)$, $\alpha: 3x-y+2z-8=0$;

13) $M_0(5;5;-4)$, $\alpha: 4x+2y-z-13=0$;

14) $M_0(6;4;0)$, $\alpha: x+3y-2z-4=0$;

15) $M_0(7;7;1)$, $\alpha: 2x+y+z-16=0.$

<u>16-25</u>. Знайти кут між прямою l і площиною α. У разі паралельності прямої і площини з'ясувати, чи належить пряма l площині α.

16) $l: \begin{cases} x+2y-z-4=0, \\ 3x-z-5=0, \end{cases}$ $\alpha: x-y-3z-5=0;$

17) $l: \dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2},$ $\alpha: 3x-4y+2z+5=0;$

18) $l: x=-3t-2,\quad y=-4t+1,\quad z=t-5,$ $\alpha: x-3y+4z-1=0;$

19) $l: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{5},$ $\alpha: 3x+4y-3z+2=0;$

20) $l: x=-6t-1,\quad y=-2t-2,\quad z=6t+4,$ $\alpha: 3x+y-3z+5=0;$

21) $l: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{3},$ $\alpha: 2x+5y-6z-1=0;$

22) $l: x=t-4,\quad y=-2t+1,\quad z=-3t-1,$ $\alpha: 3x-2y+z-5=0;$

23) $l: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-2},$ $\alpha: x+2y+4z-3=0;$

24) $l: \begin{cases} x-y+2z-5=0, \\ 2x+y-z+4=0, \end{cases}$ $\alpha: 3x+5y+z-2=0;$

25) $l: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z}{2},$ $\alpha: 4x-2y+z-8=0.$

<u>26-30</u>. Знайти проекцію M_1 точки M_0 на площину α:

26) $M_0(3;2;1)$, $\alpha: 2x+3y-z-25=0;$

27) $M_0(-4;3;-3)$, $\alpha: x+2y-3z-25=0;$

28) $M_0(-1;-2;3)$, $\alpha: 3x+y+2z+13=0;$

29) $M_0(2;-7;-1)$, $\alpha: x-3y-2z-11=0;$

30) $M_0(2;2;-7)$, $\alpha: 2x-2y+z-11=0.$

Розділ 3. ГРАНИЦІ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Розрахунково-графічне завдання розділу «Границі і неперервність» складається з 7 практичних завдань, що охоплюють методи обчислення границь з розкриттям невизначеностей виду $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|, \left\|\frac{0}{0}\right\|, \|\infty-\infty\|, \|\infty\cdot 0\|, \left\|1^{\infty}\right\|$, а також дослідження функцій на неперервність. Для успішного виконання запропонованих завдань варто ознайомитись і розібрати відповідний теоретичний матеріал [1, 4, 5, 6, 9, 10, 13, 14], а також відповісти на наступні контрольні питання.

Контрольні питання

1. Поняття множини. Підмножина. Дії над множинами.
2. Поняття функції. Що таке область визначення функції, область значень функції?
3. Границя числової послідовності.
4. Границя функції за умови $x \to x_0, x \to \infty$.
5. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Зв'язок між ними.
6. Властивості нескінченно малих функцій.
7. Класифікація нескінченно малих функцій.
8. Границя суми, добутку й частки функцій.
9. Ознаки існування границі функції.
10. Перша визначна границя. Наслідки.
11. Друга визначна границя. Наслідки.
12. Поняття неперервної функції у точці, на інтервалі.
13. Неперервність суми, добутку й частки функцій.
14. Неперервність складної і оберненої функції.
15. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Зразок розв'язання прикладів контрольного завдання

Приклад 1. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^3(x+1)-8x^4}{(3x+2)^2(x-4)}$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+\sqrt[3]{x^3-5x^2+19}}{\sqrt{9x^6+x^5-4x+2}-\sqrt[4]{x^3}}$.

Розв'язання. У даному випадку ми маємо справу з розкриттям невизначеності вигляду $\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|$. Тут доцільно використати правило «старших степенів»:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+...+b_m}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(x+1)-8x^4}{(3x+2)^2(x-4)}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{(8x^3+36x^2+54x+27)(x+1)-8x^4}{(9x^2+12x+4)(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{8x^4}+36x^3+54x^2+27x+8x^3+36x^2+54x+27-\cancel{8x^4}}{9x^3+12x^2+4x-36x^2-48x-16}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{44x^3+90x^2+81x+27}{9x^3-24x^2-44x-16}=\lim_{x\to\infty}\frac{44x^3}{9x^3}=\frac{44}{9}.$$

б) У цьому випадку в чисельнику і знаменнику дробу є функції вигляду $\varphi(x)=\sqrt[k]{P_n(x)}$, де $P_n(x)$ – многочлен n-ого степеня. В подібних випадках при $x\to\infty$ теж працює правило «старших степенів». Враховуючи викладене, легко отримати відповідь:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+\sqrt[3]{x^3-5x^2+19}}{\sqrt{9x^6+x^5-4x+2}-\sqrt[4]{x^3}}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{9x^6}-\sqrt[4]{x^3}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x}{3x^3 - x^{\frac{3}{4}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: а) $\frac{44}{9}$, б) $\frac{1}{3}$.

Приклад 2. Обчислити границі:

$$\text{а) } \lim_{x\to 2} \frac{3x^2+x-14}{x^2-4x+4}, \text{ б) } \lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4x-12}.$$

Розв'язання. У даному випадку ми маємо справу з розкриттям невизначеності вигляду $\left\|\frac{0}{0}\right\|$, а саме: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left\|\frac{0}{0}\right\|$, де $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ – многочлени відповідно n-ого та m-ого степеня відносно x.

Для усунення невизначеності необхідно виділити в чисельнику та знаменнику множник $(x-x_0)$, що наближається до 0 за умови $x \to x_0$:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{(x-x_0)\cdot P_{n-1}(x)}{(x-x_0)\cdot Q_{m-1}(x)}.$$

Невизначеність $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ може зникнути після скорочення дробу під знаком границі.

$$\text{а) } \lim_{x\to 2} \frac{3x^2+x-14}{x^2-4x+4} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(3x+7)}{(x-2)^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 2} \frac{3x+7}{x-2} = \left\|\frac{13}{0}\right\| = \infty.$$

$$\text{б) } \lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4x-12} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}(x-6)} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x+4}{x-6} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}.$$

Відповідь: а) ∞, б) $-\frac{3}{2}$.

Приклад 3. Обчислити границі:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^5}{2x^2+1} - \frac{x^3-x}{2} \right), \text{ б) } \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-4} - \sqrt{x^2+3x-9} \right).$$

Розв'язання. У даному випадку ми маємо справу з розкриттям невизначеності вигляду $\left\|\infty-\infty\right\|$. При розкритті невизначеності вигляду $\left\|\infty-\infty\right\|$ необхідно виконати тотожні перетворення, які дозволять звести таку невизначеність до вигляду $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ або $\left\|\frac{0}{0}\right\|$.

а) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^5}{2x^2+1}-\frac{x^3-x}{2}\right)=\left\|\infty-\infty\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-(x^3-x)(2x^2+1)}{2(2x^2+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-(2x^5+x^3-2x^3-x)}{4x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^5}-\cancel{2x^5}+x^3+x}{4x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{4x^2+2}=$$

$$=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{4x^2}=\infty.$$

б) Для розкриття цієї невизначеності чисельник і знаменник дробу треба помножити на відповідний ірраціональному виразу спряжений множник:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}-\sqrt{x^2+3x-9}\right)=\left\|\infty-\infty\right\|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x-4}-\sqrt{x^2+3x-9}\right)\left(\sqrt{x^2+3x-4}+\sqrt{x^2+3x-9}\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x-4}+\sqrt{x^2+3x-9}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-4-(x^2+3x-9)}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2x}=\left\|\frac{5}{\infty}\right\|=0.$$

Відповідь: а) ∞, б) 0.

Приклад 4. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{8x+1}-5}{2x^2+x-21}$.

Розв'язання. При обчисленні границі функції, що містить у чисельнику або у знаменнику (або у чисельнику та знаменнику) ірраціональні вирази, які перетворюються в нуль за умови $x\to x_0$, множник $(x-x_0)$ виділяється після операції множення на відповідний ірраціональному виразу спряжений множник:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{8x+1}-5}{2x^2+x-21}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{8x+1}-5\right)\left(\sqrt{8x+1}+5\right)}{\left(2x^2+x-21\right)\left(\sqrt{8x+1}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{8x+1-25}{\left(2x^2+x-21\right)\left(\sqrt{8x+1}+5\right)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 3}\frac{8\,\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\,(2x+7)\cdot 10}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{8}{(2x+7)\cdot 10}=\frac{4}{13\cdot 5}=\frac{4}{65}.$$

Відповідь: $\frac{4}{65}$.

Приклад 5. Обчислити границі:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos x}{1-\cos 5x},\ \text{б)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\arcsin\left(\sqrt{3x+1}-2\right)}{\operatorname{tg}\left(x^2-x\right)}.$$

Розв'язання. Якщо функція, що стоїть під знаком границі, складається з тригонометричних або обернених тригонометричних функцій, то треба застосувати першу визначну границю та її наслідки.

а) У даному випадку скористаємося тим, що при $\alpha(x)\to 0$:

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\ \text{а}\ \left(1-\cos\alpha(x)\right)\sim\frac{\alpha^2(x)}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos x}{1-\cos 5x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 4x\cdot\sin(-3x)}{\frac{(5x)^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 4x\cdot(-3x)\cdot 2}{25x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-48x^2}{25x^2}=-\frac{48}{25}.$$

б) Для обчислення границі скористаємося наступними еквівалентностями:

$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x),\quad \operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x),\ \text{якщо}\ \alpha(x)\to 0.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin\left(\sqrt{3x+1}-2\right)}{\operatorname{tg}\left(x^2-x\right)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left|\begin{array}{l}\arcsin\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\underset{x\to 1}{\sim}\sqrt{3x+1}-2\\ \operatorname{tg}\left(x^2-x\right)\underset{x\to 1}{\sim}x^2-x\end{array}\right|=$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{3x+1-4}{(x^2-x)\cdot 4} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{3x-3}{4(x^2-x)} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 1}\frac{3\cancel{(x-1)}}{4x\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1}\frac{3}{4x} = \frac{3}{4}.$$

Відповідь: а) $-\frac{48}{25}$, б) $\frac{3}{4}$.

Приклад 6. Обчислити границі:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{\frac{x^2}{x-4}}, \text{ б) } \lim_{x\to 2}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{\frac{7}{x^2-4}}.$$

Розв'язання. При розкритті невизначеностей вигляду $\left\|1^{\infty}\right\|$ треба скористатися другою визначною границею, за якою $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\left[1+\alpha(x)\right]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$, де $e \approx 2{,}71$.

Проаналізуємо вираз, що стоїть під знаком границі в другій визначній границі. Його конструкція така: до одиниці додається нескінченно мала величина $\alpha(x)$, а потім отримана сума підноситься до степеня, що є оберненою величиною для $\alpha(x)$, тобто до степеня $\frac{1}{\alpha(x)}$.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{\frac{x^2}{x-4}} = \left\|1^{\infty}\right\| = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-3}{2x+5}-1\right)^{\frac{x^2}{x-4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-3-2x-5}{2x+5}\right)^{\frac{x^2}{x-4}} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-8}{2x+5}\right)^{\frac{2x+5}{-8}}\right)^{\frac{-8}{2x+5}\cdot\frac{x^2}{x-4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-8x^2}{(2x+5)(x-4)}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8x^2}{(2x+5)(x-4)}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8x^2}{2x^2}} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}.$$

б) Обчислюючи такі границі (для більш швидкого отримання результату), можна скористатися формулою:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} u(x)^{v(x)} = \left\|1^\infty\right\| = e^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} [u(x)-1]\cdot v(x)}.$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{\frac{7}{x^2-4}} = \left\|1^\infty\right\| = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x+3}{3x-1}-1\right)\cdot\frac{7}{x^2-4}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+3-3x+1)\cdot 7}{(3x-1)(x^2-4)}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{7(4-2x)}{(3x-1)(x^2-4)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-2\cancel{(x-2)}\cdot 7}{(3x-1)\cancel{(x-2)}(x+2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-14}{(3x-1)(x+2)}} = e^{-\frac{14}{20}} = e^{-\frac{7}{10}}.$$

Відповідь: а) $\frac{1}{e^4}$, б) $e^{-\frac{7}{10}}$.

Приклад 7. Порівняти наступні нескінченно малі величини:

а) $\alpha(x) = e^{7x} - e^{5x}$, $\beta(x) = \ln(1+3x)$ при $x\to 0$,

б) $\alpha(x) = 5^{x^2-6x+10} - 5$, $\beta(x) = \ln(x-2)$ при $x\to 3$,

в) $\alpha(x) = \cos 5x - \cos 3x$, $\beta(x) = \ln(4+3x^2) - \ln 4$ при $x\to 0$.

Розв'язання. Для порівняння нескінченно малих величин необхідно обчислити границю їх відношення.

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{5x}}{\ln(1+3x)} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}(e^{2x}-1)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}\cdot 2x}{3x} = \frac{2}{3},$$

тому $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ нескінченно малі величини одного порядку малості.

При обчисленні границі скористалися тим, що $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$.

$$\text{б) } \lim_{x\to 3}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 3}\frac{5^{x^2-6x+10}-5}{\ln(x-2)} = \lim_{x\to 3}\frac{5(5^{x^2-6x+9}-1)}{\ln[1+(x-3)]} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{5(x^2-6x+9)\cdot\ln 5}{x-3} = 5\ln 5\cdot\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3} = 5\ln 5\cdot\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-3}} = 0,$$

тому $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина більш високого порядку малості, ніж $\beta(x)$.

При обчисленні границі скористалися тим, що $a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\ln a$ і $\ln\left[1+\alpha(x)\right] \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$.

$$\text{в)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{\ln(4+3x^3)-\ln 4}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 4x\cdot\sin x}{\ln\left(\dfrac{4+3x^3}{4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 4x\cdot x}{\ln\left(1+\dfrac{3}{4}x^3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{\dfrac{3}{4}x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{32x^2}{3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{32}{3x}=\left\|\frac{32}{0}\right\|=\infty,$$

тому $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина більш низького порядку малості, ніж $\beta(x)$.

Відповідь: а) $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ нескінченно малі величини одного порядку малості, б) $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина більш високого порядку малості, ніж $\beta(x)$, в) $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина більш низького порядку малості, ніж $\beta(x)$.

Приклад 8. Дослідити функції на неперервність:

$$\text{а)}\ y=\frac{x-3}{x^2-2x-3},\ \text{б)}\ y=\operatorname{arctg}\frac{7}{x+5},\ \text{в)}\ y=\frac{2}{1+9^{\frac{4}{x-3}}}.$$

Розв'язання. Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в деякому околі точки x_0 та $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Цю рівність можна переписати в еквівалентній формі:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Якщо порушена одна з умов неперервності функції в точці x_0, то точка x_0 називається точкою розриву. Розрізняють точки розриву першого та другого роду.

а) При $x=3$ та $x=-1$ знаменник обертається в нуль. Отже, $x=3$ та $x=-1$ – точки розриву функції. Для визначення типу розриву треба обчислити границі зліва та справа:

$x=3$: $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{x-3}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{1}{4}$, тому $x=3$ – усувна точка розриву першого роду.

$x=-1$: $\lim\limits_{x\to -1\pm 0}\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to -1\pm 0}\dfrac{x-3}{(x-3)(x+1)}=\pm\infty$, тому $x=-1$ – точка розриву другого роду.

б) При $x=-5$ знаменник обертається в нуль. Отже, $x=-5$ – точка розриву функції.

$$\lim_{x\to -5-0}\operatorname{arctg}\frac{7}{x+5}=\left|\operatorname{arctg}\frac{7}{-5-0+5}=\operatorname{arctg}\frac{7}{-0}=\operatorname{arctg}(-\infty)\right|=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to -5+0}\operatorname{arctg}\frac{7}{x+5}=\left|\operatorname{arctg}\frac{7}{-5+0+5}=\operatorname{arctg}\frac{7}{+0}=\operatorname{arctg}(+\infty)\right|=\frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, $x=-5$ – точка розриву першого роду, розрив неусувний.

в) Дана елементарна функція невизначена при $x=3$. Тому $x=3$ – точка розриву. Визначимо вид точки розриву, обчисливши ліву та праву границі функції:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{2}{1+9^{\frac{4}{x-3}}}=\left|\frac{2}{1+9^{\frac{4}{3-0-3}}}=\frac{2}{1+9^{\frac{4}{-0}}}=\frac{2}{1+9^{-\infty}}=\frac{2}{1+\frac{1}{9^{\infty}}}\right|=2,$$

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{2}{1+9^{\frac{4}{x-3}}}=\left|\frac{2}{1+9^{\frac{4}{3+0-3}}}=\frac{2}{1+9^{\frac{4}{+0}}}=\frac{2}{1+9^{+\infty}}=\frac{2}{1+\infty}\right|=0,$$

$x=3$ – точка розриву першого роду, розрив неусувний.

Відповідь: а) $x=-1$ – точка розриву другого роду, б) $x=-5$ – точка розриву першого роду, розрив неусувний, в) $x=3$ – точка розриву першого роду, розрив неусувний.

Контрольні завдання за темою «Границі і неперервність»

Завдання 1а. Обчислити границю:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(x+5)(x-9)}{\left(x^2+2\right)^2-x^4}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(x^2+3\right)^2-\left(x^2-3\right)^2}{(2x+4)(x-3)}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-\left(x^2+2\right)^2}{(2x+3)^3-8x^3}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x+2)^2-(x-1)^2}{(2x+3)(7x-1)}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+3)^3(x+1)-8x^4}{(3x+2)^2(x-4)}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(x+1)^2-x^4}{(2x+3)^3+3x^3}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+5)^3-(x+3)^3}{(2x-3)(4x+5)-9x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2-x)^3-x^3-6x^2}{(2x+5)(3x-1)}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+5)^3-x^3}{9x^2+5x-4}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x+1)^3-(2x+1)^3}{x+100x^2}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-2)^2-(x+3)^2}{x^2+7x-4}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+1)^3-(x+1)^3}{5-x^3}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(9x+1)(x+3)}$.

14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x-4}{(2x+1)^2-4(x+2)^2}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+2)^2-(3x+4)^2}{(4x+5)(x-2)}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(5x-4)(2x+3)}{5x^2-x+7}$.

17. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x+4}{(2x+1)^2-4(x+3)^2}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2+(2x-3)^2}{9x^2+4x+1}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+2)^3-(2x-1)^3}{3+2x^3}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+2)^3-x^3}{7x^2-5x+4}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+5)^3-(3+2x)^3}{x(x+5)^2}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2+x)^2+(3+x)^2}{\left(x^2+1\right)^2-x^4}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2+3\right)^2-x^4}{(2x+3)(x+7)}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+5)\left(x^3-4\right)}{\left(x^2+1\right)^2+7}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)^2+(x+1)^2}{x^5+3}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2+(4x+3)^2}{(2-x)^3+(x+1)^3}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)^3-\left(2x^2+1\right)^2}{x^4+5}$.

28. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-3x+4}{(2x+1)^2-4(x+3)^2}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^2+(x-2)^2}{(x+3)(2x-3)}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-\left(x^2+2\right)^2}{(2x+3)^3-8x^3}$.

Завдання 1б. Обчислити границю:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+4}+\sqrt{x}}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[3]{x^2+5}}{\sqrt{x+3}-x}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt[4]{x^3+x}}{\sqrt[3]{8x^3+3}-\sqrt{x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^7+5x-1}-\sqrt[5]{x^3+7}}{\sqrt{9x^7-3}+\sqrt[3]{x^2+4}}$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{x^2+7}}{\sqrt{25x^4-3}-\sqrt[3]{x^4}}$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^7+1}-\sqrt[4]{x^3+5}}{\sqrt[5]{x^3+9}+\sqrt{x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^5+4}+\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[7]{x^9+8}+\sqrt{x+3}}$.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt[3]{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x-3}}$.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt[3]{8x^3+11}}{\sqrt[4]{x^4-3x+5}+\sqrt[5]{x+2}}$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[4]{x-7}}{x^2-\sqrt{x^5+3x^2+1}}$.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^5+2}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^4+2}-\sqrt[3]{x^3+1}}$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x\sqrt{x}-\sqrt{1+2x}}{4\sqrt{x}-\sqrt{5+2x^3}}$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^6+7x+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{9x^{12}+7x^3+4}-\sqrt{x}}$.

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x^3+5}}{\sqrt[4]{81x^6+7x^2+9}}$.

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+\sqrt[3]{x^2+2x+5}}{\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt{x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+25}+\sqrt{x-3}}{\sqrt[7]{x^6+9}}$.

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^7+x^6+1}+x}$.

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+3x}{\sqrt{x^3+7}+2}$.

19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4+12x}{5x+\sqrt{x^3}}$.

20. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+3}-7x}{5x+\sqrt[4]{x+4}}$.

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-x+1}-\sqrt[3]{x^2+5}}{\sqrt[4]{x^4-15}+\sqrt[5]{3x^4+7}}$.

22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+\sqrt{x^4+x^2}}}{\sqrt{x^2+5}}$.

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+5}}{\sqrt[4]{x^4-x+3}+\sqrt[3]{x^2+7x-2}}$.

24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt[3]{8x^2-5}}{\sqrt[3]{27x^3-x+4}-\sqrt{x}}$.

25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{25x^2-4x+1}+\sqrt[3]{x^5}}$.

26. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{16x^8-x^7+3}-\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{49x^4+5x^3-1}+\sqrt{x}}$.

27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^7+1}-\sqrt[4]{x^3+5}}{\sqrt[5]{x^3+9}+\sqrt{x}}$.

28. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+\sqrt[3]{x^3+19}}{\sqrt{9x^6+8x-5}-\sqrt[4]{x^3}}$.

29. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+\sqrt{x^3+x^4}}}{\sqrt{x^2+4}}$.

30. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+3}-\sqrt{x^3+5}}{\sqrt[4]{81x^6-7x^2+1}+2x}$.

Завдання 2. Обчислити границю:

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-8}$.

2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{2x^2+3x+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^4-81}{x^2-5x+6}$.

4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{3x^2-2x-16}$.

5. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-8x+3}{2x-1}$.

6. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{6x^2+x-1}{3x^2+17x-6}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-5x-2}{x^3-x-6}$.

8. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+3x}{x^3-5x+12}$.

9. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{6x^2-5x+1}{4x^2-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+5x+6}{x^3-2x+4}$.

11. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{2x^2-3x-5}$.

12. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{3x^2-5x-12}$.

13. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4x-12}$.

14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-2x-8}{x^2+5x-14}$.

15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-x-2}{x^3-1}$.

16. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+x^3}{x^4-2x^3}$.

19. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

20. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

21. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

23. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

24. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4+x}{2x^4-x^2-1}$.

25. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{3x^2-x-2}$.

26. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}} \dfrac{9x^2-3x-2}{3x^2-2x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-2x-8}{x^2+5x-14}$.

28. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4x-12}$.

29. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-8x+3}{2x-1}$.

30. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{3x^2+x-2}$.

Завдання 3. Обчислити границю:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^3}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x+1}-\dfrac{x^2+1}{2}\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{8}{x^2-16}-\dfrac{1}{x-4}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+4}-x\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2+4}-\dfrac{x^2}{3x+1}\right)$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^3}{2x-1}\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-1}-\dfrac{x^2}{x+1}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{2x+1}-\dfrac{x}{2}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{3x-1}-\dfrac{x}{5}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3}{5x^2+1}-\dfrac{x^2}{3x+7}\right)$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x-x^2}-\dfrac{5-3x^2}{3x+1}\right)$.

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-3x^3}{2x^2+x-1}+\dfrac{x^2+1}{x-1}\right)$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^3-1}-x\right)$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x}{x+1}-\dfrac{10+x^3}{x^2+1}\right)$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x^3}{5x^2}+\dfrac{3x^5}{2x^4}\right)$.

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^4}{8x^3-1}-\dfrac{2x^4+3}{2x^3-3x}\right)$.

22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{6x+4}-\dfrac{3+x^3}{x^2+2x}\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2x^3}{2x^2+3}+\dfrac{3x^4+2}{8x^3-x}\right)$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{x+7}-\dfrac{x^5-x^4}{x^4+3x^2}\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x-7}+\frac{5-x^4}{4x^3-x}\right)$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^3}{10x^2+x}+\frac{x^2+5}{3x-7}\right)$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3x-1}{4x-5}-\frac{x^3+3x}{2x^2-5}\right)$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x}{2x-9}-\frac{6x^3+5}{4x^2+1}\right)$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x^3-1}{3x+5}-\frac{x^2+3x}{5x-1}\right)$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^3}{5x^2+2x}+\frac{3x^4}{2x^3-x^2+7}\right)$.

Завдання 4. Обчислити границю:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2+3x-1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{x^4+4x^2}-\sqrt{x^4+4x^2-5}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+9}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x+5}\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-5}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4+7}\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x(x+1)}\right)$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x+1)}-x\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2-1}-\sqrt{x^4-2x^2-2}\right)$.

16. $\lim\limits_{x\to10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$.

17. $\lim\limits_{x\to-7}\frac{\sqrt{2-x}-3}{x^2-49}$.

18. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{9+x^2}-3}{5x^2}$.

19. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$.

20. $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{3x+1}-4}{x^2-25}$.

21. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}$.

22. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x-3}-1}{16-x^2}$.

23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{2-\sqrt{x+2}}$.

24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{7x+2}-2x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

28. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$.

29. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{\sqrt{12+x}-3}$.

30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+11}-4}{x^2-1}$.

Завдання 5. Обчислити границю:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}3x}{\cos x-\cos 3x}$.

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\arcsin\left(x^3+1\right)}{x^2+3x+2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{\operatorname{tg}\left(x^2-25\right)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{\operatorname{tg}\left(x^2-3x+2\right)}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 3x}{x\operatorname{tg}2x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+7x\right)\operatorname{ctg}4x$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin\left(x^2+2x-3\right)}{1-\cos(x-1)}$.

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin\left(x^2-3x\right)}{\operatorname{tg}(x-3)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin 4x}{\operatorname{arctg}\left(x^2+x\right)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{1-\cos 4x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 7x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos x}{1-\cos\dfrac{x}{3}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-\cos(x-3)}{\operatorname{tg}\left(x^2-3x\right)}$.

14. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1-\cos(x+3)}{x^2+4x+3}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(3x^2-6x\right)}{\sin\left(x^2-4x\right)}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}^2\sqrt{7x}}{1-\cos 2x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\,\mathrm{tg}^2\sqrt{x-2}}{1-\cos(x-2)}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{1-\cos^2 4x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}^2\sqrt{5x}}{1-\cos^2 3x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x\right)\mathrm{ctg}\,3x$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x)\mathrm{ctg}\,4x$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x\,\mathrm{tg}\,x}-2}{x^2-x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4\,\mathrm{arctg}(x-2)}{\sin x-\sin 2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 8x}{\mathrm{arctg}\left(4x^2+x\right)}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+9x\right)\mathrm{ctg}\,5x$.

27. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\arcsin\left(2x^2-x-3\right)}{\mathrm{tg}\left(x^2+x\right)}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos 4x}}{x\sin 5x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{4+\cos 9x}}{\mathrm{tg}^2\sqrt{7x}}$.

30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5\arcsin(x-3)}{\sin x-\sin 3}$.

Завдання 6. Обчислити границю:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-4}\right)^{x^2+1}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{5+x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{2x-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-3x}{1-3x}\right)^{x^2+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{2x-7}{x-2}\right)^{\frac{2}{x-5}}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2+x}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+5}\right)^{\frac{x}{3}+1}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{3x-2}\right)^{\frac{5}{x^2-1}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{x}{x-2}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+x^2}{3-x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x-5}{x-2}\right)^{\frac{x+1}{x-3}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{2x-1}{x-1}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{5}{x-3}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{5x-2}\right)^{\frac{3}{x-1}}$.

15. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\frac{2-x}{2x+11}\right)^{\frac{3x+2}{x+3}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{5x-4}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}}$.

17. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)^{\frac{-x}{x+1}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x}{2x-3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x-3}{x^2-5x+9}\right)^{2x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{4}{x-1}}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^4)^{\frac{5}{7x^2}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{4}{x^2-9}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 3}(x-2)^{\frac{5}{x^2-5x+6}}$.

24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{3x-2}\right)^{\frac{4}{x-1}}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+7x^2\right)^{\frac{4}{5x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{7x-4}$.

27. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)^{\frac{4}{x+1}}$.

28. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\frac{3-x}{4x+18}\right)^{\frac{x+4}{x+3}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{3x+4}{x^2-x}}$.

30. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{3x^2+5x}{3x^2-7x}\right)^{x^2+x}$.

Завдання 7. Порівняти нескінченно малі за умови, що $x \to x_0$:

1. $f(x)=\operatorname{arctg} 2x^2$, $\varphi(x)=1-\cos^3 x$, $x\to 0$.

2. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $\varphi(x)=1-\cos\frac{1}{x}$, $x\to\infty$.

3. $f(x)=e^x-e^{-x}$, $\varphi(x)=\ln(1+\sin 4x)$, $x\to 0$.

4. $f(x)=\operatorname{tg}(x-2)$, $\varphi(x)=\sqrt{x+2}-2$, $x\to 2$.

5. $f(x)=e^{7x}-e^{2x}$, $\varphi(x)=\ln(1+5x)$, $x\to 0$.

6. $f(x)=\operatorname{tg}\left(x^2-3x+2\right)$, $\varphi(x)=x-1$, $x\to 1$.

7. $f(x)=\sin 7x-\sin 6x$, $\varphi(x)=\operatorname{tg} 3x$, $x\to 0$.

8. $f(x)=\arcsin\left(x^2-4\right)$, $\varphi(x)=x^2-5x+6$, $x\to 2$.

9. $f(x)=e^{x^2}-e$, $\varphi(x)=\ln(2-x)$, $x\to 1$.

10. $f(x)=1-\cos 2x+\sin 2x$, $\varphi(x)=\operatorname{tg} 3x$, $x\to 0$.

11. $f(x)=x^3+1$, $\varphi(x)=\sin\left(\sqrt{5+x}-2\right)$, $x\to -1$.

12. $f(x)=\arcsin\dfrac{x^2}{4+x^3}$, $\varphi(x)=\ln\left(1+7x^2\right)$, $x\to 0$.

13. $f(x)=\sin 2x-2\sin x$, $\varphi(x)=x^2$, $x\to 0$.

14. $f(x)=\operatorname{tg} 5x$, $\varphi(x)=\sqrt{16-x^2-x}-4$, $x\to 0$.

15. $f(x)=\sqrt{x^2+9}-3$, $\varphi(x)=\cos 2x-\cos 4x$, $x\to 0$.

16. $f(x)=\sqrt{x}-2$, $\varphi(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x-4}$, $x\to 4$.

17. $f(x)=e^x-e$, $\varphi(x)=\sqrt{x+8}-3$, $x\to 1$.

18. $f(x)=\sin\left(4-x^2\right)$, $\varphi(x)=\sqrt{x+7}-3$, $x\to 2$.

19. $f(x)=\ln(x+3)$, $\varphi(x)=2^{\sqrt{6+x}}-4$, $x\to -2$.

20. $f(x)=\sqrt{x^2+3}-2$, $\varphi(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)$, $x\to 1$.

21. $f(x)=\sin 2x-\sin 4x$, $\varphi(x)=e^{x^2+4x}-1$, $x\to 0$.

22. $f(x)=\arcsin\left(x^2+2x-3\right)$, $\varphi(x)=\sqrt{x^2+3}-2$, $x\to 1$.

23. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x^2-1\right)$, $\varphi(x)=\sin\left(\sqrt{3x+1}-2\right)$, $x\to 1$.

24. $f(x)=e^{x^2-2x+1}-1$, $\varphi(x)=\ln x^2$, $x\to 1$.

25. $f(x)=\operatorname{arctg} 4(x-2)$, $\varphi(x)=\ln(x-1)$, $x\to 2$.

26. $f(x)=\sqrt{3x+1}-2$, $\varphi(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)$, $x\to 1$.

27. $f(x)=\ln\left(1+4\sqrt[3]{x}\right)$, $\varphi(x)=2\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^2}$, $x\to 0$.

28. $f(x)=6^{x^2+x-1}-6$, $\varphi(x)=\arcsin(x-1)$, $x\to 1$.

29. $f(x)=1-\cos(x+1)$, $\varphi(x)=\sqrt{x+2}-1$, $x\to -1$.

30. $f(x)=\sin\left(x^2-4x-5\right)$, $\varphi(x)=\ln(3+2x)$, $x\to -1$.

Завдання 8. Дослідити на неперервність:

1. $y=\dfrac{5x}{x^3-1}$.

2. $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}}$.

3. $y=\dfrac{5}{2+3^{\frac{4}{x+1}}}$.

4. $y=\dfrac{5}{x^2-4}$.

5. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x-3}$.

6. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{x+4}$.

7. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$.

8. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+5}$.

9. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{4}{x-6}$.

10. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{5}{x+2}$.

11. $y=\dfrac{1}{1+5^{\frac{4}{x+3}}}$.

12. $y=\dfrac{1}{1+7^{\frac{2}{x-5}}}$.

13. $y=\dfrac{4}{(x+1)^2}$.

14. $y=\dfrac{3}{(x-7)^2}$.

15. $y=\dfrac{5x+4}{x^3-27}$.

16. $y=\dfrac{|x|}{x}$.

17. $y=\dfrac{x^3+x}{2|x|}$.

18. $y=\dfrac{|x+3|}{x+3}$.

19. $y=\dfrac{|x-4|}{x-4}$.

20. $y=\dfrac{7}{x^2+2x}$.

21. $y=\dfrac{1}{x+1}+2^{\frac{1}{x}}$.

22. $y=\dfrac{4}{x-3}+5^{\frac{1}{x}}$.

23. $y=\dfrac{5}{1-3^{x+2}}$.

24. $y=\operatorname{arctg}5^{\frac{1}{x-1}}$.

25. $y=\operatorname{arctg}3^{\frac{4}{x+2}}$.

26. $y=\dfrac{x+3}{9-3^x}$.

27. $y=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}}{x+1}$.

28. $y=\dfrac{3x}{4+7^{\frac{1}{x}}}$.

29. $y=\dfrac{3}{5+2^{\frac{x}{x+7}}}$.

30. $y=\dfrac{2x+9}{1-2^{x+3}}$.

Розділ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІНОЇ

Розрахунково-графічне завдання розділу «Диференціальне числення функції однієї змінної» складається з 8 практичних завдань, що пов’язані зі знаходженням похідних функцій, у тому числі заданих неявно або параметричними рівняннями, похідних вищих порядків, задачі на геометричний зміст похідної, знаходження границь за правилом Лопіталя, обчислення найбільших та найменших значень функції на відрізку, дослідження та побудову графіків функцій. Для успішного виконання запропонованих завдань варто ознайомитись і розібрати відповідний теоретичний матеріал [1, 2, 4-6, 9-14] а також відповісти на наступні контрольні питання.

Контрольні питання

1. Означення похідної. Механічні і фізичні застосування похідної.
2. Зв'язок між поняттями неперервність і диференційовність.
3. Правила диференціювання.
4. Похідні основних елементарних функцій.
5. Похідна складеної функції.
6. Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції.
7. Похідна оберненої функції.
8. Похідна параметрично заданої функції.
9. Диференціювання функцій, що задані неявно.
10. Диференціал функції.
11. Похідні і диференціали функцій вищих порядків.
12. Правила Лопіталя.
13. Монотонні функції. Достатні умови монотонності функції на заданому інтервалі.
14. Екстремуми функції. Необхідна умова екстремуму.
15. Достатні умови екстремуму.
16. Опуклість графіка функції. Достатні умови опуклості.
17. Точки перегину. Достатні умови існування точок перегину.
18. Асимптоти графіка функції. Вертикальні та похилі асимптоти.

Зразок розв’язання прикладів контрольного завдання

Приклад 1. Знайти похідні:

а) $y=\sin^{10}\left(\sqrt[3]{x}+6x+7\right)$, б) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin x$, в) $y=x^{\sin x}$.

Розв’язання. а) скористуємося правилом диференціювання складеної функції. Позначимо $u=\sin\left(\sqrt[3]{x}+6x+7\right)$, тоді $y=u^{10}$, а $y'=10u^9\cdot u'$. У свою чергу $u=\sin v$, де $v=\sqrt[3]{x}+6x+7$, і $u'=\cos v\cdot v'$.

Знайдемо v': $v'=\left(\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+6\right)$, тоді $u'=\cos\left(\sqrt[3]{x}+6x+7\right)\left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+6\right)$, а

$$y'=10\sin^9\left(\sqrt[3]{x}+6x+7\right)\cdot\cos\left(\sqrt[3]{x}+6x+7\right)\cdot\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+6\right).$$

б) За правилами диференціювання суми, частки та складеної функції маємо:

$$y'=\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin x\right)'=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\cdot x-\sqrt{1-x^2}\cdot(x)'}{x^2}+\left(\arcsin x\right)'=$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\cdot x-\sqrt{1-x^2}}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x^2-1+x^2+x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-1+x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$$

в) Логарифмуючи рівність $y=x^{\sin x}$, отримаємо: $\ln y=\sin x\cdot\ln x$, звідки $y=e^{\sin x\ln x}$. За правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$y'=e^{\sin x\ln x}\left(\left(\sin x\right)'\ln x+\sin x\left(\ln x\right)'\right)=x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln x\right).$$

Відповідь: а) $y'=10\sin^9\left(\sqrt[3]{x}+6x+7\right)\cdot\cos\left(\sqrt[3]{x}+6x+7\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+6\right)$, б) $y' = -\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$, в) $y' = x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x\right)$.

Приклад 2. Довести, що функція $y = e^{4x} + e^{-x}$ задовольняє співвідношенню $y''' - 13y' - 12y = 0$.

Розв'язання. Для доведення необхідно обчислити похідну третього порядку. За означенням похідна третього порядку є похідною від похідної другого порядку, в свою чергу похідна другого порядку є похідною від похідної першого порядку. Зайдемо послідовно y', y'', y''':

$$y' = 4e^{4x} - e^{-x},\ y'' = \left(4e^{4x} - e^{-x}\right)' = 16e^{4x} + e^{-x},$$

$$y''' = \left(16e^{4x} + e^{-x}\right)' = 64e^{4x} - e^{-x}.$$

З співвідношення маємо:

$$64e^{4x} - e^{-x} - 13\left(4e^{4x} - e^{-x}\right) - 12\left(e^{4x} + e^{-x}\right) =$$

$$= \left(64e^{4x} - 52e^{4x} - 12e^{4x}\right) - \left(e^{-x} - 13e^{-x} + 12e^{-x}\right) = 0.$$

Приклад 3. Знайти похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції $y = y(x)$, що задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$

Розв'язання. Диференціювання параметрично заданої функції здійснюється за такими правилами: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}$.

Оскільки $x'_t = 3(1 - \cos t),\ y'_t = 3\sin t,$ тому $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\sin t}{3(1-\cos t)} = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$, а $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)'_t = -\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}$, звідки $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}\cdot 3(1-\cos t)} = -\dfrac{1}{3(1-\cos t)^2}$.

Відповідь: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{3(1-\cos t)^2}$.

Приклад 4. Знайти похідну функції $y=y(x)$, що задана неявно рівнянням $\sqrt[4]{x}\cdot y+\sin y\cdot\operatorname{ctg}x+7=0$.

Розв'язання. Для того щоб знайти похідну функції $y=y(x)$, що задана неявно рівнянням $F(x,y(x))=0$, треба диференціювати тотожність $F(x,y(x))=0$ за змінною x, та отримане рівняння розв’язати відносно y':

$$\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\cdot y+\sqrt[4]{x}\cdot y'+\cos y\cdot y'\cdot\operatorname{ctg}x+\sin y\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=0,$$

$$y'\left(\sqrt[4]{x}+\cos y\cdot\operatorname{ctg}x\right)=\frac{\sin y}{\sin^2 x}-\frac{y}{4\sqrt[4]{x^3}},\ \text{звідки}\ y'=\frac{\dfrac{\sin y}{\sin^2 x}-\dfrac{y}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}}}{\sqrt[4]{x}+\cos y\cdot\operatorname{ctg}x}.$$

Відповідь: $y'=\dfrac{\dfrac{\sin y}{\sin^2 x}-\dfrac{y}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}}}{\sqrt[4]{x}+\cos y\cdot\operatorname{ctg}x}$.

Приклад 5. Скласти рівняння: а) дотичної і нормалі в точці $x_0=1$ до кривої $y=3x^2+x-1$, б) дотичної до кривої $y=x^2-7x+3$, яка паралельна прямій $y=5x+2$.

Розв'язання. а) Відомо, що рівняння дотичної має вигляд: $y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0)$, а рівняння нормалі: $y-y(x_0)=-\dfrac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$.

Знайдемо похідну функції $y=3x^2+x-1$ в точці $x_0=1$:

$y'\big|_{x_0=1}=(6x+1)\big|_{x_0=1}=7$, отже кутовий коефіцієнт дотичної $k=y'(x_0)=7$.

Знайдемо значення функції в точці $x_0=1$:

$y(x_0)=\left(3x^2+x-1\right)\Big|_{x_0=1}=3$. Тоді рівняння дотичної: $y-3=7(x-1)$ або

$7x-y-4=0$, а рівняння нормалі: $y-3=-\dfrac{1}{7}(x-1)$ або $x+7y-22=0$.

б) Кутовий коефіцієнт прямої $k_1 = 5$, кутовий коефіцієнт дотичної $k_2 = y'(x_0) = 2x_0 - 7$. Пряма і дотична паралельні, отже $k_1 = k_2$, тобто $2x_0 - 7 = 5$, звідки $x_0 = 6$, а відповідне значення функції

$$y_0 = \left(x^2 - 7x + 3\right)\Big|_{x_0=6} = -3.$$

Таким чином, дотична до кривої $y = x^2 - 7x + 3$ паралельна прямій $y = 5x + 2$ у точці $M_0(6;-3)$. Відповідне рівняння дотичної:

$$y + 3 = 5(x - 6), \text{ або } 5x - y - 33 = 0.$$

Відповідь: а) $7x - y - 4 = 0$ – рівняння дотичної, $x + 7y - 22 = 0$ – рівняння нормалі; б) $5x - y - 33 = 0$.

Приклад 6. Точка здійснює гармонійні коливання за законом $x = 3\sin 2t$. Знайти миттєву швидкість точки в момент часу $t_0 = 3\,c$.

Розв'язання. Величина миттєвої швидкості в момент часу t дорівнює похідній від шляху по часу: $V(t) = S'(t)$. Тоді маємо:

$$V(t) = \left(3\sin 2t\right)'\Big|_{t_0=3} = 6\cos 2t\big|_{t_0=3} = 6\cos 6.$$

Відповідь: $V(t) = 6\cos 6$.

