Exercício 8 – Equação de Onda

Cláudio Santos nº 42208 MIEF
claudiostb7@hotmail.com

Sumário: Resolução da equação de onda usando diferentes finitas e condições periódicas numa malha. Estudo da solução em função de um parâmetro b.

8.1

Considera-se a equação de onda:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

onde v é a velocidade de propagação da onda. Aproximando as derivadas por diferenças finitas, obtém-se

$$u(x,t+\Delta t) = 2(1-b)u(x,t) + b[u(x+\Delta x,t) + u(x-\Delta x,t)] - u(x,t-\Delta t)$$

onde $b = \left(\frac{v\Delta t}{\Delta x}\right)^2$. Δt é a discretização temporal e Δx a discretização espacial da função de onda. Como condições inciais definiu-se a onda no instante $t = 0$ e $t = -\Delta t$:

$$u(x,0) = exp(-(x-10)^2)$$
$$u(x,-\Delta t) = exp(-(x - v\Delta t - 10)^2)$$

O objectivo é resolver a equação de onda usando diferentes finitas numa malha. Definiu-se uma malha $N_x \times N_t$ onde N_x é o tamanho espacial e N_t o tamanho temporal. Implementou-se condições de fronteira periódicas o que significa:

$$u(0,t) = u(N_x,t)$$

Analisou-se a solução da equação da onda em três casos distintos: $b < 1$, $b = 1$ e $b > 1$.

Caso 1: b<1

Neste caso, escolheu-se a malha com $N_x = 20$ e $N_t = 100$. Os incrementos são $\Delta x = 10^{-2}$ e $\Delta t = 10^{-2}$. A velocidade é $v = 0{,}4$ que implica que $b = 0{,}16$.

Nesta situação de $b < 1$ obtém-se uma onda a propagar-se segundo funções trigonométricas.

Numericamente comprovou-se este resultado como se observa na Figura 1.

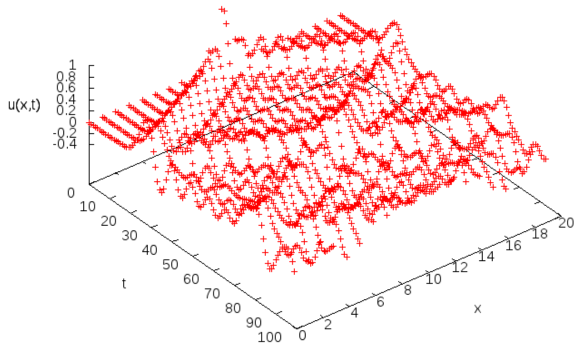

Figura 1: Resolução numérica da equação de onda para b=0,16. Verifica-se o comportamento sinusoidal esperado.

Caso 2: b=1

Neste caso, escolheu-se a malha com $N_x = 20$ e $N_t = 100$. Os incrementos são $\Delta x = 10^{-2}$ e $\Delta t = 10^{-2}$. A velocidade é $v = 1$ que implica que $b = 1$.

Nesta situação de $b = 1$ e olhando a equação diferencial em diferenças finitas, o termo de $u(x,t)$ desaparece. Logo a solução obtida é uma função de degrau a propagar-se.

Numericamente, comprovou-se este resultado como se observa na Figura 2.

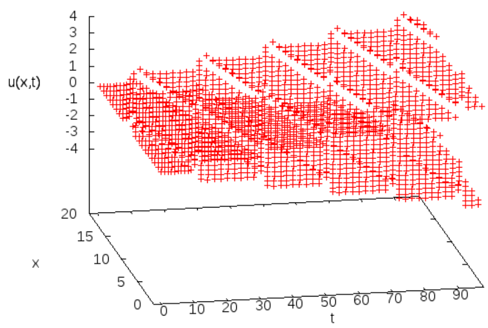

Figura 2: Resolução numérica da equação de onda para b=1. Observa-se o comportamento degrau como esperado.

Caso 3: b>1

Neste caso, escolheu-se a malha com $N_x = 20$ e $N_t = 50$. Os incrementos são $\Delta x = 10^{-4}$ e $\Delta t = 10^{-2}$. A velocidade é $v = 10$ que implica que $b = 10^6$.

Nesta situação de $b > 1$ e olhando a equação diferencial em diferenças finitas, os termos de $u(x,t)$ e $u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)$ têm sinais opostos. Logo a cada iteração temporal o método diverge, pois, o salto na malha é maior que o imposto. A solução obtida é assim instável.

Numericamente, os dados obtidos comprovam esta situação pois na última iteração temporal o resultado obtido para a função de onda já é infinito e não dá para fazer um plot.