Exercício 6 – Lançamento Oblíquo

Cláudio Santos nº 42208 MIEF
claudiostb7@hotmail.com

Sumário: Cálculo do alcance máximo no lançamento oblíquo sem resistência de ar comparando método de Euler com o método de Runge-Kutta de ordem 4. Análise da dependência da resistência do ar com o ângulo corresponde ao alcance máximo.

6.1

O objectivo é calcular o alcance máximo de um corpo lançado do solo com velocidade inicial de **v**=10 m/s segundo um ângulo de **θ**=π/4 relativamente à horizontal e desprezando a resistência do ar. Existem por isso 4 equações diferenciais para resolver: 2 delas referentes às variações das coordenadas **x** e **y** e outras 2 referentes às variações das velocidades segundo cada eixo. Também se sabe que a derivada da posição é a velocidade logo as equações diferenciais são:

$$x'(t) = v_x(x(t),t),\ x(t_0=0) = 0$$
$$y'(t) = v_y(y(t),t),\ y(t_0=0) = 0$$
$$v_x{}'(t) = 0,\ v_x(t_0=0) = v\cos(\theta)$$
$$v_y{}'(t) = -g,\ v_y(t_0=0) = v\sin(\theta)$$

onde **g** é a aceleração gravítica (9,8 m/s^2).

Numa primeira parte, aplicou-se o método de Euler para resolver o problema. A partir das condições iniciais para as variáveis, calcula-se a variável na iteração seguinte fazendo uma aproximação linear para um dado passo de integração **Δt**. O novo valor obtido é tomado como a condição inicial e assim se repete o processo para todas as variáveis enquanto o projéctil voar (**y≥0**).

$$u'(t) = f(u(t),t),\ u(t_0) = u_0$$
$$u_{n+1} = u_n + \Delta t\, f(u_n,t_n)$$

Obteve-se um gráfico da trajectória do corpo para passos de integração diferentes (Figura 1).

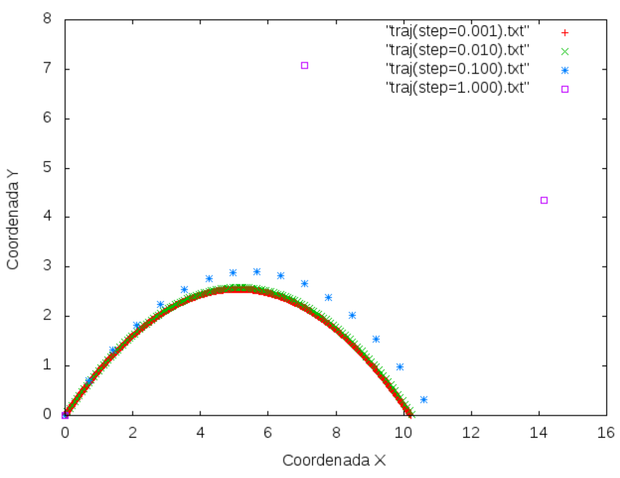

Figura 1: *Trajectória do projéctil calculado pelo método de Euler para passo de integração de: 10^{-3} (vermelho), 10^{-2} (verde), 10^{-1} (azul) e 1 (roxo). Observa que quanto menor o passo de integração, mais próxima é a trajectória calculada da trajectória real. Quanto maior o passo, menos pontos da trajectória são obtidos e por isso o erro aumenta.*

Numa segunda parte aplicou-se o método de Runge-Kutta de ordem 4 (RK4) ao problema. Neste método são calculados 4 coeficientes: k_1, k_2, k_3 e k_4. A variável é actualizada numa aproximação linear usando uma média ponderada dos coeficientes.

$$k_1 = f(u_n,t_n)$$
$$k_2 = f\left(u_n + \frac{1}{2}\Delta t\, k_1, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right)$$
$$k_3 = f\left(u_n + \frac{1}{2}\Delta t\, k_2, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right)$$
$$k_4 = f(u_n + \Delta t\, k_3, t_n + \Delta t)$$
$$u_{n+1} = u_n + \Delta t\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{3}k_4\right)$$

Comparou-se o valor obtido para o alcance máximo de cada um dos métodos com o valor analítco, calculando o erro absoluto bem como a variação deste erro com o passo de integração (Tabela 1). O valor analítico é dado por:

$$x_{max} = \frac{2\,v^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{g} \simeq 10{,}2041$$

Tabela 1: Comparação do alcance máximo e respectivo erro absoluto obtido pelos métodos de Euler e RK4 para cada passo de integração.