Приклад 7. Обчислити границі:

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}, \text{ б) } \lim_{x\to 0}\left(\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}\right).$$

Розв'язання: а) У даному випадку виконані всі умови застосування правила Лопіталя для розкриття невизначеності $\left\|\frac{0}{0}\right\|$, тому маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{(x - \sin x)'}{\left(x^3\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left\|\frac{0}{0}\right\| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1 - \cos x)'}{\left(3x^2\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

б) При розкритті невизначеностей вигляду $\left\|0^0\right\|, \left\|1^\infty\right\|, \left\|\infty^0\right\|$ за умови $x \to x_0$ користуються тотожністю $f(x)^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)}$ та неперервністю показникової функції: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)\cdot\ln f(x)}$. Таким чином зазначені невизначеності зводяться до невизначеності вигляду $\|0\cdot\infty\|$, яка, в свою чергу, зводиться до невизначеності $\left\|\frac{0}{0}\right\|$.

Очевидно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}\right) = \left\|1^\infty\right\|$. Використовуючи правило Лопіталя, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(1-x^2\right) = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\left(1-x^2\right)\right)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x}{\left(1-x^2\right)\sin x} = -2.$$

Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}\right) = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}\cdot\ln\left(1-x^2\right)\right)} = e^{-2}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{6}$, б) e^{-2}.

Приклад 8. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$ на відрізку $[-1,2]$.

Розв'язання. Функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[-1,2]$, тому на цьому відрізку вона досягає найбільшого і найменшого значень. Знайдемо критичні точки першого роду функції: $f'(x) = x^2 - 4x$, тоді $x^2 - 4x = 0$, звідки $x_1 = 0, x_2 = 4$.

Точка $x_2 = 4$ не належить відрізку $[-1,2]$. Обчислимо значення функції на кінцях відрізка $[-1,2]$ та у точці $x_1 = 0$:

$$f(-1) = \frac{2}{3},\ f(2) = -2\frac{1}{3},\ f(0) = 3.$$

Отже, на відрізку $\left[-1,2\right]$: $y_{\text{í àéá}} = f\left(0\right)=3$, $y_{\text{í àéì}} = f\left(2\right)=-2\frac{1}{3}$.

Відповідь: $y_{\text{í àéá}} = f\left(0\right)=3$, $y_{\text{í àéì}} = f\left(2\right)=-2\frac{1}{3}$.

Приклад 9. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

$$\text{а) } y = x+\frac{x}{3x-1}, \text{ б) } y = x^2 e^{x^2}.$$

Розв’язання. Дослідження функції рекомендується проводити за такою схемою:

1) знайти область визначення функції. Встановити точки розриву і інтервали неперервності функції;

2) дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;

3) знайти асимптоти графіка функції;

4) знайти інтервали монотонності функції, екстремуми функції;

5) знайти точки перегину графіка функції; встановити інтервали опуклості графіка функції;

6) побудувати графік функції (щоб якомога точніше накреслити графік функції треба взяти кілька точок і обчислити значення функції в них).

а) Дослідимо за цією схемою функцію $y = x+\frac{x}{3x-1}$:

1) функція визначена на всій дійсній осі, крім точки $x=\frac{1}{3}$, тобто

$$D\left(y\right)=\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right).$$

В області визначення функція неперервна, в точці $x_1=\frac{1}{3}$ має нескінчений розрив, причому: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}-0}\left(x+\frac{x}{3x-1}\right)=-\infty$,

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}+0}\left(x+\frac{x}{3x-1}\right)=+\infty;$$

2) функція не є ні парною, ні непарною, не є періодичною;

3) пряма $x=\frac{1}{3}$ – вертикальна асимптота. Похилу асимптоту шукаємо у вигляді $y=kx+b$: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{3x-1}\right)=1,$

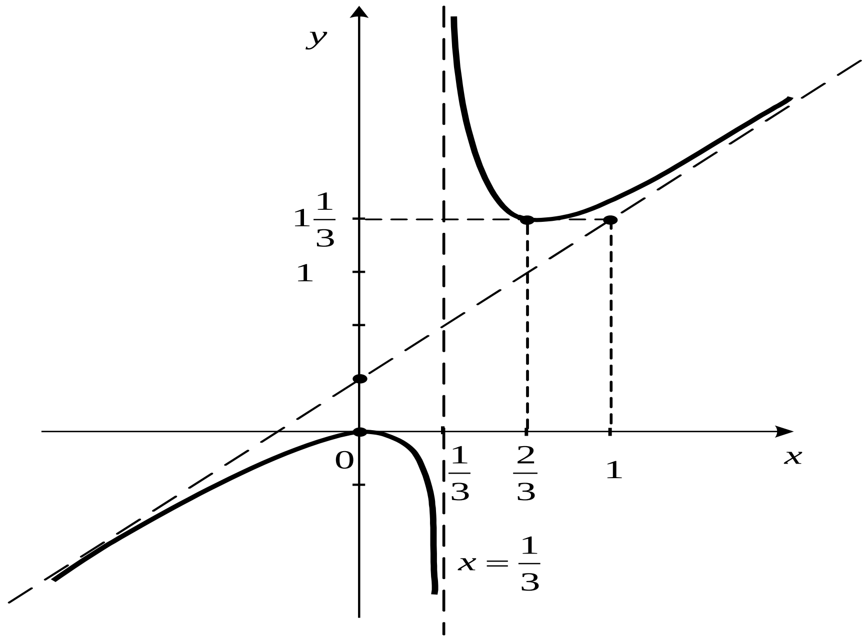
$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{3x-1}=\frac{1}{3},$ тобто $y=x+\frac{1}{3}$ – похила асимптота.

Крім того $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{x}{3x-1}\right)=\pm\infty;$

4) знайдемо критичні точки першого роду функції: $y'=1-\frac{1}{(3x-1)^2}=0$, звідки $(3x-1)^2-1=0,$ або $3x(3x-2)=0,$ і $3x\neq 1,$ таким чином, критичні точки функції $x_1=0;$ $x_2=\frac{2}{3},$ $x_3=\frac{1}{3}.$ Ці точки розбивають область визначення функції на інтервали: $(-\infty,0),\left(0,\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$, в кожному з яких похідна $f'(x)$ є неперервною і зберігає знак.

Оскільки $f'(-1)>0,$ $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0,$ $f'\left(\frac{1}{2}\right)<0,$ $f'(1)>0,$ тому функція зростає в інтервалах $(-\infty,0),\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$, і спадає в інтервалах $\left(0,\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. В точці $x_1=0$ вона має максимум, який дорівнює $f(0)=0$, а в точці $x_2=\frac{2}{3}$ – мінімум, який дорівнює $f\left(\frac{2}{3}\right)=1\frac{1}{3};$

5) друга похідна $y''=\frac{6}{(3x-1)^3}$ існує та неперервна в усій області визначення функції і не перетворюється в нуль, тому точок перегину крива



не має; в інтервалі $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ вона є кривою, опуклість якої спрямована вгору $\left(f''(x)<0\right)$, а в інтервалі $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ – вниз $\left(f''(x)>0\right)$;

6) графік функції наведено на рисунку 4.1.

Рисунок 4.1

б) Проведемо дослідження функції $y=x^2e^{x^2}$:

1) функція визначена на всій дійсній вісі: $D(y)=(-\infty;+\infty)$. У своїй області визначення вона неперервна;

2) функція парна, тому що $y(-x)=(-x)^2\cdot e^{(-x)^2}=x^2\cdot e^{x^2}=y(x)$.

Графік парної функції симетричний відносно початку координат, тому дослідження достатньо провести в тій частині області визначення функції, яка належить, наприклад, невід'ємній частині вісі *OX*. Функція не є періодичною;

3) графік функції не має ні вертикальних, ні похилих асимптот, тому, що $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\cdot e^{x^2}=\pm\infty$. Крім того, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^2\cdot e^{x^2}=+\infty$;

4) знайдемо критичні точки функції:

$$y'=2xe^{x^2}+x^2e^{x^2}\cdot 2x=2xe^{x^2}\left(1+x^2\right),\ 2x\cdot e^{x^2}\left(1+x^2\right)=0,$$

звідки $x_1=0\ \left(e^{x^2}\neq 0,\quad 1+x^2\neq 0\right)$.

Оскільки $f'(1)=4e>0$, тому функція зростає в інтервалі $(0,+\infty)$ (спадає в інтервалі $(-\infty,0)$). В точці $x=0$ вона має мінімум, який дорівнює $f(0)=0$;

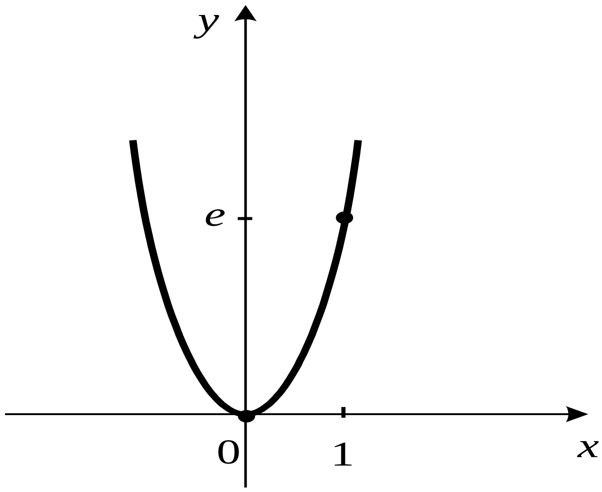


Рисунок 4.2

5) друга похідна $y''=$ $=2e^{x^2}\left(2x^4+5x^2+1\right)$ існує і неперервна в усій області визначення функції. Точок перегину крива не має, і є кривою, опуклість якої спрямована вниз тому, що $f''(x)>0$ на всій области визначення.

6) графік функції наведено на рисунку 4.2.

Контрольні завдання за темою «Диференціальне числення функції однієї змінної»

Завдання 1. Знайти похідні:

1. **а)** $y=\cos^5\left(3\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{3}\right)$, **б)** $y=\left(1+x^2\right)^{x^3}$,

в) $y=\dfrac{e^x}{2}\left[\left(x^2-1\right)\cos x+(x-1)^2\sin x\right]$.

2. **а)** $y=\sqrt[5]{\arcsin^2\left(\dfrac{3\ln 2x}{2}-\dfrac{2}{3\ln 2x}-6\ln 2\right)}$,

б) $y=\dfrac{(x-1)^2\sqrt{(x+2)^3}\,(x-3)^5}{\left(x^2+1\right)\sin^3 2x}$, **в)** $y=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$.

3. **а)** $y=\ln^2\arcsin^3\left(\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2^2}\right)$, **б)** $y=(\operatorname{arctg}3x)^{x+3}$,

в) $y=\sqrt{x}-(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}.$

4. **а)** $y=\sin^3\left(\ln\left(2x^4-3\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{3}\right)\right)$, **б)** $y=\dfrac{x^5(2x+1)^3}{\operatorname{tg}^2 2x\sqrt{1-x^2}}$,

в) $y=x(\sin\ln x-\cos\ln x).$

5. **а)** $y=\arcsin^3\ln^2\left(e^{x^2}+1\right)$, **б)** $y=(\sin 3x)^{\sqrt{x}}$,

в) $y=\sqrt{1+x^2}-\ln\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right).$

6. **а)** $y=\arccos\left(\sin^2\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$, **б)** $y=\dfrac{\left(1+x^2\right)\cdot\sqrt[5]{(2x+3)^3}x^6}{\cos^2 x\cdot\left(x^2+1\right)^4}$,

в) $y=x-\ln\left(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right).$

7. **а)** $y=4^{\arcsin^2\left(x\sqrt{x}+\frac{2x}{3\sqrt{x}}\right)}$, **б)** $y=(\operatorname{ctg}5x)^{7/x}$,

в) $y=\dfrac{4+x^4}{x^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{4}{x}.$

8. **а)** $y=\operatorname{tg}^7\left(2^{\cos 3x}\right)$, **б)** $y=\dfrac{\sqrt{1-4x}\cdot x^6\left(x^2+3\right)^5}{\cos^2 x\cdot(2x+5)^3}$,

в) $y=x\left(2x^2+5\right)\sqrt{x^2+1}+3\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$

9. **а)** $y=e^{\operatorname{ctg}^2\left(x^2+3x+7\right)}$, **б)** $y=\left(\cos\dfrac{5}{x}\right)^{x^2}$,

в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$

10. **а)** $y=\ln^3\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}-2\right)\right)$, **б)** $y=\dfrac{\arcsin^2 x\cdot x^{10}\cdot\sqrt{2x-3}}{(1-6x)^5\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}$,

в) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin x.$

11. **а)** $y=\log_5^5\left(1-\cos^2\left(\sqrt[3]{x^2}\right)\right)$, **б)** $y=(\sin 5x)^{\cos 5x}$,

в) $y=\ln\cos\left(\operatorname{arctg}\left(e^x-e^{-x}\right)+e^{-4}\right)$.

12. **а)** $y=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^{10}\left(\log_3\left(\cos\sqrt{x}\right)\right)}$, **б)** $y=\dfrac{6x(2x+3)^5\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}{e^{7x}(4x+3)^7}$,

в) $y=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$.

13. **а)** $y=6^{\cos^5\left(\ln\left(1-x^2\right)\right)}$, **б)** $y=(\arcsin 3x)^{\sqrt{x}}$, **в)** $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\cdot\sqrt{2+4x}}$.

14. **а)** $y=\sqrt{\operatorname{arctg}\left(e^{\cos^2(2/x)}\right)}$, **б)** $y=\dfrac{x^2\cdot e^{\cos x}\cdot(1+x)^3}{(2x+1)^5\cdot\sqrt[5]{x+5}}$,

в) $y=\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{x}{\sin x}$.

15. **а)** $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos^6\left(\sqrt{2}-\sin^2 4x\right)}}$, **б)** $y=\left(x^4+2\right)^{\operatorname{ctg}2x}$,

в) $y=\sqrt{1+2x}-\ln\left(x+\sqrt{1+2x}\right)$.

16. **а)** $y=\log_3^3\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{7}{\sqrt{x}}\right)\right)$, **б)** $y=\dfrac{x^4\cdot e^{\operatorname{tg}x}(2+x)^4}{(3x-1)^5\cdot\sqrt[3]{1-6x}}$,

в) $y=\dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$.

17. **а)** $y=\ln^3\operatorname{ctg}\dfrac{3x+1}{1-2x}$, **б)** $y=(\operatorname{tg}3x)^{x^2}$,

в) $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}-\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{3\cos^3 x}$.

18. **а)** $y=\cos^5\left(8^{\operatorname{arctg}\sqrt{2x}}\right)$, **б)** $y=\dfrac{x^3e^{3x}\sin 2x}{\cos^2 4x\cdot(1-2x)^5}$,

в) $y=x-\ln\left(1+e^x\right)-2e^{-x/2}\operatorname{arctg}e^{x/2}$.

19. **а)** $y=3^{\sin^4(x\ln x)}$, **б)** $y=(1+2x)^{\cos 2x}$,

в) $y=\frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right).$

20. **а)** $y=\sqrt[3]{\sin^5\frac{\cos x}{x^2+6x+3}}$, **б)** $y=\frac{x^2\sin 3x\cdot(x+3)^5}{e^{7x}(2x-1)^4}$,

в) $y=\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2}}{x}.$

21. **а)** $y=\sqrt[3]{\frac{2-\cos^4 x}{2+\cos^4 x}}$, **б)** $y=(\arccos 3x)^{\operatorname{tg} x}$,

в) $y=\frac{x}{4}\left(10-x^2\right)\sqrt{4-x^2}+6\arcsin\frac{x}{2}.$

22. **а)** $y=5^{\frac{1-x^2}{\cos^5 6x}}$, **б)** $y=\frac{(1-x)^2\cdot\sqrt[3]{(x-3)^4}\,(x+1)^3}{\left(x^2+4\right)e^{7x}}$,

в) $y=3\arcsin\frac{3}{x+2}+\sqrt{x^2+4x-5}.$

23. **а)** $y=\cos^5\left(\ln\left(x^2+1\right)\sin 2x\right)$, **б)** $y=\left(\sin\frac{10}{x^2}\right)^{x^2}$,

в) $y=\sqrt{(3-x)(2+x)}+5\arcsin\sqrt{\frac{x+2}{5}}.$

24. **а)** $y=\ln\sin\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}$, **б)** $y=\frac{(x+2)^3\cdot\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^2 e^{x^2}}$,

в) $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}.$

25. **а)** $y=\sqrt[4]{\operatorname{arctg}\left(x^2\ln^2\cos x\right)}$, **б)** $y=(\ln 2x)^{\operatorname{ctg} 4x}$,

в) $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$

26. **а)** $y=e^{\sin^2\left(x^2+2x\cos x\right)}$, **б)** $y=\frac{x^2\cdot\sin 2x\cdot e^{2x}}{(1-3x)^4}$,

в) $y=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}.$

27. **а)** $y=\dfrac{3}{\operatorname{arctg}^7\left(\cos\left(1-x^2\right)\right)}$, **б)** $y=\left(\operatorname{ctg}4x\right)^{\ln 2x}$,

в) $y=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$

28. **а)** $y=\arcsin^3\left(\ln^2\left(e^{x^2}+1\right)\right)$, **б)** $y=\dfrac{\left(2x+3\right)^5\cos^6 x}{x^2\cdot\sqrt{1-x}}$,

в) $y=\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}.$

29. **а)** $y=\ln^2\arcsin^3\left(\sqrt{x}\operatorname{tg}2x\right)$, **б)** $y=e^{x/\ln^2 x}$,

в) $y=4\ln\dfrac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}}-\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}.$

30. **а)** $y=2^{x\operatorname{tg}^5 1/x}$, **б)** $y=\dfrac{x^6\cdot\sqrt[3]{\sin^2 x}}{e^{3x}\left(2x-1\right)^5}$,

в) $y=\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}-\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right).$

Завдання 2. Довести, що функція задовольняє рівнянню:

1. $y''-5y'+6y=e^{2x}\left(1-x\right),\ \ y=2e^{2x}-e^{3x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}.$

2. $y''-y'=xe^x,\ \ y=e^x\left(\dfrac{1}{2}x^2-x+1\right).$

3. $y''=xe^{-x},\ \ y=e^{-x}\left(x+2\right)+2x-1.$

4. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x^4},\ \ y=e^{-x}\left(1+2x+\dfrac{1}{6x^2}\right).$

5. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 5x,\ \ y=e^{-x}\left(\cos 2x+\sin 2x\right)-\dfrac{1}{19}e^{-3x}\cos 5x.$

6. $y''-3y'+2y=e^x\left(1-2x\right),\ \ y=e^x\left(x^2+x+5\right)+2e^{2x}.$

7. $y'' + 2y' = 4e^{x}(\sin x + \cos x),\ \ y = 1 + e^{-2x} + e^{x}\left(-\frac{2}{5}\cos x + \frac{6}{5}\sin x\right).$

8. $y'' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ \ y = 2x + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$

9. $y'' - 2y' + 2y = x^2,\ \ y = e^{x}(\cos x + \sin x) + \frac{1}{2}(x+1)^2.$

10. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x},\ \ y = 2e^{-\frac{5}{2}x} + e^{-\frac{3}{2}x}(x+1).$

11. $y'' + y = \frac{2}{\cos^3 x},\ \ y = \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\cos x + (2\,\mathrm{tg}\,x + 1)\sin x.$

12. $y'' - y = e^{2x},\ \ y = \frac{1}{4}\left(e^{x} + e^{-x}\right) + \frac{x}{2}e^{x}.$

13. $y'' = \frac{1}{1+x^2},\ \ y = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right).$

14. $y^{IV} + 4y = 0,\ \ y = e^{x}\cos x.$

15. $y^3 y'' + 1 = 0,\ y = \sqrt{2x - x^2}.$

16. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ \ y = e^{x}\sin x.$

17. $y''' - 13y' - 12y = 0,\ \ y = e^{4x} + 2e^{-x}.$

18. $y'' - 2y' = e^{x}\left(x^2 + x - 3\right),\ \ y = e^{2x} + e^{x}\left(-x^2 - x + 1\right).$

19. $y'' - y = 2e^{x},\ \ y = e^{x} + e^{-x} + xe^{x}.$

20. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^3},\ \ y = e^{2x}\left(1 + 2x + \frac{1}{2x}\right).$

21. $y'' + y' - 2y = 3xe^{x},\ \ y = e^{-2x} + e^{x} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{3}\right)x.$

22. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2},\ \ y = e^{2x}(1 - \ln x + x).$

23. $y'' - 2y' + y = 6xe^{x},\ \ y = e^{x}\left(61 + 62x + x^3\right).$

24. $y'' - 2y' + y = \frac{e^{x}}{x},\ \ y = (1 - x)e^{x} + (\ln x + 1)xe^{x}.$

25. $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x},\ \ y = e^{-3x}(\cos x + \sin x) + 3xe^{-3x}.$

26. $y'' + 6y' + 9y = 3x + 11,\ \ y = -2e^{-3x} - 4xe^{-3x} + \dfrac{1}{3}x + 1.$

27. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x},\ \ y = xe^{x+1} - e^{x+1}.$

28. $y'' + 4y = \cos 2\text{x},\ y = \cos 2x + \dfrac{x}{4}\sin 2x.$

29. $y'' = e^{-x} + \ln x,\ \ y = e^{-x} + x + 8 + \dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{3}{4}\right).$

30. $y''y' = -x,\ \ y = \dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\cdot \arcsin x.$

Завдання 3. Знайти похідну другого порядку функції, що задана параметрично:

1. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2}, \\ y = \dfrac{1}{t^2+1}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \operatorname{tg}\sqrt{1+t}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 2\sin^2 t. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}\left(2e^t\right), \\ y = \ln\left(\operatorname{tg} e^t\right). \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^{\frac{t}{2}}, \\ y = \sqrt{e^t + 1}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln\left(1 - t^2\right). \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = 2t\cos t, \\ y = 2t\sin t. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{1-t^2}, \\ y = (\arccos t)^2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} \text{t}, \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$ **21.** $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \dfrac{1}{1-t}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \dfrac{1}{2}t^2. \end{cases}$ **23.** $\begin{cases} x = 3(\sin t - t\cos t), \\ y = 3(\cos t + t\sin t). \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln\left(1+t^2\right). \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \dfrac{1-t}{t}, \\ y = \dfrac{t}{1+t}. \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4\left(\dfrac{t}{2}\right). \end{cases}$ **27.** $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти похідні функцій:

1. $\cos(xy) - \sin(x+y) = 0$. **2.** $x - y = \arcsin x - \arcsin y$.

3. $\cos(xy) - x\cos y = y\cos x$. **4.** $x = y - \operatorname{arctg} y$.

5. $e^{xy} + \cos(x+y) - 3y^2 = 0$. **6.** $x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$.

7. $y - x = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. **8.** $y^2\cos x - 16\sin 3x = 0$.

9. $x^3 - 2x^2 - x^2y^2 + 2y^2 - y^3 - 6 = 0$. **10.** $10 + xe^y = y$.

11. $y\ln(x+y) = \ln x$. **12.** $x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + y^3 = 0$.

13. $yx = \arccos(x+y)$. **14.** $y\sin x = \cos(x-y)$.

15. $e^{xy} = \arcsin x$. **16.** $e^{x-y} = \dfrac{x}{y}$.

17. $\cos(x+y) - y = 7$. **18.** $\sin(xy) = e^{x+y}$.

19. $\sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x+y)$. **20.** $e^x\sin y = e^y\sin x$.

21. $y^2 - 2xy + x^2 = e^{xy}$. **22.** $x^4 + y^4 = x^2y^2$.

23. $x^2y = 2y + xy^2 + e^{y+x}$. **24.** $y = \operatorname{tg}^2(y-x)$.

25. $3^x + 3^y = 3^{x+y}$. **26.** $2^{x+y} = \ln(x-y)$.

27. $y = \sin(x+y)$. **28.** $2y\ln(x+y) = x$.

29. $\operatorname{arctg}(xy)=y-x$.

30. $x^3+y^2-3xy+9=0$.

Завдання 5.

а) Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривих у заданих точках:

1. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}},\quad x_0=4$.

2. $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos t, \end{cases}\quad t_0=\dfrac{\pi}{6}$.

3. $x^3+y^2+2x-6=0,\quad y_0=3$.

4. $y=x^2+\sqrt{8}x-32,\quad x_0=4$.

5. $\begin{cases} x=\dfrac{1+t}{t^3}, \\ y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{1}{2t}, \end{cases}\quad t_0=1$.

6. $x^3+y^3-xy-7=0,\ M_0(1;2)$.

7. $y=x^3+2x^2-4x-3,\quad M_0(-2;5)$.

8. $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}\quad t_0=\dfrac{\pi}{3}$.

9. $x^5+y^5-2xy=0,\quad M_0(1;1)$.

10. $y=\dfrac{x^5+1}{x^4+1},\quad x_0=1$.

11. $\begin{cases} x=t\cos t, \\ y=t\sin t, \end{cases}\quad t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

12. $y^4=4x^4+6xy,\quad M_0(1;2)$.

13. $y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x},\quad x_0=1$.

14. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(t-\cos t), \end{cases}\quad t_0=\dfrac{\pi}{3}$.

15. $5x^2y-3xy^3-2y^4=0,\quad M_0(1;1)$.

16. $y=8\sqrt[4]{x}-70,\quad x_0=16$.

17. $\begin{cases} x=t-t^4, \\ y=t^2-t^3, \end{cases}\quad t_0=1$.

18. $x^3-3x^2y+3xy^2-7x=0, M_0(1;2)$.

19. $y=\sqrt[3]{x^2}-20,\quad x_0=-8$.

20. $\begin{cases} x=2e^t, \\ y=e^{-t}, \end{cases}\quad t_0=0$.

21. $x^2-2xy-y^3+2y-x+1=0, M_0(1;1)$.

22. $y=\dfrac{x^2+1}{x^3-1},\quad x_0=-1$.

23. $\begin{cases} x=3^t\cos t, \\ y=3^t\sin t, \end{cases}\quad t_0=0$.

24. $x^4+y^4=x^2y^2+5x+4y, M_0(1;2)$.

25. $y = \arcsin\frac{x-2}{2}, \quad x_0 = 0$. **26.** $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{6}$.

27. $x^3 + y^3 - 2x^2y^2 + 3y - 1 = 0, M_0(1;0)$. **28.** $y = e^{\sqrt{x}-1}, \quad y_0 = e$.

29. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \end{cases} \quad t_0 = 2$. **30.** $2^x + 2^y - 2xy = 0, \quad M_0(1;1)$.

б)

1. Знайти точки, в яких дотичні до кривої $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ паралельні осі абсцис.

2. Чи дотикаються криві $y = 4x^2 + 2x + 8$ і $y = x^3 - x + 10$ у точці $M_0(3;34)$?

3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 + 2x - 1$ у точці перетину з параболою $y = 2x^2$.

4. Скласти рівняння нормалі до параболи $y = x^2 + 4x + 1$, перпендикулярної прямій, яка єднає початок координат та верхівку параболи.

5. Під яким кутом перетинаються параболи $y = x^2$ і $y = x^3$?

6. Під яким кутом перетинаються парабола $y = x^2$ і пряма $3x - y - 2 = 0$?

7. Знайти точки, в яких дотична до кривої $y^2 = 2x^2$ є перпендикулярною до прямої $4x - 3y + 2 = 0$.

8. Знайти рівняння параболи $y = x^2 + bx + c$, яка дотикається прямої $x = y$ у точці $M_0(1;1)$.

9. Під якими кутами синусоїди $y = \sin x$ і $y = \sin 2x$ перетинають вісь абсцис на початку координат?

10. Скласти рівняння дотичної до лінії $y = x^3 - 3x^2 - 5$, яка перпендикулярна прямій $2x - 6y + 1 = 0$.

11. Під яким кутом крива $y = e^{0,5x}$ перетинає пряму $x = 2$?

12. Знайти кут, під яким перетинаються параболи $y=(x-2)^2$ і $y=-4+6x-x^2$.

13. Скласти рівняння дотичної до лінії $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$, яка паралельна прямій $2y-x-5=0$.

14. Скласти рівняння нормалі до кривої $y=e^{1-x^2}$, яка перпендикулярна прямій $y+2x-4=0$.

15. В якій точці кривої $y=x(\ln x+1)$ дотична перпендикулярна прямій $4x-3y+2=0$?

16. Знайти точки, в який дотична до кривої $y=x-x^3$ паралельна прямій $y+2x+6=0$.

17. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=x^2+8\sqrt{x}-32$, яка паралельна прямій $y=10x+3$ лише у точках з цілими координатами .

18. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=\frac{1}{x^2+1}$, яка паралельна прямій $y=2x$.

19. Скласти рівняння нормалі до кривої $y=\arccos 3x$,яка перпендикулярна прямій $y+3x+3=0$.

20. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=x^3-3x^2-5$, яка перпендикулярна прямій $2x-6y+1=0$.

21. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=x+\sqrt{x^3}$, яка паралельна прямій $y=x-4$.

22. Скласти рівняння нормалі до кривої $y=x-\sqrt{x}$, яка перпендикулярна прямій $4y-3x+5=0$.

23. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=\frac{1+3x^2}{3+x^2}$, яка паралельна прямій $y=0$.

24. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=x^2+2x-1$ в точках її перетину з параболою $y=2x^2$.

25. Через точки параболи $y=x^2$ з абсцисами $x_1=1$ і $x_2=3$ проведено січну. Знайти точку параболи, в якій дотична паралельна січній.

26. В якій точці дотична до кривої $y=x^2$ утворює з прямою $3x-y+1=0$ кут 45^0?

27. Під яким кутом перетинаються парабола $y=x^2$ і пряма $3x-y-2=0$?

28. Знайти точки, в яких дотичні до кривих $y=x^2$ і $y=x^3$ паралельні.

29. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=x\ln x$, яка паралельна прямій $y-x+10=0$.

30. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=\ln x$, яка перпендикулярна прямій $2x+3y=5$.

Завдання 6. Знайти границі:

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x^2\right)^{1/1-\cos x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\ln\left(2+\cos x\right)}{\left(3^{\sin x}-1\right)^2}$, **б)** $\lim\limits_{x\to +0}\left(\arcsin x+x\right)^{x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to +0} x^{\sin x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{\cos x\ln\left(x-3\right)}{\ln\left(e^x-e^3\right)}$, **б)** $\lim\limits_{x\to +0}\left(\operatorname{tg} x\right)^{x}$.

7. а) $\lim\limits_{t\to a}\left(a^2-t^2\right)\operatorname{tg}\dfrac{\pi t}{2a}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1}$, **б)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin 6x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+x)^{1/x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^x - a^a}{x-a} \quad (a>0)$, **б)** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a}$, **б)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 e^{-0{,}5x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{1/\ln\left(1+3x^2\right)}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to +0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 2} \left(2e^{x-2} - 1\right)^{(3x+2)/(x-2)}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\left(e^x - e^{-x}\right)}{e^{x^3+1} - e}$, **б)** $\lim\limits_{x\to +0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin 4x}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{2x^2}-1}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 10x)^{\frac{1}{x^2}}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$, **б)** $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+3x^2\right)}}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2 x}{\left(x-\pi\right)^4}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{6}\right)}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right]$, **б)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{2x-\pi}}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[\mathrm{tg}\, x-\dfrac{1}{1-\sin x}\right]$, **б)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{\frac{3x-1}{x-1}}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to +0} x\ln x$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\sin x}\right)^{\mathrm{ctg}\,\pi x}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln(\cos x))^{\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos \pi x)^{\frac{1}{x\sin \pi x}}$.

Завдання 7. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

1. $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3,\quad \left[-1,2\right]$. **2.** $y=\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2},\quad \left[0,3\right]$.

3. $y=x^2+\dfrac{16}{x}-16,\quad \left[1,4\right]$. **4.** $y=\dfrac{10x+10}{x^2+2x+2},\quad \left[-1,2\right]$.

5. $y=x^4-2x^2+5, \quad [-2,2]$ **.**

6. $y=\sin 2x-x, \quad \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ **.**

7. $y=4-x-\frac{4}{x^2}, \quad [1,4]$ **.**

8. $y=-\frac{2\left(x^2+3\right)}{x^2+2x+5}, \quad [-5,1]$ **.**

9. $y=x^2\ln x, \quad [1,e]$ **.**

10. $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}+8, \quad [-4,-1]$ **.**

11. $y=x-2\ln x, \quad [1,e]$ **.**

12. $y=x^2+4x+\frac{16}{x+2}-9, \quad [-1,2]$ **.**

13. $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}, \quad [-2,5]$ **.**

14. $y=\sqrt{100-x^2}, \quad [-6,8]$ **.**

15. $y=x+2\sqrt{x}, \quad [0,4]$ **.**

16. $y=e^{-x}x, \quad [-1,3]$ **.**

17. $y=\sqrt{4-x^2}, \quad [-1,2]$ **.**

18. $y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}, \quad [0,1]$ **.**

19. $y=x\sqrt{4-x^2}, \quad \left[0,\sqrt{3}\right]$ **.**

20. $y=2\sqrt{x-1}-x+2, \quad [1,5]$ **.**

21. $y=8x+\frac{4}{x^2}-15, \quad \left[\frac{1}{2},2\right]$ **.**

22. $y=x^5-5x^4+5x^3+1, \quad [-1,2]$ **.**

23. $y=\sqrt{169-x^2}, \quad [-5,12]$ **.**

24. $y=x+\frac{1}{x}, \quad \left[\frac{1}{2},2\right]$ **.**

25. $y=-\frac{x^3-4x^2+4}{x^2}, \quad [1,4]$ **.**

26. $y=\frac{x^2+1}{x}, \quad \left[\frac{1}{2},2\right]$ **.**

27. $y=\frac{x^3-16x+16}{x}, \quad [1,4]$ **.**

28. $y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}, \quad [0,1]$ **.**

29. $y=x^3-6x, \quad [-3,4]$ **.**

30. $y=x-4\sqrt{x}+5, \quad [1,9]$ **.**

Завдання 8. Провести повне дослідження функцій і побудувати графік:

1. а) $y=x-1+\frac{1}{x+1}$, **б)** $y=\ln(x+1)-x.$ **2. а)** $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, **б)** $y=\frac{x}{e^x}$.

3. а) $y=\frac{x^2}{x-1}$, **б)** $y=\frac{e^x}{x^2}$.

4. а) $y=x+\frac{x}{3x-1}$, **б)** $y=\ln\left(1+x^2\right)$.

5. а) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$, **б)** $y=8xe^{-x/2}$. **6 . а)** $y=\dfrac{3x-2}{x^2}$, **б)** $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$.

7. а) $y=x+1+\dfrac{1}{x-1}$, **б)** $y=xe^{-x}$. **8. а)** $y=\dfrac{x^4-81}{3x^2}$, **б)** $y=x^2\ln x$.

9. а) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, **б)** $y=\dfrac{e^{(x+1)/2}}{x+1}$. **10. а)** $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, **б)** $y=x\ln x$.

11. а) $y=1-\dfrac{2}{x^2+1}$, **б)** $y=(3-x)e^{x-2}$. **12. а)** $y=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{27}{x^2}$, **б)** $y=\ln\left(4-x^2\right)$.

13. а) $y=\dfrac{3x^2}{3x-1}$, **б)** $y=4xe^{-x}$. **14. а)** $y=\dfrac{x^2}{4-x^2}$, **б)** $y=x\ln\left(1+x^2\right)$.

15. а) $y=\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}$, **б)** $y=x+e^{-x}$. **16. а)** $y=\dfrac{x^3+125}{12x}$, **б)** $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

17. а) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$, **б)** $y=x^3e^{-x}$. **18. а)** $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$, **б)** $y=2\ln\dfrac{x}{x+1}-1$.

19. а) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$, **б)** $y=(4-x)e^{x-3}$. **20. а)** $y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$, **б)** $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

21. а) $y=\dfrac{1+4x^3}{x}$, **б)** $y=x+\dfrac{1}{e^x}$. **22. а)** $y=\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{125}{12x}$, **б)** $y=\dfrac{x^2+\ln x}{x}$.

23. а) $y=\dfrac{x}{2(x-1)^2}$, **б)** $y=\dfrac{x^3}{e^x}$. **24. а)** $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$, **б)** $y=x-2\operatorname{arctg}x$.

25. а) $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$, **б)** $y=4e^{x-3}-xe^{x-3}$. **26.а)** $y=1+\dfrac{7-2x-x^2}{x^2+2x-3}$, **б)** $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

27. а) $y=3x+\dfrac{1}{x^3}$, **б)** $y=xe^{-x^2}$. **28. а)** $y=x+\dfrac{1}{x-1}$, **б)** $y=\ln\left(9-x^2\right)$.

29. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^4}$, **б)** $y=\left(1+x^2\right)e^x$. **30.а)** $y=x+1+\dfrac{5-3x}{x-1}$, **б)** $y=x(\ln x+1)$.

Розділ 5. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Розрахунково-графічне завдання розділу «Невизначений інтеграл» складається з 10 завдань, що охоплюють методи інтегрування невизначеного інтегралу (інтегрування частинами, заміна змінної, інтегрування раціонального дробу, інтегрування деяких ірраціональностей, інтегрування тригонометричних функцій, застосування тригонометричних підстановок). Для успішного виконання запропонованих завдань варто ознайомитись і розібрати відповідний теоретичний матеріал [1, 2, 4, 5, 9, 10, 13, 14], а також відповісти на контрольні питання.

Контрольні питання

1. Поняття первісної, означення невизначеного інтегралу.
2. Властивості невизначеного інтегралу.
3. Табличні інтеграли.
4. Теорема про інваріантність формул інтегрування.
5. Теорема про заміну змінної у невизначеному інтегралі.
6. Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.
7. Алгоритм представлення раціонального дробу у вигляді суми простих дробів.
8. Інтегрування раціональних відносно $\sin x$ й $\cos x$ функцій.
9. Інтегрування деяких ірраціональностей.

Зразок розв’язання прикладів контрольного завдання

Приклад 1. Знайти $\int \frac{x^3+5x}{\sqrt{x^4-8}}dx$.

Розв’язання. Виконуючи почленне ділення і використовуючи властивість лінійності невизначеного інтегралу, маємо:

$$\int \frac{x^3+5x}{\sqrt{x^4-8}}dx = \int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-8}} + 5\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-8}}.$$

Ці інтеграли зводяться до табличних інтегралів:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c \qquad \text{і} \qquad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln\left| u + \sqrt{u^2 + a} \right| + c.$$

В силу того, що $d\left(x^4 - 8\right) = 4x^3 dx$ і $d\left(x^2\right) = 2xdx,$ маємо: $x^3 dx = \frac{1}{4} d\left(x^4 - 8\right)$, $xdx = \frac{1}{2} d\left(x^2\right)$. Тоді

$$\int \frac{x^3 + 5x}{\sqrt{x^4 - 8}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x^4 - 8\right)}{\sqrt{x^4 - 8}} + \frac{5}{2} \int \frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{x^2 - 8}} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{x^4 - 8} + \frac{5}{2} \ln\left| x + \sqrt{x^2 - 8} \right| + c = \frac{\sqrt{x^4 - 8}}{2} + \frac{5}{2} \ln\left| x + \sqrt{x^2 - 8} \right| + c.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{x^4 - 8}}{2} + \frac{5}{2} \ln\left| x + \sqrt{x^2 - 8} \right| + c$.

Приклад 2. Знайти $\int \frac{\sin x dx}{9 + \cos^2 x}$.

Розв'язання. Відомо, що $d\left(\cos x\right) = -\sin x dx$, тоді вихідний інтеграл можна записати таким чином: $-\int \frac{d\left(\cos x\right)}{3^2 + \cos^2 x}$. Позначивши $\cos x = u$, отримаємо табличний інтеграл: $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c$. Тоді

$$-\int \frac{d\left(\cos x\right)}{3^2 + \cos^2 x} = -\int \frac{du}{3^2 + u^2} = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{u}{3} + c = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{3} + c.$$

Відповідь: $-\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{3} + c$.

Приклад 3. Знайти $\int \left(x^2 - 2x + 3\right) e^{-2x} dx$.

Розв'язання. Цей інтеграл обчислюють за допомогою формули інтегрування частинами $\int UdV = UV - \int VdU$, яку використовують двічі.

$$\int\left(x^2-2x+3\right)e^{-2x}dx=\left\|\begin{matrix}U=x^2-2x+3, & dU=(2x-2)dx\\ dV=e^{-2x}dx, & V=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2-2x+3\right)e^{-2x}+\int(x-1)e^{-2x}dx=\left\|\begin{matrix}U=x-1, & dU=dx\\ dV=e^{-2x}dx, & V=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2-2x+3\right)e^{-2x}-\frac{1}{2}(x-1)e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\left(x^2-2x+3\right)e^{-2x}-$$

$$-\frac{1}{2}(x-1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c=-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2-x+2{,}5\right)+c.$$

Відповідь: $-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2-x+2{,}5\right)+c$.

Приклад 4. Знайти $\int\ln\left(x^2+5\right)dx$.

Розв'язання. Тут також доцільно використати метод інтегрування частинами:

$$\int\ln\left(x^2+5\right)dx=\left\|\begin{matrix}U=\ln\left(x^2+5\right), & dU=\dfrac{2x}{x^2+5}dx\\ dV=dx, & V=x\end{matrix}\right\|=x\ln\left(x^2+5\right)-2\int\frac{x^2}{x^2+5}dx=$$

$$=x\ln\left(x^2+5\right)-2\int\frac{\left(x^2+5\right)-5}{x^2+5}dx=x\ln\left(x^2+5\right)-2\int\left(1-\frac{5}{x^2+5}\right)dx=$$

$$=x\ln\left(x^2+5\right)-2x+2\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+c.$$

Відповідь: $x\ln\left(x^2+5\right)-2x+2\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+c$.

Приклад 5. Знайти $\int\frac{3x-1}{\sqrt{7-x^2-6x}}dx$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат виразу, що стоїть під знаком квадратного кореня: $7-x^2-6x=7-\left(x^2+6x+9\right)+9=16-(x+3)^2$. Далі зробимо таку заміну змінної: $x+3=t$, $x=t-3$, $dx=dt$, після чого зведемо інтеграл до двох табличних інтегралів: $\int \frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+c$ та $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+c$.

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{7-x^2-6x}}dx=\int \frac{3(t-3)-1}{\sqrt{16-t^2}}dt=\int \frac{3t-10}{\sqrt{16-t^2}}dt=3\int \frac{tdt}{\sqrt{16-t^2}}-10\int \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}}=$$

$$=-\frac{3}{2}\int \frac{d\left(16-t^2\right)}{\sqrt{16-t^2}}-10\int \frac{dt}{\sqrt{4^2-t^2}}=-\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{16-t^2}-10\arcsin\frac{t}{4}+c=$$

$$=-3\sqrt{7-x^2-6x}-10\arcsin\frac{x+3}{4}+c.$$

Відповідь: $-3\sqrt{7-x^2-6x}-10\arcsin\frac{x+3}{4}+c$.

Приклад 6. Знайти $\int \frac{x^3+2}{x^2+1}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом. Виділимо його цілу частину, розділивши чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{r|l} x^3+2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -\;\; x^3+x & x \\ \cline{1-1} -x+2 & \end{array}$$

Таким чином, $\frac{x^3+2}{x^2+1}=x+\frac{2-x}{x^2+1}=x+\frac{2}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}$. Маючи певний досвід, це перетворення можна виконати так:

$$\frac{x^3+2}{x^2+1}=\frac{x^3+x-x+2}{x^2+1}=\frac{x\left(x^2+1\right)-x+2}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}.$$

Тоді $\int \frac{x^3+2}{x^2+1}dx=\int \left(x-\frac{x}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}\right)dx=\int xdx-\int \frac{xdx}{x^2+1}+2\int \frac{dx}{x^2+1}=$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+2\operatorname{arctg}x=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+2\operatorname{arctg}x+c.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+2\operatorname{arctg}x+c$.

