四元数入门

一个简单的，计算机图形向的四元数入门

https://www.bilibili.com/video/BV1Nr4y1j7kn

https://www.bilibili.com/video/BV1SW411y7W1

从复数谈起

在介绍四元数与 3D 旋转之间的关系之前，我们先来讨论一下复数（Complex Number）的一些性质以及它与 2D 旋转之间的关系．四元数的很多性质在很多层面上都与复数非常类似，所以理解复数的一些性质会对理解四元数非常有帮助．

为了创造负数,我们引入了单位i,这个新引入的单位我们人为地定义成$\sqrt{-1}$,直觉上看,这是一个非常"纯数学"的定义方式,但是很快我们将会了解到,这一定义方式有着非常直观的几何意义.

复数的准备知识

> 复数是由实数和虚数组成的数，可以表示为 $a+bi$ 的形式，其中 a 和 b 都是实数，而 i 则是虚数单位，其中 $i^2=-1$。复数有很多有用的性质，例如可以定义加法、减法、乘法和除法等运算。当我们把复数看作是一个点在二维平面上的坐标时，也可以通过复数来进行旋转操作。

> 对于一个复数 $z=x+iy$，它可以表示为模长与幅角的形式，即 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 是模长，$\tan\theta=\frac{y}{x}$ 是相位角。当我们对一个复数进行旋转操作时，只需要改变它的相位角就可以了，这叫做复数的乘法形式 $(r,\theta)\to(r,\theta+\alpha)$。在二维平面内，两个向量的点积等于它们的模长相乘再乘以它们的夹角的余弦值。同样，两个复数的点积也可以通过它们的乘积来计算。

> 接下来，我们将会介绍二维空间内的旋转和复数的关系

二维空间内的变换

如何描述一个点?

任何二位空间中的变换,本质上都是把一堆点从一些地方移动到另外一些地方的过程,在这里我将不会使用很严谨的数学语言进行描述,同时也不会严格地区分离散与连续的关系(在计算机的世界里,一切都是离散的!). 现在让我们开始吧!

在线性代数中,我们知道了一个N维的空间可以由N个线性无关的向量所**张成**.同时我们在平面几何中,经常使用(x, y)来表示一个坐标或者是向量(你是否感觉有些奇怪,为什么表达向量和点的方式是完全一样的?这是否会引起混淆?笨笨的计算机将会怎么区分自己得到的数据和一个点之间的区别?关于这一个问题,我们将在***四元数的章节***给出一个更好的解决办法)

然而你是否想过,我们能够使用(x, y)来定位一个点的前提是什么?当我们使用这一个坐标的时候,其实隐含着一个我们彼此之间的小小约定,那就是在二维空间中，我们用的是两个线性无关的向量$(1, 0)$ 和 $(0, 1)$来表示整个空间。当我们从零点触发,先沿着X轴行走x个$(1, 0)$向量,然后再向Y轴正方向进行类似的操作,就可以走到我们需要定位的点.

或许你留意到,在这里使用的X轴Y轴的正方向,实际上和我们选定的用于张成这个空间的向量的方向是一致的.我们或许很少去思考,如果最初选定的向量不是互相垂直的,比如如果我们选定的向量是$(1, 2)$和$(3, 4)$,那么我们该如何使用坐标来表示这个空间中的点呢?显然我们无法简单地沿用原来的坐标系下的(x, y)坐标来表示,因为在这个空间里面没有一个坐标系是我们彼此之间**约定好的**.

所以我们知道了,任何二维空间中的集合坐标,必须联合张成这个空间的二维向量才是一个对于空间中某一个点位置的有效描述,终于,我们可以开始我们探索复数的旅程.

从另一个视角理解虚数乘法

定义一个复数$a = 6 + 9i$,我们将从他开始,探索平面变化的奥妙.

