关于1到n的k次方之和的问题

张艺瀚

定义：

$$S_k(n)=\sum_{i=1}^{n} i^k$$

1 方法1：使用二项展开

$1^{k+1}=1$

$2^{k+1}=(1+1)^{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}1^i=\binom{k+1}{0}1^0+\binom{k+1}{1}1^1+\ldots+\binom{k+1}{k+1}1^{k+1}$

$3^{k+1}=(2+1)^{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}2^i=\binom{k+1}{0}2^0+\binom{k+1}{1}2^1+\ldots+\binom{k+1}{k+1}2^{k+1}$

$\ldots$

$(n+1)^{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}n^i=\binom{k+1}{0}n^0+\binom{k+1}{1}n^1+\ldots+\binom{k+1}{k+1}n^{k+1}$

将上面的等式左右相加，除第一个外，每个式子的左边与下个式子的右边最后一项相消：

$$\begin{aligned}(n+1)^{k+1}&=1+\binom{k+1}{0}\sum_{i=1}^{n}i^0+\binom{k+1}{1}\sum_{i=1}^{n}i^1+\ldots+\binom{k+1}{k}\sum_{i=1}^{n}i^k\\&=1+\sum_{j=0}^{k-1}\left(\binom{k+1}{j}\sum_{i=1}^{n}i^j\right)+(k+1)S_k(n)\end{aligned}$$

从而：

$$\begin{aligned}S_k(n)&=\frac{1}{k+1}\left[(n+1)^k-\sum_{j=0}^{k-1}\left(\binom{k+1}{j}\sum_{i=1}^{n}i^j\right)-1\right]\\&=\frac{1}{k+1}\left[(n+1)^k-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}S_j(n)-1\right]\end{aligned}$$

这是一个很强的递归式，尝试将它化为封闭形式，以失败告终。这个式子对我们没什么帮助。事实上，有一个阿尔哈曾公式：

$$S_{k+1}(n)=(n+1)S_k^n-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}j^k$$

这个公式可以用几何方法很容易的证明。

2 方法2：使用下降阶乘幂

下降阶乘幂指的是：

$$n^{\underline{k}}=x(x-1)\dots(x-k+1)$$

首先看如何将正常的幂转化为下降阶乘幂，即求下面的$a_1,a_2,\dots a_k$

$$n^k=a_1n^{\underline{k}}+a_2n^{\underline{k-1}}+\dots+a_kn^{\underline{1}}$$

分别取n为$1,2,\dots k$，得到下面的关于$a_1,a_2,\dots a_k$的线性方程组：

$$\begin{cases}1^k=a_11^{\underline{k}}+a_21^{\underline{k-1}}+\dots+a_k1^{\underline{1}}\\2^k=a_12^{\underline{k}}+a_22^{\underline{k-1}}+\dots+a_k2^{\underline{1}}\\\dots\\k^k=a_1k^{\underline{k}}+a_2k^{\underline{k-1}}+\dots+a_kk^{\underline{1}}\end{cases}$$

写成喜闻乐见的矩阵形式就是：

$$\begin{pmatrix}1^{\underline{k}}&1^{\underline{k-1}}&\dots&1^{\underline{1}}\\2^{\underline{k}}&2^{\underline{k-1}}&\dots&2^{\underline{1}}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\k^{\underline{k}}&k^{\underline{k-1}}&\dots&k^{\underline{1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1^k\\2^k\\\vdots\\k^k\end{pmatrix}$$

根据$x^{\underline{k}}$的定义我们知道，x取$0,1,\dots k-1$时，$x^{\underline{k}}$均为0，从而：

$$\begin{pmatrix}&&&1^{\underline{1}}\\&&2^{\underline{2}}&2^{\underline{1}}\\&\iddots&\vdots&\vdots\\k^{\underline{k}}&\dots&k^{\underline{2}}&k^{\underline{1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1^k\\2^k\\\vdots\\k^k\end{pmatrix}$$

我们知道：

$$n^{\underline{k}}=\begin{cases}0&n<k\\\dfrac{n!}{(n-k)!}=k!\dbinom{n}{k}&n\geq k\end{cases}$$

从而：

$$\begin{pmatrix} & & & \frac{1!}{(1-1)!} \\ & & 2! & \frac{2!}{(2-1)!} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ k! & \dots & \frac{k!}{(k-2)!} & \frac{k!}{(k-1)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^k \\ 2^k \\ \vdots \\ k^k \end{pmatrix}$$

化简得：

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \frac{1}{1!} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \frac{1}{(k-2)!} & \frac{1}{(k-1)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1^k}{1!} \\ \frac{2^k}{2!} \\ \vdots \\ \frac{k^k}{k!} \end{pmatrix}$$

容易看到：

$$a_j = \begin{cases} 1 & j = 1 \\ (j-1)!\left(\dfrac{j^k}{j!} - \dfrac{(j-1)^k}{(j-1)!}\right) = j^{k-1} - (j-1)^k & j = 2, 3, \dots k \end{cases}$$

这样我们就有：

$$\begin{aligned} n^k &= \sum_{j=1}^{k} a_j n^{\underline{k-j+1}} \\ &= \sum_{j=1}^{k} (j^{k-1} - (j-1)^k) n^{\underline{k-j+1}} \end{aligned}$$

于是：

$$\begin{aligned} \sum_{0 \le n < N} n^k &= 0^k + 1^k + \dots + (N-1)^k \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left[(j^{j-1} - (j-1)^k) \frac{N^{\underline{k-j+2}}}{k-j+2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{0 \le n < N+1} n^k &= \sum_{n=1}^{N} n^k \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left[(j^{j-1} - (j-1)^k) \frac{(N+1)^{\underline{k-j+2}}}{k-j+2} \right] \end{aligned}$$