Приклад 7. Знайти $\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$.

Розв'язання. В цьому випадку підінтегральна функція є правильним раціональним дробом. Знайдемо корені його знаменника: $x^3+1=0$, $(x+1)\left(x^2-x+1\right)=0$, тоді $x+1=0$, $x_1=-1$. Рівняння $x^2-x+1=0$ дійсних коренів немає. Тоді підінтегральний дріб можна розкласти на суму найпростіших раціональних дробів з невизначеними коефіцієнтами таким чином:

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Для визначення коефіцієнтів *A, B* і *C* помножимо обидві частини рівності на знаменник $\left(x^3+1\right)$:

$$2x^2-3x+1=A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(x+1).$$

Підставимо в цей вираз дійсний корінь, а також прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної *x*:

$$\begin{array}{r|l} x=-1 & 6=3A;\quad\Rightarrow A=2; \\ x^2 & 2=A+B;\Rightarrow B=0; \\ x^0 & 1=A+C;\Rightarrow C=-1. \end{array}$$

Отже, $\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x^2-x+1}\right)dx=2\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x^2-x+1}=$

$$=\left\|x^2-x+1=x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2,\quad dx=d\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\|=$$

$$= 2\ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + c = 2\ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c.$$

Відповідь: $2\ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$.

Приклад 8. Знайти $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x - 1}$.

Розв'язання. Для обчислення інтегралу застосуємо універсальну тригонометричну підстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ і таким чином зведемо його до табличного $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c.$

$$\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x - 1} = \left\| \begin{matrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right\| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} - 1} =$$

$$= \int \frac{2dt}{6t + 4\left(1-t^2\right) - \left(1+t^2\right)} = 2\int \frac{dt}{6t + 4 - 4t^2 - 1 - t^2} = 2\int \frac{dt}{-5t^2 + 6t + 3} =$$

$$= -\frac{2}{5}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{6}{5}t - \frac{3}{5}} = \left\| \begin{matrix} t^2 - \frac{6}{5}t - \frac{3}{5} = t^2 - \frac{6}{5}t + \frac{9}{25} - \frac{9}{25} - \frac{3}{5} = \\ = \left(t - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{24}{25} = \left(t - \frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 \\ dt = d\left(t - \frac{3}{5}\right) \end{matrix} \right\| =$$

$$= -\frac{2}{5}\int \frac{d\left(t - \frac{3}{5}\right)}{\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2} = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}}\ln\left|\frac{t - \frac{3}{5} - \frac{2\sqrt{6}}{5}}{t - \frac{3}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5}}\right| + c =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t-\frac{3+2\sqrt{6}}{5}}{t+\frac{2\sqrt{6}-3}{5}}\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{5\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2\sqrt{6}-3}{5\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3-2\sqrt{6}}\right| + c.$$

Відповідь: $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{5\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2\sqrt{6}-3}{5\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3-2\sqrt{6}}\right| + c$.

Приклад 9. Знайти $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

Розв'язання. В цьому випадку для обчислення інтегралу зручно скористатися так званою «тригонометричною одиницею»: $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Тоді маємо:

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\left(\cos^4 x + 2\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x\right)}{\cos^6 x}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + 2\int \mathrm{tg}^2 x\frac{dx}{\cos^2 x} + \int \mathrm{tg}^4 x\frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + 2\int(\mathrm{tg}\,x)^2 d(\mathrm{tg}\,x) + \int(\mathrm{tg}\,x)^4 d(\mathrm{tg}\,x) =$$

$$= \mathrm{tg}\,x + 2\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} + c.$$

Зауваження: можна було також для знаходження цього інтегралу зробити заміну змінної: $\mathrm{tg}x = t$, $x = \mathrm{arctg}\,t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$.

Відповідь: $\mathrm{tg}\,x + 2\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} + c$.

Приклад 10. Знайти $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sin x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є непарною відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. В такому випадку використовується підстановка $t = \cos x$:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x (1-\cos^2 x)} = \|\cos x = t\| =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = -\int \frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)} dt = -\int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}\right) dt = -\int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + c = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + c = \frac{1}{\cos x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c .$$

Відповідь: $\frac{1}{\cos x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$.

Приклад 11. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}\left(9-\sqrt[3]{x+2}\right)}$.

Розв'язання. Ірраціональний вираз, який треба інтегрувати, є раціональною функцією від $(x+2)^{1/2}$ та $(x+2)^{1/3}$. Спільний знаменник дробів $\frac{1}{2}$ та $\frac{1}{3}$ дорівнює 6 , тому слід зробити підстановку $x+2=t^6$, що дозволить отримати інтеграл від раціональної функції аргументу *t:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}\left(9-\sqrt[3]{x+2}\right)} = \left\| \begin{matrix} x+2=t^6, \, x=t^6-2 \\ dx = 6t^5 dt, \, t=\sqrt[6]{x+2} \end{matrix} \right\| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(9-t^2)} = 6\int \frac{t^2}{9-t^2} dt =$$

$$= 6\int \frac{(t^2-9)+9}{9-t^2} dt = 6\int \left(-1 + \frac{9}{9-t^2}\right) dt = -6\int dt + 54\int \frac{dt}{9-t^2} =$$

$$= -6t - 54 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + c = -6\sqrt{x+2} - 9\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x+2}-3}{\sqrt[6]{x+2}+3}\right| + c .$$

Відповідь: $-6\sqrt{x+2} - 9\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x+2}-3}{\sqrt[6]{x+2}+3}\right| + c$.

Приклад 12. Знайти $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x}+1}$.

Розв'язання. В цьому випадку, як і в попередньому, застосуємо метод заміни змінної, а також ділення многочленна на многочлен для виділення цілої частини отриманого раціонального дробу:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x}+1} = \left\| \begin{array}{l} x=t^4, \\ dx=4t^3dt \end{array} \right\| = \int \frac{t^2 4t^3 dt}{t+1} = 4\int \frac{t^5 dt}{t+1} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} -t^5 & \underline{|\,t+1\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{t^5+t^4} & t^4-t^3+t^2-t+1 \\ \quad -\,-t^4 & \\ \quad \underline{-t^4-t^3} & \\ \qquad -\,t^3 & \\ \qquad \underline{t^3+t^2} & \\ \qquad\quad -\,-t^2 & \\ \qquad\quad \underline{-t^2-t} & \\ \qquad\qquad -\,t & \\ \qquad\qquad \underline{t+1} & \\ \qquad\qquad -1 & \end{array} \right| = 4\int \left(t^4-t^3+t^2-t+1-\frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= 4\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + c =$$

$$= \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - x + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} - 4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + c.$$

Відповідь: $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - x + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} - 4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + c$.

Контрольні завдання за темою «Невизначений інтеграл»

Варіант 1

1. $\int \frac{2x^3+3x}{16x^4+1}dx$.

2. $\int \frac{\mathrm{arctg}^3 4xdx}{1+16x^2}$.

3. $\int \frac{3x^2+1}{x-2}dx$.

4. $\int (x+3)e^{2x}dx$.

5. $\int \left(x^2-11\right)\ln xdx$.

6. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$.

7. $\int \cos^4 x\sin^3 xdx$.

8. $\int \frac{9x^4-4x+1}{\left(x^2-1\right)(x+2)}dx$.

9. $\int \frac{dx}{3\cos x+2}$.

10. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Варіант 2

1. $\int \frac{x+2}{x^2+4x+1}dx$.

2. $\int \frac{\left(5x^3+3x^7\right)dx}{4-x^8}$.

3. $\int \frac{5x^3+2}{x^2-1}dx$.

4. $\int (x+2)e^{-x}dx$.

5. $\int \ln\left(9x^2-1\right)dx$.

6. $\int \frac{x+1}{\sqrt{4x-x^2+7}}dx$.

7. $\int \sin^6 x\cos^3 xdx$.

8. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$.

9. $\int \frac{\cos xdx}{(1-\cos x)^2}$.

10. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

Варіант 3

1. $\int \frac{\sin xdx}{6\cos x-7}$.

2. $\int \frac{\left(x^5-7x^2\right)dx}{9+x^6}$.

3. $\int \frac{2x^2+3}{x^2+1}dx$.

4. $\int (2x-3)\cos 2x dx$.

5. $\int \left(x^3+2\right)\ln 2x dx$.

6. $\int \frac{3x-1}{2x^2-4x+5}\, dx$.

7. $\int \sin^3\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}dx$.

8. $\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}dx$.

9. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

10. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$.

Варіант 4

1. $\int \frac{dx}{x(3\ln x+5)}$.

2. $\int \frac{e^x dx}{25e^{2x}+4}$.

3. $\int \frac{3x+5}{2x-1}dx$.

4. $\int (x+5)\sin 2x dx$.

5. $\int \frac{\ln(x+2)}{x^2}dx$.

6. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$.

7. $\int \sin 2x\cos 5x dx$.

8. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

9. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$.

10. $\int \frac{\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}}dx$.

Варіант 5

1. $\int \frac{3x-1}{3x^2-2x+1}\, dx$.

2. $\int \frac{x+5x^3}{1+9x^4}dx$.

3. $\int \frac{5x-7}{3x+1}dx$.

4. $\int \left(x^2+5\right)e^x dx$.

5. $\int \ln\left(x^2-4\right)dx$.

6. $\int \frac{2-x}{\sqrt{9x^2-6x+10}}dx$.

7. $\int \cos 3x \cos 2x dx$.

8. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3} dx$.

9. $\int \frac{\cos x dx}{2+\cos x}$.

10. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$.

Варіант 6

1. $\int \frac{e^x}{3e^x+7} dx$.

2. $\int \frac{5x^3-3x}{1+x^4} dx$.

3. $\int \frac{7x^2+3}{x^2-9} dx$.

4. $\int (x+1)\sin 3x dx$.

5. $\int \arccos 2x dx$.

6. $\int \frac{5x+1}{4x^2-8x+5} dx$.

7. $\int \sin^3 2x dx$.

8. $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)} dx$.

9. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

10. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}} dx$.

Варіант 7

1. $\int \frac{\cos x}{7\sin x+3} dx$.

2. $\int \frac{\left(4e^x+e^{2x}\right)dx}{3+e^{2x}}$.

3. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+9}} dx$.

4. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

5. $\int \arcsin 3x dx$.

6. $\int \frac{x+2}{9x^2-6x+10} dx$.

7. $\int \cos^4 3x dx$.

8. $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$.

9. $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$.

10. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} dx$.

Варіант 8

1. $\int \frac{\sin 5x}{2\cos 5x+3}\,dx$.

2. $\int \frac{dx}{x\left(4-\ln^2 x\right)}$.

3. $\int \frac{x-2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$.

4. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

5. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-2x+10}}$.

7. $\int \cos^3 2x\,dx$.

8. $\int \frac{3x^3+5x^2-25x-1}{(x+2)(x-1)^2}\,dx$.

9. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$.

10. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}\,dx$.

Варіант 9

1. $\int \frac{5x^2+2x}{5x^3+3x^2-2}\,dx$.

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+\ln^2 x}}$.

3. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x}}\,dx$.

4. $\int \left(x^2-1\right)\sin 2x\,dx$.

5. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

6. $\int \frac{3x-4}{x^2-10x+26}\,dx$.

7. $\int \sin^4 \frac{3}{4}x dx$.

8. $\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}\,dx$.

9. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-7\cos^2 x}$.

10. $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}\,dx$.

Варіант 10

1. $\int \frac{\sin\frac{1}{x}-\sqrt{x}}{x^2}\,dx$.

2. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$.

3. $\int \frac{5x-1}{3\sqrt{x}}dx$.

4. $\int \left(x^2+3\right)\cos\frac{x}{2}dx$.

5. $\int \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{1+3x}}dx$.

6. $\int \frac{3x-1}{x^2-4x-5}dx$.

7. $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$.

8. $\int \frac{dx}{\left(x^2+2\right)(x-1)^2}$.

9. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

10. $\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$.

Варіант 11

1. $\int \frac{dx}{x(2\ln x+1)}$.

2. $\int \frac{\left(2x^3-x\right)dx}{\sqrt{9-x^4}}$.

3. $\int \frac{5x^3-1}{\sqrt[3]{x}}dx$.

4. $\int (2x-1)\sin 3x\,dx$.

5. $\int \left(2x^2-3\right)\operatorname{arctg} x\,dx$

6. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4x-5}}dx$.

7. $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

8. $\int \frac{x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}dx$.

9. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}$.

Варіант 12

1. $\int \frac{(3x+1)dx}{2x^2+18}$.

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x-4}}$.

3. $\int \frac{3x^2-1}{\sqrt[4]{x}}dx$.

4. $\int (x+1)\ e^{-3x}dx$.

5. $\int (2x+5)\operatorname{arctg} x\,dx$.

6. $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^2+2x}}dx$.

7. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$.

8. $\int \frac{3x^3 - x^2 - 4x + 13}{x^2\left(x^2 - 4x + 13\right)} dx$.

9. $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$.

10. $\int \frac{\sqrt[6]{x}\, dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$.

Варіант 13

1. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(2\,\mathrm{tg}\, x + 5\right)}$.

2. $\int \frac{\left(4x^5 - x^2\right)dx}{\sqrt{x^6 + 3}}$.

3. $\int \frac{x + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

4. $\int \left(x^2 + 3\right)\sin x\, dx$.

5. $\int \mathrm{arctg}\, 5x\, dx$.

6. $\int \frac{x + 2}{3 - x^2 + 2x} dx$.

7. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx$.

8. $\int \frac{x^4 dx}{(x + 2)\left(x^2 - 1\right)}$.

9. $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$.

10. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x} + 4\right)\sqrt{x}}$.

Варіант 14

1. $\int \frac{dx}{x\left(5\ln x + 3\right)}$.

2. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos^2 x - 5}}$.

3. $\int \frac{3x - 5}{\sqrt{x + 1}} dx$.

4. $\int \left(2x^2 - 1\right)\cos\frac{x}{3}\, dx$.

5. $\int x\,\mathrm{arctg}\, x\, dx$.

6. $\int \frac{3x + 5}{x^2 - 2x - 3} dx$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

8. $\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$.

9. $\int \frac{dx}{5 + \sin x + 3\cos x}$.

10. $\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\, dx$.

Варіант 15

1. $\int x\sin\left(3x^2+1\right)dx$.

2. $\int \frac{\left(2x^7-x^3\right)dx}{\sqrt{4-x^8}}$.

3. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x-1}}dx$.

4. $\int\left(3x^2+1\right)3^x dx$.

5. $\int \arccos\frac{x}{3}dx$.

6. $\int \frac{7x-1}{\sqrt{3-x^2-2x}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

8. $\int \frac{2x^2-x+3}{x^3-2x^2+x}dx$.

9. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x-3}dx$.

10. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$.

Варіант 16

1. $\int x^2\cos x^3 dx$.

2. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{5+e^{2x}}}$.

3. $\int \frac{5x-1}{\sqrt[3]{x+2}}dx$.

4. $\int (x+3)5^{-2x}dx$.

5. $\int \frac{\ln 5x}{x^3}dx$.

6. $\int \frac{2x+3}{x^2-10x+16}dx$.

7. $\int \cos^3 x\sin^2 x dx$.

8. $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$.

9. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

10. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-1}dx$.

Варіант 17

1. $\int e^x\sin\left(e^x+3\right)dx$.

2. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x-9}$.

3. $\int \frac{3x+2}{\sqrt[3]{x-2}}dx$.

4. $\int (x+1)e^{-3x}dx$.

5. $\int \sqrt[3]{x}\ln 2x dx$.

6. $\int \frac{4x-1}{x^2+4x+3}dx$.

7. $\int \sin^5 x dx$.

8. $\int \frac{x}{x^3+1}dx$.

9. $\int \frac{\cos^3 x}{4\sin^2 x-1}dx$.

10. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}}dx$.

Варіант 18

1. $\int \frac{1}{x}\sin(2\ln x)dx$.

2. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$.

3. $\int \frac{2x+5}{\sqrt[4]{x-1}}dx$.

4. $\int \left(x^2-5\right)e^{2x}\ dx$.

5. $\int \left(x^3+3\right)\ln x dx$.

6. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$.

7. $\int \cos^4 x dx$.

8. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$.

9. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$.

10. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[4]{x}}dx$.

Варіант 19

1. $\int \frac{1}{x}\cos(3\ln x)dx$.

2. $\int \frac{2x^7-x^3}{\sqrt{5x^8-1}}dx$.

3. $\int \frac{x}{\sqrt{3x+2}}dx$.

4. $\int (3x-2)\sin 2x dx$.

5. $\int (x+2)\ln x dx$.

6. $\int \frac{x}{x^2-5x+4}dx$.

7. $\int \sin^2 x \cos^2 2x dx$.

8. $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)} dx$.

9. $\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)}$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}+\sqrt{x}}$.

Варіант 20

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x} dx$.

2. $\int \frac{6x^7+x^3}{\sqrt{9-x^8}} dx$.

3. $\int \frac{2x-3}{\sqrt[3]{3x+2}} dx$.

4. $\int (x-2)\cos 5x dx$.

5. $\int (x^2-1)\ln 3x dx$.

6. $\int \frac{x+2}{2x^2+4x-5} dx$.

7. $\int \cos^2 3x \sin^2 3x dx$.

8. $\int \frac{13x+6}{x(x-3)(x^2+1)} dx$.

9. $\int \frac{dx}{2+\cos^2 x}$.

10. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}$.

Варіант 21

1. $\int x^2 e^{-2x^3+5} dx$.

2. $\int \frac{5x^7-x^3}{9-x^8} dx$.

3. $\int \frac{x-5}{\sqrt{2x-7}} dx$.

4. $\int \frac{xdx}{\cos^2 3x}$.

5. $\int \sqrt{x} \ln 6x dx$.

6. $\int \frac{2x+3}{x^2+5x+7} dx$.

7. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$.

8. $\int \frac{x^3+6x^2+5x-1}{x^4+2x^2} dx$.

9. $\int \frac{dx}{5+2\cos x}$.

10. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx$.

Варіант 22

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{3\sqrt{x}+2} dx$.

2. $\int \frac{8x^3+5x}{\sqrt{16-x^4}} dx$.

3. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{3x^2-2}} dx$.

4. $\int \frac{xdx}{\sin^2 4x}$.

5. $\int \ln\left(3x^2+2\right) dx$.

6. $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^2+2x}} dx$.

7. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.

8. $\int \frac{5x-1}{x(x+1)^2} dx$

9. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

10. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1} dx$.

Варіант 23

1. $\int xe^{3x^2+1} dx$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3e^x-5}}$.

3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-9x^6}} dx$.

4. $\int (3x+1)e^{-x} dx$.

5. $\int \ln\left(x^2+5\right) dx$.

6. $\int \frac{x}{2x^2-4x+3} dx$.

7. $\int \mathrm{tg}^4 x dx$.

8. $\int \frac{x^2+x+3}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)} dx$.

9. $\int \frac{\cos x}{(1+\cos x)(1-\sin x)} dx$.

10. $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1} dx$.

Варіант 24

1. $\int x^3 e^{5x^4} dx$.

2. $\int \frac{x-2x^3}{1+7x^4} dx$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2e^x+1}}$.

4. $\int (2x-5)e^{3x}dx$.

5. $\int \frac{\ln 2x}{x^3}dx$.

6. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3-x^2+2x}}dx$.

7. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx$.

8. $\int \frac{x^3}{(x^2-1)(x+2)}dx$.

9. $\int \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

10. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+5}+2}{1+\sqrt[3]{3x+5}}dx$.

Варіант 25

1. $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2-1}}dx$.

2. $\int 3^{x^2-1}5^{x^2}xdx$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2e^x-5}}$.

4. $\int (x^2+1)\sin xdx$.

5. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}dx$.

6. $\int \frac{4x+3}{x^2+6x+5}dx$.

7. $\int \sin^2 \frac{3}{2}xdx$.

8. $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x^2-4)(x-1)}dx$.

9. $\int \frac{\cos x}{5+4\cos x}dx$.

10. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$.

Варіант 26

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+8}}dx$.

2. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{5+\sin^2 x}}dx$.

3. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}}$.

4. $\int (2x^2-1)\sin 3xdx$.

5. $\int \ln(x^2+9)dx$.

6. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+6x+5}}dx$.

7. $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$.

8. $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}dx$.

9. $\int \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

Варіант 27

1. $\int x\sqrt[5]{2x^2+7}dx$.

2. $\int \frac{(x^3-3x)dx}{\sqrt{4+x^4}}$.

3. $\int e^{-x}\left(e^{3x}+e^x-5\right)dx$.

4. $\int (x+2)\cos 4x dx$.

5. $\int \left(2x^2+1\right)\ln(x+1)dx$.

6. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2-x-x^2}}dx$.

7. $\int \cos^2 3x \cos 5x dx$.

8. $\int \frac{x^3+2x^2+3}{\left(x^2-3x+4\right)(x-3)}dx$.

9. $\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$.

10. $\int \frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}$.

Варіант 28

1. $\int x^2\sqrt[3]{5x^3-1}dx$.

2. $\int \frac{\left(5x^3-x\right)dx}{\sqrt{3x^4+6}}$.

3. $\int \frac{x-5}{\sqrt[3]{x}+1}dx$.

4. $\int \left(x^2+1\right)e^{2x+3}dx$.

5. $\int \operatorname{arctg} 2x dx$.

6. $\int \frac{3x+1}{x^2+x-2}dx$.

7. $\int \sin^2 5x \cos 3x dx$.

8. $\int \frac{x^3+2x^2+3}{\left(x^2-4x+3\right)(x-2)}dx$.

9. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x-\sin x}$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{(1+x)^3}}$.

Варіант 29

1. $\int e^x \sqrt[7]{2e^x+5}\, dx$.

2. $\int \frac{\left(2x^5-x^2\right)dx}{4+3x^6}$.

3. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-1}$.

4. $\int x \cdot 3^{-x} dx$.

5. $\int \operatorname{arcctg} 3x dx$.

6. $\int \frac{x+1}{x^2+4x-5} dx$.

7. $\int \sin^4 2x\, dx$.

8. $\int \frac{3x^2-2}{x^3-x}\, dx$.

9. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+2\sin^2 x}$.

10. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2-\sqrt[4]{x}}} dx$.

Варіант 30

1. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[5]{1+2\cos x}}$.

2. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-7}}$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}+2}$.

4. $\int (2x+1)\cos^2 x\, dx$.

5. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx$.

6. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$.

7. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$.

8. $\int \frac{9x-11}{(x-1)^2\left(x^2+7\right)}\, dx$.

9. $\int \frac{dx}{2-3\cos^2 x}$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$.

Розділ 6. ВИЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Розрахунково-графічне завдання розділу «Визначений інтеграл і його застосування» складається з контрольних питань і 7 практичних завдань, що охоплюють властивості визначеного інтеграла, методи його обчислення й деякі застосування. Перед початком роботи варто вивчити теоретичний курс, відповісти на контрольні питання й розібрати методичні вказівки до рішення прикладів [1, 2, 4, 5, 9, 10, 13, 14].

Контрольні питання

1. Означення визначеного інтеграла.
2. Властивість лінійності визначеного інтеграла відносно підінтегральної функції.
3. Властивість адитивності визначеного інтеграла щодо проміжку інтегрування.
4. Теорема про оцінку визначеного інтеграла.
5. Теорема про інтегрування нерівностей.
6. Теорема про середнє в інтегральному численні.
7. Визначений інтеграл як функція верхньої змінної межі інтегрування. Теорема про її похідну.
8. Формула Ньютона – Лейбніця.
9. Теорема про заміну змінної у визначеному інтегралі.
10. Теорема про інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
11. Обчислення площі плоскої фігури в декартовій системі координат.
12. Обчислення площі плоскої фігури в полярній системі координат.
13. Обчислення довжини дуги лінії в декартовій системі координат.
14. Обчислення довжини дуги лінії в полярній системі координат.
15. Обчислення об'єму тіла обертання.

16. Невласний інтеграл I роду. Дослідження збіжності $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$. Достатні ознаки збіжності.

17. Невласний інтеграл II роду. Дослідження збіжності $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^p}$. Достатні ознаки збіжності.

Зразок розв'язання прикладів контрольного завдання

Приклад 1. Обчислити інтеграли: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 3x dx$, б) $\int\limits_0^{2}\sqrt{4-x^2}dx$.

Розв'язання. а) При обчисленні $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 3x dx$ застосовується формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

$$\int\limits_a^b U(x)dV = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b V(x)dU.$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 3x dx = \begin{vmatrix} U = x, & dU = dx \\ dV = \cos 3x dx, & V = \frac{1}{3}\sin 3x \end{vmatrix} = \frac{x\sin 3x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 3x dx =$$

$$= \frac{x\sin 3x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{9}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{18}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{9}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{9}.$$

б) При обчисленні $\int\limits_0^{2}\sqrt{4-x^2}dx$ зробимо заміну змінної.

Формула заміни змінної у визначеному інтегралі має вигляд:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt,$$

де функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, а функція $x=\varphi(t)$ неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на $[t_1,t_2]$, причому $a=\varphi(t_1)$, $b=\varphi(t_2)$.

Відзначимо важливу особливість цієї формули. При заміні змінної x на змінну t старі межі інтегрування a й b заміняються на нові t_1 й t_2, які знаходяться із зазначеної вище підстановки.

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \left\| \begin{array}{l} x=2\cos t,\, dx=-2\sin t dt, \\ t=\arccos\dfrac{x}{2}, \\ x_1=0, \quad t_1=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}, \\ x_2=2, \quad t_2=\arccos 1=0 \end{array} \right\| = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{4-4\cos^2 t}\,(-2\sin t)dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2\sin t(-2\sin t)dt = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t dt = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt =$$

$$= -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} dt + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos 2t dt = 2\left(-t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -2\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right) = \pi .$$

Відповідь: а) $\dfrac{\pi}{18}-\dfrac{1}{9}$, б) π.

Приклад 2. Оцінити визначений інтеграл $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою про оцінку визначеного інтеграла. За цією теоремою

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

де M, m – відповідно найбільше та найменше значення функції $f(x)$, неперервної на $[a,b]$.

Знайдемо найбільше й найменше значення підінтегральної функції

$f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ на відрізку $\left[\dfrac{1}{2},3\right]$. Для цього обчислимо похідну:

$f'\left(x\right)=\dfrac{2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^3}$. Знайдемо критичні точки заданої функції:

$$f'\left(x\right)=0\Rightarrow 2x-2x^3=0,\quad 2x\left(1-x^2\right)=0\Rightarrow$$

$$x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_3=-1,\ x_1\notin\left[\frac{1}{2},3\right],\ x_2\in\left[\frac{1}{2},3\right],\ x_3\notin\left[\frac{1}{2},3\right].$$

Точок, у яких $f'\left(x\right)$ не існує, немає. Обчислимо $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(1\right)$, $f\left(3\right)$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{25},\ f\left(1\right)=\frac{1}{4},\ f\left(3\right)=\frac{3}{100}.$$

Таким чином, $M=\dfrac{1}{4}$ – найбільше, а $m=\dfrac{3}{100}$ – найменше значення даної функції на $\left[\dfrac{1}{2},3\right]$. Оскільки $b-a=3-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$, маємо:

$$\frac{3}{100}\cdot\frac{5}{2}\le\int\limits_{\frac{1}{2}}^{3}\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2}\le\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2},\text{ або } 0,075\le\int\limits_{\frac{1}{2}}^{3}\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2}\le 0,625.$$

Відповідь: $0,075\le\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{3}\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2}\le 0,625.$

Приклад 3. Знайти середнє значення функції $f\left(x\right)=\dfrac{x}{5^x}$ на відрізку $\left[0,1\right]$.

Розв'язання. Якщо $f\left(x\right)$ неперервна на $\left[a,b\right]$, то її середнє значення на $\left[a,b\right]$ обчислюється за формулою: $f\left(\xi\right)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int\limits_a^b f\left(x\right)\cdot dx$, де $\xi\in\left[a,b\right]$.

Розглянемо інтеграл:

$$\int_0^1 \frac{x}{5^x}dx = \int_0^1 x5^{-x}dx = \left\| \begin{matrix} U = x, & dU = dx, \\ dV = 5^{-x}dx, & V = \dfrac{-5^{-x}}{\ln 5} \end{matrix} \right\| = -\frac{x5^{-x}}{\ln 5}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{\ln 5}\int_0^1 5^{-x}dx =$$

$$= -\frac{x5^{-x}}{\ln 5}\Bigg|_0^1 - \frac{5^{-x}}{\ln^2 5}\Bigg|_0^1 = -\frac{5^{-1}}{\ln 5} - \frac{5^{-1}}{\ln^2 5} + \frac{5^0}{\ln^2 5} = -\frac{1}{5\ln 5} - \frac{1}{5\ln^2 5} + \frac{1}{\ln^2 5} = \frac{4-\ln 5}{5\ln^2 5}.$$

Оскільки $b - a = 1$, то $f(\xi) = \dfrac{4-\ln 5}{5\ln^2 5}$.

Відповідь: $f(\xi) = \dfrac{4-\ln 5}{5\ln^2 5}$.

Приклад 4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y = 4 - x^2, \quad y = 8 - 5x^2.$$

ор-

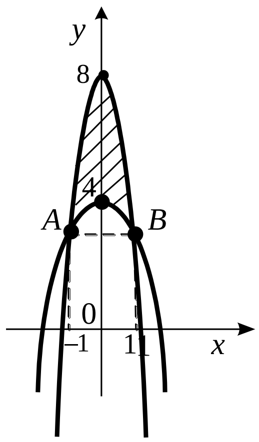


Рисунок 6.1

Розв'язання. При розв'язанні задач на обчислення площ плоских фігур у декартовій системі координат необхідно виконати такі дії:

1) побудувати лінії, що обмежують фігуру, й знайти точки їхнього перетину;
2) записати формулу для обчислення площі;
3) обчислити площу.

Зобразимо фігуру (рис. 6.1). Знайдемо координати точок A і B перетину парабол: $\begin{cases} y = 8 - 5x^2, \\ y = 4 - x^2, \end{cases}$ $\Rightarrow 8 - 5x^2 = 4 - x^2, 4x^2 = 4, x^2 = 1, x_{1,2} = \pm 1$. Таким чином, $A(-1;3)$, $B(1;3)$.

Площа плоскої фігури, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, і неперервними лініями $y = f_1(x)$ й $y = f_2(x)$, причому $f_1(x) \le f_2(x)$ $\forall x \in [a,b]$, обчислюється за формулою: $$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx.$$

У деяких випадках права та ліва межі $(x = b$ та $x = a)$ можуть вироджуватися в точки перетину кривих $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$. Саме цей випадок маємо в нашому прикладі. Тоді

$$S = \int_{-1}^{1} \left[\left(8 - 5x^2\right) - \left(4 - x^2\right) \right] dx = \int_{-1}^{1} \left(8 - 5x^2 - 4 + x^2\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(4 - 4x^2\right) dx =$$

$$= \left(4x - \frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 4 - \frac{4}{3} + 4 - \frac{4}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Відповідь: $\frac{16}{13}$.

Приклад 5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = 3 \quad (y \geq 3) \qquad \text{і} \qquad \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t. \end{cases}$$

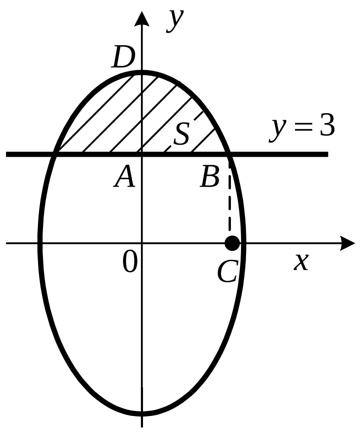


Рисунок 6.2

Розв'язання. Фігура є сегмент еліпса (рис. 6.2). Оскільки фігура симетрична відносно осі Oy, обчислимо площу її половини, а потім, подвоївши її, знайдемо площу S всієї фігури.

Очевидно, $\frac{S}{2} = S_1 - S_2$, де S_1 – площа криволінійної трапеції $ODBC$, S_2 – площа прямокутника $OABC$. Знайдемо точку B – точку перетину еліпса й прямої: $3\sqrt{2}\sin t = 3 \Rightarrow$

$$\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ t = \frac{\pi}{4}, \ x = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 2.$$

Таким чином, $B(2;3)$, відповідне значення параметру $t = \frac{\pi}{4}$. Знайдемо значення параметра t в точці D: $0 = 2\sqrt{2}\cos t, \ \cos t = 0, \ t = \frac{\pi}{2}$.

Для обчислення площі криволінійної трапеції $ODBC$ будемо використовувати таку формулу: $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt.$

За цією формулою обчислюється площа криволінійної трапеції, що обмежена кривою, яка задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ двома прямими $x = a, x = b$ та відрізком осі OX $(a \le x \le b)$. Межі інтегрування t_1 й t_2 визначаються з рівностей $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

Використовуючи зазначену вище формулу й межі інтегрування $t_1 = \frac{\pi}{2}$ та $t_2 = \frac{\pi}{4}$, знайдемо S_1 – площу криволінійної трапеції $ODBC$:

$$S_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} 3\sqrt{2}\sin t\left(2\sqrt{2}\cos t\right)' dt = -12\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt = -12\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt =$$

$$= -6\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2t) dt = -6\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = -6\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + 3.$$

S_2 – площа прямокутника $OABC$, тому $S_2 = OA \cdot OC = 3 \cdot 2 = 6.$ Тоді

$$\frac{S}{2} = S_1 - S_2 = \frac{3}{2}\pi + 3 - 6 = \frac{3}{2}\pi - 3, \text{ а } S = 2\left(\frac{3}{2}\pi - 3\right) = 3\pi - 6.$$

Відповідь: $3\pi - 6.$

Приклад 6. Обчислити площу фігури, що обмежена лінією

$$\rho = a\sin 3\varphi \quad (a > 0).$$

Розв'язання. Зобразимо графік функції $\rho = a\sin 3\varphi\,(a > 0)$. Період цієї функції $T = \frac{2\pi}{3}$. Якщо φ змінюється від $-\pi$ до π, радіус-вектор описує три рівних пелюстки кривої. При цьому припустимими значеннями для φ є ті, при яких $\sin 3\varphi \ge 0,$ тобто

$$2\pi k \le 3\varphi \le 2\pi k + \pi, \quad \frac{2\pi k}{3} \le \varphi \le \frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{3}, \quad k \in Z.$$

Одна з пелюсток $(k=0)$ описується при зміні φ від 0 до $\dfrac{\pi}{3}$. Складемо таблицю й побудуємо графік (рис. 6.3).

φ	0	$\dfrac{\pi}{18}$	$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{9}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{2\pi}{9}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$
ρ	0	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	0

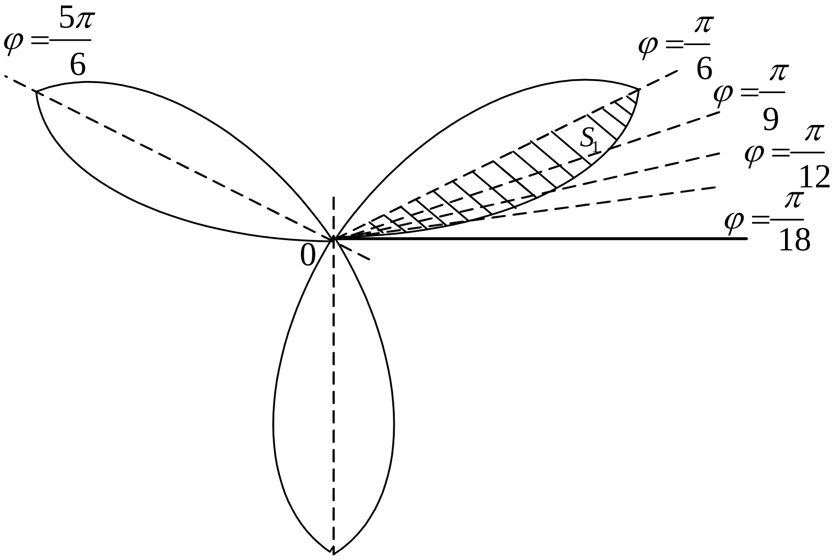


Рисунок 6.3

Побудуємо, користуючись періодичністю, інші пелюстки. Оскільки пелюстки симетричні, то $S=6S_1$, де S_1 – площа половини пелюстки. При знаходженні шуканої площі використовуємо формулу для обчислення площі криволінійного сектора:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Обчислимо площу S_1 половини пелюстки:

$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}a^2\sin^2 3\varphi\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\cos 6\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{4}\left(\varphi-\frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{a^2\pi}{24}, \text{ звідки } S=6S_1=6\cdot\frac{a^2\pi}{24}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

Відповідь: $\frac{\pi a^2}{4}$.

Приклад 7. Обчислити довжину дуги кривої

$$y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x,\quad 0\le x\le\frac{9}{16}.$$

Розв'язання. Якщо плоска крива задана рівнянням $y=y(x)$ і $y'(x)$ неперервна на $[a,b]$, то довжина дуги цієї кривої обчислюється за формулою:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx,$$

де a й b - абсциси початкової й кінцевої точок дуги.

У нашому прикладі $y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$(y')^2=\frac{(1-x)^2}{1-x^2}=\frac{1-x}{1+x},\quad 1+(y')^2=1+\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1+x}.$$

Тоді $l=\int_0^{\frac{9}{16}}\sqrt{\frac{2}{1+x}}dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{9}{16}}\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=2\sqrt{2}\sqrt{1+x}\Big|_0^{\frac{9}{16}}=2\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{9}{16}}-2\sqrt{2}=$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{5}{4}-1\right)=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Приклад 8. Обчислити довжину дуги кривої

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Розв'язання. Якщо крива описується рівняннями в параметричній формі $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $x'(t)$ і $y'(t)$ неперервні на $[t_1, t_2]$, то довжина дуги цієї кривої знаходиться за формулою:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)^2\right) + \left(y'(t)^2\right)} dt .$$

Оскільки $x'(t) = a(1 - \cos t,)$, $y'(t) = a \sin t$, то

$$\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 = a^2 (1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2 \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right) =$$

$$= 2a(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} .$$

Тоді довжина дуги кривої

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4a + 4a = 8a.$$

Відповідь: $8a$.

Приклад 9. Обчислити довжину дуги кривої $\rho = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$.

Розв'язання. Якщо крива задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ і $\rho'(\varphi)$ неперервна на $[\alpha, \beta]$, то довжина дуги цієї кривої обчислюється за формулою:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2} d\varphi,$$

де α й β значення полярного кута φ на кінцях дуги $(\alpha < \beta)$.

У цьому прикладі в умові не задані значення змінної φ на кінцях дуги, тобто необхідно знайти довжину всієї лінії, що описана заданим рівнянням. З'ясуємо, як змінюється полярний кут φ, якщо радіус-вектор описує криву $\rho = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$.

Припустимими значеннями для φ є ті, при яких $\cos \frac{\varphi}{3} \geq 0,$ тобто

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi k \le \frac{\varphi}{3} \le \frac{\pi}{2}+2\pi k, \quad -\frac{3\pi}{2}+6\pi k \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}+6\pi k, \; k \in Z.$$

Оскільки функція парна, графік цієї функції буде симетричний щодо полярної осі, отже, при знаходженні довжини дуги лінії можна обчислити її довжину при зміні φ від 0 до $\frac{3\pi}{2}$ (при $k=0$) і помножити її на два.

Для нашого прикладу $\rho'(\varphi) = -3a\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3} = -a\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}$,

$\left(\rho'(\varphi)\right)^2 + \left(\rho(\varphi)\right)^2 = a^2\cos^4\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3} + a^2\cos^6\frac{\varphi}{3} = a^2\cos^4\frac{\varphi}{3}$. Тоді

$$l = 2\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^4\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi = 2a\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\cos^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi = 2a\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(1+\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi =$$

$$= a\left(\varphi + \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3}{2}a\pi.$$

Відповідь: $\frac{3}{2}a\pi$.

Приклад 10. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі OY фігури, обмеженої лініями $y=x,\; x^2=4y$.

Розв'язання. Якщо плоска фігура, обмежена прямими $x=a, x=b\,(a<b)$ й неперервними лініями $y=f_1(x)$ й $y=f_2(x)$, причому

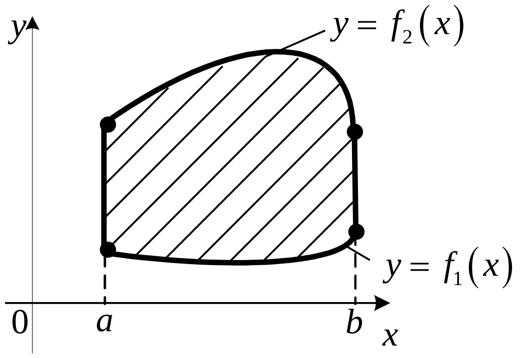


Рисунок 6.4

$f_1(x)\le f_2(x), \forall x\in[a,b]$ (рис. 6.4), обертається навколо осі OX, то об'єм отриманого тіла обертання обчислюється за формулою

$$V_{ox} = \pi\int_a^b\left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx.$$

Якщо плоска фігура, обмежена прямими

$$y=c, \quad y=d, \quad (c<d)$$

й неперервними лініями $x=\varphi_1(y)$ й $x=\varphi_2(y)$, причому $\varphi_1(y)\le\varphi_2(y)$ $\forall y\in[c,d]$ (рис. 6.5), обертається навколо осі OY, то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою:

$$V_{oy}=\pi\int_c^d\left[\varphi_2^2(y)-\varphi_1^2(y)\right]dy.$$

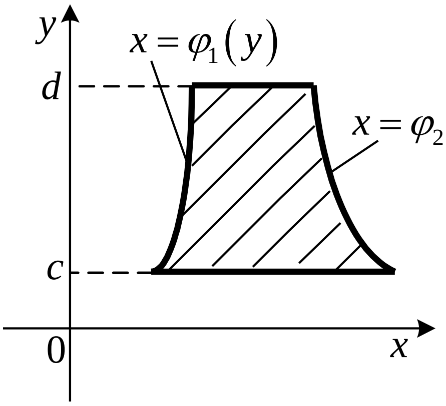


Рисунок 6.5

Побудуємо лінії $y=x$ і $y=\frac{x^2}{4}$ (рис. 6.6). Знайдемо точки A й B перетину параболи та прямої:

$$\begin{cases}x^2=4y,\\ y=x,\end{cases}$$

Звідки $y^2=4y,\ y^2-4y=0,\ y(y-4)=0,\quad y_1=0,\quad y_2=4,\ x_1=0,\quad x_2=4.$

Таким чином, $A(0;0)$, $B(4;4)$.

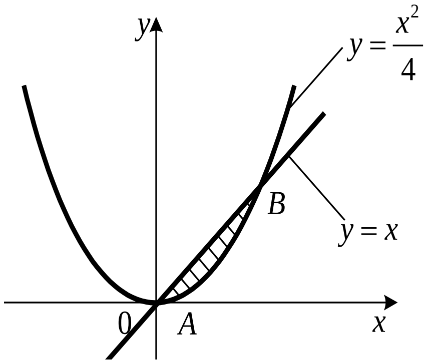


Рисунок 6.6

Обертання відбувається навколо осі OY. Скористаємося зазначеною вище формулою:

$$V_{oy}=\pi\int_0^4\left(4y-y^2\right)dy=\pi\left(2y^2-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=$$

$$=\pi\left(32-\frac{64}{3}\right)=\frac{32\pi}{3}.$$

Відповідь: $\frac{32\pi}{3}$.