我们可以将a表示为:

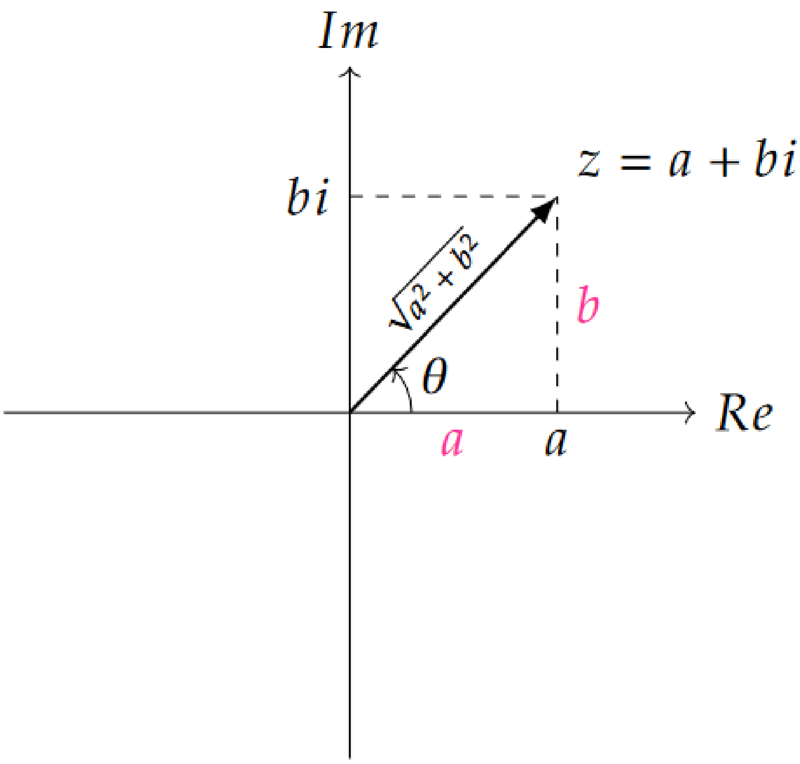
$$v_a = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

你可以看到,这和向量的表示方式完全一样(通常长得像的东西都可以互相关联,这次也不意外,这一美丽的巧合就像欧拉公式的泰勒展开一样惊人!),于是,我们既可以从复数乘法的角度来看,也可以从向量的角度来理解复数间的运算.

当我们用另外一个纯虚数乘以a，例如$b=i$，我们得到一个新的复数$c=a\cdot b=(6+9i)\cdot i=-9+6i$。此时a变成了$v_a=\begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$,如果以向量的视角来看,这一结果和原结果的点积为0,这意味着乘以一个i的效果,相当于将a旋转了90度,并且将a沿着自己的方向延伸了1倍.

而当我们使用纯实数来乘以a,，例如$c=2$，我们得到一个新的复数$d=a\cdot c=(6+9i)\cdot 2=12+18i$。$v_a=\begin{pmatrix}12\\18\end{pmatrix}$,如果以向量的视角来看，这相当于将$a$沿着它所在的方向拉伸两倍，而不不包含旋转。

复数和向量一样,都可以直接相加,而且规则都是对应位置的数字相加求和即可.所以我们可以很容易地推广到乘以任意复数的规则,就是实部虚部分开做乘法,然后在进行一个向量的相加.这一过程可以直接运用矩阵乘法的,不再赘述.