	Step	Alcance Máximo (m)	Erro Absoluto(m)
Euler	1×10−03	10,2177	0,0136
	1×10−02	10,3238	0,1197
	1×10−01	11,3137	1,1096
	1,0	21,2132	11,0091
RK4	1×10−03	10,2157	0,0116
	1×10−02	10,3045	0,1004
	1×10−01	11,1551	0,9510
	1,0	16,2392	6,0351

Observa-se que o erro é menor quando se usa o método de RK4. Isto deve-se ao facto de RK4 ser localmente de ordem 5 enquanto Euler é localmente de ordem 2. Isto significa que o método de RK4 é menos dispendioso numericamente que o método de Euler, apesar de para passos de integração pequenos o erro ser semelhante. O mesmo não acontece para passos de integração maiores onde o erro do método de Euler dispara face ao de RK4.

6.2

Neste exercício considera-se a equação de movimento sobre o efeito de resistência do ar:

$$\ddot{r} = g - \gamma\, v^2\, e_v$$

onde γ é uma constante e **e**$_v$ é um versor com a direção e sentido do vector velocidade. O objectivo é determinar como depende da constante γ o ângulo corresponde ao alcance máximo.

Implementou-se o método de Runge-Kutta de ordem 4 (RK4) como descrito em 6.1. As equações diferenciais a resolver são:

$$x'(t) = v_x\,(x(t),t)\,, \qquad x\,(t_0 = 0) = 0$$
$$y'^{(t)} = v_y\,(y(t),t)\,, \qquad y\,(t_0 = 0) = 0$$
$$v_x'(t) = -\gamma\, v_x(x(t),t)\, v\,, \qquad v_x(t_0 = 0) = v\,cos(\theta)$$
$$v_y'(t) = -g - \gamma v_y(y(t),t)v\,, \qquad v_y(t_0 = 0) = v\,sin(\theta)$$

onde se defini uma velocidade inicial de **v**=20 m/s. Variou-se a constante γ entre 10^{-5} e 1 e, para cada valor, calculou-se o alcance diversos ângulos de lançamento. Guardou-se o valor do ângulo θ_{max} correspondente ao alcance máximo para cada γ e fez-se o gráfico de θ_{max} em função de γ (Figura 2).

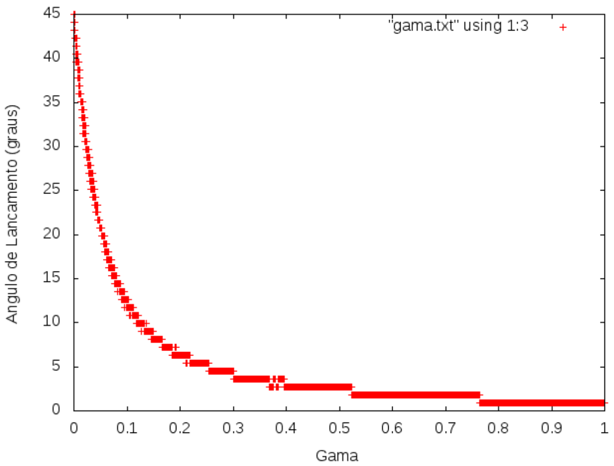

Figura 2- Ângulo correspondente ao alcance máximo em função de γ (gama) no lançamento de um corpo do solo com velocidade inicial v= 20 m/s.

Observa-se que para $10^{-5} < \gamma < 10^{-4}$ a aproximação sem resistência de ar resulta bem. Para $\gamma > 10^{-4}$ o ângulo começa a diminuir e consequentemente, mas ainda mais rapidamente, também o alcance máximo do projéctil (Figura 3).

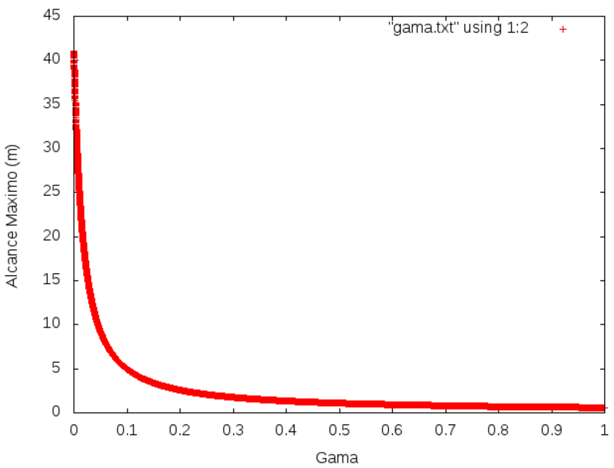

Figura 2- Alcance máximo em função de γ (gama) no lançamento de um corpo do solo com velocidade inicial v= 20 m/s.