Приклад 11. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$.

Розв'язання. Невласні інтеграли I та II роду досліджуються на збіжність або безпосереднім обчисленням їх, або з використанням достатніх ознак збіжності. Даний інтеграл є невласним інтегралом I роду. За означенням невласний інтеграл I роду:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

де $f(x)$ неперервна при $a \le x < +\infty$.

Якщо існує кінцева границя в правій частині цієї рівності, то невласний інтеграл називається збіжним, у протилежному випадку – розбіжним. Використовуючи це означення, одержимо:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \operatorname{arctg} x\, d(\operatorname{arctg} x) = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2}\right|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}^2 b - \operatorname{arctg}^2 0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Отже, невласний інтеграл збігається.

Відповідь: інтеграл збігається.

Приклад 12. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Розв'язання. Це невласний інтеграл II роду. За означенням, якщо функція $f(x)$ неперервна на $(a,b]$, у точці $x=a$ має нескінченний розрив, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Якщо існує кінцева границя в правій частині цієї рівності, то невласний інтеграл називається збіжним, у протилежному випадку – розбіжним.

У нашому випадку підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x\ln^3 x}$ необмежена в околі точки $x=1$ та інтегровна на $[1+\varepsilon, e]$ $(\varepsilon>0)$, тому що неперервна на цьому проміжку. Тому, за означенням

$$\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^e \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\right|_{1+\varepsilon}^e =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2\ln^2 e} + \frac{1}{2\ln^2(1+\varepsilon)}\right) = \infty.$$

Тобто інтеграл розбігається.

Відповідь: інтеграл розбігається.

Контрольні завдання за темою
«Визначений інтеграл і його застосування»

Завдання 1. Обчислити інтеграли:

1. а) $\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$, **б)** $\int\limits_1^e \frac{\ln x dx}{\sqrt[3]{x}}$.

2. а) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$, **б)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}dx$.

3. а) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$, **б)** $\int\limits_0^{\pi} (1-8x^2)\cos 4x dx$.

4. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$, **б)** $\int\limits_0^3 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

5. а) $\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, **б)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$.

6. а) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}$, **б)** $\int\limits_0^3 xe^{-5x}dx$.

7. а) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$, **б)** $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

8. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{5-2\sin x+\sin^2 x}$, **б)** $\int\limits_0^{2\pi} \left(2x^2-15\right)\cos 3x dx$.

9. а) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$, **б)** $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$.

10. а) $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{1+4x}}$, **б)** $\int\limits_1^e (1+\ln x)^2 dx$.

11. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$, **б)** $\int\limits_0^1 x^3 e^{-x^2} dx$.

12. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, **б)** $\int\limits_1^2 x\ln^2 xdx$.

13. а) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$, **б)** $\int\limits_0^1 e^{-x}\sin \pi xdx$.

14. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{1+\sin x+\cos x}$, **б)** $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}$.

15. а) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{4-x^2}dx$, **б)** $\int\limits_1^3 x\ln xdx$.

16. а) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$, **б)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

17. а) $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}$, **б)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2+6\right)\sin 3xdx$.

18. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$, **б)** $\int\limits_0^1 \arccos xdx$.

19. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4-3\cos x}$, **б)** $\int\limits_0^1 xe^{3x}dx$.

20. а) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$, **б)** $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin x dx$.

21. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$, **б)** $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x \arcsin x dx$.

22. а) $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx$, **б)** $\int\limits_1^2 x^2 \ln x dx$.

23. а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$, **б)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x} dx$.

24. а) $\int\limits_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\, dx$, **б)** $\int\limits_{-1}^1 \operatorname{arctg} x dx$.

25. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$, **б)** $\int\limits_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx$.

26. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+3\cos x}$, **б)** $\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin x dx$.

27. а) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$, **б)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x} dx$.

28. а) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$, **б)** $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^5} dx$.

29. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$, **б)** $\int\limits_2^3 (x-1)\ln^2(x-1) dx$.

30. а) $\int\limits_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} \frac{dx}{1+\cos x}$, **б)** $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} x \arccos x dx$.

Завдання 2. Оцінити визначений інтеграл:

1. $\int\limits_{1}^{4} \left(x^2 + \frac{16}{x} - 16 \right) dx$.

2. $\int\limits_{1}^{4} \left(2\sqrt{x} - x \right) dx$.

3. $\int\limits_{1}^{4} \left(4 - x - \frac{4}{x^2} \right) dx$.

4. $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{8 + x^3} dx$.

5. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5 + 2\sin x}}$.

6. $\int\limits_{-2}^{2} \left(-3x^4 + 6x^2 \right) dx$.

7. $\int\limits_{0}^{4} \left(x + 2\sqrt{x} \right) dx$.

8. $\int\limits_{0}^{4} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) dx$.

9. $\int\limits_{0}^{1} \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2} dx$.

10. $\int\limits_{0}^{1} \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} dx$.

11. $\int\limits_{-6}^{8} \sqrt{100 - x^2} dx$.

12. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin 2x - x \right) dx$.

13. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 3\cos^2 x}$.

14. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

15. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} dx$.

16. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(1 + \sin^2 x \right) dx$.

17. $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} x^2 e^{-x^2}\,dx$.

18. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$.

19. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$.

20. $\int\limits_{1}^{9} \left(x+4\sqrt{x}+5\right)dx$.

21. $\int\limits_{-1}^{2} \left(3-x-\frac{4}{(x+2)^2}\right)dx$.

22. $\int\limits_{0}^{3} \frac{10x}{1+x^2}\,dx$.

23. $\int\limits_{2}^{4} \left(2x^2+\frac{108}{x}-59\right)dx$.

24. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(8x+\frac{4}{x^2}-15\right)dx$.

25. $\int\limits_{-1}^{7} \left(x-4\sqrt{x+2}+8\right)dx$.

26. $\int\limits_{-2}^{4} \sqrt[3]{2x^2(x-6)}\,dx$.

27. $\int\limits_{1}^{5} \left(2\sqrt{x-1}-x+2\right)dx$.

28. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{10x+10}{x^2+2x+2}\,dx$.

29. $\int\limits_{-5}^{1} \frac{-2x^2-6}{x^2+2x+5}\,dx$.

30. $\int\limits_{-3}^{3} \frac{2\left(x^2+3\right)}{x^2-2x+5}\,dx$.

Завдання 3. Знайти середнє значення функції на заданому відрізку:

1. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{25x^2+11}}$, $[1,2]$.

2. $f(x)=\frac{2}{e^x+1}$, $[0,2]$.

3. $f(x)=\frac{\sin 2x}{3-\cos^2 x}$, $[0,1]$.

4. $f(x)=\frac{1}{x^3}\cos\left(\frac{4}{x^2}\right)$, $\left[\frac{4}{\pi},\frac{8}{\pi}\right]$.

5. $f(x)=\frac{x}{1+x^4}$, $[0,1]$.

6. $f(x)=\cos^3 x\,\sin 2x$, $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$.

7. $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$, $[1,2]$.

8. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{9x^2-6x+10}}$, $[0,1]$.

9. $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$, $\left[1,\sqrt{e}\right]$.

10. $f(x)=\sin^3 x$, $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

11. $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$, $[-1,0]$.

12. $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^6}$, $[0,1]$.

13. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}$, $[2,3]$.

14. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, $[1,3]$.

15. $f(x)=\dfrac{\sin(\ln x)}{x}$, $[1,e]$.

16. $f(x)=\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{x^2}$, $\left[\dfrac{1}{\pi},\dfrac{2}{\pi}\right]$.

17. $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $[0,2]$.

18. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$, $[0,16]$.

19. $f(x)=\sin^2 x$, $[0,\pi]$.

20. $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $\left[1,e^3\right]$.

21. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$, $[0,1]$.

22. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}$, $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$.

23. $f(x)=\sqrt{\cos x-\cos^3 x}$, $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

24. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}$, $\left[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{4}\right]$.

25. $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+3x-2}$, $[2,3]$.

26. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{16\cos^2 x+9}}$, $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

27. $f(x)=\dfrac{7^{3+2\sqrt{1-3x}}}{\sqrt{1-3x}}$, $[-1,0]$.

28. $f(x)=\dfrac{3^x}{3+9^x}$, $[0,1]$.

29. $f(x)=\dfrac{\sin\dfrac{x}{4}}{1+25\cos^2\dfrac{x}{4}}$, $[0,\pi]$.

30. $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x(3\operatorname{tg}x+1)}$, $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Завдання 4. Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями. Зробити рисунок:

1. а) $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$, **б)** $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x=2,(x\geq 2)$,

в) $\rho=2\cos 4\varphi$.

2. а) $y=\dfrac{16}{x^2}$**,** $y=17-x^2$**, б)** $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=6\sin t, \end{cases}$ $y=3,(y\geq 3)$**, в)** $\rho=1+\cos 3\varphi$**.**

3. а) $y=2x-x^2+3$**,** $y=x^2-4x+3$**, б)** $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$ $x=6\sqrt{3},\left(x\geq 6\sqrt{3}\right)$**,**

в) $\rho=3-\cos 2\varphi$**.**

4. а) $y=x^2-1$**,** $y=4x^2-4$**, б)** $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases}$ $y=4,(0\leq x\leq 8\pi, y\geq 4)$**,**

в) $\rho=1+\sin 3\varphi$**.**

5. а) $x=4-(y-1)^2$**,** $x=y^2-4y+3$**, б)** $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y=2,(y\geq 2)$**,**

в) $\rho=2+\cos 2\varphi$**.**

6. а) $y=2-x^2$**,** $y=5-4x^2$**, б)** $\begin{cases} x=32\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$ $x=4,(x\geq 4)$**, в)** $\rho=2-\sin 2\varphi$**.**

7. а) $y=\sqrt{4-x^2}$**,** $y=0, x=0, x=1$**,**

б) $\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t), \end{cases}$ $y=6,(0\leq x\leq 12\pi, y\geq 6)$**, в)** $\rho=5-\cos 4\varphi$**.**

8. а) $y=e^x$**,** $y=e^{-x}$**,** $x=1$**, б)** $\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=4\sin t, \end{cases}$ $y=2\sqrt{3},\left(y\geq 2\sqrt{3}\right)$**,**

в) $\rho=3(1+\sin\varphi)$**.**

9. а) $y=(x-1)^2$**,** $y^2=x-1$**, б)** $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x=1,(x\geq 1)$**,**

в) $\rho=2+\sin 3\varphi$**.**

10. а) $y=\sin x$**,** $y=\cos x$**,** $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{4}$**, б)** $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ $y=1,(0\leq x\leq 2\pi, y\geq 1)$**,**

в) $\rho=1-\sin 2\varphi$**.**

11. а) $y=2x-x^2$**,** $y=-x$**, б)** $\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=4\sin t, \end{cases}$ $y=2\sqrt{3},\left(y\geq 2\sqrt{3}\right)$**,**

в) $\rho=2+\cos\varphi$**.**

12. а) $y=(x-2)^3$**,** $y=4x-8$**, б)** $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$ $x=2,(x\geq 2)$**, в)** $\rho=3+\cos\varphi$**.**

13. а) $x^2-y^2=-4$**,** $x^2+3y=0$**, б)** $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$ $y=3,(0\leq x\leq 4\pi, y\geq 3)$**,**

в) $\rho=1-\cos 3\varphi$**.**

14. а) $y=2^x$**,** $y=-x^2$**,** $x=0, x=3$**, б)** $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t, \end{cases}$ $x=3\sqrt{3},\left(x\geq 3\sqrt{3}\right)$**,**

в) $\rho=2+\sin\varphi$**.**

15. а) $y=5+4x-x^2$**,** $y=2x+2$**,** $y=0$**; б)** $\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=2\sin t, \end{cases}$ $y=\sqrt{3},\left(y\geq\sqrt{3}\right)$**;**

в) $\rho=1+\sin 3\varphi$**.**

16. а) $x=\sqrt{4-y^2}$**,** $x=0$**,** $y\geq 1$**, б)** $\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t), \end{cases}$ $y=9,(0\leq x\leq 12\pi, y\geq 9)$**,**

в) $\rho=2-\cos 3\varphi$**.**

17. а) $y=-x^2-2x-1$**,** $y=-1$**, б)** $\begin{cases} x=8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x=4,(x\geq 4)$**,**

в) $\rho=3-\sin 3\varphi$**.**

18. а) $x=y^2-4y+4$**,** $x=2$**, б)** $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=8\sin t, \end{cases}$ $y=4,(y\geq 4)$**, в)** $\rho=3+\sin\varphi$**.**

19. а) $xy=9$**,** $y+x-10=0$**, б)** $\begin{cases} x=10(t-\sin t), \\ y=10(1-\cos t), \end{cases}$ $y=15,(0\leq x\leq 20\pi, y\geq 15)$**,**

в) $\rho=4+\cos 3\varphi$**.**

20. а) $x=4-y^2$**,** $x=y^2-2y$**, б)** $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y=4,(y\geq 4)$**, в)** $\rho=1-\sin\varphi$**.**

21. а) $x=(y-2)^3$**,** $x=4y-8$**, б)** $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t, \end{cases}$ $x=1,(x\geq 1)$**, в)** $\rho=1+\cos\varphi$**.**

22. а) $x^2+y^2=16$**,** $x^2\leq 12(y-1)$**,** $\left(y\geq\dfrac{x^2}{12}+1\right)$**, б)** $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=6\sin t, \end{cases}$ $y=3,(y\geq 3)$**,**

в) $\rho=2+\sin 2\varphi$**.**

23. а) $y=(x+1)^2$, $y^2=x+1$, **б)** $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t, \end{cases}$ $x=3\sqrt{3},\left(x\ge 3\sqrt{3}\right)$,

в) $\rho=1+\cos 2\varphi$.

24. а) $y=\sqrt{4-x^2}$, $x=0$, $y=0$, $x=-1$,

б) $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$ $y=2,\left(0\le x\le 4\pi, y\ge 2\right)$, **в)** $\rho=1-\cos\varphi$.

25. а) $y=\arccos x$, $x=0, y=0$, **б)** $\begin{cases} x=8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x=\sqrt{2},\left(x\ge\sqrt{2}\right)$,

в) $\rho=3+\cos 4\varphi$.

26. а) $x^2+y^2+2y=0, y=x,\left(y\ge x\right)$, **б)** $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t, \\ y=5\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $x=5,\left(x\ge 5\right)$,

в) $\rho=2(1+\cos\varphi)$.

27. а) $x^2+y^2=5$, $x^2+4y=0$, $y\le -\frac{1}{4}x^2$,

б) $\begin{cases} x=8(t-\sin t), \\ y=8(1-\cos t), \end{cases}$ $y=12,\left(0\le x\le 16\pi, y\ge 12\right)$, **в)** $\rho=2-\sin 4\varphi$.

28. а) $y=\cos x$, $y=x-\frac{\pi}{2}$, $x=0$, **б)** $\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=4\sin t, \end{cases}$ $x=3\sqrt{3},\left(x\ge 3\sqrt{3}\right)$,

в) $\rho=\sqrt{2}(1+\cos\varphi)$.

29. а) $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$, **б)** $\begin{cases} x=24\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$ $x=9\sqrt{3},\left(x\ge 9\sqrt{3}\right)$,

в) $\rho=1+\cos 4\varphi$.

30. а) $y=4x-x^2$, $x\le 2, y=0$, **б)** $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$ $y=3,\left(0\le x\le 4\pi, y\ge 3\right)$,

в) $\rho=4(1+\cos\varphi)$.

Завдання 5. Обчислити довжини дуг кривих, що задані рівняннями:

1. а) $y=\arcsin e^{-x}$, $0\le x\le 1$, **б)** $\begin{cases} x=3t-1, \\ y=4t+2, \end{cases}$ $0\le t\le 1$,

в) $\rho=\sqrt{3}e^{2\varphi}$, $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}$.

2. а) $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$, $\dfrac{1}{4}\le x\le 1$, **б)** $\begin{cases} x=t^2-1, \\ y=t^2+t+1, \end{cases}$ $-\dfrac{1}{4}\le t\le 0$,

в) $\rho=6\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$.

3. а) $y=\ln\sin x$, $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, **б)** $\begin{cases} x=8t^3, \\ y=6t^2-3t^4, \end{cases}$ $0\le t\le\sqrt{2}$,

в) $\rho=a\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$, $0\le\varphi\le\pi$.

4. а) $y=\dfrac{x^2}{2}-1$, $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$, **б)** $\begin{cases} x=6-3t^2, \\ y=4t^3, \end{cases}$ $0\le t\le\sqrt{2}$,

в) $\rho=6\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$, $\pi\le\varphi\le 2\pi$.

5. а) $y=\arcsin(\sin x)$, $0\le x\le\pi$, **б)** $\begin{cases} x=\dfrac{2-t}{2+t}, \\ y=\dfrac{t}{2+t}, \end{cases}$ $1\le t\le 2$,

в) $\rho=2(1+\cos\varphi)$, $\dfrac{\pi}{6}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

6. а) $y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$, $0\le x\le 2$, **б)** $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\dfrac{t}{2}, \\ y=\dfrac{1}{2}\ln\left(4+t^2\right), \end{cases}$ $0\le t\le 2$,

в) $\rho=3\varphi$, $0\le\varphi\le\dfrac{4}{3}$.

7. а) $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, $0\le x\le\dfrac{9}{16}$, **б)** $\begin{cases} x=2\sin^2 t, \\ y=2\cos^2 t, \end{cases}$ $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$,

в) $\rho=3(1+\sin\varphi)$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

8. а) $y=2\left(\sqrt{e^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}\right)$, $0\le x\le 2$, **б)** $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le\pi$,

в) $\rho=4(1-\cos\varphi)$, $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le-\dfrac{\pi}{4}$.

9. а) $y=e^x+5$, $\ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{24}$, **б)** $\begin{cases}x=\arccos t,\\ y=\dfrac{1}{2}\ln\left(1-t^2\right),\end{cases}$ $0\le t\le\dfrac{1}{2}$,

в) $\rho=7e^{\frac{7\varphi}{3}}$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}$.

10. а) $y=\ln x-\ln 2$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$, **б)** $\begin{cases}x=\ln t,\\ y=\arcsin t,\end{cases}$ $\dfrac{1}{e}\le t\le\dfrac{1}{2}$,

в) $\rho=5(1-\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}$.

11. а) $y=\ln\left(x^2-1\right)$, $2\le x\le 3$, **б)** $\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\end{cases}$ $0\le t\le 1$,

в) $\rho=3(1-\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$.

12. а) $y=1+\ln\cos x$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$, **б)** $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$,

в) $\rho=3(1+\sin\varphi)$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

13. а) $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le\dfrac{3}{4}$, **б)** $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$,

в) $\rho=4\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

14. а) $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2}$, $1\le x\le 2$, **б)** $\begin{cases}x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t,\\ y=\left(t^2-2\right)\cos t-2t\sin t,\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$,

в) $\rho=\dfrac{a}{\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

15. а) $y=1-\ln\left(x^2-1\right)$, $3\le x\le 4$, **б)** $\begin{cases}x=2(\cos t+t\sin t),\\ y=2(\sin t-t\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$,

в) $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

16. а) $y = 4 + \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2}$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$,

б) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$, **в)** $\rho = \frac{a}{1 + \cos\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

17. а) $y = \sqrt{(x-1)^3}$, $2 \le x \le 3$, **б)** $\begin{cases} x = e^{-t}\sin 5t, \\ y = e^{-t}\cos 5t, \end{cases}$ $0 \le t \le 1$,

в) $\rho = \frac{a}{\sin^3\frac{\varphi}{3}}$, $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{5\pi}{2}$.

18. а) $y = 1 - \ln\sin x$, $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$, **б)** $\begin{cases} x = 5t\sin 3t, \\ y = 5t\cos 3t, \end{cases}$ $0 \le t \le 1$,

в) $\rho = 7e^{\frac{7\varphi}{12}}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

19. а) $y = 2 - \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2}$, $\frac{1}{9} \le x \le 1$, **б)** $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t, \end{cases}$ $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$,

в) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

20. а) $y = 4 - \arccos x + \sqrt{1 - x^2}$, $0 \le x \le \frac{9}{16}$, **б)** $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$,

в) $\rho = \frac{1}{\varphi}$, $\frac{1}{2} \le \varphi \le 2$.

21. а) $y = 7 - e^x$, $\ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}$, **б)** $\begin{cases} x = e^{-t}(\cos t + \sin t), \\ y = e^{-t}(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $-1 \le t \le 0$,

в) $\rho = 2\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$.

22. а) $y = 5 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \le x \le 2$, **б)** $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$,

в) $\rho = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

23. а) $y=\arccos e^{-x}$, $0\le x\le 1$, **б)** $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3+9, \\ y=2-\frac{t^2}{3}, \end{cases}$ $0\le t\le 3$,

в) $\rho=3\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$.

24. а) $y=\arcsin e^{x}$, $-\ln 7\le x\le -\ln 2$, **б)** $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos t-\frac{\cos 2t}{4}, \\ y=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{4}\sin 2t, \end{cases}$ $\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{2\pi}{3}$,

в) $\rho=2e^{\frac{4\varphi}{3}}$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

25. а) $y=\frac{3-e^{x}-e^{-x}}{2}$, $0\le x\le 3$, **б)** $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(t^2-2t\right), \\ y=\frac{1}{3}(t-1)^3, \end{cases}$ $1\le t\le 2$,

в) $\rho=8\cos^3\frac{\varphi}{3}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

26. а) $x=\sqrt{(y+2)^3}$, $0\le y\le 1$, **б)** $\begin{cases} x=e^{-t}\sin 3t, \\ y=e^{-t}\cos 3t, \end{cases}$ $0\le t\le 1$,

в) $\rho=1+\cos\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

27. а) $y=\ln\frac{5}{2x}$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$, **б)** $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t, \\ y=2\sin t-\sin 2t, \end{cases}$ $0\le t\le\pi$,

в) $\rho=1-\sin\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le-\frac{\pi}{6}$.

28. а) $y=\frac{1}{2}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2-1}\right)$, $\frac{1}{2}\le x\le 1$, **б)** $\begin{cases} x=e^{t^2}\cos\left(t^2\right), \\ y=e^{t^2}\sin\left(t^2\right), \end{cases}$ $0\le t\le 2$,

в) $\rho=1-\cos\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

29. а) $y=3+\operatorname{ch}x$, $0\le x\le 1$, **б)** $\begin{cases} x=\frac{1}{8}t^8-1, \\ y=\frac{1}{12}t^{12}+1, \end{cases}$ $0\le t\le 1$,

в) $\rho = 4\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

30. а) $x = \dfrac{1}{4}\ln\left(4y + \sqrt{16y^2 - 1}\right)$, $1 \le y \le 2$, **б)** $\begin{cases} x = 3t\sin 5t, \\ y = 3t\cos 5t, \end{cases}$ $-1 \le t \le 0$,

в) $\rho = 2\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$.

Завдання 6. Обчислити об'єми тіл обертання. Зробити рисунок:

1. $y = x^2$, $y = x + 2$, $(x \ge 0)$. $V_{ox} - ?$

2. $y = 1 - x^2$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 1$. $V_{ox} - ?$

3. $y = x^2 + 1$, $y = 2$. $V_{oy} - ?$

4. $y^2 = x$, $y = 2$, $x = 0$. $V_{oy} - ?$

5. $y = 2x - x^2$, $y = 4$, $x = 0, x = 2$. $V_{ox} - ?$

6. $y = 3 - x^2$, $y = 1$, $x = 0, x = 1$. $V_{ox} - ?$

7. $y = x^2 + 4$, $y = 6 - x^2$. $V_{ox} - ?$

8. $yx = 1$, $y = 0$, $x = 1, x = 2$. $V_{ox} - ?$

9. $y = x^2 + 4$, $y = -x$, $x = -1, x = 0$. $V_{ox} - ?$

10. $y - 1 = x^3$, $y = 1$, $x = 1$. $V_{ox} - ?$

11. $y = x$, $y = -2x$, $x = 1$. $V_{oy} - ?$

12. $y^2 = x$, $y = 3$, $x = 0, x = 1$. $V_{ox} - ?$

13. $y = 2x - x^2$, $x + y = 2$, $x = 0$. $V_{ox} - ?$

14. $y^2 = x - 1$, $y = 0$, $y = 1, x = 0$. $V_{oy} - ?$

15. $x^2 = y - 2$, $y = 0$, $x = 0, x = 1$. $V_{oy} - ?$

16. $y = (x - 1)^2$, $y = 1$, $x \le 1$. $V_{ox} - ?$

17. $y = (x + 1)^2$, $y = 0$, $x = 0, x = -2$. $V_{ox} - ?$

18. $y^3 = x^2$, $y = x$. $V_{oy} - ?$

19. $x^2 = y^3$, $y = x$, $y = -x$. $V_{ox} - ?$

20. $y + 1 = -x^2$, $y = -2$. $V_{oy} - ?$

21. $y = (x+2)^2$, $y = 0$, $x = 0, x = -5$. $V_{ox} - ?$

22. $y^2 = x$, $x + y = 2$, $(y \geq 0)$. $V_{oy} - ?$

23. $y = (x-1)^2$, $y = x + 1$, $(x \leq 1)$. $V_{ox} - ?$

24. $y = \ln x$, $y = 0$, $y = 1, x = 0$. $V_{oy} - ?$

25. $y = e^x$, $y = 1$, $x = 1$. $V_{ox} - ?$

26. $y = \sin x$, $y = 1$, $x = 0$. $V_{ox} - ?$

27. $y = x^2 - x$, $y = -1$, $x = 0, x = 1$. $V_{ox} - ?$

28. $y = 2x - x^2$, $y = 5 - x$, $x = 0, x = 1$. $V_{ox} - ?$

29. $y^2 = x - 3$, $y = 1, y = -1$, $x = 0$. $V_{oy} - ?$

30. $y = (x+2)^2$, $y = 9$, $x \leq 0$. $V_{ox} - ?$

Завдання 7. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1. а) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + x}$, **б)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.

2. а) $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5 + 1}}$, **б)** $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$.

3. а) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(2x+1)dx}{x^2(1+x)}$, **б)** $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$.

4. а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x dx}{x^2 + 1}$, **б)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$.

5. а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{\left(4x^2+9\right)^3}}$, **б)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

6. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\operatorname{arc\,tg} x}$, **б)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt[7]{1-x^2}}$.

7. а) $\int\limits_{8}^{+\infty} \frac{xdx}{3x^2+1}$, **б)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$.

8. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^3}dx$, **б)** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

9. а) $\int\limits_{\frac{6}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$, **б)** $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

10. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-2x}dx$, **б)** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$.

11. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{5x+7}{\sqrt{x^5}}dx$, **б)** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\, dx$.

12. а) $\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$, **б)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

13. а) $\int\limits_{-e}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2e)\ln^2(x+2e)}$, **б)** $\int\limits_{3}^{6} \frac{dx}{x^2-7x+10}$.

14. а) $\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$, **б)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

15. а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x-3}$, **б)** $\int\limits_{0}^{1} \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$.

16. а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+20}$, **б)** $\int\limits_{0}^{2} \frac{e^x dx}{e^x-1}$.

17. а) $\int\limits_{7}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+12}}$, **б)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{5^x}{1-25^x} dx$.

18. а) $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1-x)}$, **б)** $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

19. а) $\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$, **б)** $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$.

20. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} x e^{3x} dx$, **б)** $\int\limits_{0}^{6} \frac{1}{x^2} \cdot 5^{\frac{2}{x}} dx$.

21. а) $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{arctg}^2 x}$, **б)** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2+x}{x^2-1} dx$.

22. а) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$, **б)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$.

23. а) $\int\limits_{9}^{+\infty} \frac{\ln x-1}{x\sqrt{\ln x}} dx$, **б)** $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

24. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 dx}{5x^4+2}$, **б)** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$.

25. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$, **б)** $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{(1-3x)^2}$.

26. а) $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{3+2\ln(x-2)}{x-2} dx$, **б)** $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$.

27. а) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^4+5}}dx$, **б)** $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^3}$.

28. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x}{\left(x^2+3\right)^2}dx$, **б)** $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

29. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}}dx$, **б)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{2x}dx}{e^x-1}$.

30. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x+1}}$, **б)** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Розділ 7. ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

В цьому розділі посібника, присвяченому темі «Функції кількох змінних», в стислій формі наведені основні відомості з теорії функції кількох змінних на прикладі функції двох змінних. Розрахунково-графічні завдання містять сім завдань за темами: область визначення функції двох змінних, частинні похідні першого та другого порядку, диференціювання неявних та складних функцій, диференціал другого порядку, похідна скалярного поля у напрямку, градієнт, рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, екстремум функції двох змінних, найбільше й найменше значення функції двох змінних у замкненій області.

Метою розділу є допомога студентам у засвоєнні матеріалу теми «Функції кількох змінних», здобутті стійких навичок розв’язування завдань. Рекомендується перед виконанням РГЗ ознайомитись з додатковою літературою [1, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 14].

Контрольні питання

1. Означення функції двох незалежних змінних. Область визначення такої функції.
2. Частинні похідні і повний диференціал функції двох незалежних змінних.
3. Частинні похідні і повний диференціал другого порядку функції двох незалежних змінних.
4. Диференціювання функції кількох змінних, заданої неявно.
5. Диференціювання складної функції двох змінних.
6. Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні.
7. Необхідні та достатні умови існування екстремуму функції двох незалежних змінних.
8. Алгоритм пошуку найбільшого і найменшого значення функції двох незалежних змінних у заданій замкненій області.
9. Скалярні поля. Похідна скалярного поля у напрямі.
10. Градієнт скалярного поля. Зв'язок похідної у напрямі та градієнта.

Зразок розв'язання прикладів контрольного завдання

Приклад 1. Знайти і зобразити на координатній площині область визначення функції $z = \ln\left(x^2 - 5y + 10\right)$.

Розв'язання. Логарифм визначений лише для додатних значень його аргументу, тому $x^2 - 5y + 10 > 0$, звідки $x^2 > 5(y-2)$. Щоб зобразити геометрично область визначення даної функції, побудуємо спочатку її межу, тобто графік функції $x^2 = 5(y-2)$. Це рівняння визначає параболу з вершиною в точці $(0;2)$ та віссю симетрії OY (рис.7.1). Парабола поділяє всю площину XOY на дві частини: внутрішню та зовнішню відносно параболи.

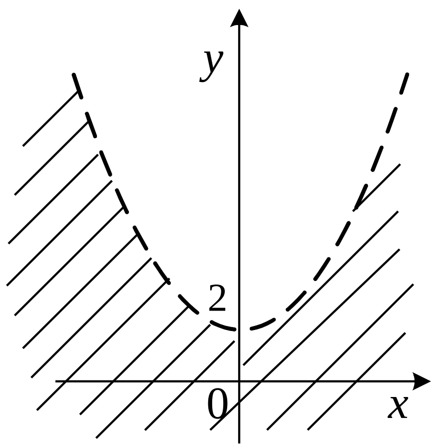


Рисунок 7.1

Для точок однієї із цих частин виконується нерівність $x^2 > 5(y-2)$, а для другої частини – нерівність $x^2 < 5(y-2)$.

На самій параболі $x^2 = 5(y-2)$. Щоб установити, яка із цих двох частин є областю визначення даної функції, тобто в якій частині площіни виконується нерівність $x^2 > 5(y-2)$, досить перевірити цю умову для будь-якої однієї точки, яка не належить параболі. Наприклад, початок координат $O(0;0)$ знаходиться зовні від параболи і задовольняє умові: $0 > 5(0-2)$ або $0 > -10$. Отже, областю визначення даної функції є множина точок площини XOY, які знаходяться зовні від параболи. Сама парабола не належить області визначення функції, бо для точок параболи $x^2 - 5y + 10 = 0$.

Приклад 2. Довести, що функція $z = y\ln\frac{x}{y}$ задовольняє рівнянню:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z\,.$$

Розв'язання. Функцію кількох змінних можна диференціювати за будь-якою змінною, вважаючи всі інші сталими, і за тими самими правилами і формулами, що і функцію однієї змінної. Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$ з $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(y\ln\frac{x}{y}\right)'_x = y\cdot\left(\ln\frac{x}{y}\right)'_x = y\cdot\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{y^2}{x}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(y\ln\frac{x}{y}\right)'_y = (y)'_y\ln\frac{x}{y} + y\left(\ln\frac{x}{y}\right)'_y = \ln\frac{y}{x} + y\cdot\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \ln\frac{x}{y} - 1.$$

Підставляючи вирази частинних похідних в ліву частину заданого рівняння: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\cdot\frac{y}{x} + y\cdot\left(\ln\frac{x}{y} - 1\right) = y + y\ln\frac{x}{y} - y = y\ln\frac{x}{y} = z$, одержимо тотожність. Отже, функція z задовольняє даному рівнянню.

Приклад 3. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x\sqrt{\frac{y}{x}}$ у точці $M_0(1;1;1)$.

Розв'язання. Рівняння поверхні задано у вигляді $z = f(x, y)$. У цьому випадку рівняння дотичної площини у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд: $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, а рівняння нормалі:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Знаходимо: $z'_x = \left(x\sqrt{\frac{y}{x}}\right)'_x = (x)'_x\sqrt{\frac{y}{x}} + x\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)'_x = \sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) =$

$$=\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{y}{2x}\sqrt{\frac{x}{y}}=\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}},\ z'_y=\left(x\sqrt{\frac{y}{x}}\right)'_y=\frac{x}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{y}\right)'_y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Тоді $f'_x(x_0,y_0)=\frac{1}{2}$, $f'_y(x_0,y_0)=\frac{1}{2}$. Отже, шукане рівняння дотичної площини: $z-1=\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)$, або $x+y-2z=0$, а рівняння нормалі:

$$\frac{x-1}{\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{\frac{1}{2}}=\frac{z-1}{-1},\text{ або }\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}.$$

Відповідь: дотична площина: $x+y-2z=0$,

нормаль: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$.

Приклад 4. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $xy^2+x^2z+z^2y=-1$ у точці $M_0(1;0;-1)$.

Розв'язання. Якщо поверхня задана рівнянням $F(x,y,z)=0$, то рівняння дотичної площини у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ поверхні має вигляд: $F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$, а рівняння нормалі: $\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$. Запишемо рівняння поверхні у вигляді $xy^2+x^2z+z^2y+1=0$. Знаходимо: $F'_x=y^2+2xz$, $F'_y=2yx+z^2$, $F'_z=x^2+2zy$. Тоді: $F'_x(M_0)=-2$, $F'_y(M_0)=1$, $F'_z(M_0)=1$. Рівняння дотичної площини: $-2(x-1)+1(y-0)+1(z+1)=0$ або $2x-y-z-3=0$. Рівняння нормалі матиме вигляд: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$.

Відповідь: дотична площина: $2x-y-z-3=0$,

нормаль: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$.

Приклад 5. Знайти повний диференціал другого порядку функції $z=z(x,y)$, заданої рівнянням $x^2+y^2+z^2=4$.

Розв'язання. Повний диференціал другого порядку визначається за формулою: $d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$.

Знайдемо $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Якщо функція $z=z(x,y)$ задана неявно рівнянням $F(x,y,z)=0$, то частинні похідні першого порядку обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

У даному прикладі $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$, тоді:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{2z}=-\frac{y}{z}.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1\cdot z-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x}{z^2}=-\frac{z-\left(-\frac{x}{z}\right)\cdot x}{z^2}=-\frac{z^2+x^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z^2}\left(-\frac{y}{z}\right)=-\frac{xy}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1\cdot z-\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y}{z^2}=-\frac{z-\left(-\frac{y}{z}\right)\cdot y}{z^2}=-\frac{z^2+y^2}{z^3}.$$

Шуканий диференціал:

$$d^2z=-\frac{z^2+x^2}{z^3}dx^2-2\frac{xy}{z^3}dxdy-\frac{z^2+y^2}{z^3}dy^2.$$

Відповідь: $-\frac{z^2+x^2}{z^3}dx^2-2\frac{xy}{z^3}dxdy-\frac{z^2+y^2}{z^3}dy^2$.

Приклад 6. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = x^2 + y^2 + xy$, де $x = \sin 2t$, $y = e^{3t}$.

Розв'язання. Оскільки задана функція є складною функцією однієї незалежної змінної t, то $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$. Після диференціювання функції z за змінними x і y, а функцій x і y за змінною t, одержимо: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x$, $\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t$, $\frac{dy}{dt} = 3e^{3t}$. Підставляючи здобуті вирази похідних до формули похідної $\frac{dz}{dt}$, остаточно маємо:

$$\frac{dz}{dt} = (2x + y) \cdot 2\cos 2t + (2y + x) \cdot 3e^{3t} = \left(2\sin 2t + e^{3t}\right) \cdot 2\cos 2t +$$
$$+\left(2e^{3t} + \sin 2t\right) \cdot 3e^{3t} = 2\sin 4t + e^{3t}(2\cos 2t + 3\sin 2t) + 6e^{6t}.$$

Відповідь: $2\sin 4t + e^{3t}(2\cos 2t + 3\sin 2t) + 6e^{6t}$.

Приклад 7. Знайти $\frac{du}{dx}$, якщо $u = \ln\left(e^x + e^y\right)$, де $y = x^3$.

Розв'язання. Користуючись формулою $\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$, маємо:

$$\frac{du}{dx} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} \cdot 3x^2 = \frac{e^x + 3e^{x^3}x^2}{e^x + e^{x^3}}.$$

Відповідь: $\frac{e^x + 3e^{x^3}x^2}{e^x + e^{x^3}}$.

Приклад 8. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.

Розв'язання. Скористаємось формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Знайдемо необхідні частинні похідні: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}$, $\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$, $\frac{\partial y}{\partial u} = 3$, $\frac{\partial y}{\partial v} = -2$.

Таким чином, $\frac{\partial z}{\partial u} = 2x \cdot \ln y \cdot \frac{1}{v} + \frac{x^2}{y} \cdot 3 = 2\frac{u}{v^2} \cdot \ln(3u - 2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u - 2v)}$,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x \cdot \ln y \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{x^2}{y} \cdot (-2) = 2\frac{u}{v} \cdot \ln(3u - 2v) \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) - \frac{2u^2}{v^2(3u - 2v)} =$$

$$= -\frac{2u^2}{v^3} \ln(3u - 2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u - 2v)}.$$

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial u} = 2\frac{u}{v^2} \cdot \ln(3u - 2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u - 2v)}$,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{2u^2}{v^3} \ln(3u - 2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u - 2v)}.$$

Приклад 9. Знайти екстремум функції $z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y$.

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки функції:

$$\begin{cases} z'_x = 2x - 2y, \\ z'_y = -2x + 4y - 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0, \\ -2x + 4y - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Таким чином, одержали стаціонарну точку $M(1;1)$. Перевіримо виконання достатніх умов в цій точці. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку даної функції: $A = z''_{xx} = 2$, $B = z''_{xy} = -2$, $C = z''_{yy} = 4$, тоді визначник $\Delta = AC - B^2 = 8 - (-2)^2 = 4 > 0$. Таким чином, приходимо до висновку, що в точці $M(1;1)$ екстремум існує, і через те, що $A = 2 > 0$, в точці $M(1;1)$ функція має мінімум. Отже, $z_{\min} = z(1,1) = -1$.

Відповідь: $z_{\min} = z(1,1) = -1$.

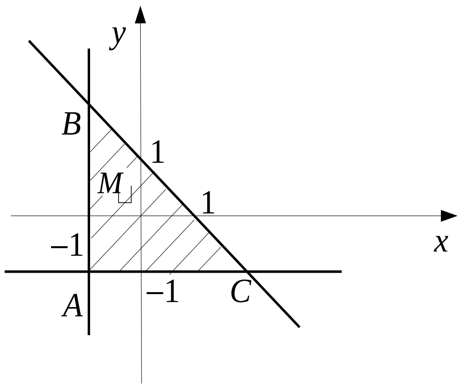


Рисунок 7.2

Приклад 10. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в області D: $x \geq -1,\ y \geq -1,\ x + y \leq 1$.

Розв'язання. Область D – $\triangle ABC$, де $A(-1;-1)$, $B(-1;2)$, $C(2;-1)$ (рис. 7.2). Перш за все з'ясуємо, чи має функція стаціонарні точки всередині області D.

Для цього знаходимо частинні похідні: $z'_x = 2x+1,\ z'_y = 6y-1$.

Із умов $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$ маємо: $\begin{cases} 2x+1=0, \\ 6y-1=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}, \\ y = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$

Таким чином, знайдено одну критичну точку $M_0\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right)$, яка є внутрішньою точкою області D (рис. 7.2). Значення функції в цій точці:

$$z(M_0) = z\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Обчислимо найбільше і найменше значення функції z на межі області D. Межою області D є замкнена ламана лінія $ABCA$, тому необхідні обчислення проведемо по кожній ланці ламаної. Вздовж кожної ланки ламаної функція $z = f(x,y)$ перетворюється на функцію однієї змінної (x або y). Тому задача знаходження найбільшого і найменшого значень функції $z = f(x,y)$ на межі області D зводиться до розшукування найбільшого і найменшого значень функції однієї змінної на відповідному інтервалі.

На відрізку AB: $x = -1 \Rightarrow z|_{AB} = 3y^2 - y$ $(-1 \leq y \leq 2)$. Стаціонарні точки цієї функції знаходимо з рівняння $\left(z|_{AB}\right)'_y = 0$, тобто $6y - 1 = 0$, $y = \frac{1}{6}$, тобто знайдено точку $M_1\left(-1;\frac{1}{6}\right)$. Обчислимо значення функції z в точках A, B і M_1: $z(A)=3+1=4$, $z(M_1)=3\cdot\frac{1}{36}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}$, $z(B)=3\cdot 2^2-2=10$.

Таким чином, на відрізку AB: $z_{найб.}=z(B)=10$, $z_{найм.}=z(M_1)=-\frac{1}{12}$.

На відрізку AC: $y=-1 \Rightarrow z|_{AC}=x^2+x+4$ $(-1\le x\le 2)$. Стаціонарні точки цієї функції знаходимо з рівняння $\left(z|_{AC}\right)'_x=0$, тобто $2x+1=0$, $x=-\frac{1}{2}$. Таким чином, знайдено точку $M_2\left(-\frac{1}{2};-1\right)$. Обчислимо значення функції z в точках M_2 і C: $z(M_2)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+4=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$, $z(C)=2^2+2+4=10$. На відрізку AC: $z_{найб.}=z(C)=10$, $z_{найм.}=z(M_2)=3\frac{3}{4}$.

На відрізку BC: $y=1-x$, $z|_{BC}=x^2+3(1-x)^2+x-(1-x)=$ $=4x^2-4x+2$ $(-1\le x\le 2)$. Стаціонарні точки цієї функції знаходимо з рівняння $\left(z|_{BC}\right)'_x=0$, тобто $8x-4=0$, $x=\frac{1}{2}$. Таким чином, знайдено точку $M_3\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Обчислимо значення функції z в точці M_3: $z(M_3)=1-2+2=1$. На відрізку BC: $z_{найб.}=z(B)=z(C)=10$, $z_{найм.}=z(M_3)=1$.

