

# Exercício 9 – Equação de Poisson

Cláudio Santos nº 42208 MIEF

[claudiosb7@hotmail.com](mailto:claudiosb7@hotmail.com)

**Sumário:** Resolução da equação de Poisson numa malha bidimensional usando o método de Gauss-Seidel com potencial nulo nas fronteiras em três casos: uma carga, duas cargas e várias cargas espalhadas pelo sistema.

## 9.1

Considera-se a equação de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \rho(x, y)$$

onde  $u(x, y)$  é o potencial eléctrico e  $\rho(x, y)$  a densidade de carga no sistema. Discretizou-se o sistema de coordenadas  $(x, y)$  numa malha de dimensões  $L_x \times L_y$ . Ao longo do exercício considerou-se  $L_x = L_y = L = 100$ . Como condições de fronteira, impôs-se potencial nulo nas fronteiras ou seja:

$$u(0, y) = u(L, y) = u(x, 0) = u(x, L) = 0$$

Aproximou-se a equação diferencial usando o método de relaxação de Gauss-Seidel que itera cada ponto da malha com base nos primeiros vizinhos da seguinte maneira:

$$u_i^j = \frac{1}{4} (u_i^{j+1} + u_i^{j-1} + u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - \frac{1}{4} \Delta_x \Delta_y \rho_i^j$$

onde o par  $(i, j)$  corresponde ao par  $(x, y)$  e  $(\Delta_x, \Delta_y)$  é a discretização espacial de  $(x, y)$ . Neste exercício considerou-se  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = 10^{-5}$  e um número de iterações total  $It_{max} = 10^3$ .

Analisou-se o potencial obtido em três casos diferentes: uma carga pontual unitária no centro do sistema, duas cargas pontuais e unitárias colocadas equidistantes do centro do sistema e por último considerando várias cargas pontuais e unitárias espalhadas pelo sistema.

### Caso 1: Uma carga

Nesta situação tem-se uma carga pontual e unitária no centro do sistema, ou seja  $\rho(50, 50) = 1$ . Em todas as outras posições a densidade de carga é nula. A solução obtida para o potencial eléctrico na malha observa-se na Figura 1.

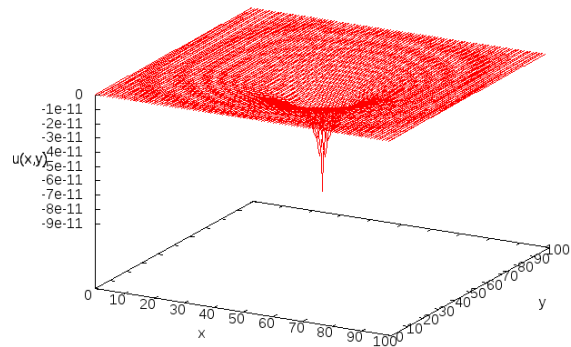


Figura 1: Potencial eléctrico  $u(x, y)$  numa malha  $(x, y)$  com dimensão  $100 \times 100$  com step  $\Delta = 10^{-5}$  (1000 iterações) para uma carga pontual e unitária no centro.

### Caso 2: Duas cargas

Nesta situação têm-se duas cargas pontuais e unitárias equidistantes do centro do sistema. Considerou-se  $\rho(40, 40) = \rho(60, 60) = 1$ . Em todas as outras posições a densidade de carga é nula. A solução obtida para o potencial eléctrico na malha observa-se na Figura 2.

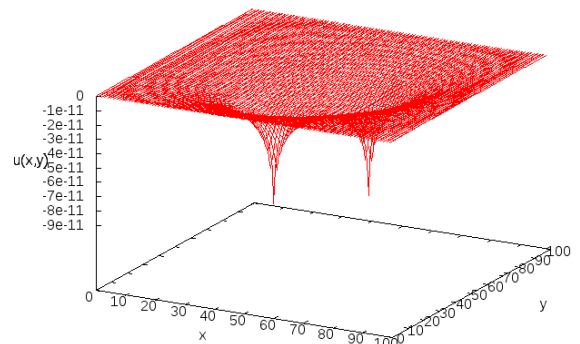


Figura 2 Potencial eléctrico  $u(x, y)$  numa malha  $(x, y)$  com dimensão  $100 \times 100$  com step  $\Delta = 10^{-5}$  (1000 iterações) para duas cargas pontuais e unitárias equidistantes do centro do sistema.

### Caso 3: Várias cargas

Nesta situação têm-se várias cargas pontuais e unitárias espalhadas pelo sistema. No total existem 16 cargas e cada carga foi colocada a uma distância nodal de 20 entre elas. Em todas as outras posições a densidade de carga é nula. A solução obtida para o potencial eléctrico na malha observa-se na Figura 3.

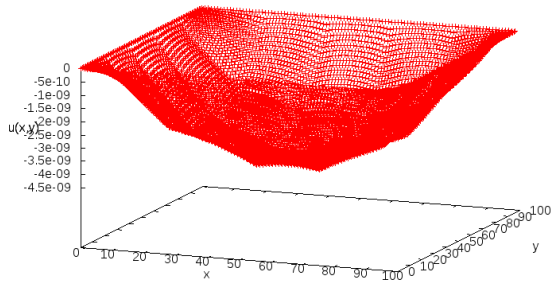


Figura 3: Potencial eléctrico  $u(x, y)$  numa malha  $(x, y)$  com dimensão  $100 \times 100$  com  $\Delta = 10^{-5}$  (1000 iterações) para 16 cargas a uma distância nodal de 20 entre elas.