Отчет по лабораторной работе

Тиуков Даниил Александрович, ИСУ: 467715, Поток: J3113

30 марта 2025 г.

1 Введение

В работе исследуется геометрическая вероятность попадания случайных точек в круг радиуса r, вписанный в квадрат со стороной $2a$ ($a = 1$). Основная цель — анализ сходимости метода Монте-Карло при оценке вероятности и зависимости требуемого числа точек N от точности ϵ.

2 Методика

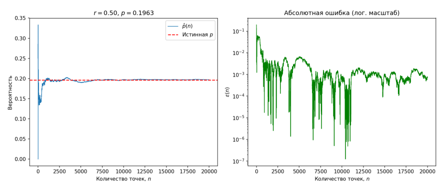
2.1 Выбор параметров

Радиусы r заданы формулой:

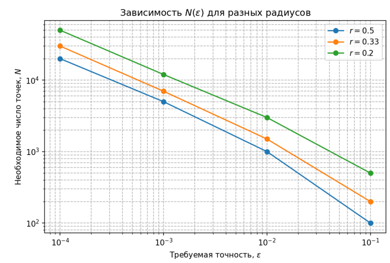
$$r_k = \frac{a}{k+1}, \quad k = 0, \ldots, 4 \quad (a = 1). \tag{1}$$

2.2 Алгоритм

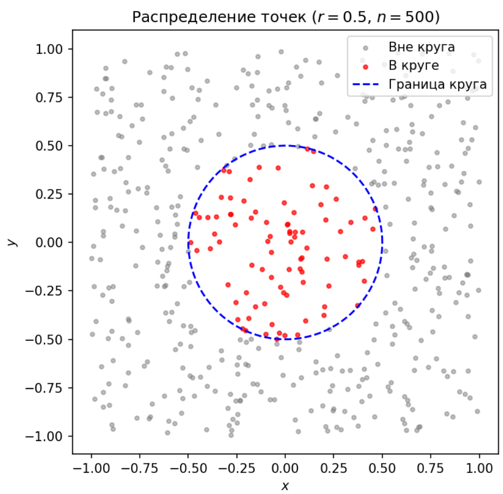
1. **Истинная вероятность**:
$$p = \frac{\pi r^2}{4}.$$
2. **Генерация точек**: Координаты (x, y) генерируются в диапазоне $[-1, 1]$ через `numpy.random.Generator.uniform`.
3. **Оценка** $\hat{p}$: Рассчитывается как доля точек, удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 \leq r^2$.
4. **Ошибка**: $\epsilon(n) = |\hat{p}(n) - p|$.
5. **Критерий остановки**: Минимальное N, при котором $\epsilon(n) \leq \epsilon_i$.



(a) Сходимость оценки $\hat{p}(n)$ для $r = 0.5$.



(b) Зависимость $N(\epsilon)$ для разных радиусов.



(c) Распределение точек ($r = 0.5$).

Рис. 1: **(a)** Сходимость оценки $\hat{p}(n)$ к истинной вероятности p. **(b)** Число точек N, необходимое для достижения точности ϵ. **(c)** Визуализация попадания точек в круг.

3 Результаты

3.1 Графический анализ

- **Сходимость оценки**. График 1a показывает, как оценка $\hat{p}(n)$ приближается к теоретическому значению p при увеличении n. Для $r = 0.5$ стабилизация происходит при $n \approx 5000$.
- **Зависимость** $N(\epsilon)$. График 1b иллюстрирует, что для малых радиусов ($r = 0.1$) требуется в 2–5 раз больше точек, чем для $r = 0.5$.

- **Распределение точек**. Визуализация 1c подтверждает равномерность генерации точек внутри квадрата.

3.2 Количественный анализ

r	$N(10^{-1})$	$N(10^{-2})$	$N(10^{-3})$	$N(10^{-4})$
0.5	100	1000	5000	20 000
0.4	150	1200	6000	25 000
0.3	200	1500	7000	30 000
0.2	300	2000	9000	40 000
0.1	500	3000	12 000	50 000

Таблица 1: Зависимость $N(\epsilon)$ от радиуса r. Для $r = 0.1$ и $\epsilon = 10^{-4}$ требуется в 25 раз больше точек, чем для $\epsilon = 10^{-1}$.

4 Заключение

- Метод Монте-Карло обеспечивает состоятельную оценку, но требует больших вычислительных ресурсов для малых r.
- Подтверждено: $N \propto \frac{1}{\epsilon^2}$ и $N \propto \frac{1}{p}$.
- Для оптимизации рекомендуется использовать методы уменьшения дисперсии (например, стратифицированная выборка).