Порівнюючи одержані результати, приходимо до висновку, що найбільше значення ($z_{найб.}=10$) функція набуває на межі у точках $B(-1;2)$ і $C(2;-1)$, а найменше $\left(z_{найм.}=-\frac{1}{12}\right)$ в середині області D у точці $M_0\left(-1;\frac{1}{6}\right)$.

Відповідь: $z_{найм.}=z\left(-1,\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12}$, $z_{найб.}=z(-1,2)=z(2,-1)=10$.

Приклад 11. Знайти похідну функції $u=\operatorname{arctg} xy$ у точці $M(1;1)$ у напрямі від $M(1;1)$ до $N(2;2)$.

Розв'язання. Скористаємося формулою обчислення похідної у напрямі в точці M для функції $u=u(x,y)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cdot\cos\beta .$$

Оскільки вектор $\overrightarrow{MN}=(1;1)$, то його напрямні косинуси;

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Знайдемо тепер частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ у точці M:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.\frac{y}{1+(xy)^2}\right|_M=\frac{1}{2},\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.\frac{x}{1+(xy)^2}\right|_M=\frac{1}{2}.$$

Отже, шукана похідна дорівнює: $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Приклад 12. Знайти градієнт скалярного поля $u=\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{4}{z^2}$ у точці $M(1;1;4)$.

Розв'язання. За означенням, градієнтом скалярного поля в точці $M(x;y;z)$ називається вектор: $\operatorname{grad} u(M)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cdot\bar{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cdot\bar{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\cdot\bar{k}.$

Знайдемо частинні похідні функції $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ у точці M:

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=-\left.\frac{2}{x^2}\right|_M=-2$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=-\left.\frac{3}{y^2}\right|_M=-3$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=-\left.\frac{8}{z^3}\right|_M=\frac{-8}{4^3}=\frac{-1}{8}$. Отже,

$$\operatorname{grad} u(M) = -2\vec{i} - 3\vec{j} - \frac{1}{8}\vec{k}\,.$$

Відповідь: $\left(-2;-3;-\frac{1}{8}\right)$.

Контрольні завдання за темою «Функції кількох змінних»

Завдання 1. Знайти й зобразити на координатній площині область визначення функції $z = z(x, y)$:

1. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

2. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

3. $z = \ln\left(x^2 + y\right)$.

4. $z = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{y}$.

5. $z = \ln(x + y) + \sqrt{y - x}$.

6. $z = \dfrac{\ln\left(4 - x^2 - y^2\right)}{xy}$.

7. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

8. $z = \dfrac{xy}{x^2 + y}$.

9. $z = \arcsin\dfrac{x}{2} + \sqrt{xy}$.

10. $z = x + \arccos y$.

11. $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$.

12. $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$.

13. $z = \sqrt{y \sin x}$.

14. $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$.

15. $z = \dfrac{y}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{1 - y^2}$.

16. $z = \ln\left(100 - 25x^2 - 4y^2\right)$.

17. $z = \arcsin x + \sqrt{y}$.

18. $z = \sqrt{x + y + 1} + \sqrt{x - y}$.

19. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln\left(x^2 + y^2 - 1\right)$.

20. $z = \ln\left(24 - 4x^2 - 6y^2\right) - \sqrt{xy}$.

21. $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$.

22. $z=\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)\cdot y}}$.

23. $z=\sqrt{x^2-5y-10}$.

24. $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

25. $z=\sqrt{\left(x^2+y^2-4\right)\left(16-x^2-y^2\right)}$.

26. $z=\ln\left(x^2+y^2\right)+\sqrt{1-x^2-y^2}$.

27. $z=\ln\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1\right)$.

28. $z=\sqrt{y^2-3x}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

29. $z=\sqrt{xy}+\ln(y-x)$.

30. $z=\sqrt{2y-x^2}+\ln(1-y)$.

Завдання 2. Довести, що функція $z=z(x,y)$ задовольняє рівнянню:

1. $z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2.$

2. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

3. $z=\sin(ax-by)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$

4. $z=e^x(\cos y+x\sin y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

5. $z=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{2}$.

6. $z=x^y$, $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

7. $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.

8. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z^3$.

9. $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

10. $z = x + \dfrac{x-y}{y-u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial u} = 1$.

11. $z = e^{xy}$, $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

12. $z = \sin(x - ay)$, $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

13. $z = \dfrac{xy}{x+y}$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

14. $z = e^{-\cos(x+ay)}$, $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

15. $z = \ln\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{x^2}$.

16. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + u^2}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0$.

17. $z = (y-u)(u-x)(x-y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial u} = 0$.

18. $z = x^y$, $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

19. $z = \dfrac{y}{x}$, $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

20. $z = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$, $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

21. $z = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}$.

22. $z = 2\cos^2\left(x - \dfrac{y}{2}\right)$, $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

23. $z = e^{\frac{y}{x}} \ln y$, $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\ln y}$.

24. $z = -\ln\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

25. $z = x\ln\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y}$.

26. $z = xe^{-\frac{y}{x}}$, $x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 2\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

27. $z = \frac{xy}{x-y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x-y}$.

28. $z = \ln\left(e^x + e^y\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2 = 0$.

29. $z = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-u} + \frac{1}{u-x}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial x}\right) = 0.$$

30. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Завдання 3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні у точці M_0:

1. $(x-5)^2 + y^2 - (z+1)^2 = 9$, $M_0(4;3;0)$.

2. $xy^2 + x^3 z + z^2 y = 71$, $M_0(1;8;-1)$.

3. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z - 4$, $M_0(6;2;3)$.

4. $x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 2yz - xz = 49$, $M_0(0;1;-8)$.

5. $x^2 y + z^3 = 12$, $M_0(2;1;2)$.

6. $xy + yz + zx = -4$, $M_0(1;2;-2)$.

7. $x^2y + 3xy - 2x + \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2}$, $M_0\left(\frac{1}{2};0;\sqrt{3}\right)$.

8. $3x - z^2 + 3\ln y + 2 = 0$, $M_0\left(0;1;\sqrt{2}\right)$.

9. $x^2z^3 - \sqrt{x^3y} = 0$, $M_0(2;2;1)$.

10. $\ln\left(1 + x^2 + y^2\right) - \sqrt{x^2 + z^2} = x - 1$, $M_0(0;0;1)$.

11. $\arcsin\frac{x}{y} + z^2 = 0$, $M_0(0;2;0)$.

12. $\operatorname{tg} x - x + 2\sin y + z + \operatorname{ctg} z = 3$, $M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)$.

13. $xy - \frac{x}{z} = yz + \frac{1}{2}$, $M_0(1;-1;2)$.

14. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{2}z^2 = 8$, $M_0(1;-1;2)$.

15. $x\sqrt{y} + (z + y)\sqrt{x} = xz + 2$, $M_0(1;1;1)$.

16. $z = \ln\sqrt{1 + x^2} + \operatorname{arctg} y - \frac{\pi}{4}$, $M_0(1;1;\ln 2)$.

17. $z = \frac{e^x}{(y+3)^2}$, $M_0\left(0;1;\frac{1}{16}\right)$.

18. $z = \ln(1 + x) - \frac{y}{x} + 2$, $M_0(1;2;\ln 2)$.

19. $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $M_0\left(-1;2;-\frac{5}{2}\right)$.

20. $z = \sin\frac{x}{y}$, $M_0\left(0;\frac{\pi}{2};0\right)$.

21. $z = e^{\frac{x}{y}}$, $M_0(1;1;e)$.

22. $z = x^y$, $M_0(2;2;4)$.

23. $z = x\ln\dfrac{y}{x}$, $M_0(1;1;0)$.

24. $z = e^x\cos(3x+2y)$, $M_0(0;0;1)$.

25. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x}$, $M_0\left(1;0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

26. $z = \sin(xy)$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{2};0;0\right)$.

27. $z = \sqrt{2xy+y^2}$, $M_0\left(1;2;2\sqrt{2}\right)$.

28. $z = 2^{xy}$, $M_0(0;1;1)$.

29. $z = \ln\left(x^2+y^2\right)$, $M_0(1;1;\ln 2)$.

30. $z = y\cdot e^{\frac{x}{y}}$, $M_0(1;1;e)$.

Завдання 4

<u>**1–15.**</u> Знайти d^2z функції $z = z(x,y)$, що задана неявно:

1. $e^{2x-y} - z = 2$.

2. $x^2 + y^2 + z^2 = e^2$.

3. $y + xy + \ln z = 0$.

4. $\ln(x+y) + 2z = 0$.

5. $xy + yz + \ln x = 0$.

6. $xz + xy + \ln y = 0$.

7. $3^{x+2y-z} + x^2 - 1 = 0$.

8. $\ln y + z(x+y) + e^3 = 0$.

9. $\ln z + x^2 + y^2 = 3$.

10. $z(x+y) - y(z+x) + 3 = 0$.

11. $e^{x+y+z} + z = 1$.

12. $\ln x + y^2 - \dfrac{z}{x} = 0$.

13. $e^{x-2y+z} - x = 2$.

14. $\ln z + xy - 2 = 0$.

15. $zx + yx + zy = 2$.

16. Знайти z'_u, z_v', якщо $z = x^3y^2 + xy^4, x = u^2 + v^2, y = \dfrac{u}{v}$.

17. Знайти z_t', z_s', якщо $z = e^{xy} + \ln\left(x^2+y^2\right), x = t + \sin s,\ y = t^2 + \cos^3 s$.

18. Знайти z_t', якщо $z = x^2 + y^2, x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$.

19. Знайти z_t', якщо $z = e^x + \mathrm{tg}\left(x^2 + y^2\right),\ x = t^2 + \dfrac{1}{t}, y = \sin t + \cos t$.

20. Знайти z_t', якщо $z = \sin\left(3t + 4x^2 - y^4\right),\ x = \dfrac{1}{t},\ y = \dfrac{\sqrt{t}}{\ln t}$.

21. Знайти z_t', якщо $z = \ln\cos\dfrac{y}{\sqrt{x}},\ x = 3t^2\ , y = \sqrt{t^2 + 1}$.

22. Знайти z_t', якщо $z = e^{3x - y^2}\ ,\ x = t\cos t\ ,\ y = \dfrac{\sin t}{t}$.

23. Знайти $\dfrac{dz}{dx}$, якщо $z = \arcsin\sqrt{x^2 - y^2}\ ,\ y = e^x$.

24. Знайти $\dfrac{dz}{dy}$, якщо $z = \ln\left(\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right),\ x = y^3$.

25. Знайти $\dfrac{dz}{dx}$, якщо $z = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x},\ y = \sqrt{x^2 + 1}$.

26. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ якщо $z = y^3 \ln x\ ,\ x = \dfrac{u}{v}, y = \dfrac{v}{u}$.

27. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2 y + y^2 x,\ x = v e^{u+3v}, y = u \cdot e^{v-u}$.

28. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = \dfrac{1}{8}\ln\left(x^2 + y^2\right),\ x = e^{4t},\ y = \mathrm{ctg}\, t$.

29. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^y + y^x\ ,\ x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2$.

30. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x\sin y + y\cos x\ ,\ x = \dfrac{u}{v^2},\ y = \dfrac{v^2}{u}$.

Завдання 5. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = z(x, y)$ в замкненій області D. Зробити рисунок області.

1. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27,$ $\qquad D:\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3$**.**

2. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$ $\qquad D:\ x^2 + y^2 \le 1$**.**

3. $z = x^2 + 2y^2 + 1,$ $\quad D:\ x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ x + y \le 3.$

4. $z = x^2 + y^2,$ $\quad D:\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1.$

5. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2,$ $\quad D:\ x \le 1,\ \ y \ge 0,\ \ y \le x.$

6. $z = x^2 + 3y^2 + x - y,$ $\quad D:\ x \ge 1,\ \ y \ge -1,\ \ x + y \le 1.$

7. $z = x^2 + 2xy + 2y^2 + x + 5,$ $\quad D:\ 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1.$

8. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4,$ $\quad D:\ x \ge -1,\ \ y \ge -1,\ \ x + y \le 1.$

9. $z = 10 + 2xy - x^2,$ $\quad D:\ y \le 4 - x^2, y \ge -1.$

10. $z = x^3 + 2xy - y^2 - x,$ $\quad D:\ x \le 0,\ \ y \le 0,\ \ x + y + 2 \ge 0.$

11. $z = x^2 + xy - 2,$ $\quad D:\ y \le 1,\ \ y \ge x^2 - 1.$

12. $z = x^2 + xy + 5,$ $\quad D:\ -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1.$

13. $z = 2xy - 4x + 3y + 12,$ $\quad D: y \le 5,\ \ y \ge x^2 - 4.$

14. $z = x^2 + y^2 - 3 + \sqrt{3}x + y,$ $\quad D:\ x^2 + y^2 \le 4.$

15. $z = xy - 2x - y,$ $\quad D:\ 0 \le x \le 3,\ \ 0 \le y \le 4.$

16. $z = x^2 - 2y^2 + 4,$ $\quad D:\ x^2 + y^2 \le 1.$

17. $z = 5x^2 - 4xy + 2y^2,$ $\quad D: -1 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 2.$

18. $z = x^2 + xy - 3x - y,$ $\quad D:\ 0 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 3.$

19. $z = \dfrac{1}{2}x^2 - xy,$ $\quad D:\ y \ge \dfrac{1}{3}x^2,\ \ y \le 3.$

20. $z = 3xy + 8,$ $\quad D:\ x^2 + y^2 \le 2.$

21. $z = xy(4 - x - y),$ $\quad D:\ x \ge 1,\ \ y \ge 0, y \le 2 - x.$

22. $z = x^2 + 2xy + 2y^2 - 5,$ $\quad D: x \ge -1,\ \ y \ge -1,\ \ x + y \le 1.$

23. $z = x^2 - y^2 + 32,$ $\quad D:\ x^2 + y^2 \le 16.$

24. $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy,$ $\quad D:\ y \ge x^2,\ \ y \le 4.$

25. $z = x^2 - y^2,$ $\quad D:\ x^2 + y^2 \le 1$

26. $z = e^{-x^2 - y^2}\left(2x^2 + 3y^2\right),$ $\quad D:\ x^2 + y^2 \le 4.$

27. $z = x^2 + 2y^2 + 1,$ $\quad D:\ x \ge -1,\ \ y \ge -1,\ \ x + y \le 5.$

28. $z = x^2 y(2 - x - y)$, $D\colon\ x = 0, y = 0, x + y = 6$.

29. $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$, $D\colon\ 0 \le x \le 4,\ -4 \le y \le 4$.

30. $z = 2x^3 - 3y^2 + 5$, $D\colon\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1$.

Завдання 6. Знайти екстремуми функції $z = z(x, y)$.

1. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$. **2.** $z = x^2 - 4x + 3y^2 + 18y - 4$.

3. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$. **4.** $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

5. $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$. **6.** $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

7. $z = \left(x^2 + y\right)\sqrt{e^y}$. **8.** $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

9. $z = 9 - 8y - 4x^2 - y^2 + 16x$. **10.** $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

11. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$. **12.** $z = x^3 + y^2 - 3x + 4\sqrt{y^5}$.

13. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$. **14.** $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

15. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$. **16.** $z = 3x^2 + y^2 - 4\ln x - 9\ln y$.

17. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. **18.** $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

19. $z = (x - 1)^2 - 2y^2$. **20.** $z = (x - 1)^2 + 2y^2$.

21. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7$. **22.** $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$.

23. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$. **24.** $z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8$.

25. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$. **26.** $z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$.

27. $z = 25 + 3x^2 - 4y + 18x + y^2$. **28.** $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

29. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$. **30.** $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

Завдання 7.

1–15. Знайти градієнт скалярного поля $U(x, y, z)$ в точці M_0:

1. $U = \dfrac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6} \cdot z^3$, $M_0\left(\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2. $U=\dfrac{yz^2}{x^2}$, $M_0\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3. $U=\dfrac{4\sqrt{6}}{x}-\dfrac{\sqrt{6}}{9y}+\dfrac{3}{z}$, $M_0\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

4. $U=x^2yz^3$, $M_0\left(2;\dfrac{1}{3};\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

5. $U=\dfrac{z^3}{xy^2}$, $M_0\left(\dfrac{1}{3};2;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

6. $U=\dfrac{z}{x^3y^2}$, $M_0\left(1;2;\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

7. $U=\dfrac{x^2}{yz^2}$, $M_0\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

8. $U=\dfrac{z^2}{xy^2}$, $M_0\left(\dfrac{1}{3};2;\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

9. $U=\dfrac{xz^2}{y}$, $M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}};1\right)$.

10. $U=\dfrac{yz^2}{x}$, $M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

11. $U=\dfrac{xy^2}{z^2}$, $M_0\left(\dfrac{1}{3};2;\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

12. $U=\dfrac{x^3y^2}{z}$, $M_0\left(1;2;\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

13. $U=\dfrac{1}{x^2yz}$, $M_0\left(2;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

14. $U=\dfrac{x^2}{y^2z^3}$, $M_0\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

15. $U=xyz$, $M_0\left(1;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

16–30. Знайти похідну скалярного поля $U(x,y,z)$ в точці M_0 у напрямі вектора $\vec{l}$.

16. $U = 4\ln\left(3 + x^2\right) - 8xyz$, $M_0(1;1;1)$, $\vec{l}$ – радіус-вектор точки $P(2;2;2)$.

17. $U = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$, $M_0(2;4;4)$, $\vec{l} = (-3;4;1)$.

18. $U = -2\ln\left(x^2 + 5\right) - 4xyz$, $M_0(1;1;1)$, $\vec{l}$ – радіус-вектор точки $P(-1;2;1)$.

19. $U = \dfrac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$, $M_0\left(-2;\dfrac{1}{2};1\right)$, $\vec{l} = (1;1;1)$.

20. $U = xz^2 - 3\sqrt{x^3y}$, $M_0(2;2;4)$, $\vec{l}$ – радіус-вектор точки $P(-3;4;1)$.

21. $U = x\sqrt{y} - yz^2$, $M_0(2;1;-1)$, $\vec{l} = (2;2;4)$.

22. $U = 7\ln\left(\dfrac{1}{13} + x^2\right) - 4xyz$, $M_0(1;1;1)$, $\vec{l}$ – радіус-вектор точки $P(-3;-1;2)$.

23. $U = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + xz$, $M_0(2;2;-1)$, $\vec{l} = (3;0;-2)$.

24. $U = \ln\left(1 + x^2\right) - xy\sqrt{z}$, $M_0(1;-2;4)$, $\vec{l}$ – радіус-вектор точки $P(0;-3;1)$.

25. $U = \sqrt{x^2 + y^2} - z$, $M_0(3;4;1)$, $\vec{l} = (-2;1;5)$.

26. $U = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x}$, $M_0(1;1;-2)$, $\vec{l}$ – радіус-вектор точки $P(-1;-1;-1)$.

27. $U = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$, $M_0(1;1;0)$, $\vec{l} = (-1;2;1)$.

28. $U = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}$, $M_0(0;-3;4)$, $\vec{l}$ – радіус-вектор точки $P(2;2;-1)$.

29. $U = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) - \sqrt{x^2 + z^2}$, $M_0(3;0;-4)$, $\vec{l} = (1;-2;1)$.

30. $U = 2\sqrt{x + y} + \operatorname{arctg} z$, $M_0(3;-2;1)$, $\vec{l} = (4;0;-3)$.

ВІДПОВІДІ

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри

Завдання 1

1. а) $\begin{pmatrix} 14 & -20 & 0 & 4 \\ -6 & 24 & -14 & 2 \\ -14 & 4 & -26 & -16 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} -3 & 26 & 26 \\ -12 & 10 & 22 \\ 33 & -37 & 23 \end{pmatrix}$. **2. а)** $\begin{pmatrix} -11 & 13 & -20 & -24 \\ 15 & 1 & 7 & -14 \\ -19 & 13 & -18 & 1 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} -13 & -20 & -9 \\ -2 & 81 & -23 \\ 17 & -5 & 18 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} -14 & 2 & -8 & 2 \\ -2 & 4 & -12 & 6 \\ 32 & -4 & -22 & -10 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 19 & 39 & 0 \\ 22 & 49 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. **4. а)** $\begin{pmatrix} -13 & -5 & 1 & -14 \\ 2 & -8 & -4 & -7 \\ -9 & -3 & 3 & -14 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 44 & 1 & 12 \\ 13 & -33 & -17 \\ 76 & -11 & 12 \end{pmatrix}$.

5. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 & 36 \\ 1 & -15 & 44 & -5 \\ -5 & -7 & -20 & 6 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 27 & 53 & -19 \\ 47 & 48 & 27 \\ -8 & 18 & 5 \end{pmatrix}$. **6. а)** $\begin{pmatrix} 11 & 1 & -23 & 0 \\ 16 & 8 & -18 & 21 \\ 45 & 19 & 29 & 24 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 16 & 2 & 51 \\ 1 & 5 & 53 \\ 64 & 4 & 53 \end{pmatrix}$.

7. а) $\begin{pmatrix} -11 & 1 & -19 & -2 \\ 17 & -18 & 9 & -15 \\ -4 & -8 & -48 & 13 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 29 & -6 & 4 \\ 38 & 23 & 33 \\ -9 & 61 & 64 \end{pmatrix}$. **8.а)** $\begin{pmatrix} 10 & -2 & -16 & 30 \\ 24 & 6 & 10 & -12 \\ -14 & 4 & -2 & -24 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} -32 & 56 & 36 \\ -18 & 60 & 1 \\ 21 & -13 & -9 \end{pmatrix}$.

9. а) $\begin{pmatrix} 14 & -21 & -2 & 17 \\ 13 & 14 & 19 & -59 \\ -3 & -32 & 7 & 30 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 3 & 59 & -19 \\ 12 & 17 & 47 \\ 3 & 77 & 11 \end{pmatrix}$. **10. а)** $\begin{pmatrix} -5 & -11 & 15 & -5 \\ 9 & -2 & 12 & -12 \\ 18 & 5 & -4 & 23 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} -16 & -19 & 49 \\ -72 & 28 & 97 \\ -11 & -12 & 42 \end{pmatrix}$.

11. а) $\begin{pmatrix} -26 & -12 & 13 & -5 \\ -22 & 7 & -15 & -29 \\ 18 & -4 & -14 & -5 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 37 & 10 & -31 \\ 30 & 50 & -32 \\ 11 & 4 & -28 \end{pmatrix}$. **12. а)** $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 7 & 4 \\ -1 & -27 & 43 & -18 \\ -20 & 4 & 31 & 4 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 13 & -3 & -5 \\ 31 & -4 & 11 \\ 2 & -17 & 4 \end{pmatrix}$.

13. а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 & -32 \\ -27 & 26 & -5 & -8 \\ -22 & 11 & -18 & -13 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 14 & 5 & -45 \\ 44 & 41 & 0 \\ 77 & 25 & -77 \end{pmatrix}$. **14.а)** $\begin{pmatrix} 6 & 5 & -12 & 23 \\ -13 & 24 & -10 & 37 \\ 28 & 1 & -7 & 29 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 39 & 59 & 17 \\ -20 & -54 & 58 \\ -46 & -51 & 5 \end{pmatrix}$.

15.а) $\begin{pmatrix} 22 & 8 & 4 & 6 \\ 20 & -22 & 14 & 0 \\ 12 & -26 & 14 & 24 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 0 & -28 & -37 \\ 22 & -19 & -29 \\ 24 & 23 & 17 \end{pmatrix}$. **16. а)** $\begin{pmatrix} 28 & -18 & 11 & 25 \\ 4 & -32 & 1 & -9 \\ 28 & 15 & -35 & -2 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} -13 & -9 & 31 \\ -9 & 15 & -21 \\ -86 & -15 & 1 \end{pmatrix}$.

17. а) $\begin{pmatrix} 7 & -8 & 13 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -5 \\ 5 & -8 & 9 & -9 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} -22 & 70 & 36 \\ -18 & 40 & 54 \\ -24 & 30 & 58 \end{pmatrix}$. **18. а)** $\begin{pmatrix} 2 & 10 & -2 & -16 \\ 8 & -4 & -38 & -14 \\ 6 & 6 & 4 & -22 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 9 & -2 & -15 \\ 23 & 16 & -5 \\ -5 & 28 & 29 \end{pmatrix}$.

19. а) $\begin{pmatrix} -23 & 10 & 1 & 4 \\ 6 & -14 & 6 & -7 \\ 5 & -20 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} -8 & 19 & 4 \\ 6 & -6 & -6 \\ 61 & -15 & 33 \end{pmatrix}$. **20. а)** $\begin{pmatrix} -5 & -11 & -13 & 2 \\ 3 & 8 & -7 & 21 \\ 15 & 10 & 11 & -32 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 41 & 2 & -6 \\ 38 & -1 & 2 \\ 8 & 17 & -14 \end{pmatrix}$.

21.а) $\begin{pmatrix} -1 & 8 & -12 & -5 \\ 18 & -9 & -20 & -2 \\ -4 & -10 & 2 & -15 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} -11 & 41 & -9 \\ 22 & 4 & 13 \\ -33 & 40 & -16 \end{pmatrix}$. **22. а)** $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -20 & -6 \\ -20 & 14 & -2 & 0 \\ -10 & 22 & -12 & 8 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 42 & 17 & 30 \\ -28 & -8 & -18 \\ 6 & 1 & 13 \end{pmatrix}$.

23. а) $\begin{pmatrix} -14 & 24 & -5 & -9 \\ 10 & -21 & -1 & -17 \\ -5 & 5 & -2 & 12 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} -25 & 46 & -2 \\ 15 & 11 & 11 \\ 9 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. **24. а)** $\begin{pmatrix} 30 & -22 & 0 & 8 \\ -10 & 16 & 6 & -22 \\ 2 & -8 & 22 & 10 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} -21 & 19 & -16 \\ 19 & -15 & 42 \\ 19 & -5 & 20 \end{pmatrix}$.

25. а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 & -3 \\ 4 & 10 & -15 & 8 \\ -13 & -11 & 18 & -10 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 35 & 24 & 2 \\ 11 & 0 & 7 \\ 48 & 63 & -14 \end{pmatrix}$. **26. а)** $\begin{pmatrix} -3 & -10 & 5 & 7 \\ 15 & 22 & -26 & 20 \\ -8 & 9 & -15 & 1 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 14 & 23 & 18 \\ 31 & -2 & 3 \\ 13 & -3 & 13 \end{pmatrix}$.

27. а) $\begin{pmatrix} 17 & -17 & 16 & -4 \\ -9 & -6 & 19 & 1 \\ -7 & 11 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} -25 & -28 & 6 \\ 15 & 2 & -13 \\ 13 & 12 & -4 \end{pmatrix}$. **28. а)** $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 8 & -1 & -6 \\ 14 & 2 & 8 & -13 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & -5 \\ 27 & 18 & 36 \\ -12 & -10 & -9 \end{pmatrix}$.

29. а) $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 14 & 8 \\ -2 & 5 & 7 & 24 \\ 44 & 9 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 22 & 49 & -16 \\ 16 & 60 & -15 \\ 13 & 11 & -15 \end{pmatrix}$. **30. а)** $\begin{pmatrix} -24 & 20 & -22 & -6 \\ -12 & 10 & -20 & 0 \\ 22 & -8 & -22 & 4 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 1 & -31 & 54 \\ 9 & 3 & 29 \\ 40 & 6 & 28 \end{pmatrix}$.

<u>Завдання 2</u>

1. $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 6 \\ -4 & 2 & 8 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 36 & -3 & -2 \\ -26 & 48 & -19 \\ -30 & 16 & 12 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} -221 & 15 & -18 \\ -69 & -22 & 17 \\ 0 & -49 & -212 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 22 & 15 & -11 \\ -57 & 16 & 17 \\ -61 & 80 & 52 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 35 & -16 & -25 \\ 67 & -32 & -43 \\ 87 & -43 & -37 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 107 & 88 & 250 \\ -26 & 41 & -20 \\ 72 & 306 & 349 \end{pmatrix}$. **7.** $\begin{pmatrix} 36 & -7 & 4 \\ -64 & 55 & -37 \\ -3 & -13 & 27 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} -248 & -6 & 65 \\ 100 & -87 & 13 \\ 248 & 50 & -186 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} -18 & 22 & -85 \\ -8 & -46 & 77 \\ 2 & 8 & -57 \end{pmatrix}$. **10.** $\begin{pmatrix} -84 & 4 & 42 \\ -90 & 117 & -66 \\ -108 & 82 & -135 \end{pmatrix}$. **11** $\begin{pmatrix} -17 & 27 & -31 \\ 14 & -104 & 104 \\ -12 & 75 & -92 \end{pmatrix}$. **12.** $\begin{pmatrix} 171 & -48 & -2 \\ 77 & 15 & -47 \\ -193 & 34 & 116 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 49 & 127 & -39 \\ 26 & -56 & 30 \\ 41 & -75 & 89 \end{pmatrix}$.. **14.** $\begin{pmatrix} -29 & -33 & 60 \\ -24 & 7 & 18 \\ 66 & 90 & -107 \end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix} 66 & -25 & 67 \\ -20 & 32 & 127 \\ 2 & 7 & 59 \end{pmatrix}$. **16.** $\begin{pmatrix} 73 & -22 & -22 \\ -26 & 47 & 17 \\ 1 & 34 & 11 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} -80 & 32 & -57 \\ 17 & -27 & -18 \\ -50 & -98 & -189 \end{pmatrix}$. **18.** $\begin{pmatrix} 64 & -5 & 4 \\ 34 & 19 & 31 \\ -13 & 17 & 48 \end{pmatrix}$. **19.** $\begin{pmatrix} -24 & 9 & -2 \\ -33 & 30 & 87 \\ 23 & -48 & 40 \end{pmatrix}$. **20.** $\begin{pmatrix} 41 & 36 & -80 \\ 24 & 109 & -32 \\ -56 & 80 & -39 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} -128 & 108 & -78 \\ -30 & -2 & -12 \\ -82 & 34 & -40 \end{pmatrix}$. **22.** $\begin{pmatrix} 192 & 48 & 29 \\ 32 & 28 & -23 \\ 196 & 40 & 113 \end{pmatrix}$. **23.** $\begin{pmatrix} 64 & 15 & -21 \\ 24 & 46 & -9 \\ -36 & -6 & 64 \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & -9 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} -57 & -24 & -3 \\ -21 & -30 & 9 \\ 31 & -30 & -47 \end{pmatrix}$. **26.** $\begin{pmatrix} 105 & -69 & -6 \\ 25 & 20 & -154 \\ -78 & 24 & 132 \end{pmatrix}$. **27.** $\begin{pmatrix} -32 & 93 & -16 \\ -206 & 41 & -92 \\ -44 & -108 & -106 \end{pmatrix}$. **28.** $\begin{pmatrix} 41 & -9 & 12 \\ -27 & 50 & 6 \\ -57 & -9 & 53 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} -148 & -64 & -18 \\ 62 & -49 & 42 \\ -51 & -102 & -153 \end{pmatrix}$. **30.** $\begin{pmatrix} -12 & -9 & 4 \\ -1 & -1 & -15 \\ -3 & 11 & -18 \end{pmatrix}$.

Завдання 3

1. 30. **2**. 42. **3.** 23. **4.** –153. **5**. 115. **6**. –59. **7**. 38. **8**. –119. **9**. 14. **10**. 49. **11**. –56. **12**. 175. **13.** 205. **14.** –183. **15**. –14. **16**. –156. **17.** –2. **18.** 44. **19**. –96. **20.** 110. **21.** 173. **22.** 122. **23.** 146. **24.** –80.. **25.** 12. **26.** –17. **27**. –108. **28**. –12. **29.** 0. **30.** –35.

Завдання 4

1. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$**. 2. а)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$**. 3. а)** $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$**.**

4. а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$**. 5. а)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$**. 6. а)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$**.**

7. а) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$**. 8. а)** $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$**. 9. а)** $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$**.**

10. а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$**. 11. а)** $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$**. 12. а)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$**.**

13. а) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$**. 14. а)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$**. 15. а)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$**.**

16. а) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**. 17. а)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$**. 18. а)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**.**

19. а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$**. 20. а)** $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$**. 21. а)** $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$**.**

22. а) $\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$**. 23. а)** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$**. 24. а)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$**.**

25. а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$**. 26. а)** $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$**. 27. а)** $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$**, б** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$**).**

28. а) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$**. 29. а)** $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$**. 30. а)** $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$**, б)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$**.**

Завдання 5

1. 3. **2**. 3. **3**. 2. **4**. 3. **5**. 3. **6**. 3. **7**. 3. **8**. 3. **9**. 2. **10**. 3. **11**. 4. **12**. 3.**13**. 3. **14**. 3. **15**. 3. **16.** 2. **17.** 3. **18**. 4. **19**. 3. **20.** 2. **21**. 4. **22**. 3. **23**. 3. **24**. 4. **25**. 3. **26.** 3. **27**. 2. **28.** 2. **29.** 3. **30.** 2.

Завдання 6

1. $(1;-1;2)$. **2**. $(1;1;1)$. **3**. $(0;-2;1)$. **4**. $(1;1;-1)$. **5**. $(-1;1;2)$. **6.** $(1;2;3)$. **7**. $(3;2-1)$. **8**. $(2;-2;1)$. **9**. $(1;-1;-1)$. **10**. $(2;3;1)$. **11**. $(0,4;\, 0,4;\, 3,6)$. **12**. $(3;4;1)$. **13.** $(2;0;-3)$. **14.** $(4;-3;1)$. **15.** $(0;3;3)$. **16.** $(2;1;-1)$. **17** $(1;1;2)$. **18**. $(4;-2;-3)$. **19.** $(-1;-1;-1)$. **20.** $(1;-2;-3)$. **21.** $(3;0;2)$. **22.** $(-2;1;2)$. **23**. $(-2;2;-2)$. **24**. $(0;1;3)$. **25.** $(4;-2;3)$. **26.** $(1;1;-1)$. **27.** $(-3;3;1)$. **28.** $(0;1;-4)$. **29.** $(2;-3;1)$. **30.** $(4;3;2)$.

Завдання 7а

1. (4; 2; 3; 1). **2**. (1; 0; 1; 0). **3**. (0; 0; 1; 2). **4**. (–2; 1; 0; 2). **5**. (1; 3; 1; 2). **6**. (1; 1; 2; 1). **7.** (1; 2; –3; 1). **8**. (1; 2; 1; 0,5). **9.** (5; 1; –1; 0). **10**. (2; 0; 1; 2). **11.** (–1; 1; 0; 4). **12.** (0; –1; –2; 2). **13**. (3; 0; –2; 1). **14**. (–1; 1; –1; 1). **15**. (1,5; 0,5; 0; 1). **16**. (–1; 0; 1; –1). **17**. (2;–1; –2; 1). **18** .(–1; 3; 0; 1). **19**. (– 2; 1; 3; –3). **20**. (0; –4; 1; –1). **21**. (3; –2; 1; 1). **22**. (–1; 2; –3; 1). **23.** (2; 0; –2; 1). **24**. (1; –1; 2; –2).

25. (3; –1; –1; –2). **26.** (1; 2; 1; 0). **27.** (0; 0; -1; 1). **28**. (3; -2; 1; 0). **29**. (-1; 5; 2; 3). **30**. (4; 2; 3; 1).

Завдання 7б. Системи 1) – 30) не мають розв'язків.

Завдання 7в. Дається один з можливих варіантів відповіді, де C_1 і C_2 – сталі.

1. $\begin{cases} x_1 = -C_1 - \frac{8}{7}C_2 - \frac{20}{7}, \\ x_2 = -C_1 - \frac{3}{7}C_2 - \frac{4}{7}, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x_1 = 5C_2 - 3, \\ x_2 = C_1 + 7C_2 - 5, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **3**. $\begin{cases} x_1 = 5C_1 + C_2 - 7, \\ x_2 = -7C_1 - C_2 + 11, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 = -2,4C_1 + 0,2C_2 + 1, \\ x_2 = 2,6C_1 - 1,8C_2 - 2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **5**. $\begin{cases} x_1 = -5C_1 - 6C_2 + 6, \\ x_2 = -9C_1 - 9,5C_2 + 11, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **6**. $\begin{cases} x_1 = 1,5C_1 + 1,5, \\ x_2 = -2,5C_1 - 2C_2 - 0,5, \\ x_3 = C_{1,}, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 = -9C_1 + 17C_2 - 32, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = C_2, \\ x_4 = 4C_1 - 7C_2 + 15. \end{cases}$ **8**. $\begin{cases} x_1 = -0,6C_1 + 0,5C_2 - 13, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = 0,8C_1 - 0,5C_2 - 5, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **9**. $\begin{cases} x_1 = -C_1 + 7C_2, \\ x_2 = 3C_2 - 1, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 = 1,4C_1 - 1,4C_2 + 0,4, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = C_2, \\ x_4 = -0,6C_1 + 1,6C_2 - 2,6. \end{cases}$ **11**. $\begin{cases} x_1 = 10C_1 + 3C_2 + 13, \\ x_2 = 7C_1 + 3C_2 + 6, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **12**. $\begin{cases} x_1 = 10C_1 - 8C_2 + 7, \\ x_2 = -7C_1 + 6C_2 - 3, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 = -0,8C_1 - C_2 - 2,6, \\ x_2 = 0,6C_1 + C_2 + 2,2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **14**. $\begin{cases} x_1 = -C_1 + 3C_2 + 6, \\ x_2 = -C_1 - 6C_2 - 11, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **15**. $\begin{cases} x_1 = -11C_1 + C_2 + 13, \\ x_2 = 3C_1 - 5, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 = -C_1 - C_2 + 3, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = -2C_1 - 2C_2 + 6, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **17**. $\begin{cases} x_1 = -3C_1 + 3C_2 + 4, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = 2C_1 - 4C_2 - 3, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **18**. $\begin{cases} x_1 = 4C_2 + 1, \\ x_2 = C_1 - 6C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 = -1,4C_1 - 0,8C_2 + 3,6, \\ x_2 = 2,2C_1 - 0,6C_2 + 3,2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} x_1 = -0,75C_1 + 2, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = C_2, \\ x_4 = -1,25C_1 + 2C_2. \end{cases}$ **21.** $\begin{cases} x_1 = -5C_1 + 4C_2 + 2, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = C_2, \\ x_4 = 4C_1 - 3C_2 + 2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 = 0,2C_1 - 0,6C_2 + 1,4, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = 0,6C_1 - 0,8C_2 + 0,2, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **23**. $\begin{cases} x_1 = -7C_1 + 7C_2 - 4, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = 5C_1 - 5C_2 + 3, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **24**. $\begin{cases} x_1 = -7C_1 + 11C_2 - 5, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = -5C_1 + 8C_2 - 4, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 = C_1 + 0,9C_2 - 1, \\ x_2 = C_1 + 0,7C_2 - 1, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x_1 = C_2 + 3, \\ x_2 = C_1 - C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **27.** $\begin{cases} x_1 = -1,2C_1 + 1,4C_2 - 0,4, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = C_2, \\ x_4 = 1,6C_1 - 1,2C_2 + 1,2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 = -0,4C_1 - 1,4C_2 + 0,2, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = C_2, \\ x_4 = 0,6C_1 + 0,6C_2 - 0,8. \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} x_1 = -3C_1 - 3C_2 + 4, \\ x_2 = -C_1 - C_2 + 3, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} x_1 = 3C_1 - 5C_2 + 21, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = C_2, \\ x_4 = -2C_1 + 3C_2 - 13. \end{cases}$

Завдання 8. Якщо однорідна система має ненульовий розв'язок, то вона має безліч фундаментальних систем розв'язків. Одна з можливих відповідей:
1. (2; –3; 5; 0), (–2; 3; 0; 5). **2**.(1; –2; 1; 0), (1; –2; 0; 1). **3**. (–1; 1; 0; 0), (–2; 0; 1; 1). **4**. (1; –2; 0; 1), (0; 1; 3; 0). **5**. (–3; 2; 1; 0), (–2; 1; 0; 1). **6**. (–7; 3; 1; 0), (3; –1; 0; 1). **7**. (–6; 7; 8; 0), (2; 7; 0; 8).
8. (–3; 1; 7; 0), (–5; 0; 12; 1). **9**. (11; –7; 1; 0), (–17; 11; 0; 2). **10**. (–4; 0; 1; 2), (17; 7; 0; -11).
11. (8; –7; 1; 0), (3; –4; 0; 1). **12**. (1; –2; 1; 0), (–1; 9; 0; 5). **13**. (–17; 1; 7; 0), (24; 0; –11; 1).
14. (1; –5; 0; 8), (0; 0; 1; 3). **15**. (–11; 4; 1; 0), (28; –11; 0; 1). **16**. (31; –17; 11; 0), (–18; 12; 0; 11).
17. (4; 5; 1; 0), (4; 7; 0; 1). **18**. (–33; 1; 20; 0), (–4; 0; 3; 1). **19**. (–4; 1; 3; 0), (–13; 0; 7; 2).
20. (–4; –3; 1; 0), (3; 4; 0; 1). **21**. (9; 1; 0; -2), (–11; 0; 1; 3). **22**. (–84; 24; 1; 0), (96; –26; 0; 1).
23. (–147; –41; 2; 0); (87; 25; 0; 2). **24**. (6; 11; 1; 0), (3; 11; 0; 2). **25**. (–1; 1; 2; 0), (–1; 0; –11; 5).
26. (1; 2; 2; 0), (–7; –16; 0; 10). **27**. (-7; 11; 2; 0), (13; -21; 0; 2). **28**. (3; 1; -5; 0), (9; 0; -13; 2).
29. (-61; 26; 5; 0), (33; -13; 0; 5). **30.** (12; -13; 10; 0), (-6; 4; 0; 5).

Розділ 2. Векторна алгебра й аналітична геометрія

Завдання 1

1. $-\frac{7}{5}$. **2.** 38. **3.** –40. **4.** $\left(1;-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **5.** $\frac{2\pi}{3}$. **6.** 3. **7.** $3\sqrt{2}$. **8.** –9. **9.** 8. **10**. –243. **11.** $\sqrt{29-2\sqrt{3}}$.
12. $(-4;-6;2)$. **13.** 6. **14.** 13. **15.** –7. **16.** $\sqrt{\frac{11}{2}}$. **17.** $\frac{3}{5}$. **18.** $(-1;2;3)$. **19.** $\pi - \arccos\frac{12}{49}$; $\arccos\frac{61}{7\sqrt{122}}$; $\arccos\frac{61}{7\sqrt{122}}$; так. **20.** $(-2;-6;8)$. **21.** 69. **22.** $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. **23.** 19; $\frac{\pi}{3}$. **24.** $D(0;2;0)$. **25.** –4. **26.** ±3.
27. Колінеарні, протилежно напрямлені, $\left|\overrightarrow{CD}\right| : \left|\overrightarrow{AB}\right| = 4:1$. **28.** $(2;-1;3)$. **29.** 5. **30.** $\frac{27}{7\sqrt{19}}$, $\frac{22}{7\sqrt{14}}$.

