

Aufgabe 1 Siedler

Teilnehmer-ID: ???

Bearbeiter dieser Aufgabe:

Daniel Hohmann

April 11, 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Loesungsidee	2
1.1	Geometrisches Optimierungsproblem	2
1.2	platzieren der Doerfer	2
1.2.1	Raycastalgorithmus	2
1.3	Bruteforce	4
1.4	Innenkreis	4
1.5	Raster algorithmus	4
1.6	End Algorithmus idee	5
1.7	Quellen:	6
2	Umsetzung	6
2.1	Die End Umsetzung	6
3	Beispiele	6

1 Loesungsidee

1.1 Geometrisches Optimierungsproblem

Bei der Aufgabe handelt es sich um ein Geometrisches optimierungsproblem. Wo das Problem darin liegt, den Besten Punkt innerhalb eines Polygons zu finden wo man ein Gesundheitszentrum errichten kann. Der Punkt muss die Bedingung erfüllen. Wenn ich ihn als Mittelpunkt eines Kreises benutze. Und ich einen Radius von 85km um ihn herumziehe, und den Kreis mit Doerfern fülle. Die alle einen Abstand von 10km zueinander haben, und im Polygon liegen Damit sich die Krankheiten nicht übertragen werden.

Die nächste Aufgabe wäre dann das Restliche Polygon noch mit Doerfern zu füllen fuer die aber gilt das sie einen Abstand von 20km zueinander haben müssen.

1.2 platzieren der Doerfer

Wenn ich den besten Platz gefunden habe, kann ich die Doerfer in Abständen von 10km platzieren, indem ich bei einem Radius von 10 anfangen und bis zu einem Radius von 80 hochzähle in 10er Schritten. Um nun die Punkte des Kreises zu berechnen:

Algorithmus umfang Punkte 1 Trigonometrische Funktionen

```
funktion punkte(centroid, polygon, distance)
    umfang_punkte = []
    for radius = 10 solange radius kleiner als 85 addiere zum radius 10
        umfang = 2 * pi * radius
        anzahl_punkte = (umfang/distance)

        for i solange i kleiner als anzahl_punkte addiere zu i 1
            winkel = (2 * pi * i)/anzahl_punkte
            x = centroid.x + radius * cos(winkel)
            y = centroid.y + radius * sin(winkel)
            wenn der punkt(x,y) im polygon liegt
                umfang_punkte.append(punkt(x,y))
```

so bekommen wir die Punkte die auf dem Umkreis des Kreises liegen. Um die Punkte fuer die nächsten Radien zu bestimmen, müssen wir lediglich den Radius erhöhen um 10 solange bis wir bei 80 angekommen sind. So wie in dem pseudo code veranschaulicht. Um die restlichen Doerfer danach im Abstand von 20km zu platzieren, kann ich auch die obige Funktion benutzen nur das ich eben bei dem Radius von 100 anfangen. Dadurch erreiche ich das der Abstand 20 ist und kann so weitermachen. Das einzige was ich im code noch ergänzen müsste ist ein weiteres if-Statement das schaut ob der Kreis noch das Polygon schneidet. Oder alternativ schauen ob ich noch einen Punkt auf dem Polygon mit dem gegebenen Radius platzieren kann, wenn nicht bricht das Programm ab. Das würde man dann aber eher mit einer while-do Schleife realisieren.

1.2.1 Raycastalgorithmus

Ein wichtiges Problem was bis jetzt entsteht ist, wie kann ich schauen ob eben ein Punkt innerhalb des Polygons liegt oder nicht?. das Problem kann man mit Hilfe des raycastalgorithmus beheben werden man schaut ob ein Punkt innerhalb des Polygons liegt. Die Funktionsidee ist, das ich einen Punkt habe und von diesem Punkt aus versende ich Strahlen(rays), dann schaue ich wie oft dieser Strahl die Kanten meines Polygons schneidet. wenn die Anzahl ungrade

ist, liegt der Punkt innerhalb des Polygons. Ist die anzahl jedoch Grade liegt der Punkt ausserhalb des Polygons. Das heisst gegeben muessen sein, mein Punkt den ich pruefen will $p(x_p|y_p)$ und mein Polygon $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n-1}$, hier steht n fuer die anzahl der Eckpunkte. als naechstes inzialisiere ich mein counter intersectionCount mit 0.