在复平面的上的复数

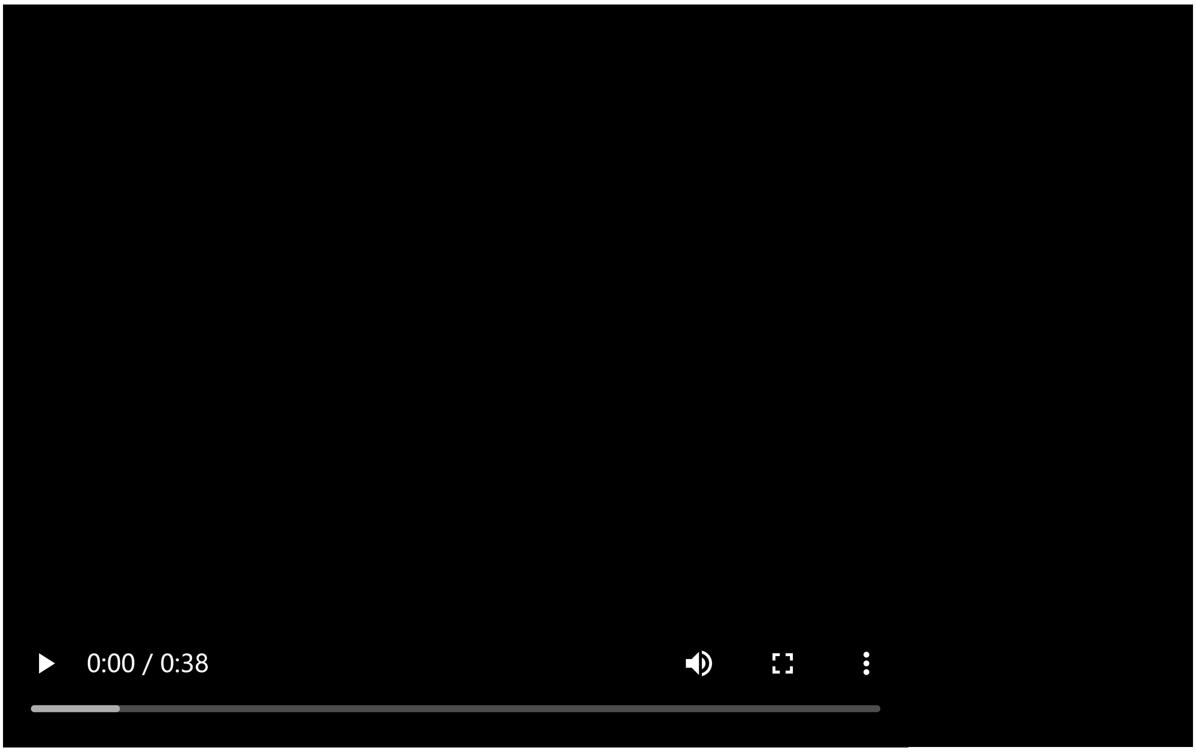
变化的描述

> 在接下来的论述中,我们将始终保持一个**绝对的坐标系**,这个坐标系和我们通常认为的平面直角坐标系是一样的.

乘数的差异化

我们知道复数的乘法$a * b$中,两个乘数的地位是完全等价的,但是现在我希望你能够抛弃这一想法,接受这样一种认识:

在复数乘法中，我们将其中一个复数视为“变换”，而另一个复数视为“被变换的对象”。这种方式下，两个复数的地位不再相等，它们分别扮演着不同的角色。



平面几何:平移和旋转

考虑将平面上的点(x, y)沿着向量$v_a = (a_1, a_2)$进行平移，我们可以使用以下公式:

$$T_{v_a}(x, y) = (x + a_1, y + a_2)$$

现在，假设我们将向量$v_b = (b_1, b_2)$旋转θ角度。这里，我们将v_b视为“变换”，将向量$x = (x_1, x_2)$视为“被变换的对象”。我们可以使用一些三角公式来表示这个旋转操作:

$$R_\theta(x_1, x_2) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)$$

现在，如果我们将x先沿着v_a平移，再使用v_b旋转，我们得到以下表示：

$$R_\theta(T_{v_a}(x_1, x_2)) = R_\theta(x_1 + a_1, x_2 + a_2) = ((x_1 + a_1)\cos\theta - (x_2 + a_2)\sin\theta, (x_1 + a_1)\sin\theta + (x_2 + a_2)\cos\theta)$$

如果我们将这个表达式展开，我们可以看到它可以写成以下形式：

$$(x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta + a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta + a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta)$$