Завдання 2

1. 21. **2.** $\frac{\sqrt{35}}{2}$ кв. од. **3.** $\sqrt{42}; \frac{5}{\sqrt{42}}; \frac{4}{\sqrt{42}}; \frac{1}{\sqrt{42}}$. **4.** $\frac{2\sqrt{26}}{5}$. **5.** $(2;4;14)$. **6.** $(4;-2;-2)$. **7.** 42. **8.** 7 кв. од.
9. 8. **10.** $\lambda=-2$ або $\lambda=-4$. **11.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ кв. од. **12.** 1. **13.** $(0;16;-16)$; $16\sqrt{2}$. **14.** $(2;1;1)$. **15.** $(4;7;6)$.
16. 24 кв. од. **17.** ±12. **18.** $(-49;-35;-7)$. **19.** $\vec{c}=(3;-1;5)$ або $\vec{c}=(-3;1;-5)$. **20.** 156.
21. $\frac{-1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{-1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{3}$. **22.** $\lambda=\frac{15}{13}$ або $\lambda=-3$. **23.** $\sqrt{6}$. **24.** $\sqrt{210}$. **25.** $(-2;0;6)$. **26.** $(2;-1;-1)$.
27. 6 кв. од. **28.** $\sqrt{342}$ кв. од. **29.** $\sqrt{41}$; $-\frac{20}{21}$. **30.** $\lambda=\frac{3}{5}$ або $\lambda=-2$.

Завдання 3

1. Права трійка. **2.** 329. **3.** $18{,}5$ куб. од. **4.** Ні. **5.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **6.** 75 куб. од. **7.** 6. **8.** Ні; права трійка. **9.** 38. **10.** Так. **11.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$. **12.** $C(0;0;0)$ або $C(0;0;4)$. **13.** $\lambda=3$ або $\lambda=-11$. **14.** Так. **15.** 5. **16**. Так. **17.** 60 куб. од. **18.** Ліва трійка. **19.** 12 куб. од. **20.** $B(2;0;0)$ або $B\left(\frac{76}{11};0;0\right)$. **21.** $\lambda=3$ або $\lambda=-\frac{10}{3}$. **22.** 144. **23.** 28 куб. од. **24.** $\lambda=-11$ або $\lambda=-3$. **25.** 6. **26.** 6 куб. од. **27.** $\frac{5\sqrt{17}}{17}$. **28.** 40. **29.** $\lambda=-1$ або $\lambda=-\frac{11}{6}$. **30.** Ліва трійка.

Завдання 4

1. $\vec{x}=-2\vec{p}+5\vec{q}+6\vec{r}$. **2.** $\vec{x}=3\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$. **3.** $\vec{x}=-2\vec{p}-2\vec{q}+\vec{r}$. **4.** $\vec{x}=\vec{p}-2\vec{q}-\vec{r}$. **5.** $\vec{x}=-\vec{p}+\vec{r}$. **6.** $\vec{x}=\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r}$. **7.** $\vec{x}=\vec{p}-2\vec{q}-\vec{r}$. **8.** $\vec{x}=2\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$. **9.** $\vec{x}=2\vec{p}+2\vec{q}-\vec{r}$. **10.** $\vec{x}=18\vec{p}-5\vec{q}$. **11.** $\vec{x}=51\vec{p}+3\vec{q}-19\vec{r}$. **12.** $\vec{x}=24\vec{p}-4\vec{q}+\vec{r}$. **13.** $\vec{x}=\vec{p}+7\vec{q}-41\vec{r}$. **14.** $\vec{x}=22\vec{p}+11\vec{q}+2\vec{r}$. **15.** $\vec{x}=3\vec{p}-5\vec{q}+7\vec{r}$. **16.** $\vec{x}=-9\vec{p}+7\vec{q}-31\vec{r}$. **17.** $\vec{x}=8\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$. **18.** $\vec{x}=2\vec{p}-2\vec{q}-\vec{r}$. **19.** $\vec{x}=2\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$. **20.** $\vec{x}=2\vec{p}+5\vec{q}+12\vec{r}$. **21.** $\vec{x}=-8\vec{p}-5\vec{q}-4\vec{r}$. **22.** $\vec{x}=-6\vec{p}+38\vec{q}-13\vec{r}$. **23.** $\vec{x}=10\vec{p}-4\vec{q}-5\vec{r}$. **24.** $\vec{x}=\vec{p}+2\vec{q}-2\vec{r}$. **25.** $\vec{x}=4\vec{p}+3\vec{q}-\vec{r}$. **26.** $\vec{x}=\vec{p}+2\vec{r}$. **27.** $\vec{x}=\vec{p}+\vec{q}+2\vec{r}$. **28.** $\vec{x}=4\vec{q}+\vec{r}$. **29.** $\vec{x}=20\vec{p}-21\vec{q}+12\vec{r}$. **30.** $\vec{x}=27\vec{p}+20\vec{q}-\vec{r}$.

Завдання 5

1. $7x+4y-2=0;\ 8x+7y-12=0.$ **2.** $D(2;-6)$; $x+7y-10=0;\ 4x+3y+10=0$; $\frac{\pi}{4}$. **3.** $x+5y-12=0;\ 5x-y-8=0;\ O(2;2)$; так. **4.** $2x-y+2=0;\ x+2y-9=0$; $A(2;4)$ або $A\left(\frac{1}{5};\frac{17}{5}\right)$. **5.** $5;\ 5x+3y-5=0.$ **6.** 25 кв. од.; $(-2;-1);\ (1;3)$ або $(-5;-5)$. **7.** $3x-4y+30=0;\ 3x-4y-20=0.$ **8.** $Q(-2;-2);10.$ **9.** $2x+3y-8=0;\ \frac{\pi}{2}$. **10.** Так; 5. **11.** $2x-11y+32=0;\ 2x-y+2=0;\ 30$; так. **12.** $2\sqrt{13};\ 4\sqrt{13}.$ **13.** $x-3=0;\ \frac{\pi}{4}$. **14.** $Q(2;-3);\ 5.$ **15.** $4x-3y-27=0;\ 3x+4y+11=0;$ $P\left(\frac{1}{2};0\right)$. **16.** $2x-5y+8=0;\ 5x+2y-9=0;$ 58 кв. од. **17.** $7x-3y+19=0$; $3x+7y-25=0$; $5x+2y-3=0$; 29 кв. од. **18.** $x-7y+34=0$; $x-7y-16=0$; $3x+4y-23=0$; $3x+4y+2=0$; $D(2;-2)$. **19.** Так; $4x+9y-47=0;$ $4x+y-15=0;$ $4{,}8$. **20.** $x-2y+10=0;$ 25 кв. од. **21.** $5;$ $11x+2y+16=0.$ **22.** $3x+2y+1=0;$ $2x-3y+5=0;$ 52 кв. од. **23.** $6\sqrt{2};$ $15;$ $O(-2;2)$. **24.** $Q(1;2);$ $\lambda=1.$ **25.** $P\left(-2;-\frac{4}{3}\right)$; $3x-2y+14=0$; $x+2y+10=0$; $\operatorname{arctg}8.$ **26.** $x-2y+8=0;$ $2x+y+11=0;$ $2x+y-19=0;$ $x-2y-2=0;$ 60 кв. од. **27.** Так; $2x-3y-2=0;\ 3x+2y-3=0;$ $1:2.$ **28.** $\operatorname{arctg}\frac{16}{13}$. **29.** $B(-2;6);$ $D(2;-4);$ 58 кв. од. **30.** $4x-3y+7=0;\ 3x+4y-1=0;$ $4\sqrt{5}.$

Завдання 6

1. а) Парабола, $A(2;3)$, $p=3$**, б)** частина кола $(x-1)^2+(y+1)^2=4$, яка розташована справа від прямої $x=1$. **2. а)** Еліпс, $C(1;-2)$, $a=2$, $b=1$, **б)** частина параболи $(y-2)^2=-4(x-3)$, яка розташована під прямою $y=2$. **3. а)** Гіпербола, $C(2;-1)$, $a=2$, $b=1$, **б)** частина еліпсу $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$, яка розташована над прямою $y=1$. **4. а)** Парабола, $A(-2;-4)$, $p=1$, **б)** частина гіперболи $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$, яка розташована зліва від прямої $x=-1$. **5. а)** Гіпербола, $C(-2;-3)$, $a=2$, $b=1$, **б)** частина кола $(x+2)^2+(y-1)^2=1$, яка розташована справа від прямої $x=-2$. **6. а)** Еліпс, $C(2;-1)$, $a=1$, $b=2$, **б)** частина параболи $(y+3)^2=-2(x+5)$, яка розташована під прямою $y=-3$. **7. а)** Парабола, $A(-2;1)$, $p=1$, **б)** частина еліпсу $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$, яка розташована справа від прямої $x=1$. **8. а)** Еліпс, $C(-1;2)$, $a=2$, $b=3$**, б)** частина гіперболи $\frac{(x+2)^2}{16}-\frac{(y+3)^2}{9}=-1$, яка розташована справа від прямої $x=-2$. **9. а)** Парабола, $A(1;3)$, $p=1$, **б)** частина кола $(x+3)^2+(y-2)^2=9$, яка розташована під прямою $y=2$. **10. а)** Еліпс, $C(-1;-2)$, $a=3$, $b=2$, **б)** частина параболи $(y-1)^2=4(x-4)$, яка розташована над прямою $y=1$. **11. а)** Гіпербола, $C(-1;2)$, $a=3$, $b=2$, **б)** частина еліпсу $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$, яка розташована зліва від прямої $x=-1$. **12. а)** Парабола, $A(3;-2)$, $p=2$, **б)** частина гіперболи $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$, яка розташована справа від прямої $x=2$. **13. а)** Гіпербола, $C(-3;-2)$, $a=3$, $b=2$, **б)** частина кола $(x+2)^2+(y-5)^2=4$, яка розташована під прямою $y=5$. **14. а)** Еліпс, $C(2;3)$, $a=3$, $b=4$, **б)** частина параболи $(y+2)^2=6(x+1)$, яка розташована над прямою $y=-2$. **15. а)** Парабола, $A(-1;2)$, $p=3$, **б)** частина еліпсу $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$, яка розташована зліва від прямої $x=2$. **16. а)** Гіпербола, $C(1;-3)$, $a=2$, $b=3$, **б)** частина кола $(x-2)^2+(y-3)^2=25$, яка розташована над прямою $y=3$. **17. а)** Еліпс, $C(1;2)$, $a=4$, $b=3$, **б)** частина гіперболи $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{16}=1$, яка розташована під прямою $y=1$. **18. а)** Парабола, $A(-4;2)$, $p=2$, б) частина еліпсу $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$, яка розташована над прямою $y=-1$. **19. а)** Гіпербола, $C(-3;-1)$, $a=3$, $b=5$, **б)** частина параболи $(x+3)^2=-2(y-4)$, яка розташована зліва від прямої $x=-3$. **20. а)** Еліпс, $C(-1;-3)$, $a=4$, $b=2$**, б)** частина гіперболи $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{4}=-1$, яка розташована під прямою $y=1$. **21. а)** Парабола, $A(-3;3)$, $p=3$, **б)** частина кола $(x+1)^2+(y-2)^2=16$, яка розташована зліва від прямої $x=-1$. **22. а)** Гіпербола, $C(-1;3)$, $a=2$, $b=3$, **б)** частина параболи $(x+4)^2=6(y-5)$, яка розташована справа від прямої $x=-4$. **23. а)** Парабола, $A(4;-3)$, $p=2$, **б)** частина еліпсу $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$, яка розташована під прямою $y=2$. **24. а)** Еліпс, $C(-3;1)$, $a=5$, $b=2$, **б)** частина гіперболи $\frac{(x+3)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=-1$, яка розташована над прямою $y=-2$. **25. а)** Гіпербола, $C(-2;1)$, $a=3$, $b=4$, **б)** частина параболи $(x-1)^2=-12(y-2)$, яка розташована зліва від прямої $x=1$. **26. а)** Еліпс, $C(-2;1)$, $a=2$, $b=4$, **б)** частина гіперболи $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{25}=-1$, яка розташована зліва від прямої $x=-1$. **27. а)** Гіпербола, $C(-1;3)$, $a=5$, $b=2$**,** **б)** частина еліпсу $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$, яка розташована під прямою $y=-2$. **28. а)** Парабола, $A(2;-5)$, $p=2$, **б)** частина еліпсу $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{1}=1$, яка розташована справа від прямої $x=-1$. **29. а)** Гіпербола, $C(3;1)$, $a=3$, $b=4$, **б)** частина параболи $(x-2)^2=-8(y+3)$, яка розташована зліва від прямої $x=2$. **30. а)** Еліпс, $C(-2;-3)$, $a=3$, $b=5$, **б)** частина гіперболи $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$, яка розташована над прямою $y=-3$.

Завдання 7

1. $M_0(-2;11;2)$. **2.** $M_0(3;-7;1)$. **3.** $M_0(-6;-1;10)$. **4.** $M_0(0;3;3)$. **5.** $M_0(-6;-3;0)$. **6.** $M_0(0;-7;10)$. **7.** $M_0(3;0;1)$. **8.** $M_0(-1;7;0)$. **9.** $M_0(0;2;18)$. **10.** $M_0(-2;0;7)$. **11*.** $x=-3t+1,\ y=-4t-1,\ z=0.$ **12*.** $x=0,\ y=5t-2,\ z=t+2.$ **13*.** $x=3t+1,\ y=0,\ z=t-3.$ **14*.** $x=2t+1, y=-3t+1, z=0.$ **15*.** $x=0,\ y=t+2,\ z=5t-4.$ **16*.** $x=3t+1,\ y=0,\ z=2t+3.$ **17*.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}.$ **18*.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z}{-11}.$ **19*.** $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{19}=\frac{z}{7}.$ **20*.** $\frac{x-3}{-3}=\frac{y+2}{7}=\frac{z}{8}.$ **21.** $8x+3y+21z-9=0.$ **22.** $x-2y-11z=0.$ **23.** $9x+6y-10z+33=0.$ **24.** $5x-11y-7z-43=0.$ **25.** $2y-z=0.$ **26.** $x+2z=0.$ **27.** $x-3y=0.$ **28.** $5y-z+6=0.$ **29.** $7x+z-5=0.$ **30.** $7x-y-10=0.$
* Наведено одну з можливих відповідей.

Завдання 8

1. $\sqrt{21}.$ 2. $\sqrt{38}.$ **3.** $2\sqrt{6}.$ **4.** $3\sqrt{6}.$ **5.** $\sqrt{14}.$ **6.** $M_1(6;4;5)$. **7.** $M_1(-3;2;-2)$. **8.** $M_1(1;-4;0)$. **9.** $M_1(-3;4;2)$. **10.** $M_1(1;6;-7)$. **11.** 6. **12.** $\sqrt{14}.$ **13.** $\sqrt{21}.$ **14.** $\sqrt{14}.$ **15.** $\sqrt{6}.$ **16.** $\arcsin\frac{9}{11}.$ **17.** Пряма належить площині. **18.** $\frac{\pi}{6}.$ **19.** Пряма паралельна площині і не належить їй. **20.** $\frac{\pi}{2}.$ **21.** Пряма належить площині. **22.** $\arcsin\frac{2}{7}.$ **23.** Пряма паралельна площині і не належить їй. **24.** $\arcsin\frac{5}{7}.$ **25.** Пряма належить площині. **26.** $M_1(5;5;0)$. **27.** $M_1(-3;5;-6)$. **28.** $M_1(-4;-3;1)$. **29.** $M_1(1;-4;1)$. **30.** $M_1(6;-2;-5)$.

Розділ 3. Границі і неперервність

Завдання 1

1. а) ∞, **б)** 0. **2. а)** 6, **б)** -1. **3. а)** $-\frac{1}{9}$, **б)** $\frac{1}{2}$. **4. а)** $\frac{4}{7}$, **б)** $\frac{1}{3}$. **5. а)** $\frac{44}{9}$, **б)** $\frac{1}{5}$. **6. а)** $\frac{2}{11}$, **б)** $+\infty$. **7. а)** -6, **б)** $+\infty$. **8. а)** $-\infty$, **б)** 1. **9. а)** $\frac{5}{3}$, **б)** -2. **10. а)** ∞, **б)** 0. **11. а)** 0, **б)** 0. **12. а)** -7, **б)** $-\frac{3}{\sqrt{2}}$. **13. а)** $\frac{2}{3}$, **б)** $\frac{5}{3}$. **14. а)** $-\infty$, **б)** $-\frac{1}{3}$. **15. а)** -2, **б)** -5. **16. а)** 2, **б)** $+\infty$. **17. а)** $-\infty$, **б)** 0. **18. а)** $\frac{5}{9}$, **б)** 0. **19. а)** $-\frac{7}{2}$, **б)** 0. **20. а)** $\frac{6}{7}$, **б)** $-\frac{7}{5}$. **21. а)** -7, **б)** 3. **22. а)** 1, **б)** 2. **23 а) 3, б)** 3. **24. а)** 4, **б)** $\frac{1}{3}$. **25. а)** 0, **б)** $+\infty$. **26. а)** $\frac{17}{9}$, **б)** $\frac{2}{7}$. **27. а)** -4, **б)** $+\infty$. **28. а)** $-\infty$, **б)** $\frac{1}{3}$. **29. а)** $\frac{5}{2}$, **б)** 2. **30. а)** $-\frac{1}{9}$, **б)** $-\frac{1}{3}$.

Завдання 2

1. $\frac{1}{4}$. **2.** -3. **3.** 108. **4.** $-\frac{6}{7}$. **5.** -2. **6.** $\frac{5}{19}$. **7.** $\frac{7}{11}$. **8.** $-\frac{3}{22}$. **9.** $\frac{1}{4}$. **10.** $\frac{1}{10}$. **11.** 0. **12.** $\frac{5}{13}$. **13.** $-\frac{3}{2}$. **14.** $\frac{10}{9}$. **15.** $\frac{5}{3}$. **16.** -2. **17.** $\frac{1}{8}$. **18.** $-\frac{1}{2}$. **19.** -1. **20.** $\frac{3}{2}$. **21.** $\frac{1}{2}$. **22.** 0. **23.** $-\frac{2}{5}$. **24.** $\frac{1}{2}$. **25.** $\frac{3}{5}$. **26.** $\frac{9}{2}$. **27.** $\frac{10}{9}$. **28.** $-\frac{3}{2}$. **29.** -2. **30.** 0.

Завдання 3

1. $\frac{1}{4}$. **2.** ∞. **3.** $\frac{2}{9}$. **4.** 3. **5.** $-\infty$. **6.** $-\frac{1}{2}$. **7.** $-\frac{1}{8}$. **8.** -4. **9.** $\frac{1}{9}$. **10.** $-\infty$. **11.** $-\infty$. **12.** $-\infty$. **13.** $-\frac{1}{4}$. **14.** ∞. **15.** ∞. **16.** $-\frac{10}{3}$. **17.** $-\infty$. **18.** 0. **19.** ∞. **20.** ∞. **21.** $-\infty$. **22.** $-\infty$. **23.** $-\infty$. **24.** ∞. **25.** ∞. **26.** ∞. **27.** $\frac{11}{8}$. **28.** $\frac{29}{4}$. **29.** ∞. **30.** ∞.

Завдання 4

1. 0. **2.** -3. **3.** $\frac{5}{2}$. **4.** -3. **5.** -1. **6.** $\frac{7}{2}$. **7.** $\frac{3}{2}$. **8.** -3. **9.** $\frac{1}{2}$. **10.** $\frac{1}{2}$. **11.** $\frac{3}{2}$. **12.** 1. **13.** $\frac{1}{2}$. **14.** 0. **15.** 2. **16.** $\frac{1}{6}$. **17.** $\frac{1}{84}$. **18.** $\frac{1}{30}$. **19.** 4. **20.** $\frac{3}{80}$. **21.** 4. **22.** $-\frac{1}{16}$. **23.** -16. **24.** 1. **25.** $-\frac{8}{9}$. **26.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **27.** $\frac{2}{3}$. **28.** $\frac{2}{3}$. **29.** -18. **30.** $\frac{5}{16}$.

Завдання 5

1. $\frac{3}{4}$. **2.** 3. **3.** $\frac{1}{10}$. **4.** -2. **5.** ∞. **6.** $\frac{7}{4}$. **7.** ∞. **8.** 3. **9.** -2. **10.** -1. **11.** $\frac{16}{49}$. **12.** -432. **13.** 0. **14.** 0. **15.** $\frac{3}{2}$. **16.** $\frac{7}{2}$. **17.** ∞. **18.** $\frac{3}{16}$. **19.** $\frac{5}{9}$. **20.** $\frac{1}{3}$. **21.** 0. **22.** $\frac{1}{2}$. **23.** 0. **24.** $\frac{4}{\cos 2}$. **25.** -5. **26.** $\frac{9}{5}$. **27.** 5. **28.** $\frac{4}{5\sqrt{3}}$. **29.** 0. **30.** $\frac{5}{\cos 3}$.

Завдання 6

1. e^{7}. **2**. e^{-2}. **3**. $e^{-\frac{8}{5}}$. **4**. 0. **5**. $e^{\frac{2}{3}}$. **6.** e^{2}. **7**. $e^{-\frac{7}{3}}$. **8.** $e^{-\frac{5}{2}}$. **9**. $e^{-\frac{2}{3}}$. **10**. 1. **11.** e^{4}. **12**. $e^{\frac{1}{3}}$. **13**. $e^{\frac{5}{3}}$. **14**. e^{-3}. **15**. $e^{\frac{21}{5}}$. **16**. e^{4}. **17**. e. **18**. $e^{-\frac{1}{3}}$. **19**. e^{18}. **20**. e^{4}. **21**. 1. **22**. $e^{\frac{4}{3}}$. **23**. e^{5}. **24**. e^{-4}. **25**. 1. **26**. 1. **27**. e^{4}. **28**. $e^{-\frac{5}{6}}$. **29**. e^{7}. **30**. 0.

Завдання 7

1. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку малості. **2**. $f(x)$ більш низького порядку, ніж $\varphi(x)$. **3**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку малості. **4**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку малості. **5**. $f(x)\sim\varphi(x)$. **6**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **7**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **8**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **9**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **10**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **11**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **12**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **13**. $f(x)$ більш високого порядку, ніж $\varphi(x)$. **14**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **15**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **16**. $f(x)$ більш високого порядку, ніж $\varphi(x)$. **17**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **18**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **19**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **20**. $f(x)$ більш низького порядку, ніж $\varphi(x)$. **21**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **22**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **23**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **24**. $f(x)$ більш високого порядку, ніж $\varphi(x)$. **25**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **26**. $f(x)$ більш низького порядку, ніж $\varphi(x)$. **27.** $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **28**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку. **29**. $f(x)$ більш високого порядку, ніж $\varphi(x)$. **30**. $f(x)$ та $\varphi(x)$ одного порядку.

Завдання 8

1. $x=1$ – розрив II роду. **2**. $x=1$ – розрив I роду (неусувний). **3**. $x=-1$ – розрив I роду (неусувний). **4**. $x=\pm 2$ – розрив II роду. **5**. $x=3$ – розрив I роду (неусувний). **6**. $x=-4$ – розрив I роду (неусувний). **7**. $x=1$ – розрив I роду (неусувний). **8**. $x=-5$ – розрив I роду (неусувний). **9**. $x=6$ – розрив I роду (неусувний). **10.** $x=-2$ – розрив I роду (неусувний). **11**. $x=-3$ – розрив I роду (неусувний). **12**. $x=5$ – розрив I роду (неусувний). **13**. $x=-1$ – розрив II роду. **14**. $x=7$ – розрив II роду. **15**. $x=3$ – розрив II роду. **16**. $x=0$ – розрив I роду (неусувний). **17**. $x=0$ – розрив I роду (неусувний). **18**. $x=-3$ – розрив I роду (неусувний). **19**. $x=4$ –розрив I роду (неусувний). **20**. $\left.\begin{matrix} x=0 \\ x=-2 \end{matrix}\right\}$ –розриви II роду. **21**. $\left.\begin{matrix} x=-1 \\ x=0 \end{matrix}\right\}$ –розриви II роду. **22**. $\left.\begin{matrix} x=3 \\ x=0 \end{matrix}\right\}$ – розриви II роду. **23**. $x=-2$ – розрив II роду. **24**. $x=1$ –розрив I роду (неусувний). **25**. $x=-2$ – розрив I роду (неусувний). **26**. $x=2$ –розрив II роду. **27**. $\left.\begin{matrix} x=-1 \\ x=0 \end{matrix}\right\}$ –розриви II роду. **28**. $x=0$ – розрив I роду (неусувний). **29**. $x=-7$ –розрив I роду (неусувний). **30**. $x=-3$ – розрив II роду.

Розділ 4. Диференціальне числення функції однієї змінної

Завдання 1в

1. $x^{2}\cdot e^{x}\cos x.$ **2.** $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^{2}\right)^{3}}}.$ **3.** $-\operatorname{arctg}\sqrt{x}.$ **4.** $2\sin\left(\ln x\right).$ **5.** $\dfrac{\sqrt{x^{2}+1}}{x}.$ **6.** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}}.$

7. $\frac{x^4-12}{x}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}$. **8.** $8\cdot\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}$. **9.** $\frac{x\ln x}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$. **10.** $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$. **11.** $\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}$. **12.** $\operatorname{arctg}x$.

13. $\frac{x}{\sqrt{2+4x}}$. **14.** $x\frac{\cos x}{\sin^2 x}$. **15.** $\frac{x-1}{x\sqrt{1+2x}+2x+1}$. **16.** $\frac{9x^5}{2\sqrt{8-x^3}}$. **17.** $-\frac{1}{\sin x\cos^4 x}$. **18.** $e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}}$.

19. $\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x+1}+1}+1\right)$. **20.** $-\frac{4}{x^3\cdot\sqrt{x^2+2}}$. **21.** $\left(4-x^2\right)^{3/2}$. **22.** $\frac{\sqrt{x^2+4x-5}}{x+2}$. **23.** $\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$.

24. $\frac{x\arcsin x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$. **25.** $\frac{1-x^2}{2\left(x^4+1\right)}$. **26.** $\frac{\arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$. **27.** $\frac{-x^2}{x^4+1}$. **28.** $\frac{1}{\sin^3 x}$. **29.** $\frac{2}{x^3\cdot\sqrt{1-4x^2}}$. **30.** $\frac{1}{\cos^3 x}$.

Завдання 3

1. $-\frac{1}{\left(1-\cos t\right)^2}$. **2.** $-\frac{2t^6}{\left(t^2+1\right)^3}$. **3.** $-\frac{1+\cos^2 t}{\sin^4 t}$. **4.** $\frac{2}{e^t\left(\cos t-\sin t\right)^3}$. **5.** $\frac{1}{6\cos^4 t\cdot\sin t}$.

6. $\frac{t\left(1-t\right)\sin 2\sqrt{1+t}-\sqrt{1+t}\cos^2\sqrt{1+t}}{4t^3\cos^4\sqrt{1+t}}$. **7.** $-\frac{1}{2\left(1-\cos t\right)^2}$. **8.** $4\operatorname{tg}^2 t$. **9.** 0. **10.** $\cos\left(2e^t\right)\cdot\sin^2\left(2e^t\right)$.

11. $4t^2$. **12.** $\left(2e^t+1\right)\sqrt{e^t+1}$. **13.** $-\frac{2}{1-t^2}$. **14.** $-\frac{1}{4\arcsin^3 t}$. **15.** $\frac{2+t^2}{2\left(\cos t-t\sin t\right)^3}$. **16.** 2. **17.** $-\frac{1}{2\sin^3 t}$.

18. $4\operatorname{ctg}^2 t$. **19.** $9t^3$. **20.** 0. **21.** $\frac{t\left(1+t\right)}{\left(1-t\right)^3}$. **22.** $\left(1+t^2\right)\left(1+3t^2\right)$. **23.** $-\frac{1}{3t\sin^3 t}$. **24.** $2t^2+2$. **25.** $\frac{2t^3}{\left(1+t\right)^3}$.

26. $\frac{1}{2}$. **27.** $\frac{2}{\sqrt{\left(t-1\right)^3}}$. **28.** $\frac{t^2+t-1}{\left(1-t^2\right)\cdot e^{2t}}$. **29.** $-\frac{1}{t\sin^3 t}$. **30.** 2.

Завдання 4

1. $-\frac{\sin\left(x+y\right)+y\sin\left(xy\right)}{\sin\left(x+y\right)+x\sin\left(xy\right)}$. **2.** $\frac{\sqrt{1-y^2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)}$. **3.** $\frac{y\sin\left(xy\right)-y\sin x+\cos y}{-x\sin\left(xy\right)+x\sin y-\cos x}$. **4.** $\frac{1+y^2}{y^2}$.

5. $\frac{\sin\left(x+y\right)-ye^{xy}}{xe^{xy}-\sin\left(x+y\right)-6y}$. **6.** $\frac{\sin y}{2\sin 2y-\sin y-x\cos y}$. **7.** $\frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2-x}$. **8.** $\frac{48\cos 3x+y^2\sin x}{2y\cos x}$.

9. $\frac{x}{y}\frac{2y^2-3x+4}{-2x^2-3y+4}$. **10.** $\frac{e^y}{2-y}$. **11.** $\frac{x-xy+y}{x\left(y+\left(x+y\right)\ln\left(x+y\right)\right)}$. **12.** $-\frac{3x^2+4xy+3y^2}{2x^2+6xy+3y^2}$.

13. $-\frac{y\sqrt{1-x^2-2xy-y^2}+1}{x\sqrt{1-x^2-2xy-y^2}+1}$. **14.** $\frac{y\cos x+\sin\left(x-y\right)}{\sin\left(x-y\right)-\sin x}$. **15.** $\frac{1-e^{xy}y\sqrt{1-x^2}}{xe^{xy}\sqrt{1-x^2}}$. **16.** $\frac{y\left(1-ye^{x-y}\right)}{x-y^2e^{x-y}}$.

17. $-\frac{\sin\left(x+y\right)}{1+\sin\left(x+y\right)}$. **18.** $\frac{e^{x-y}-y\cos\left(xy\right)}{x\cos\left(xy\right)-e^{x+y}}$. **19.** $-\frac{y\cos^2\left(x+y\right)\left(\cos\left(xy\right)-\sin\left(xy\right)\right)-1}{x\cos^2\left(x+y\right)\left(\cos\left(xy\right)-\sin\left(xy\right)\right)-1}$.

20. $\frac{e^y\cos x-e^x\sin y}{e^x\cos y-e^y\sin x}$. **21.** $\frac{ye^{xy}-2x+2y}{2y-2x-xe^{xy}}$. **22.** $\frac{x\left(y^2-2x^2\right)}{y\left(2y^2-x^2\right)}$. **23.** $\frac{y^2-2xy+e^{y+x}}{x^2-2xy-2-e^{y+x}}$.

24. $-\dfrac{2\,\mathrm{tg}(y-x)}{\cos^2(y-x)-2\,\mathrm{tg}(y-x)}$. **25.** $3^{x-y}\dfrac{3^y-1}{1-3^x}$. **26.** $\dfrac{1-2^{x+y}(x+y)\ln 2}{1+2^{x+y}(x+y)\ln 2}$. **27.** $\dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$.
28. $\dfrac{1}{2}\dfrac{x-y}{(x+y)\ln(x+y)+y}$. **29.** $\dfrac{1+y+x^2y^2}{1-x+x^2y^2}$. **30.** $\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$.

Завдання 5а

1. $x-2y-10=0;$ $2x+y-5=0.$ **2.** $4x+2y-3=0;$ $x-2y+0,5=0.$ **3.** $5x+6y-13=0;$ $6x-5y+21=0.$ **4.** $10x-y+40=0;$ $0,1x+y-0,4=0.$ **5.** $7x-10y+6=0;$ $10x+7y-34=0.$ **6.** $x+11y-23=0;$ $11x-y-9=0.$ **7.** $y-5=0;$ $x+2=0.$ **8.** $2x+6y-4\sqrt{3}=0;$ $6x-2y-2\sqrt{3}-0$. **9.** $x+y-2=0;$ $x-y=0.$ **10.** $x-2y+1=0;$ $2x+y-3=0.$ **11.** $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{4}=0;$ $(\pi-4)x-(\pi+4)y+\pi\sqrt{2}=0.$ **12.** $14x-13y+12=0;$ $13x+14y-41=0.$ **13.** $x-4y+7=0;$ $4x+y-6=0.$ **14.** $\sqrt{3}x-y-\dfrac{a}{3}\left(\sqrt{3}\pi-6\right)=0;$ $x+\sqrt{3}y-\dfrac{a}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)=0.$ **15.** $7x-12y+5=0;$ $12x+7y-19=0.$ **16.** $x-4y-232=0;$ $4x+y-10=0$. **17.** $x-3y=0;$ $3x+y=0.$ **18.** $4x-9y+14=0;$ $9x+4y-17=0.$ **19.** $x+3y+56=0;$ $3x-y+8=0.$ **20.** $x+2y-4=0;$ $2x-y-3=0$. **21.** $x+3y-4=0;$ $3x-y-2=0.$ **22.** $x+2y+3=0;$ $2x-y+1=0.$
23. $\dfrac{x}{\ln 3}-y-\dfrac{1}{\ln 3}=0;$ $\ln 3\cdot x+y-\ln 3=0.$ **24.** $9x-24y+39=0; 24x+9y-42=0.$
25. $x-\sqrt{3}y-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}=0;$ $\sqrt{3}x+y+\dfrac{\pi}{6}=0.$ **26.** $x+y-1=0;$ $2x-2y+1=0.$ **27.** $x+y-1=0;$ $x-y-1=0.$
28. $e\cdot x-4y=0;$ $\dfrac{4}{e}x+y-\dfrac{16+e^2}{e}$. **29.** $11x+4y+9=0;$ $4x+11y+78=0.$ **30.** $x+y-2=0;$ $x-y=0.$

Завдання 5б

1. $(0;20),(1;15),(-2;-12)$. **2**. Так. **3.** $4x-y-2=0;$ $x+4y-9=0.$ **4.** $32x+48y+157=0.$ **5.** $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{7}$, 0. **6.** $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{13}$, $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{7}$. **7.** $\left(\dfrac{1}{8};-\dfrac{1}{16}\right)$. **8.** $y=x^2-x+1$. **9.** $\dfrac{\pi}{4}$, $\mathrm{arctg}2$. **10.** $3x+y+3=0.$
11. $\mathrm{arctg}\dfrac{2}{e}$. **12.** $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{3}$. **13.** $x-2y-1=0.$ **14.** $x-2y+1=0.$ **15.** $\left(e^{-11/4};-\dfrac{7}{4}e^{-11/4}\right)$.
16. $(1;0),(-1;0)$.. **17.** $10x-y-40=0.$ **18.** $x+9y-9=0.$ **19.** $x-3y+\dfrac{3\pi}{2}=0.$ **20.** $3x+y+4=0.$ **21.** $x-y=0.$ **22.** $3x-4y-4=0.$ **23.** $3y-1=0.$ **24.** $4x-y-2=0;$ $x+4y-9=0.$ **25.** $(2;4)$. **26.** $(-1;1)$.
27. $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{13}$, $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{7}$. **28.** $x_1=0,$ $x_2=\dfrac{2}{3}$. **29.** $x-y-1=0.$ **30.** $\dfrac{3}{2}x-y-1-\ln\dfrac{3}{2}=0.$

Завдання 6

1. а) 3; **б)** e^{-2}. **2. а)** $\dfrac{6}{25}$; **б)** $\dfrac{1}{e}$. **3. а)** $\dfrac{1}{2\ln^2 3}$; **б)** 1. **4. а)** $-\dfrac{1}{20}$; **б)** 1. **5. а)** $-\dfrac{3}{2}$; **б)** 1. **6. а)** $\cos 3$; **б)** 1.

7. а) $\frac{4a^2}{\pi}$; **б)** e^{ctg3}. **8. а)** 1; **б)** 1. **9. а)** 1; **б)** 1. **10. а)** $a^a(\ln a+1)$**; б)** e^2. **11. а)** $-\frac{1}{4}$; **б)** e^2.
12. а) $a^a(\ln a-1)$**; б)** e. **13. а) 0; б)** 1. **14. а)** $\frac{1}{2}$; **б)** $e^{\frac{1}{3}}$. **15. а)** 2; **б)** 1. **16. а)** -2; **б)** e^2. **17. а)** 1; **б)** 1.
18. а) 1; **б)** e^{16}. **19. а)** $\frac{2}{e}$; **б)** 1. **20. а)** $\frac{1}{4}$; **б)** e^{-1}. **21. а)** 25; **б)** e^{-50}. **22. а)** 0; **б)** e. **23. а)** -3; **б)** $e^{\frac{1}{3}}$.
24. а) -1; **б)** e^{-tg2}. **25. а)** $-\frac{1}{16}$; **б)** $e^{\frac{2}{\pi}}$. **26. а)** $-\frac{1}{2}$; **б)** e. **27. а)** $+\infty$; **б)** e^4. **28. а)** 0; **б)** $e^{\frac{-1}{\pi}}$. **29. а)** 0; **б)** $e^{\frac{1}{2}}$. **30. а)** $\frac{1}{2}$; **б)** $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Завдання 7 (y_1,y_2), де y_1 – найменше значення, а y_2 – найбільше.

1. $\left(-2\frac{1}{3},3\right)$. **2.** $\left(0,\sqrt[3]{9}\right)$. **3.** $(-4,4)$. **4.** $(0,5)$. **5.** $(4,13)$. **6.** $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. **7.** $(-1,1)$. **8.** $(-3,-1)$.
9. $\left(-\frac{1}{2e},e^2\right)$. **10.** $(-2,2)$. **11.** $(2-2\ln 2,1)$. **12.** $(-1,7)$. **13.** $(-2,6)$. **14.** $(6,10)$. **15.** $(0,8)$. **16.** $\left(-e,\frac{27}{e^3}\right)$.
17. $(0,2)$. **18.** $\left(\frac{3}{5},1\right)$. **19.** $\left(0,\sqrt{3}\right)$. **20.** $(1,2)$. **21.** $(-3,2)$. **22.** $(-10,2)$. **23.** $(5,13)$. **24.** $\left(2,\frac{5}{2}\right)$.
25. $(-1,1)$. **26.** $\left(2,\frac{5}{2}\right)$. **27.** $(-4,4)$. **28.** $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. **29.** $(-9,40)$. **30.** $(1,2)$.

Завдання 8

1. а) $D(y)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$; $y=-1, y=x-1$ –асимптоти; $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)-f(x)\uparrow$; $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)-f(x)\downarrow$; $y(2)=-4-max$; $y(0)=0-min$; $x\in(-\infty,-1)-\cap$; $x\in(-1,+\infty)-\cup$; **б)** $D(y)=(-1,+\infty)$; $x=-1$ – асимптота; $x\in(0,+\infty)-f(x)\downarrow$, $x\in(-1,0)-f(x)\uparrow$; $y(0)=0-max$; $x\in(-1,+\infty)-\cap$. **2. а)** $D(y)=(-\infty,+\infty)$; $y=1$ – асимптота; парна; $x\in(-\infty,0)-f(x)\downarrow$, $x\in(0,+\infty)-f(x)\uparrow$; $y(0)=-1-min$; $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)-\cap$, $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\cup-$ точка перегину; **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty)$; $y=0$ – асимптота; $x\in(-\infty,1)-f(x)\uparrow$, $x\in(1,+\infty)-f(x)\downarrow$; $y(1)=\frac{1}{e}-max$; $x\in(-\infty,2)-\cap$, $x\in(2,+\infty)-\cup$; $y(2)=\frac{2}{e^2}$ – точка перегину. **3. а)** $D(y)=$ $=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$; $x=0$, $y=x+1$ – асимптоти; $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)-f(x)\uparrow$; $y(0)=0-max$, $y(2)=4-min$; $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)-\cup$; **б)** $D(y)=\left(-\infty,-\sqrt{8}\right)\cup\left(-\sqrt{8},+\sqrt{8}\right)\cup\left(\sqrt{8},+\infty\right)$; $x=\sqrt{8}$, $y=0$, $x=-\sqrt{8}$ –асимптоти; $x\in\left(-\infty,-\sqrt{8}\right)\cup\left(-\sqrt{8},-2\right)\cup(4,+\infty)-f(x)\uparrow$, $x\in\left(-2,\sqrt{8}\right)\cup\left(\sqrt{8},4\right)-$ $-f(x)\downarrow$; $y(4)=\frac{e^2}{8}-min$; $x\in\left(-\infty,-\sqrt{8}\right)\cup\left(2\sqrt{2},+\infty\right)-\cup$, $x\in\left(-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)-\cap$.
4. а) $D(y)=\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$; $x=\frac{1}{3}, y=x+\frac{1}{3}$ – асимптоти; $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)-f(x)\uparrow$; $y(0)=0-max$; $y\left(\frac{2}{3}\right)=1\frac{1}{3}-min$; $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)-\cap$, $x\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)-\cup$; **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty)$; – парна; $x\in(-\infty,0)-f(x)\downarrow$, $x\in(0,+\infty)-f(x)\uparrow$; $y(0)=0-min$; $x\in(-\infty,1)\cup(-\infty,1)-\cap$, $x\in(-1,1)-\cup$;

$y(1)=y(-1)=\ln 2-$ точка перегину. **5**. **а)** $D(y)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$; $y=-1, y=x-1$ –асимптоти; $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)-f(x)\uparrow$; $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)-f(x)\downarrow$; $y(-2)=-4-max$; $y(0)=0-min$; $x\in(-\infty,-1)-\cap$, $x\in(-1,+\infty)-\cup$; **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty)$; $y=0$ –асимптота; $x\in(-\infty,2)-f(x)\uparrow$, $x\in(2,+\infty)-f(x)\downarrow$; $y(2)=\frac{16}{e}-max$; $x\in(-\infty,4)-\cap$, $x\in(4,+\infty)-\cup$; $y(4)=\frac{32}{e^2}$–точка перегину. **6**. **а)** $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; $x=0, y=0$ –асимптоти; $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)-f(x)\downarrow$, $x\in\left(0,\frac{4}{3}\right)-f(x)\uparrow$; $y\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{9}{8}-max$; $x\in(-\infty,0)\cup(0,2)-\cap$, $x\in(2,+\infty)-\cup$; $y(2)=1$ – точка перегину; **б)** $D(y)=(0,1)\cup(1,+\infty)$; $x=1$ – асимптота; $x\in(0,1)\cup(1,e^2)-f(x)\downarrow$, $x\in(e^2,+\infty)-f(x)\uparrow$; $y(e^2)=\frac{e}{2}-min$; $x\in(0,e^{-2})\cup(1,e^2)-\cup$, $x\in(e^{-2},1)\cup(e^2,+\infty)-\cap$; $y(e^{-2})=-\frac{1}{2e}$ – точка перегину. **7**. **а)** $D(y)==(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$; $x=0, y=x+1$ – асимптоти; $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)-f(x)\uparrow$, $x\in(0,1)\cup(1,2)-f(x)\downarrow$; $y(0)=0-max$; $y(2)=4-min$; $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)-\cup$; **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty)$; $y=0$ – асимптота; $x\in(-\infty,1)-f(x)\uparrow$, $x\in(1,+\infty)-f(x)\downarrow$; $y(1)=\frac{1}{e}-max$; $x\in(-\infty,2)-\cap$, $x\in(2,+\infty)-\cup$; $y(2)=\frac{2}{e^2}$ – точка перегину. **8**. **а)** $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;–парна; $x=0$ – асимптота; $x\in(-\infty,0)-f(x)\downarrow$, $x\in(0,+\infty)-f(x)\uparrow$; $y\left(\pm3\sqrt[4]{3}\right)=2\sqrt{3}$ – точки перегину; $x\in\left(-\infty,-3\sqrt[4]{3}\right)\cup\left(3\sqrt[4]{3},+\infty\right)-\cup$, $x\in\left(-3\sqrt[4]{3},0\right)\cup\left(0,3\sqrt[4]{3}\right)-\cap$; **б)** $D(y)=(0,+\infty)$; $x\in\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right)-f(x)\downarrow$, $x\in\left(e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)-f(x)\uparrow$; $y\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2e}-min$; $x\in\left(e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right)-\cup$, $x\in\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right)-\cap$; $y\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=-\frac{3}{2e^3}$ – точка перегину. **9**. **а)** $D(y)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$; $x=-1$, $y=\frac{1}{2}x-1$ – асимптоти; $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)-f(x)\uparrow$, $x\in(-3,-1)-f(x)\downarrow$; $y(-3)=-\frac{27}{8}-max$; $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)-\cap$, $x\in(0,+\infty)-\cup$; $y(0)=0$ –точка перегину; **б)** $D(y)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$; $x=-1$, $y=0$ – асимптоти; $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)-f(x)\downarrow$, $x\in(1,+\infty)-f(x)\uparrow$; $y(1)=\frac{e}{2}-min$; $x\in(-\infty,-1)-\cap$, $x\in(-1,+\infty)-\cup$. **10**. **а)** $D(y)==(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$; – непарна; $x=1, x=-1$ – асимптоти; $x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)-f(x)\uparrow$, $x\in\left(-\sqrt{3},1\right)\cup(-1,1)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)-f(x)\downarrow$; $y\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}-min$, $y\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}-max$; $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,0)\cup(1,3)-\cup$, $x\in(-3,1)\cup(0,1)\cup(3,+\infty)-\cap$; $y(0)=0, y(\pm3)=\pm\frac{3}{2}$ – точки перегину; **б)** $D(y)=(0,+\infty)$; $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)-f(x)\downarrow$, $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)-f(x)\uparrow$; $y\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}-min$; $x\in(0,+\infty)-\cup$. **11**. **а)** $D(y)=(-\infty,+\infty)$; парна; $y=1$ – асимптота; $x\in(-\infty,0)-f(x)\downarrow$, $x\in(0,+\infty)-f(x)\uparrow$;

$y(0)=-1-min;$ $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)-\cap,$ $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\cup;$ $y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{2}$ – точки перегину; **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty);$ $y=0$ – асимптота; $x\in(-\infty,2)-f(x)\uparrow,$ $x\in(2,+\infty)-f(x)\downarrow;$ $y(2)=1-max;$ $y(1)=\frac{2}{e}$ – точки перегину $x\in(-\infty,1)-\cup,$ $x\in(1;+\infty)-\cap.$

12. а) $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty);$ парна; $x=0$ – асимптота; $x\in(-\infty,0)-f(x)\downarrow,$ $x\in(0,+\infty)-f(x)\uparrow;$ $y\left(\pm3\sqrt[4]{3}\right)=2\sqrt{3}$ – точки перегину; $x\in\left(-\infty,-3\sqrt[4]{3}\right)\cup\left(3\sqrt[4]{3},+\infty\right)-\cup,$ $x\in\left(-3\sqrt[4]{3},0\right)\cup\left(0,3\sqrt[4]{3}\right)-\cap;$ **б)** $D(y)=(-2,2);$ парна; $x=2,\,x=-2$ – асимптоти; $y(0)=\ln 4-max;$ $x\in(-2,0)-f(x)\uparrow,$ $x\in(0,2)-f(x)\downarrow;$ $x\in(-2,2)-\cap.$

13. а) $D(y)=\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right);$ $x=\frac{1}{3},$ $y=x+\frac{1}{3}$ – асимптоти; $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)-f(x)\uparrow,$ $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)-f(x)\downarrow;$ $y(0)=0-max,$ $y\left(\frac{2}{3}\right)=1\frac{1}{3}-min;$ $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)-\cap,$ $x\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)-\cup;$ **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty);$ $y=0$ – асимптота; $x\in(-\infty,1)-f(x)\uparrow,$ $x\in(1,+\infty)-f(x)\downarrow;$ $y(1)=\frac{4}{e}-max;$ $x\in(-\infty,2)-\cap,$ $x\in(2,+\infty)-\cup;$ $y(2)=\frac{8}{e^2}$ – точка перегину.