这看起来非常像向量加法。实际上，我们可以将这个操作视为一个向量上的变换，其中旋转对应着基向量的变化，平移对应着原点的变化。

复数乘法

现在，让我们考虑复数乘法$a * b$，其中我们将a视为“变换”，将b视为“被变换的对象”。根据之前的讨论，我们可以将这两个向量视为平面上的两个基向量。那么，将b乘以a相当于使用矩阵c去变换b:

$$c = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

这实际上第一列代表着a,而第二列是ai

$$b' = cb$$

使用一些矩阵运算，我们可以得出：

$$b' = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 - a_2 b_2 \\ a_2 b_1 + a_1 b_2 \end{pmatrix}$$

因此，我们可以将复数乘法视为一个向量上的变换，其中每个复数对应着一个基向量。

总结

综上所述，我们可以将平面上的变换视为一个有序二元组(c, v)，其中c表示一个矩阵变换，v表示平移向量。我们可以将复数视为一个特殊的变换，它只涉及旋转和缩放，没有平移。使用复数乘法，我们可以将平面上的任意变换表示为一系列复数乘积的形式。

> $a*b$代表着, 使用a和ai为新的基向量构建一个相对坐标系, 在保证b所代表的点在相对坐标系下的坐标不变后, b在绝对坐标系下的位置

如何使用复数表示二维空间中的变换

我们可以将平面上的每个点(x,y)表示为一个复数$x+iy$。然后，我们可以使用复数乘法来表示变换。

平移

假设我们想要将所有点沿着向量(a,b)平移。也就是说，对于每个点(x,y)，我们想要将其变成$(x+a,y+b)$。我们可以将向量(a,b)表示为一个复数$c=a+ib$。这样，我们可以将变换写成:

$$(x+iy)+c=(x+a)+i(y+b)$$

这个公式告诉我们对于任意一个点(x,y)，使用复数加上c会得到一个新的点$(x+a,y+b)$，这就实现了平移变换。

旋转

假设我们想要将所有点沿着原点顺时针旋转θ角度。为了表示这个旋转，我们需要找到一个复数z，它满足以下两个条件:

- $|z|=1$，即z的模长等于1，这保证了旋转后的大小不变。
- z与实轴之间的夹角为θ，这保证了旋转了θ角度。

一个可能的选择是:

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

现在，对于任意一个点(x,y)，我们可以将其表示为一个复数$x+iy$。然后，我们可以使用复数乘法来旋转这个点:

$$(x+iy)z=(x\cos\theta-y\sin\theta)+i(x\sin\theta+y\cos\theta)$$

这个公式告诉我们，对于任意一个点(x,y)，使用复数z相乘会得到一个新的点(x',y')，它是原来点(x,y)顺时针旋转了θ角度得到的点。

组合变换

现在，假设我们想要先平移所有点然后旋转它们。给定一个向量(a,b)和一个角度θ，我们可以使用以下公式实现组合变换：

$$(x+iy)z+(a+ib)=(x\cos\theta-y\sin\theta+a)+i(x\sin\theta+y\cos\theta+b)$$

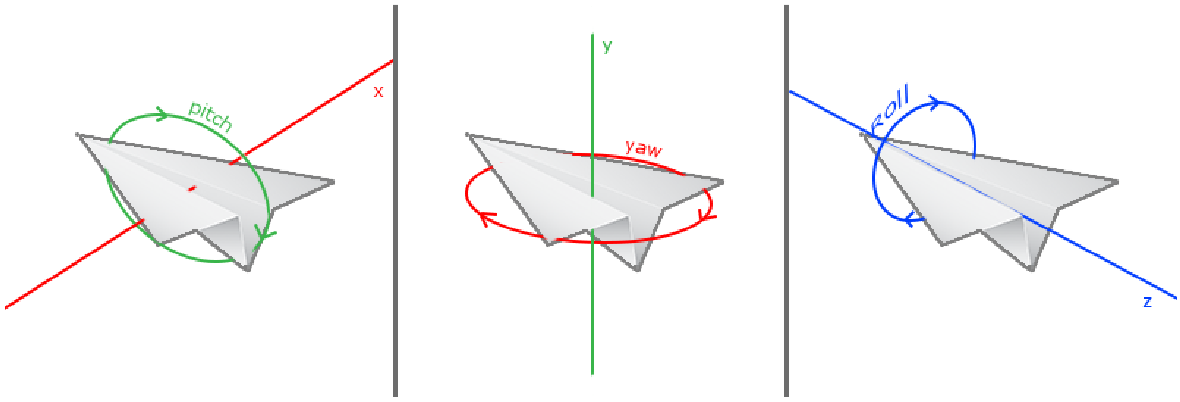
这个公式告诉我们，对于任意一个点(x,y)，我们可以先沿着向量(a,b)进行平移，然后再使用复数z进行旋转，最终得到点(x',y')。由于复数乘法可以被视为旋转或缩放，因此可以使用类似的方法组合任意数量的变换。

我们的世界:三维空间

终于！从二维平面中抬起头来，深深地呼吸一口三维世界的新鲜空气！下面请抓紧扶手，我们终于将开始四元数的旅程……

三维空间中旋转:欧拉角与万向节锁

三维空间中的旋转有一个非常直观的描述：欧拉角。



俯仰角是描述我们如何往上或往下看的角，可以在第一张图中看到。第二张图展示了偏航角，偏航角表示我们往左和往右看的程度。滚转角代表我们如何**翻滚**摄像机，通常在太空飞船的摄像机中使用。每个欧拉角都有一个值来表示，把三个角结合起来我们就能够计算3D空间中任何的旋转向量了。

数学家欧拉已经证明，可以通过这三个角的变化来描述**任意的三维空间旋转**。

What could possibly go wrong?

万向节锁

虽然欧拉角具有直观性，但它们也存在几个问题。一个主要的问题是万向锁问题（Gimbal Lock）。

> 请直接观看这个视频，我认为解释得非常详细：https://www.bilibili.com/video/BV1Nr4y1j7kn

在OpenGL中，一个模型在某一时刻的具体位置信息一般由初始位置，依次应用平移，分别绕xyz三个轴旋转的旋转矩阵得出：

假设初始位置为 (x_0, y_0, z_0)，平移向量为 (t_x, t_y, t_z)。在旋转矩阵中，$R_x(\theta_x)$ 表示绕 x 轴旋转 θ_x 的旋转矩阵，$R_y(\theta_y)$ 和 $R_z(\theta_z)$ 同理，那么模型在某一时刻的具体位置信息可以表示为:

y在OPENGL中，一个图形某一时刻t的位置一般是这样决定的，初始状态依次乘以x:

新的视角:四元数

利用四元数的性质，我们可以将它写成四元数 积的形式．我们之前推导过，如果有两个纯四元数 $v=[0,v]$, $u=[0,u]$，那 么 $vu=[-v\cdot u, v\times u]$．类似地

$$uv_\perp = [-u\cdot v_\perp, u\times v_\perp].$$

因为$v_\perp$ 正交于 u，所以 $u\cdot v_\perp=0$，也就是说 $uv_\perp=[0, u\times v_\perp]=u\times v_\perp$,这个结果实际上也是一个纯四元数（实部为0！）再将之前的结果带入，我们就可以发现旋转后的向量长这个样子:

$$v'_\perp = cos(\theta)v_\perp + sin(\theta)(uv_\perp)$$

使用乘法分配律，提取出$v_\perp$,发现旋转前后差了一个:

$$[cos(\theta), sin(\theta)u].$$

Theorem 8: 3D 旋转公式（四元数型，正交情况）

当 $\mathbf{v}_\perp$ 正交于旋转轴 $\mathbf{u}$ 时，旋转 θ 角度之后的 $\mathbf{v}'_\perp$ 可以使用四元数乘法来获得．令 $v_\perp = [0, \mathbf{v}_\perp]$，$q = [\cos(\theta), \sin(\theta)\mathbf{u}]$，那么：

$$v'_\perp = qv_\perp$$

同时可以发现q的模长是1，这样，我们已经几乎可以得出最后的结论了！