14. а) $D(y)=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty);$ парна; $x=2,$ $x=-2,$ $y=-1$ – асимптоти; $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,0)-f(x)\downarrow,$ $x\in(0,2)\cup(2,+\infty)-f(x)\uparrow;$ $y(0)=0-min;$ $x\in(-2,2)-\cup,$ $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)-\cap;$ **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty);$ непарна; $x\in(-\infty,+\infty)-f(x)\uparrow;$ $x\in(-\infty,0)-\cap,$ $x\in(0,+\infty)-\cup;$ $y(0)=0$ – точка перегину. **15. а)** $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty);$ $x=0,\,y=0$ – асимптоти; $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)-f(x)\downarrow,$ $x\in\left(0,\frac{4}{3}\right)-f(x)\uparrow;$ $y\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{9}{8}-max;$ $x\in(-\infty,0)\cup(0,2)-\cap,$ $x\in(2,+\infty)-\cup;$ $y(2)=1$ – точки перегину; **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty);$ $y=x$ – асимптота; $x\in(-\infty,0)-f(x)\downarrow,$ $x\in(0,+\infty)-f(x)\uparrow;$ $y(0)=1-min;$ $x\in(-\infty,+\infty)-\cup.$

16. а) $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty);$ $x=0$ – асимптота; $x\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{5}{\sqrt[3]{2}}\right)-f(x)\downarrow,$ $x\in\left(\frac{5}{\sqrt[3]{2}},+\infty\right)-f(x)\uparrow;$ $y\left(\frac{5}{\sqrt[3]{2}}\right)=\frac{25\sqrt[3]{2}}{8}-min;$ $y(-5)=0$ – точка перегину; $x\in(-\infty,-5)\cup(0,+\infty)-\cup,$ $x\in(-5,0)-\cap;$ **б)** $D(y)=(0,+\infty);$ $y=x$ – асимптота; $x\in(0,+\infty)-f(x)\uparrow,$ $x\in\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)-\cap,$ $x\in\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)-\cup;$ $y\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=e^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$ – точка перегину.

17. а) $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty);$ $x=0$ – асимптота $x\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)-f(x)\downarrow,$ $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)-f(x)\uparrow;$ $y\left(\frac{1}{2}\right)=3-min;$ $x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)\cup(0,+\infty)-\cup,$ $x\in\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2},0\right)-\cap;$ $y\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)=0$ – точка перегину; **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty);$ $y=0$ – асимптота; $x\in(-\infty,3)-f(x)\uparrow,$ $x\in(3,+\infty)-f(x)\downarrow;$

$y(3)=\frac{27}{e^3}-max;$ $x\in(-\infty,0)\cup\left(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}\right)-\cap,$ $x\in\left(0,3-\sqrt{3}\right)\cup\left(3+\sqrt{3},+\infty\right)-\cup$ $y(0)=0,$ $y\left(3-\sqrt{3}\right)=\left(3-\sqrt{3}\right)^3\cdot e^{-\left(3-\sqrt{3}\right)},$ $y\left(3+\sqrt{3}\right)=e^{-\left(3+\sqrt{3}\right)}\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)$ – точки перегину. **18**. **а)** $D(y)=$ $=(-\infty,1)\cup(1,+\infty);$ $x=1,$ $y=0$ – асимптоти; $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)-f(x)\downarrow$, $x\in(0,1)\cup-f(x)\uparrow$; $y(0)=-1-min;$ $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)-\cap,$ $x\in\left(-\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)-\cup;$ $y\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{8}{9}$ – точка перегину; **б)** $D(y)=$ $=(-\infty,-1)\cup(0,+\infty);$ $x=-1, x=0,$ $y=-1$ – асимптоти; $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)-f(x)\uparrow$; $x\in(0,+\infty)-\cap$, $x\in(-\infty,-1)-\cup$. **19**. **а)** $D(y)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty);$ $x=1, y=x$ – асимптоти; $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)-f(x)\uparrow$, $x\in(0,1)\cup(1,2)-f(x)\downarrow;$ $y(0)=-1-max;$ $y(2)=3$ – $min;$ $x\in(-\infty,1)-\cap;$ $x\in(1,+\infty)-\cup;$ **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty); y=0$ – асимптота; $x\in(-\infty,3)-f(x)\uparrow,$ $x\in(3,+\infty)-f(x)\downarrow;$ $y(3)=1-max;$ $x\in(-\infty,2)-\cup,$ $x\in(2,+\infty)-\cap;$ $y(2)=2e^{-1}$ – точка перегину. **20.** **а)** $D(y)=(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,+\infty);$ $x=-3, x=1, y=0$ – асимптоти; $x\in(-\infty,-3)\cup(-3,-1)-f(x)\uparrow,$ $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)-f(x)\downarrow;$ $y(-1)=-1-max;$ $x\in(-3,1)-\cap,$ $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)-\cup;$ **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty);$ $x\in(-\infty,0)-f(x)\uparrow,$ $x\in(0,+\infty)-f(x)\downarrow;$ $y(0)=1-min;$ $x\in(-\infty,+\infty)-\cup.$ **21**. **а)** $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty);$ $x=0$ – асимптота; $x\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)-f(x)\downarrow,$ $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)-f(x)\uparrow;$ $y\left(\frac{1}{2}\right)=3-min;$ $x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)\cup(0,+\infty)-\cup,$ $x\in\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2},0\right)-\cap;$ $y\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)=0$ – точка перегину; **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty); y=x$ – асимптота; $x\in(0,+\infty)-f(x)\uparrow,$ $x\in(-\infty,0)-f(x)\downarrow;$ $y(0)=1-min;$ $x\in(-\infty,+\infty)-\cup.$ **22**. **а)** $D(y)=$ $=(-\infty,0)\cup(0,+\infty);$ $x=0$ –асимптота; $x\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{5}{\sqrt[3]{2}}\right)-f(x)\downarrow,$ $x\in\left(\frac{5}{\sqrt[3]{2}},+\infty\right)-f(x)\uparrow;$ $y\left(\frac{5}{\sqrt[3]{2}}\right)\approx3{,}93-min;$ $x\in(-\infty,-5)\cup(0,+\infty)-\cup,$ $x\in(-5,0)-\cap; y(-5)=0$ – точка перегину; **б)** $D(y)=(0,+\infty);$ $y=x$ –асимптота; $x\in(0,+\infty)-f(x)\uparrow,$ $x\in\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)-\cap,$ $x\in\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)-\cup;$ $y\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=e^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$ –точка перегину. **23**. **а)** $D(y)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty);$ $x=1, y=0$ – асимптоти; $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)-f(x)\downarrow$, $x\in(-1,1)-f(x)\uparrow;$ $y(-1)=\frac{1}{8}-min;$ $x\in(-\infty,-2)-\cap,$ $x\in(-2,1)\cup(1,+\infty)-\cup$; $y(-2)=-\frac{1}{2}-$ точка перегину; **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty); y=0$ – асимптота; $x\in(-\infty,3)-f(x)\uparrow,$ $x\in(3,+\infty)-f(x)\downarrow;$ $y(3)=\frac{27}{e^3}-max;$ $x\in(-\infty,0)\cup\left(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}\right)-\cap,$ $x\in\left(0,3-\sqrt{3}\right)\cup\left(3+\sqrt{3},+\infty\right)-\cup$; $y(0)=0,$ $y\left(3-\sqrt{3}\right)=\left(3-\sqrt{3}\right)e^{-\left(3-\sqrt{3}\right)},$ $y\left(3+\sqrt{3}\right)=\left(3+\sqrt{3}\right)e^{-\left(3+\sqrt{3}\right)}$ – точки перегину. **24**. **а)** $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty);$ непарна; $x=0, y=3x$ – асимптоти; $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)-f(x)\uparrow,$ $x\in(-1,0)\cup(0,1)-f(x)\downarrow;$ $y(-1)=-4$ – $max;$ $y(1)=4$ – $min;$ $x\in(-\infty,0)-\cap,$ $x\in(0,+\infty)-\cup;$ **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty);$ непарна; $y=x-\pi,$ $y=x+\pi$ – асимптоти;

$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)-f(x)\uparrow$, $x\in(-1,1)-f(x)\downarrow$; $y(\pm1)=\pm1\mp\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{min}{max}$; $x\in(-\infty,0)-\cap$, $x\in(0,+\infty)-\cup$; $y(0)=0$–точка перегину. **25. а)** $D(y)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$; $x=1$, $y=x-2$ – асимптоти; $x\in\left(-\infty,1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2},+\infty\right)-f(x)\uparrow$, $x\in\left(1-\sqrt{2},1\right)\cup\left(1,1+\sqrt{2}\right)-f(x)\downarrow$; $y\left(1-\sqrt{2}\right)\approx$ $\approx-3{,}8-max$, $y\left(1+\sqrt{2}\right)\approx1{,}8-min$; $x\in(-\infty,1)-\cap$, $x\in(1,+\infty)-\cup$; **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty)$; $y=0$ – асимптота; $x\in(-\infty,3)-f(x)\uparrow$, $x\in(3,+\infty)-f(x)\downarrow$; $y(3)=1-max$; $x\in(-\infty,2)-\cup$, $x\in(2,+\infty)-\cap$; $y(2)=\dfrac{2}{e}$–точка перегину. **26**. **а)** $D(y)=(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,+\infty)$; $x=-3$, $x=1$, $y=0$ – асимптоти; $x\in(-\infty,-3)\cup(-3,-1)-f(x)\uparrow$, $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)-f(x)\downarrow$; $y(-1)=-1-max$; $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)-\cup$, $x\in(-3,1)-\cap$; **б)** $D(y)=(0,+\infty)$; $y=0$, $x=0$ – асимптоти; $x\in(0,e)-f(x)\uparrow$, $x\in(e,+\infty)-f(x)\downarrow$; $y(e)=\dfrac{1}{e}-max$; $x\in\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)-\cap$, $x\in\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)-\cup$; $y\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=\dfrac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$–точка перегину. **27**. **а)** $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; непарна; $x=0$, $y=3x$ – асимптоти; $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)-f(x)\uparrow$, $x\in(-1,0)\cup(0,1)-f(x)\downarrow$; $y(-1)=-4-max$, $y(1)=4-min$; $x\in(-\infty,0)-\cap$, $x\in(0,+\infty)-\cup$; **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty)$; непарна; $y=0$ – асимптоти; $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)-f(x)\downarrow$, $x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-f(x)\uparrow$; $y\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}}-\dfrac{max}{min}$; $x\in\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)\cup\left(0,\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)-\cap$, $x\in\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)\cup\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}},+\infty\right)-\cup$; $y(0)=0$, $y\left(\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{3}{2}}$ – точки перегину. **28**. **а)** $D(y)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$; $x=1$, $y=x$ – асимптоти; $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)-f(x)\uparrow$, $x\in(0,1)\cup(1,2)-f(x)\downarrow$; $y(0)=-1-$ max; $y(2)=3$ – min; $x\in(-\infty,1)-\cap$, $x\in(1,+\infty)-\cup$; **б)** $D(y)=(-3,3)$; парна; $x=-3$, $x=3$ – асимптоти; $x\in(-3,0)-f(x)\uparrow$, $x\in(0,3)-f(x)\downarrow$; $y(0)=\ln9-max$; $x\in(-3,3)-\cap$. **29**. **а)** $D(y)=$ $=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; парна; $y=0$, $x=0$ – асимптоти; $x\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right)-f(x)\uparrow$, $x\in\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)-f(x)\downarrow$; $y\left(\pm\sqrt{2}\right)=\dfrac{1}{4}-max$; $x\in\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{10}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\dfrac{10}{3}},+\infty\right)-\cup$, $x\in\left(-\sqrt{\dfrac{10}{3}},0\right)\cup\left(0,\sqrt{\dfrac{10}{3}}\right)-\cap$; $y\left(\pm\sqrt{\dfrac{10}{3}}\right)\approx0{,}21$ – точки перегину; **б)** $D(y)=(-\infty,+\infty)$; $y=0$ – асимптота; $x\in(-\infty,+\infty)-f(x)\uparrow$; $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)-\cup$, $x\in(-3,-1)-\cap$; $y(-1)=\dfrac{2}{e}$, $y(-3)=\dfrac{10}{e^3}$–точки перегину. **30**. **а)** $D(y)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$; $x=1$, $y=x-2$ – асимптоти; $x\in\left(-\infty,1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2},+\infty\right)-f(x)\uparrow$, $x\in\left(1-\sqrt{2},1\right)\cup\left(1,1+\sqrt{2}\right)-f(x)\downarrow$;

$y\left(1-\sqrt{2}\right)\approx -3{,}8 - max,\ y\left(1+\sqrt{2}\right)\approx 1{,}8 - min;\quad x\in(-\infty,1)-\bigcap,\quad x\in(1,+\infty)-\bigcup$; **б)** $D(y)=(0,+\infty)$; $x=0$ – асимптота; $x\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right)-f(x)\downarrow,\ x\in\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)-f(x)\uparrow;\ y\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{1}{e^2}\,min;\ x\in(0,+\infty)-\bigcup.$

Розділ 5. Невизначений інтеграл

<u>Варіант 1</u>

1. $\frac{1}{32}\ln\left(16x^4+1\right)+\frac{3}{8}\mathrm{arctg}\,4x^2+c$. **2.** $\frac{1}{16}\mathrm{arctg}^4\,4x+c$. **3.** $\frac{3}{2}x^2+6x+13\ln|x-2|+c$. **4.** $\frac{1}{2}(x+3)e^{2x}-$ $-\frac{1}{4}e^{2x}+c$. **5.** $\left(\frac{x^3}{3}-11x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+11x+c$. **6.** $\frac{3}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$. **7.** $-\frac{\cos^5 x}{5}+$ $+\frac{\cos^7 x}{7}+c$. **8.** $\frac{9}{2}x^2-18x+\ln|x-1|-7\ln|x+1|+51\ln|x+2|+c$. **9.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{5}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{5}}\right|+c$. **10.** $3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+$ $+2\cdot\sqrt{x}+6\cdot\sqrt[6]{x}+c.$

<u>Варіант 2</u>

1. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+1\right|+c.$ **2.** $-\frac{5}{16}\ln\left|\frac{x^4-2}{x^4+2}\right|-\frac{3}{8}\ln\left|4-x^8\right|+c.$ **3.** $\frac{5}{2}x^2+\frac{7}{2}\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x+1|+c$.
4. $-e^{-x}(x+3)+c.$ **5.** $x\ln\left|9x^2-1\right|-2x-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|+c.$ **6.** $-\sqrt{4x-x^2+7}+3\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{11}}+c.$
7. $\frac{1}{7}\sin^7 x-\frac{1}{9}\sin^9 x+c.$ **8.** $5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+c$. **9.** $-\frac{1}{6}\mathrm{ctg}^3\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{x}{2}+c$.
10. $x-2\cdot\sqrt{x}+2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+c$.

<u>Варіант 3</u>

1. $-\frac{1}{6}\ln|6\cos x-7|+c$. **2.** $\frac{1}{6}\ln\left(9+x^6\right)-\frac{7}{9}\mathrm{arctg}\frac{x^3}{3}+c$. **3.** $2x+\mathrm{arctg}\,x+c$. **4.** $\frac{1}{2}(2x-3)\sin 2x+$ $+\frac{1}{2}\cos 2x+c.$ **5.** $\left(\frac{x^4}{4}+2x\right)\ln 2x-\frac{x^4}{16}-2x+c.$ **6.** $\frac{3}{4}\ln\left(2x^2-4x+5\right)+\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3/2}}+c$. **7.** $-\frac{4}{3}\cos^3\frac{x}{4}+$ $+\frac{4}{5}\cos^5\frac{x}{4}+c$. **8.** $\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{1}{3}\ln|x+3|+\frac{1}{2}\ln|x-2|+c$. **9.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+c$.
10. $6\cdot\sqrt[6]{x}-6\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+c$.

<u>Варіант 4</u>

1. $\frac{1}{3}\ln|3\ln x+5|+c$. **2.** $\frac{1}{10}\mathrm{arctg}\frac{5e^x}{2}+c$. **3.** $\frac{3}{2}x+\frac{13}{4}\ln|2x-1|+c$. **4.** $-\frac{1}{2}(x+5)\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$.
5. $-\frac{\ln(x+2)}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+c.$ **6.** $2\cdot\sqrt{x^2+2x+5}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+c.$ **7.** $-\frac{1}{14}\cos 7x+$

$+\frac{1}{6}\cos 3x+c.$ **8.** $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+c.$ **9.** $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x+1|+\frac{1}{2}\ln|\cos x|+$ $+\frac{1}{2}x+c.$ **10.** $x-8\cdot\sqrt{x}+32\ln\left(\sqrt{x}+4\right)+c.$

<u>Варіант 5</u>

1. $\frac{1}{2}\ln\left(3x^2-2x+1\right)+c.$ **2.** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}3x^2+\frac{5}{36}\ln\left|1+9x^4\right|+c.$ **3.** $\frac{5}{3}x-\frac{26}{9}\ln|3x+1|+c.$

4. $e^x\left(x^2-2x+7\right)+c.$ **5.** $x\ln\left(x^2-4\right)-2x-2\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c.$ **6.** $-\frac{1}{9}\sqrt{9x^2-6x+10}+$ $+\frac{5}{9}\ln\left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+10}\right|+c.$ **7.** $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+c.$ **8.** $2\ln|x|-\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}-2\ln|x+1|+c.$

9. $x-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+c.$ **10.** $2\sqrt{x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+c.$

<u>Варіант 6</u>

1. $\frac{1}{3}\ln\left(3e^x+7\right)+c.$ **2.** $\frac{5}{4}\ln\left(1+x^4\right)-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x^2+c.$ **3.** $7x+11\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+c.$ **4.** $-\frac{1}{3}(x+1)\cos 3x+$ $+\frac{1}{9}\sin 3x+c.$ **5.** $x\cdot\arccos 2x-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+c.$**6.** $\frac{5}{8}\ln\left(4x^2-8x+5\right)+3\operatorname{arctg}(2x-2)+c.$ **7.** $-\frac{1}{2}\cos 2x+$ $+\frac{1}{6}\cos^3 2x+c.$ **8.** $-\frac{2}{x+2}-3\ln|x+2|+4\ln|x+4|+c.$ **9.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}+c.$ **10.** $x-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+4)^2}+$ $+\sqrt[3]{3x+4}-\ln\left|\sqrt[3]{3x+4}+1\right|+c.$

<u>Варіант 7</u>

1. $\frac{1}{7}\ln|7\sin x+3|+c.$ **2.** $\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln\left(3+e^{2x}\right)+c.$ **3.** $2\sqrt{x^2+9}+5\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+c.$

4. $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+c.$ **5.** $x\cdot\arcsin 3x+\frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2}+c.$ **6.** $\frac{1}{18}\ln\left(9x^2-6x+10\right)+\frac{7}{27}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{3}+c.$

7. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{96}\sin 12x+c$ **. 8.** $\frac{1}{x}-\ln|x|+\ln|x-1|+c$ **. 9.** $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\operatorname{tg}x\right)+c$ **. 10.** $\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+$ $+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+c$.

<u>Варіант 8</u>

1. $-\frac{1}{10}\ln(2\cos 5x+3)+c$ **. 2.** $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\ln x-2}{\ln x+2}\right|+c$ **. 3.** $-\sqrt{16-x^2}-2\arcsin\frac{x}{4}+c$ **. 4.** $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+c$ **.**

5. $-2\sqrt{1-x}\arcsin x+4\sqrt{1+x}+c.$ **6.** $\sqrt{x^2-2x+10}+\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+10}\right|+c.$ **7.** $\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{6}\sin^3 2x+c.$

8. $3x+5\ln|x+2|+\frac{6}{x-1}+c.$ **9.** $\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}+x+c$ **. 10.** $4\cdot\sqrt[4]{x}+6\cdot\sqrt[6]{x}+24\cdot\sqrt[12]{x}+24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+c.$

Варіант 9

1. $\frac{1}{3}\ln\left|5x^3+3x^2-2\right|+c.$ **2.** $\ln\left|\ln x+\sqrt{9+\ln^2 x}\right|+c.$ **3.** $2\sqrt{x^3}+10\sqrt{x}+c.$ **4.** $-\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+$ $+\frac{1}{4}\cos 2x+c.$ **5.** $2\cdot\sqrt{x+1}\cdot\arccos x-4\cdot\sqrt{1-x}+c.$ **6.** $\frac{3}{2}\ln\left|x^2-10x+26\right|+11\operatorname{arctg}(x-5)+c.$

7. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}x+\frac{1}{24}\sin 3x+c.$ **8.** $-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+c.$ **9.** $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-\frac{\sqrt{7}}{2}}{\operatorname{tg}x+\frac{\sqrt{7}}{2}}\right|+c.$

10. $\frac{3}{7}\cdot\sqrt[6]{(2x-3)^7}-\frac{3}{5}\cdot\sqrt[6]{(2x-3)^5}+\sqrt{2x-3}-3\cdot\sqrt[6]{2x-3}+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{2x-3}+c.$

Варіант 10

1. $\cos\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+c.$ **2.** $\arcsin\frac{e^x}{2}+c.$ **3.** $\frac{10}{9}\cdot\sqrt{x^3}-\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x}+c.$ **4.** $2\left(x^2-5\right)\sin\frac{x}{2}+8x\cos\frac{x}{2}+c.$

5. $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{1+3x}\cdot\arcsin 3x+\frac{4}{3}\cdot\sqrt{1-3x}+c.$ **6.** $\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x-5\right|+\frac{5}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+c.$ **7.** $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-$ $-\frac{1}{48}\sin^3 2x+c.$ **8.** $-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{9}\ln|x-1|+\frac{1}{9}\ln\left(x^2+2\right)-\frac{1}{9\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+c$. **9.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}x)+c$.

10. $\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+c$.

Варіант 11

1. $\frac{1}{2}\ln|2\ln x+1|+c.$ **2.** $-\sqrt{9-x^4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{3}+c.$ **3.** $\frac{15}{11}\cdot\sqrt[3]{x^{11}}-\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+c.$ **4.** $-\frac{1}{3}(2x-1)\cos 3x+$ $+\frac{2}{9}\sin 3x+c.$ **5.** $\left(\frac{2}{3}x^3-3x\right)\operatorname{arctg}x-\frac{x^2}{3}+\frac{11}{6}\ln\left(1+x^2\right)+c$. **6.** $\sqrt{x^2-4x-5}+5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-5}\right|+c$.

7. $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+c.$ **8.** $-\frac{3}{x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-2\operatorname{arctg}x+c.$ **9.** $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+c.$

10. $-3\cdot\sqrt[3]{x}-6\cdot\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+c.$

Варіант 12

1. $\frac{3}{4}\ln\left(2x^2+18\right)+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+c$. **2.** $2\sqrt{\ln x-4}+c$. **3.** $\frac{12}{11}\cdot\sqrt[4]{x^{11}}-\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{x^3}+c$. **4.** $-\frac{1}{3}(x+1)e^{-3x}-$ $-\frac{1}{9}e^{-3x}+c$. **5.** $\left(x^2+5x\right)\operatorname{arctg}x-x-\frac{5}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg}x+c.$ **6.** $-\sqrt{3-x^2+2x}+\arcsin\frac{x-1}{2}+c.$

7. $-\frac{1}{5\sin^5 x}+\frac{1}{3\sin^3 x}+c.$ **8.** $-\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\ln\left(x^2-4x+13\right)+\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+c.$ **9.** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+c.$

10. $\frac{6}{5}\cdot\sqrt[6]{x^5}-2\cdot\sqrt{x}+6\cdot\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+c.$

Варіант 13

1. $\frac{1}{2}\ln\left|2\text{tg}x+5\right|+c.$ **2.** $\frac{4}{3}\cdot\sqrt{x^6+3}-\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6+3}\right|+c.$ **3.** $\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4}+6\cdot\sqrt[3]{x}+c.$ **4.** $-\left(x^2+3\right)\cos x+$ $+2x\sin x+2\cos x+c.$ **5.** $x\cdot\text{arctg}5x-\frac{1}{10}\ln\left(1+25x^2\right)+c.$ **6.** $-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-3\right|-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+c.$

7. $-\text{ctg}\,x-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c.$ **8.** $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{16}{3}\ln\left|x+2\right|+\frac{1}{6}\ln\left|x-1\right|-\frac{1}{2}\ln\left|x+1\right|+c.$ **9.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\text{tg}\frac{x}{2}-1}{2\text{tg}\frac{x}{2}+4}\right|+c.$

10. $6\cdot\sqrt[6]{x}-12\text{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2}+c$**.**

Варіант 14

1. $\frac{1}{5}\ln\left|5\ln x+3\right|+c.$ **2.** $-\ln\left|\cos x+\sqrt{\cos^2 x-5}\right|+c.$ **3.** $2\sqrt{(x+1)^3}-16\sqrt{x+1}+c.$ **4.** $\left(6x^2-111\right)\sin\frac{x}{3}+$ $+36x\cdot\cos\frac{x}{3}+c.$ **5.** $\frac{x^2}{2}\text{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\text{arctg}x+c.$ **6.** $\frac{3}{2}\ln\left|x^2-2x-3\right|+2\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+c.$

7. $\text{tg}\,x+\frac{1}{3}\text{tg}^3x+c$**.** **8.** $\frac{x^2}{2}+x+\ln|x|-\frac{2}{3}\ln\left|x-2\right|-\frac{1}{3}\ln\left|x+1\right|+c.$ **9.** $\frac{2}{\sqrt{15}}\text{arctg}\frac{2\,\text{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+c.$

10. $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot(x-1)+2\text{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+c.$

Варіант 15

1. $-\frac{1}{6}\cos\left(3x^2+1\right)+c.$ **2.** $-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^8}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{x^4}{2}+c.$ **3.** $\frac{4}{3}\sqrt{(x-1)^3}+14\sqrt{x-1}+c.$

4. $\frac{3^x}{\ln 3}\left(3x^2+1-\frac{6x}{\ln 3}+\frac{6}{\ln^2 3}\right)+c.$ **5.** $x\cdot\arccos\frac{x}{3}-\sqrt{9-x^2}+c.$ **6.** $-7\sqrt{3-x^2-2x}-8\arcsin\frac{x+1}{2}+c.$

7. $-\text{ctg}\,x-\frac{\text{ctg}^3x}{3}+c.$ **8.** $3\ln|x|-\frac{4}{x-1}-\ln\left|x-1\right|+c.$ **9.** $\frac{1}{2}\cos^2 x+3\cos x+8\ln\left|\cos x-3\right|+c.$

10. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\right|-\frac{1}{2}\text{arctg}\sqrt[4]{x}+c$**.**

Варіант 16

1. $\frac{1}{3}\sin x^3+c$**.** **2.** $\ln\left|e^x+\sqrt{5+e^{2x}}\right|+c$**.** **3.** $3\left(\sqrt[3]{(x+2)^5}-\frac{11}{2}\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)+c$**.** **4.** $-\frac{(x+3)\cdot 5^{-2x}}{2\ln 5}-$ $-\frac{5^{-2x}}{4\ln^2 5}+c$**.** **5.** $-\frac{1}{4x^2}(2\ln 5x+1)+c.$ **6.** $\ln\left|x^2-10x+16\right|+\frac{13}{6}\cdot\ln\left|\frac{x-8}{x-2}\right|+c.$ **7.** $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+c.$

8. $-\ln|x|-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+c.$ **9.** $-8\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+\ln\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+c.$ **10.** $\frac{6}{7}\cdot\sqrt[6]{(x-1)^7}+$

$+\frac{6}{5}\cdot\sqrt[6]{(x-1)^5}+2\cdot\sqrt{x-1}+6\cdot\sqrt[6]{x-1}+3\cdot\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x-1}-1}{\sqrt[6]{x-1}+1}\right|+c.$

Варіант 17

1. $-\cos\left(e^x+3\right)+c.$ **2.** $-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\cos x-3}{\cos x+3}\right|+c.$ **3.** $\frac{9}{5}\sqrt[3]{(x-2)^5}+12\sqrt[3]{(x-2)^2}+c.$ **4.** $-\frac{1}{3}(x+1)e^{-3x}-$ $-\frac{1}{9}e^{-3x}+c.$ **5.** $\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4}\ln 2x-\frac{9}{16}\cdot\sqrt[3]{x^4}+c.$ **6.** $2\ln\left|x^2+4x+3\right|-\frac{9}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+c.$ **7.** $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-$ $-\frac{1}{5}\cos^5 x+c.$ **8.** $-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c.$ **9.** $-\frac{1}{4}\sin x+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{2\sin x-1}{2\sin x+1}\right|+c.$

10. $2\cdot\sqrt{x}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+c.$

Варіант 18

1. $-\frac{1}{2}\cos(2\ln x)+c.$ **2.** $-\frac{1}{2}\ln\left|\cos 2x+\sqrt{1+\cos^2 2x}\right|+c.$ **3.** $\frac{8}{7}\cdot\sqrt[4]{(x-1)^7}+\frac{28}{3}\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}+c.$ **4.** $\frac{1}{2}\left(x^2-5\right)e^{2x}-$ $-\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+c.$ **5.** $\left(\frac{x^4}{4}+3x\right)\ln x-\frac{x^4}{16}-3x+c.$ **6.** $3\sqrt{x^2+4x+5}-5\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+c.$

7. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$. **8.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+c$. **9.** $\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}+c$. **10.** $2\sqrt{x}+$ $+\frac{4}{3}\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)-\frac{2}{3}\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{3}}+c$.

Варіант 19

1. $\frac{1}{3}\sin(3\ln x)+c$. **2.** $\frac{1}{10}\sqrt{5x^8-1}-\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}x^4+\sqrt{5x^8-1}\right|+c$. **3.** $\frac{2}{27}\sqrt{(3x+2)^3}-\frac{4}{9}\sqrt{3x+2}+c$.

4. $\frac{1}{2}(2-3x)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+c$. **5.** $\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}-2x+c$. **6.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-5x+4\right|+\frac{5}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+c$.

7. $\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{12}\sin^3 2x+c.$ **8.** $x+\ln|x+1|-\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg}x+c.$ **9.** $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-$ $-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|+c$. **10.** $2\sqrt{x}-\frac{5}{2}\cdot\sqrt[5]{x^2}+\frac{10}{3}\cdot\sqrt[10]{x^3}-5\cdot\sqrt[5]{x}+10\cdot\sqrt[10]{x}-10\cdot\ln\left|\sqrt[10]{x}+1\right|+c$.

Варіант 20

1. $2\sin\sqrt{x}+c.$ **2.** $-\frac{3}{2}\cdot\sqrt{9-x^8}+\frac{1}{4}\cdot\arcsin\frac{x^4}{3}+c.$ **3.** $\frac{2}{15}\cdot\sqrt[3]{(3x+2)^5}-\frac{13}{6}\cdot\sqrt[3]{(3x+2)^2}+c.$

4. $\frac{1}{5}(x-2)\cdot\sin 5x+\frac{1}{25}\cos 5x+c$. **5.** $\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\cdot\ln 3x-\frac{x^3}{9}+x+c$. **6.** $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+4x-5\right|+$

$+\frac{1}{2\sqrt{14}}\cdot\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{\frac{7}{2}}}{x+1+\sqrt{\frac{7}{2}}}\right|+c$. **7.** $\frac{1}{8}x-\frac{1}{96}\sin 12x+c.$ **8.** $-2\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-3|+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-$ $-\frac{9}{2}\mathrm{arctg}x+c$. **9.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{tg}x\right)+c.$ **10.** $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(x+1)^3}-\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^4}+\frac{6}{7}\cdot\sqrt[6]{(x+1)^7}-x+$ $+\frac{6}{5}\cdot\sqrt[6]{(x+1)^5}-\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}+c$.

Варіант 21

1. $-\frac{1}{6}e^{-2x^3+5}+c.$ **2.** $-\frac{5}{8}\ln\left|9-x^8\right|+\frac{1}{24}\ln\left|\frac{x^4-3}{x^4+3}\right|+c.$ **3.** $\frac{1}{6}\cdot\sqrt{(2x-7)^3}-\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2x-7}+c.$ **4.** $\frac{1}{3}x\,\mathrm{tg}\,3x+$ $+\frac{1}{9}\ln|\cos 3x|+c$. **5.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\cdot\ln 6x-\frac{4}{9}\sqrt{x^3}+c$. **6.** $\ln\left(x^2+5x+7\right)-\frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{3}}+c$. **7.** $\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4\,x+c$. **8.** $\frac{1}{2x}+\frac{5}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln\left(x^2+2\right)+\frac{13}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+c$. **9.** $\frac{2}{\sqrt{21}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+c$. **10.** $4\cdot\sqrt[4]{x}-4\mathrm{arctg}\sqrt[4]{x}+$ $+2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+c$.

Варіант 22

1. $\frac{2}{3}\cdot e^{3\sqrt{x}+2}+c$. **2.** $-4\cdot\sqrt{16-x^4}+\frac{5}{2}\cdot\arcsin\frac{x^2}{4}+c$. **3.** $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3x^2-2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\ln\left|\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3}x\right|+c$. **4.** $-\frac{x}{4}\mathrm{ctg}4x+\frac{1}{16}\ln|\sin 4x|+c.$ **5.** $x\ln\left(3x^2+2\right)-2x+\frac{4}{\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x+c.$ **6.** $-\sqrt{3-x^2+2x}+$ $+\arcsin\frac{x-1}{2}+c$. **7.** $-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+c$. **8.** $-\ln|x|-\frac{6}{x+1}+\ln|x+1|+c$. **9.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+c$. **10.** $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right)+c$.

Варіант 23

1. $\frac{1}{6}e^{3x^2+1}+c.$ **2.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3e^x-5}{5}}+c.$ **3.** $\frac{1}{9}\arcsin\frac{3x^3}{2}+c.$ **4.** $-(3x+4)e^{-x}+c.$ **5.** $x\ln\left(x^2+5\right)-2x+$ $+2\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+c.$ **6.** $\frac{1}{4}\ln\left(2x^2-4x+3\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}\sqrt{2}(x-1)+c.$ **7.** $\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\,x-\mathrm{tg}x+x+c.$ **8.** $\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\ln\left(x^2+1\right)+\mathrm{arctg}\,x+c$. **9.** $-\mathrm{tg}\frac{x}{2}-2\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1\right|+c$. **10.** $\frac{1}{6}\cdot\sqrt{(2x+1)^3}-\frac{1}{4}(2x+1)+c$.

Варіант 24

1. $\frac{1}{20}e^{5x^4}+c.$ **2.** $\frac{1}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{7}x^2\right)-\frac{1}{14}\ln\left(1+7x^4\right)+c.$ **3.** $\ln\left|\frac{\sqrt{2e^x+1}-1}{\sqrt{2e^x+1}+1}\right|+c.$ **4.** $\frac{1}{3}(2x-5)e^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}+c.$ **5.** $-\frac{\ln 2x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+c.$ **6.** $-2\sqrt{3-x^2+2x}+\arcsin\frac{x-1}{2}+c.$ **7.** $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+c.$ **8.** $x+\frac{1}{6}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{8}{3}\ln|x+2|+c$. **9.** $-\mathrm{tg}\frac{x}{2}-\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}\right|+c.$ **10.** $\frac{3x+5}{3}+\frac{\sqrt[3]{(3x+5)^2}}{2}-\sqrt[3]{3x+5}+\ln\left|\sqrt[3]{3x+5}+1\right|+c.$

Варіант 25

1. $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3x^2 - 1}+c.$ **2.** $\frac{15^{x^2}}{6\ln 15}+c.$ **3.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2e^x-5}{5}}+c.$ **4.** $\left(1-x^2\right)\cos x+2x\sin x+c.$ **5.** $-\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}-\frac{4}{\sqrt{x}}+c$. **6.** $2\ln\left|x^2+6x+5\right|-\frac{9}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right|+c$. **7.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}\sin 3x+c$. **8.** $3x+\frac{33}{4}\ln|x-2|-\frac{5}{4}\ln|x+2|-2\ln|x-1|+c$. **9.** $\frac{x}{4}-\frac{5}{6}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{3}+c$. **10.** $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+c$.

Варіант 26

1. $\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{\left(x^3+8\right)^2}+c.$ **2.** $\ln\left|\sin x+\sqrt{5+\sin^2 x}\right|+c.$ **3.** $2\sqrt{x}-6\ln\left(\sqrt{x}+3\right)+c.$ **4.** $-\frac{1}{3}\left(2x^2-1\right)\cos 3x+\frac{4}{9}x\sin 3x+\frac{4}{27}\cos 3x+c.$ **5.** $x\ln\left(x^2+9\right)-2x+6\,\mathrm{arctg}\frac{x}{3}+c.$ **6.** $2\sqrt{x^2+6x+5}-9\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+5}\right|+c.$ **7.** $-\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x+\mathrm{ctg}x+x+c.$ **8.** $\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+c.$ **9.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arcctg}\left(\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sqrt{3}}\right)+c$. **10.** $2\sqrt{x}+\ +3\cdot\sqrt[3]{x}+6\cdot\sqrt[6]{x}+6\cdot\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+c$.

Варіант 27

1. $\frac{5}{24}\cdot\sqrt[5]{\left(2x^2+7\right)^6}+c$. **2.** $\frac{1}{2}\sqrt{4+x^4}-\frac{3}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{4+x^4}\right|+c$. **3.** $\frac{1}{2}e^{2x}+x+5e^{-x}+c$. **4.** $\frac{1}{4}(x+2)\sin 4x+\frac{1}{16}\cos 4x+c.$ **5.** $\left(\frac{2}{3}x^3+x+\frac{5}{3}\right)\ln|x+1|-\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{3}x+c.$ **6.** $-\sqrt{2-x-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin\frac{2x+1}{3}+c$. **7.** $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{44}\sin 11x+c.$ **8.** $x+12\ln|x-3|-2\ln\left|x^2-3x+4\right|+\frac{10}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{7}}+c.$ **9.** $\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}\right|+c.$ **10.** $\frac{1}{6}\cdot\sqrt{(2x+1)^3}-x+\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2x+1}-3\ln\left|\sqrt{2x+1}+2\right|+c.$

Варіант 28

1. $\frac{1}{20}\cdot\sqrt[3]{\left(5x^3-1\right)^4}+c$. **2.** $\frac{5}{6}\sqrt{3x^4+6}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x^2+\sqrt{3x^4+6}\right|+c$. **3.** $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+x-9\sqrt[3]{x^2}+$ $+18\cdot\sqrt[3]{x}-18\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+c$. **4.** $\frac{1}{2}\cdot e^{2x+3}\cdot\left(x^2-x+\frac{3}{2}\right)+c$. **5.** $x\cdot\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)+c$.

6. $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x-2\right|-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+c$. **7.** $\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{52}\sin 13x-\frac{1}{28}\sin 7x+c$. **8.** $x+24\ln|x-3|+$ $+3\ln|x-1|-19\ln|x-2|+c$. **9.** $-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\frac{x}{2}+c$. **10.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+c$.

Варіант 29

1. $\frac{7}{16}\cdot\sqrt[7]{\left(2e^x+5\right)^8}+c$. **2.** $\frac{1}{9}\ln\left(4+3x^6\right)-\frac{1}{6\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x^3}{2}+c$. **3.** $\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln\left|2\sqrt{x}-1\right|+c$.

4. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3}\left(x+\frac{1}{\ln 3}\right)+c$. **5.** $x\cdot\operatorname{arcctg}3x+\frac{1}{6}\ln\left(1+9x^2\right)+c$. **6.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x-5\right|-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+c$.

7. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 8x+c$. **8.** $2\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+c$. **9.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{tg}x\right)+c$.

10. $\frac{6}{5}\cdot\sqrt[6]{x^5}+\frac{12}{5}\cdot\sqrt[12]{x^5}+\frac{12}{5}\cdot\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|+c$.

Варіант 30

1. $-\frac{5}{8}\cdot\sqrt[5]{(1+2\cos x)^4}+c$. **2.** $\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-7}\right)+c$. **3.** $\sqrt{2x-3}-2\ln\left(\sqrt{2x-3}+2\right)+c$. **4.** $\frac{x^2+x}{2}+\frac{2x+1}{4}\cdot\sin 2x+$ $+\frac{1}{4}\cos 2x+c$. **5.** $x\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\ln\left(1+\frac{x^2}{4}\right)+c$. **6.** $-3\sqrt{5-4x-x^2}-7\arcsin\frac{x+2}{3}+c$.

7. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x-\ln|\cos x|+c$. **8.** $\frac{1}{4(x-1)}+\frac{19}{16}\ln|x-1|-\frac{19}{32}\ln\left(x^2+7\right)-\frac{15}{16\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+c$.

9. $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{2}\operatorname{tg}x+1}\right|+c$. **10.** $\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+c$.

Розділ 6. Визначений інтеграл і його застосування

Завдання 1

1. а) $\frac{81\pi}{16}$, б) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{e^2}+\frac{9}{4}$. **2. а)** $\ln\frac{3}{2}$, **б)** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **3. а)** $\ln 4-\frac{1}{2}$, **б)** $-\pi$. **4. а)** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$, **б)** $5\operatorname{arctg}3-\frac{3}{2}$. **5. а)** $\frac{\pi}{6}$, **б)** $\frac{e^{\pi}-2}{5}$. **6. а)** $\frac{2}{3}(3-\ln 4)$, **б)** $\frac{e^{15}-16}{25e^{15}}$. **7. а)** $2-\frac{\pi}{2}$, **б)** $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}+\ln 2$.

8. а) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, **б)** $\frac{8\pi}{9}$. **9. а)** $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **б)** $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$. **10. а)** $\frac{5}{6}$, **б)** $2e-1$. **11. а)** $\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{4}$, б) $-\frac{1}{e}+\frac{1}{2}$. **12. а)** $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, **б)** $2\ln^2 2-2\ln 2+\frac{3}{4}$. **13. а)** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$, **б)** $\frac{\pi(e+1)}{e(1+\pi^2)}$. **14. а)** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$, **б)** $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **15. а)** $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$, **б)** $\frac{9}{2}\ln 3-2$. **16. а)** $\frac{11}{6}$, **б)** $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2$. **17. а)** $\frac{9\sqrt{3}-11}{24}$, **б)** $-\frac{\pi}{9}+\frac{52}{27}$. **18. а)** $-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ln\left|\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right|$, **б)** 1. **19. а)** $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\sqrt{7}$, **б)** $\frac{2e^3+1}{9}$. **20. а)** $4-\pi$, **б)** $\frac{e^{\pi}+1}{2}$. **21. а)** $\ln\sqrt{3}-\frac{2}{3}$, **б)** $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{48}$. **22. а)** $\frac{\sqrt{3}}{72}$, **б)** $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$. **23. а)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$, **б)** $\frac{2\pi}{3}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right|$. **24. а)** $-\frac{468}{7}$, **б)** 0. **25. а)** $\ln 2$, **б)** $8e-16$. **26. а)** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right|$, **б)** π^2-4. **27. а)** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$, **б)** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **28. а)** $7+\ln\frac{16}{9}$, **б)** $\frac{e^4-5}{16e^4}$. **29. а)** $\ln\frac{4}{3}$, **б)** $2\ln^2 2-\ln 4+\frac{3}{4}$. **30. а)** $\sqrt{3}$, **б)** $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{48}$.

Завдання 2

1. $-12<I<12$. **2.** $0<I<3$. **3.** $-3<I<3$. **4.** $2\sqrt{7}<I<6$. **5.** $\frac{2\pi}{\sqrt{7}}<I<\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. **6.** $-96<I<12$. **7.** $0<I<32$. **8.** $-4<I<\frac{12}{5}$. **9.** $0{,}6<I<1$. **10.** $0<I<\frac{\pi}{4}$. **11.** $84<I<140$. **12.** $-\frac{\pi^2}{2}<I<\frac{\pi^2}{2}$. **13.** $\frac{\pi}{8}<I<\frac{\pi}{5}$. **14.** $0<I<1$. **15.** $\frac{\pi}{2}<I<\frac{\pi e}{2}$. **16.** $\pi<I<2\pi$. **17.** $\frac{e(e^2-1)}{e^{e^2}}<I<\frac{e^2-1}{e^2}$. **18.** $\frac{\pi}{2}<I<\frac{\pi\sqrt{6}}{4}$. **19.** $\frac{2\pi}{13}<I<\frac{2\pi}{7}$. **20.** $80<I<208$. **21.** $0<I<6$. **22.** $0<I<15$. **23.** $-10<I<6$. **24.** $-4{,}5<I<7{,}5$. **25.** $16<I<24$. **26.** $-24<I<0$. **27.** $4<I<8$. **28.** $0<I<15$. **29.** $-18<I<-6$. **30.** $6<I<18$.

Завдання 3

1. $\frac{1}{25}\left(\sqrt{111}-6\right)$. **2.** $\ln\frac{2e^2}{1+e^2}$. **3.** $\ln\frac{3-\cos^2 1}{2}$. **4.** $\frac{\pi}{32}\left(\sin\frac{\pi^2}{4}-\sin\frac{\pi^2}{16}\right)$. **5.** $\frac{\pi}{8}$. **6.** $\frac{93}{80\pi}$. **7.** $\ln\frac{4}{3}$. **8.** $\frac{1}{3}\ln\frac{2+\sqrt{13}}{\sqrt{10}-1}$. **9.** $\frac{\pi\left(1+\sqrt{e}\right)}{6(e-1)}$. **10.** $\frac{4}{3\pi}$. **11.** $e-2$. **12.** $\frac{\pi}{12}$. **13.** $\arcsin\frac{1}{3}$. **14.** $\frac{e-\sqrt[3]{e}}{2}$. **15.** $\frac{1-\cos 1}{e-1}$. **16.** π. **17.** $\frac{1}{5}$. **18.** $\frac{3}{4}$. **19.** $\frac{1}{2}$. **20.** $\frac{2}{e^3-1}$. **21.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. **22.** $\frac{\pi}{9}$. **23.** $\frac{4}{3\pi}$. **24.** $\frac{\pi}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-1\right)$. **25.** $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$. **26.** $\frac{\ln 3}{2\pi}$. **27.** $\frac{14^5}{\ln 7}$. **28.** $\frac{\pi}{6\sqrt{3}\ln 3}$. **29.** $\frac{4}{5\pi}\operatorname{arctg}\frac{5\left(\sqrt{2}-1\right)}{25+\sqrt{2}}$. **30.** $\frac{8\ln 2}{3\pi}$.

Завдання 4

1. а) 9, **б)** $\frac{3\pi-4}{4}$, **в)** π. **2. а)** 36, **б)** $4\pi-3\sqrt{3}$, **в)** $\frac{3\pi}{2}$. **3. а)** 9, **б)** $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2}$, **в)** $\frac{19\pi}{2}$. **4. а)** 4, **б)** $8\pi+32$, **в)** $\frac{3\pi}{2}$. **5. а)** 9, **б)** $\pi-2$, **в)** $\frac{9\pi}{2}$. **6. а)** 4, **б)** 4π, **в)** $\frac{9\pi}{2}$. **7. а)** $\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$, **б)** $18\pi+72$,

в) $\dfrac{51\pi}{2}$. **8. а)** $2\operatorname{ch}1-2$, **б)** $4\pi-6\sqrt{3}$, **в)** $\dfrac{27\pi}{2}$. **9. а)** $\dfrac{1}{3}$, **б)** $\dfrac{3\pi-4}{8}$, **в)** $\dfrac{9\pi}{2}$. **10. а)** $\sqrt{2}-1$, **б)** $2+\dfrac{\pi}{2}$, **в)** $\dfrac{3\pi}{2}$. **11. а)** $\dfrac{9}{2}$, **б)** $4\pi-6\sqrt{3}$, **в)** $\dfrac{9\pi}{2}$. **12. а)** 8, **б)** 4π, **в)** $\dfrac{19\pi}{2}$. **13. а)** $4\ln\left(\sqrt{3}+2\right)+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$, **б)** $3\sqrt{3}$, **в)** $\dfrac{3\pi}{2}$. **14. а)** $\dfrac{9\ln 2+7}{\ln 2}$, **б)** $2\pi-3\sqrt{3}$, **в)** $\dfrac{9\pi}{2}$. **15. а)** $\dfrac{76}{3}$, **б)** $2\pi-3\sqrt{3}$, **в)** $\dfrac{3\pi}{2}$. **16. а)** $\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}$, **б)** $27\sqrt{3}$, **в)** $\dfrac{9\pi}{2}$. **17. а)** $\dfrac{4}{3}$, **б)** $\dfrac{3\pi-4}{2}$, **в)** $\dfrac{19\pi}{2}$. **18. а)** $\dfrac{8}{3}$, **б)** $8\pi-6\sqrt{3}$, **в)** $\dfrac{11\pi}{2}$. **19. а)** $40-18\ln 3$, **б)** $75\sqrt{3}$, **в)** $\dfrac{33\pi}{2}$. **20. а)** 9, **б)** $2\pi-4$, **в)** $\dfrac{3\pi}{2}$. **21. а)** 8, **б)** 8π, **в)** $\dfrac{3\pi}{2}$. **22. а)** $\dfrac{4}{3}\left(4\pi-\sqrt{3}\right)$, **б)** $4\pi-3\sqrt{3}$, **в)** $\dfrac{9\pi}{2}$. **23. а)** $\dfrac{1}{3}$, **б)** $2\pi-3\sqrt{3}$, **в)** $\dfrac{3\pi}{2}$. **24. а)** $\dfrac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$, **б)** $2\pi+8$, **в)** $\dfrac{3\pi}{2}$. **25. а)** 1, **б)** $\dfrac{3\pi}{2}-2$, **в)** $\dfrac{19\pi}{2}$. **26. а)** $\dfrac{\pi+2}{4}$, **б)** $5\pi-10$, **в)** 6π. **27. а)** $\dfrac{2}{3}+5\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, **б)** $48\sqrt{3}$, **в)** $\dfrac{9\pi}{2}$. **28. а)** $\dfrac{8+\pi^2}{8}$, **б)** $4\pi-6\sqrt{3}$, **в)** 3π. **29. а)** $\dfrac{9}{2}$, **б)** $\dfrac{6\pi-9\sqrt{3}}{2}$, **в)** $\dfrac{3\pi}{2}$. **30. а)** $\dfrac{16}{3}$, **б)** $3\sqrt{3}$, **в)** 24π.

<u>Завдання 5</u>

1. а) $\ln\left(e+\sqrt{e^2-1}\right)$, **б)** 5, **в)** $\dfrac{\sqrt{15}}{2}\left(e^{\frac{2\pi}{3}}-e^{-\pi}\right)$. **2. а)** 1, **б)** $\dfrac{1}{8}+\dfrac{\sqrt{2}}{16}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$, **в)** $\dfrac{3\pi}{2}$. **3. а)** $-\ln\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$, **б)** 24, **в)** $2a$. **4. а)** $\sqrt{6}+\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$, **б)** 13, **в)** $10\sqrt{2}$. **5. а)** $\pi\sqrt{2}$, **б)** $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$, **в)** $4\sqrt{2}-8\sin\dfrac{\pi}{12}$. **6. а)** $2\operatorname{sh}1$, **б)** $\dfrac{\pi}{8}$, **в)** $\dfrac{10}{3}+\dfrac{3}{2}\ln 3$. **7. а)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, **б)** $2\sqrt{2}$, **в)** $6\sqrt{2}$. **8.а)** $2(e-1)$, **б)** 12, **в)** $8\sqrt{2}-16\cos\dfrac{\pi}{8}$. **9. а)** $2+\ln\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, **б)** $\dfrac{1}{2}\ln 3$, **в)** $\sqrt{58}\left(e^{\frac{7\pi}{9}}-1\right)$. **10. а)** $1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$, **б)** $\ln\left(\dfrac{e+\sqrt{e^2-1}}{2+\sqrt{3}}\right)$, **в)** $10\left(2-\sqrt{3}\right)$. **11. а)** $1+\ln\dfrac{3}{2}$, **б)** $\dfrac{\pi}{4}$, **в)** $12\left(1-\cos\dfrac{\pi}{8}\right)$. **12. а)** $\dfrac{1}{2}\ln 3$, **б)** $6a$, **в)** $6\sqrt{2}$. **13. а)** $\sqrt{2}$, **б)** $2a\pi^2$, **в)** $2\pi\sqrt{1+\pi^2}+2\ln\left(\pi+\sqrt{1+\pi^2}\right)$. **14. а)** $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$, **б)** $\dfrac{8\pi^3}{3}$, **в)** $a\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$. **15. а)** $1+\ln\dfrac{6}{5}$, **б)** $4\pi^2$, **в)** $\dfrac{\pi a}{4}-\dfrac{3a\sqrt{3}}{8}$. **16. а)** $\sqrt{2}$, **б)** $2\left(e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}\right)$, **в)** $a\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$. **17. а)** $\dfrac{22\sqrt{22}-13\sqrt{13}}{27}$, **б)** $\sqrt{26}\left(1-e^{-1}\right)$, **в)** $12a\sqrt{3}$. **18. а)** $\dfrac{1}{2}\ln 3$, **б)** $\dfrac{5}{2}\sqrt{10}+\dfrac{5}{6}\left(3+\sqrt{10}\right)$, **в)** $\sqrt{193}\left(e^{\frac{7\pi}{48}}-1\right)$. **19. а)** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, **б)** $\dfrac{15}{4}$, **в)** $8a$. **20. а)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, **б)** 12, **в)** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\ln\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **21. а)** $1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{6}{5}$, **б)** $2(e-1)$, **в)** $\dfrac{4\pi}{3}$. **22. а)** $\operatorname{sh}2$, **б)** $\dfrac{3\pi^2}{32}$, **в)** $\dfrac{a}{8}(\pi+3)$. **23. а)** $\ln\left(e+\sqrt{e^2-1}\right)$, **б)** $\dfrac{1}{81}\left(85\sqrt{85}-8\right)$,

в) $\frac{\pi}{2}$. **24. а)** $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$, **б)** $\sqrt{2}-1$, **в)** $5\operatorname{sh}\frac{2\pi}{3}$. **25. а)** $\operatorname{sh}3$, **б)** $\frac{1}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$, **в)** $\pi+3$.

26. а) $\frac{31\sqrt{31}-22\sqrt{22}}{27}$, **б)** $\sqrt{10}\left(1-\frac{1}{e}\right)$, **в)** 8. **27. а)** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$, **б)** 8, **в)** 2. **28. а)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

б) $\sqrt{2}\left(e^4-1\right)$, **в)** 8. **29. а)** $\operatorname{sh}1$, **б)** $\frac{1}{6}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$, **в)** $\frac{4\pi}{3}$. **30. а)** $\frac{\sqrt{63}-\sqrt{15}}{4}$,

б) $\frac{3}{2}\sqrt{26}+\frac{3}{10}\ln\left(\sqrt{26}+5\right)$, **в)** $\frac{\pi}{2}$.

Завдання 6

1. $\frac{184}{15}\pi$. **2.** $\frac{52}{15}\pi$. **3.** $\frac{\pi}{2}$. **4.** $6,4\pi$. **5.** $\frac{464}{15}\pi$. **6.** $6,2\pi$. **7.** $\frac{80}{3}\pi$. **8.** $\frac{\pi}{2}$. **9.** $\frac{278}{15}\pi$. **10.** $\frac{9}{14}\pi$. **11.** 2π. **12.** $8,5\pi$. **13.** $1,8\pi$. **14.** $\frac{28}{15}\pi$. **15.** $\frac{5\pi}{2}$. **16.** $\frac{4\pi}{5}$. **17.** $\frac{2\pi}{5}$. **18.** $\frac{\pi}{12}$. **19.** $\frac{4}{21}\pi$. **20.** $\frac{1}{2}\pi$. **21.** 55π. **22.** $\frac{32}{15}\pi$. **23.** $\frac{32\pi}{15}$. **24.** $\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$. **25.** $\frac{\pi}{2}\left(e^2-3\right)$. **26.** $\frac{\pi^2}{4}$. **27.** $\frac{29\pi}{30}$. **28.** $\frac{99\pi}{5}$. **29.** $22,4\pi$. **30.** 350π.

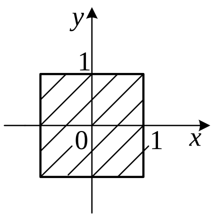
Завдання 7

1. а) $\frac{\ln 2}{2}$, **б)** розбігається. **2. а)** розбігається, **б)** -1. **3. а)** $1+\ln 2$, **б)** $\frac{\pi}{2}$. **4. а)** $\frac{\pi^3}{24}$, **б)** розбігається. **5. а)** $\frac{1}{20}$, **б)** розбігається. **6. а)** $\ln\frac{\pi}{2}$, **б)** $\frac{7}{12}$. **7. а)** розбігається, **б)** $\frac{\pi}{8}$. **8. а)** $\frac{1}{3}$, **б)** розбігається. **9. а)** $\frac{1}{2}$ **б)** 2. **10. а)** $\frac{1}{4}$, **б)** розбігається. **11. а)** $\frac{44}{3}$, **б)** розбігається. **12. а)** розбігається, **б)** $\frac{3}{4}$. **13. а)** 1, **б)** розбігається. **14. а)** $\frac{2}{e^2}$, **б)** $\frac{\pi^4}{64}$. **15. а)** $\frac{\ln 5}{4}$, **б)** розбігається. **16. а)** $\frac{\pi}{16}$, **б)** розбігається. **17. а)** розбігається, **б)** розбігається. **18. а)** $\frac{1}{3}-\ln\frac{3}{2}$, **б)** $-\frac{\pi}{4}$. **19. а)** розбігається, **б)** 1. **20. а)** $-\frac{1}{9}$, **б)** розбігається. **21. а)** $\frac{-6}{\pi}$, **б)** розбігається. **22. а)** $\frac{e-1}{e}$, **б)** розбігається. **23. а)** розбігається, **б)** π. **24. а)** розбігається, **б)** розбігається. **25. а)** π, **б)** розбігається. **26. а)** розбігається, **б)** π. **27. а)** розбігається, **б)** розбігається. **28. а)** $\frac{1}{8}$, **б)** розбігається. **29. а)** розбігається, **б)** розбігається. **30. а)** розбігається, **б)** $14\frac{4}{7}$.

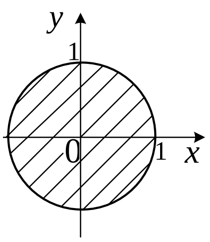
Розділ 7. Функції кількох змінних

Завдання 1

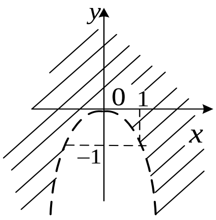
1.



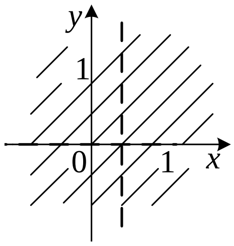
2.



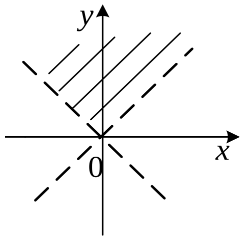
3.



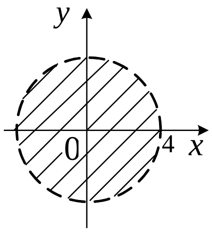
4.



5.



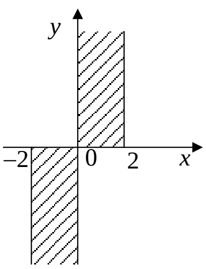
6.



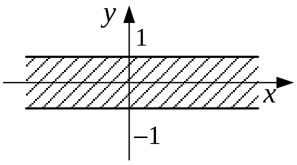
7. Площина XOY крім точки $0(0;0)$.

8. Площина XOY крім точок параболи $y = x^2$.

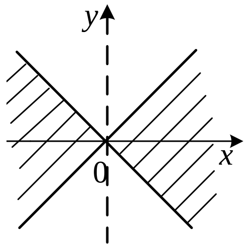
9.



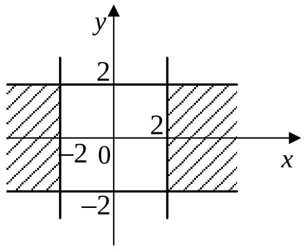
10.



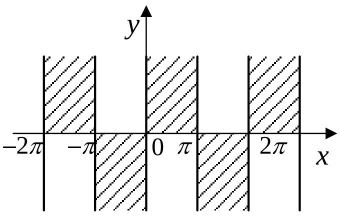
11.



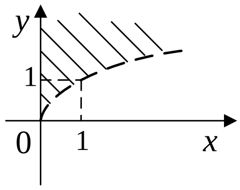
12.



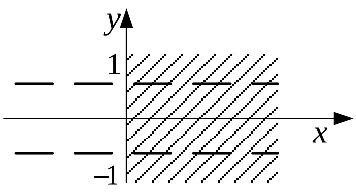
13.



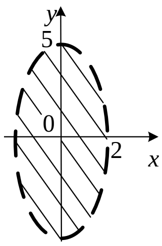
14.



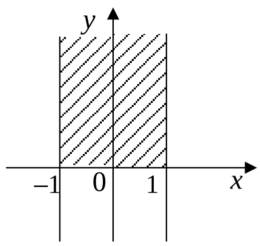
15.



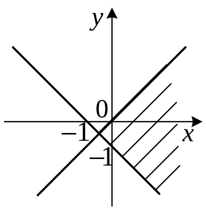
16.



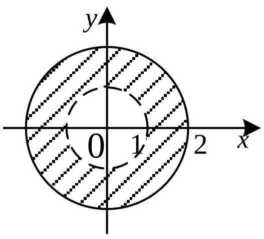
17.



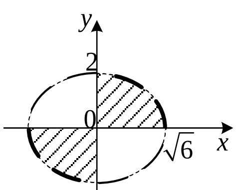
18.



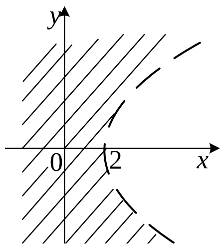
19.



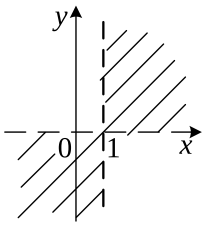
20.



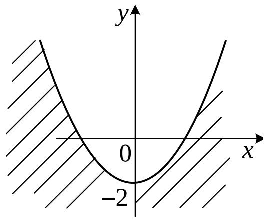
21.



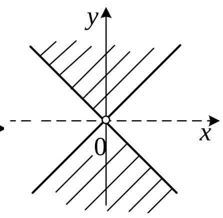
22.



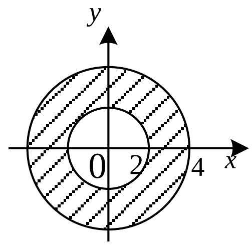
23.



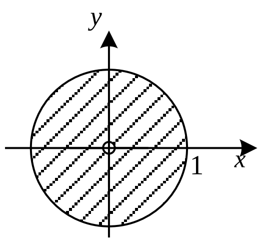
24.



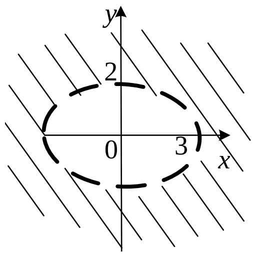
25.



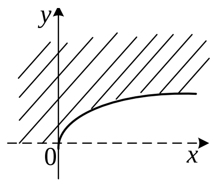
26.



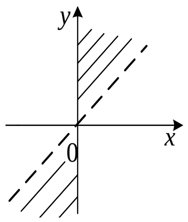
27.



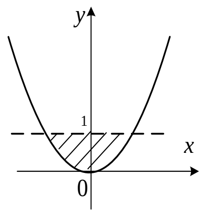
28.



29.



30.



Завдання 3

1. Дотична площина: $x-3y+z+5=0$, нормаль: $\frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{1}$. **2.** Дотична площина: $61x+17y-15z-212=0$, нормаль: $\frac{x-1}{61}=\frac{y-8}{17}=\frac{z+1}{-15}$. **3.** Дотична площина: $x+5y+4z-28=0$, нормаль: $\frac{x-6}{1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{4}$. **4.** Дотична площина: $5x-14y-14z-98=0$, нормаль: $\frac{x}{5}=\frac{y-1}{-14}=\frac{z+8}{-14}$. **5.** Дотична площина: $x+y+3z-9=0,$ нормаль: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3}$. **6.** Дотична площина: $y-3z-8=0,$ нормаль: $\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{3}$. **7.** Дотична площина: $8x-7y-4\sqrt{3}z+8=0$, нормаль: $\frac{x-\frac{1}{2}}{8}=\frac{y}{-7}=\frac{z-\sqrt{3}}{-4\sqrt{3}}$. **8.** Дотична площина: $3x+3y-2\sqrt{2}z+1=0$, нормаль: $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}$. **9.** Дотична площина: $x-y+12z-12=0$, нормаль: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{12}$. **10.** Дотична площина: $x+z-1=0$, нормаль: $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{1}$. **11.** Дотична площина: $x=0$, нормаль: $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{1}$. **12.** Дотична площина: $6x+6\sqrt{3}\cdot y-6z-\sqrt{3}\pi=0,$ нормаль: $\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{y-\frac{\pi}{6}}{\sqrt{3}}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1}$. **13.** Дотична площина: $6x+4y+5z-12=0$, нормаль: $\frac{x-1}{6}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{5}$. **14.** Дотична площина: $x-y-6z+10=0$, нормаль: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-6}{-6}$. **15.** Дотична площина: $2x+3y-5=0$, нормаль: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{0}$. **16.** Дотична площина: $x+y-2z-2+2\ln 2=0$, нормаль: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-\ln 2}{-2}$. **17.** Дотична площина: $2x-y-32z+3=0$, нормаль:

$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{1}{16}}{-32}$. **18.** Дотична площина: $5x-2y-2z+2\ln 2-1=0$, нормаль: $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-2}=$ $=\frac{z-\ln 2}{-2}$. **19.** Дотична площина: $6x+3y+4z+10=0$, нормаль: $\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+\frac{5}{2}}{4}$.

20. Дотична площина: $2x-\pi z=0$, нормаль: $\frac{x}{2}=\frac{y-\frac{\pi}{2}}{0}=\frac{z}{-\pi}$. **21.** Дотична площина: $ex+ey-z+e=0$, нормаль: $\frac{x-1}{e}=\frac{y-1}{-e}=\frac{z-e}{-1}$. **22.** Дотична площина: $4x-4y\ln 2-z-4-8\ln 2=0$, нормаль: $\frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{4\ln 2}=\frac{z-4}{-1}$. **23.** Дотична площина: $x-y+z=0$, нормаль: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$. **24.** Дотична площина: $x-z+1=0$, нормаль: $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{-1}$. **25.** Дотична площина: $2y-4z+\pi=0$, нормаль: $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-2}$. **26.** Дотична площина: $\pi y-2z=0$, нормаль: $\frac{x-\frac{\pi}{2}}{0}=\frac{y}{\frac{\pi}{2}}=\frac{z}{-1}$.

27. Дотична площина: $2x+3y-2\sqrt{2}\cdot z=0$, нормаль: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}$. **28**. Дотична площина: $x\cdot\ln 2-z+1=0$, нормаль: $\frac{x}{\ln 2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{-1}$. **29.** Дотична площина: $x+y-z+\ln 2-2=0$, нормаль: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-\ln 2}{-1}$. **30.** Дотична площина: $ex-z=0$, нормаль: $\frac{x-1}{e}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-e}{-1}$.

Завдання 4

1. $d^2z=e^{2x-y}\left(4dx^2-4dxdy+dy^2\right)$. **2.** $d^2z=-\frac{x^2+z^2}{z^3}dx^2+\frac{2xy}{z^3}dxdy-\frac{y^2+z^2}{z^3}dy^2$. **3.** $d^2z=y^2zdx^2+$ $+2\left(-z+yz+xyz\right)dxdy+z\left(1+x\right)^2dy^2$. **4.** $d^2z=\frac{1}{2\left(x+y\right)^2}\left(dx^2+2dxdy+dy^2\right)$. **5.** $d^2z=\frac{1}{x^2y}dx^2+$ $+2\frac{1}{xy^2}dxdy+\frac{2\left(x+z\right)}{y^2}dy^2$. **6.** $d^2z=\frac{2\left(z+y\right)}{x^2}dx^2+\frac{2}{x^2y}dxdy+\frac{1}{xy^2}dy^2$. **7.** $d^2z=\frac{2\left(2x^2+3^{x+2y-z}\right)}{3^{2(x+2y-z)}\ln 3}dx^2$.
8. $d^2z=\frac{2z}{\left(x+y\right)^2}dx^2+\frac{2\left(1+2zy\right)}{y\left(x+y\right)^2}dxdy+\frac{2zy^2+3y+x}{y^2\left(x+y\right)^2}dy^2$. **9.** $d^2z=2z\left(2x^2-1\right)dx^2+8xyzdxdy+$ $+2z\left(2y^2-1\right)dy^2$. **10.** $d^2z=\frac{2\left(z-y\right)}{x^2}dx^2$. **11.** $d^2z=\frac{-e^{x+y+z}}{\left(e^{x+y+z}+1\right)^3}\left(dx^2+2dxdy+dy^2\right)$.

12. $d^2z=\frac{1}{x}dx^2+2xdy^2+4ydxdy$. **13.** $d^2z=-e^{-2(x-2y+z)}dx^2$. **14.** $d^2z=y^2zdx^2+2z\left(yx-1\right)dxdy+$ $+x^2zdy^2$. **15.** $d^2z=\frac{2\left(z+y\right)}{\left(x+y\right)^2}dx^2+\frac{4z}{\left(x+y\right)^2}dxdy+\frac{2\left(x+z\right)}{\left(x+y\right)^2}dy^2$. **16.** $z'_x=3x^2y^2+y^4$;

$z'_y = 2x^3y + 4xy^3$; $x'_u = 2u; x'_v = 2v$; $y'_u = \frac{1}{v}; y'_v = -\frac{u}{v^2}$. **17.** $z'_x = ye^{xy} + \frac{2x}{x^2+y^2}; z'_y = xe^{xy} + \frac{2y}{x^2+y^2}$, $x'_t = 1; x'_s = \cos s$; $y'_t = 2t; y'_s = -3\cos^2 s \sin s$. **18.** $z'_t = 2e^{2t}$. **19.** $z'_x = e^x + \frac{2x}{\cos^2\left(x^2+y^2\right)}$; $z'_y = \frac{2y}{\cos^2\left(x^2+y^2\right)}$; $x'_t = 2t - \frac{1}{t^2}$; $y'_t = \cos t - \sin t$. **20.** $z'_x = 8x\cos\left(3t+4x^2-y^4\right)$; $z'_t = \cos\left(3t+4x^2-y^4\right)$; $z'_y = -4y^3\cos\left(3t+4x^2-y^4\right)$; $x'_t = -\frac{1}{t^2}; y'_t = \frac{\ln t - 2}{2\sqrt{t}\ln^2 t}$. **21.** $z_x{}' = \frac{y}{2x\sqrt{x}} tg\frac{y}{\sqrt{x}}; z_y{}' = -\frac{y}{\sqrt{x}} tg\frac{y}{\sqrt{x}}$; $x'_t = 6t; y'_t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$. **22.** $z'_x = 3e^{3x-y^2}$; $z'_y = -2e^{3x-y^2}$; $x'_t = \cos t - t\sin t$; $y'_t = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}$.
23. $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}\sqrt{1-x^2+y^2}}$; $z'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}\sqrt{1-x^2+y^2}}$; $y'_t = e^x$. **24.** $z'_x = \frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}$; $z'_y = -\frac{x}{2y\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}$; $x'_y = 3y^2$. **25.** $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$. **26.** $z'_x = \frac{y^3}{x}$; $z'_y = 3y^2\ln x$; $x'_u = \frac{1}{v}; x'_v = -\frac{u}{v^2}; y'_u = -\frac{v}{u^2}; y'_v = \frac{1}{u}$.. **27.** $z'_x = 2xy + y^2; z'_y = x^2 + 2xy$; $x'_u = ve^{u+3v}$; $x'_v = e^{u+3v}\cdot(1+3v); y'_u = e^{v-u}\cdot(1-u); y'_v = ue^{v-u}$. **28.** $z'_x = \frac{1}{4}\frac{x}{x^2+y^2}; z'_y = \frac{1}{4}\frac{x}{x^2+y^2}$; $x'_t = 4e^{4t}$; $y'_t = -\frac{1}{\sin^2 t}$. **29.** $z'_x = yx^{y-1} + y^x\ln y; z'_y = x^y\ln x + xy^{x-1}; x'_u = 2u; x'_v = 2v$; $y'_u = 2u$; $y'_v = -2v$.
30. $z'_x = \sin y - y\sin x; z'_y = x\cos y + \cos x$; $x'_u = \frac{1}{v^2}; x'_v = -\frac{2v}{v^3}; y'_u = -\frac{v^2}{u^2}; y'_v = -\frac{2v}{u}$.

Завдання 5

1. $z_{найб} = z(3,0) = z(0,3) = 36$, $z_{найм} = z(3,3) = -36$. **2.** $z_{найб} = z(0,0) = 1$, $z_{найм} = z_{на\ межі} = 0$. **3.** $z_{найб}(0,0) = 19$, $z_{найм}(0,0) = 1$. **4.** $z_{найб} = z(3,0) = z(-3,0) = 9$, $z_{найм}(0,0) = 0$. **5.** $z_{найб}(0,0) = 3$, $z_{найм}(1,1) = -1$. **6.** $z_{найб} = z(2,-1) = 10$, $z_{найм}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 1$. **7.** $z_{найб}(2,1) = 17$, $z_{найм}(0,0) = 5$. **8.** $z_{найб}(2,-1) = 31$, $z_{найм}(0,0) = 4$. **9.** $z_{найб}(1,3) = 15$, $z_{найм}\left(-\frac{4}{3},\frac{20}{9}\right) = \frac{158}{27}$.
10. $z_{найб}(-1,-1) = 1$, $z_{найм}(-2,0) = -6$. **11.** $z_{найб}\left(\sqrt{2},1\right) = \sqrt{2}$, $z_{найм}\left(-\frac{1}{2},1\right) = -2,25$.
12. $z_{найб} = z(-1,1) = z(1,1) = 7$, $z_{найм} = z\left(-\frac{1}{2},1\right) = z\left(\frac{1}{2},-1\right) = 4,75$. **13.** $z_{найб}(-2,0) = 20$, $z_{найм}(1,-3) = -7$. **14.** $z_{найб}\left(\sqrt{3},1\right) = 5$, $z_{найм.}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right) = -4$. **15.** $z_{найб}(3,4) = 2$, $z_{найм}(3,0) = -6$.
16. $z_{найб} = z(1,0) = z(-1,0) = 5$, $z_{найм} = z(0,1) = z(0,-1) = 2$. **17.** $z_{найб} = z(-1,-2) = z(-1,2) = 21$, $z_{найм}(0,0) = 0$. **18.** $z_{найб}(2,3) = 1$, $z_{найм}(0,3) = -3$. **19.** $z_{найб}(-3,3) = 13,5$, $z_{найм}(3,3) = -4,5$.

20. $z_{найб}=z(1,1)=z(-1,-1)=11,$ $z_{найм}=z(1,-1)=z(-1,1)=5.$ **21.** $z_{найб}(1,3)=2,25,$ $z_{найм}=z(1,0)=z(2,0)=0$. **22.** $z_{найб}=z(-1,1)=z(-1,2)=0$, $z_{найм}(0,0)=-5$. **23.** $z_{найб}=z(4,0)=$ $=z(-4,0)=48$, $z_{найм}=z(0,4)=z(0,-4)=16$. **24.** $z_{найм}(0,0)=0$, $z_{найб}=z(2,4)=z(-2,4)=2$.
25. $z_{найб}=z(1,0)=z(-1,0)=1,$ $z_{найм}=z(0,-1)=z(0,1)=-1.$ **26.** $z_{найб}=z(0,2)=z(0,-2)=\dfrac{12}{e^4},$ $z_{найм}(0,0)=0.$ **27.** $z_{найб}=z(-1,6)=74$, $z_{найм}(0,0)=1$. **28.** $z_{найб}\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$, $z_{найм}(4,2)=-128$.
29. $z_{найб}(4,4)=128$, $z_{найм}(0,-3)=-31$. **30.** $z_{найб}(2,0)=21$, $z_{найм}=z(0,3)=z(0,-3)=-22$.

Завдання 6

1. $z_{max}=z(0,3)=9.$ **2.** $z_{min}=z(2,-3)=-35.$ **3.** $z_{min}=z\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=0.$ **4.** $z_{max}=z(4,4)=12.$
5. $z_{min}=z(1,-2)=-4$. **6.** $z_{min}=z(-4,1)=-1$. **7.** $z_{min}=z(0,-2)=-\dfrac{2}{e}$. **8.** $z_{min}=z\left(\sqrt{3},-3\right)=-6\sqrt{3}$.
9. $z_{max}=z(2,-4)=41$. **10.** $z_{max}=z(4,4)=15$. **11.** $z_{min}=z(1,4)=-21.$ **12.** $z_{min}=z(1,0)=-2$.
13. $z_{min}=z\left(-\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}.$ **14.** $z_{min}=z\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=0.$ **15.** $z_{min}=z\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=-8.$ **16.** $z_{min}=z\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)=$ $=6,5-\ln\dfrac{3^7}{4\sqrt{2}}.$ **17.** $z_{min}=z(2,1)=-28,$ $z_{max}=z(-2,-1)=28.$ **18.** $z_{min}=z(1,0)=-1.$
19. Екстремумів немає. **20.** $z_{min}=z(1,0)=0.$ **21.** $z_{min}=z(5,3)=-42.$ **22.** $z_{min}=z(2,4)=0.$
23. $z_{min}=z(0,0)=0.$ **24.** $z_{min}=z(2,2)=0.$ **25.** $z_{max}=z(0,3)=9.$ **26.** $z_{min}=z(-2,0)=-\dfrac{2}{e}.$
27. $z_{min}=z(-3,2)=-6.$ **28.** $z_{min}=z\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=0$. **29.** $z_{max}=z(4,4)=12$. **30.** $z_{min}=z(-4,1)=-1$.

Завдання 7

1. $\left(3;9;3\sqrt{6}\right)$. **2.** $\left(-\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **3.** $\left(-2\sqrt{6};\dfrac{2\sqrt{6}}{9};-9\right)$. **4.** $\left(\sqrt{6};3\sqrt{6};6\right)$. **5.** $\left(\dfrac{-27\sqrt{3}}{8\sqrt{2}};\dfrac{-9\sqrt{3}}{8\sqrt{2}};\dfrac{27}{8}\right)$.
6. $\left(-\dfrac{3}{4\sqrt{6}};-\dfrac{1}{4\sqrt{6}};\dfrac{1}{4}\right)$. **7.** $\left(12;-12;-12\sqrt{6}\right)$. **8.** $\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2};\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$. **9.** $\left(\sqrt{6};-\sqrt{6};2\right)$.
10. $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3};\dfrac{\sqrt{2}}{3};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$. **11.** $\left(6;2;-2\sqrt{6}\right)$. **12.** $\left(12\sqrt{6};4\sqrt{6};-24\right)$. **13.** $\left(-\dfrac{3\sqrt{6}}{4};-\dfrac{9\sqrt{6}}{4};-\dfrac{9}{2}\right)$.
14. $\left(\dfrac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}};-\dfrac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}};-\dfrac{16}{3}\right)$. **15.** $\left(\dfrac{1}{3\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{3}\right)$. **16.** $-\dfrac{22}{\sqrt{3}}$. **17.** $\dfrac{5}{\sqrt{26}}$. **18.** $-\dfrac{9}{\sqrt{6}}$. **19.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **20.** $-\dfrac{17}{\sqrt{26}}$.
21. $\dfrac{5}{\sqrt{6}}$. **22.** $-\dfrac{31}{\sqrt{14}}$. **23.** $-\dfrac{25}{4\sqrt{13}}$. **24.** $\dfrac{13}{2\sqrt{10}}$. **25.** $-\dfrac{27}{\sqrt{30}}$. **26.** 0. **27.** $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. **28.** -50. **29.** $\dfrac{4}{5\sqrt{6}}$.
30. $\dfrac{1}{2}$.

Список літератури

1. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – М.: Наука, 1973.
2. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1988.
3. Бугров Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1980.
4. Высшая математика в примерах и задачах : учебн. пособие / под ред. Ю. Л. Геворкяна. – Т. 1. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2005.
5. Высшая математика: Программа, методические указания и контрольные задания для студентов всех специальностей заочного обучения. Ч. 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной, функции многих переменных, дифференциальные уравнения и системы / под ред. Ю. Л. Геворкяна. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2002.
6. Геворкян Ю. Л. Теория пределов и дифференциальное исчисление функции одной переменной / Ю.Л. Геворкян. – Киев; УМК130, 1993.
7. Геворкян Ю. Л. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения / Ю. Л. Геворкян, А. Л. Григорьев, Н. А. Чикина. – Харьков, ХГПУ, 1999.
8. Геворкян Ю. Л. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Ю. Л. Геворкян, А. Л. Григорьев, Н. А. Чикина. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2001.
9. Геворкян Ю. Л. Краткий курс высшей математики : учеб. пособие: в 2-х ч. / Ю. Л. Геворкян, А. Л. Григорьев, Н. А. Чикина. – Ч. 1. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009.
10. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посібник : у 2-х томах / за ред. Л. В. Курпа. – Т. 1. – Харків: НТУ «ХПІ», 2009.
11. Овчинников П. П. Вища математика / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – Ч. 1. – Київ: Техніка, 2007.
12. Олексенко В. М. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / В. М. Олексенко. – Харків: НТУ «ХПІ», 2006.
13. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов / Н. С. Пискунов. – Т.1. – М.: Наука, 1985.
14. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – Т. 1, 2. – М.: Наука, 1969.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ЧІКІНА Наталія Олександрівна
АНТОНОВА Ірина Володимирівна
БАЛАКА Лариса Олексіївна
та інші

ЗБІРНИК
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Роботу до видання рекомендувала проф. Курпа Л.В.
В авторській редакції
Комп'ютерний набір: *О.В. Фоміна*

План 2010, поз. 127

Підп. до друку 24.05.12. Формат 60×84 /16. Папір офісний. Riso-друк.
Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 13,0. Наклад 300 прим. 1-й з-д 1-150.
Зам. № 40. Ціна договірна.

Видавець і виготовлювач
ТОВ «Видавництво «Підручник НТУ «ХПІ».
вул. Фрунзе, 21, м. Харків-2, 61002,

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3656 від 24.12.2009 р.