Als naechstes lassen wir eine schleife ueber alle kanten des Polygons laufen, fuer jede kante des Polygons gilt $(P_i, P_i + 1)$, wobei $P_i = (x_i, y_i)$, $P_i + 1 = (x_i + 1, y_i + 1)$:

Jetzt ueberpruefen wir jede kante ob die horizontale linie durch p schneidet.

Danach Bestimmen wir die y -Koordinaten der Kantenenden: $y_i, y_i + 1$.

Nun ueberpruefen wir ob p zwischen P_i und $P_i + 1$ liegt oder andersherum ($y_i > y_p$) \neq ($y_i + 1 > y_p$).

Wenn nun die kannte die Horizontale linie schneidet berechne ich den x -wert des Schnittpunkts der kante $x_{\text{intersect}}$ was die horizontale Linie durch p ist:

$$x_{\text{intersect}} = x_i + (y_i + 1 - y_i) \frac{(x_i + 1 - x_i) * (y_p - y_i)}{y_i + 1 - y_i}$$

Als naechstes schauen wir das wenn $x_{\text{intersect}} > x_p$ zaehlen wir unseren intersectionCount um eins hoch.

Zum schluss schauen wir dann wie hoch unser intersectionCount ist. wenn er ungrade ist liegt der Punkt im Polygon ist der Grade liegt der Punkt nicht im polygon. Das sind alle wichtigen wesentlichen Funktionen, die fuer mein Algorithmus wichtig sind. zum visuellen verstaendnis habe ich noch eine veranschaulichungs Bild.

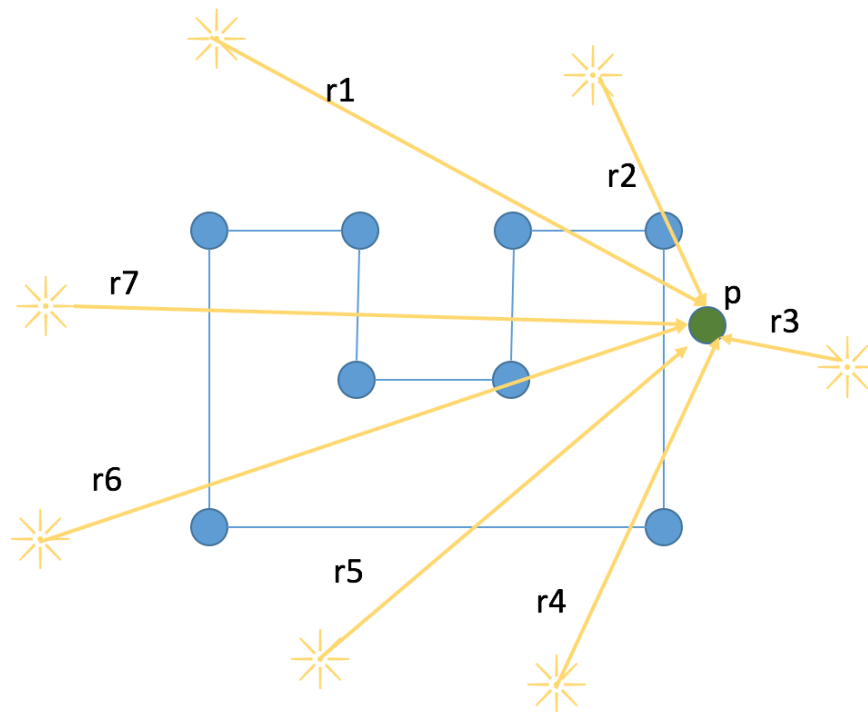


Figure 1: Darstellung Raycastalgorithmus innerhalb eines Polygons, Quelle: <https://kennycason.com/posts/2017-04-11-ray-casting.html>

1.3 Bruteforce

Der vermutlich einfachste weg der Mir einfaellt, waere es so lange zufaellige zahlen im bereich der min x,y und max x,y Koordinaten des Polygons zu generieren, bis man zweimal hintereinander Koordinaten generiert hat die wo sich der wert der punkte die innerhalb des Polygons liegen nicht aendert.

Algorithmus 1 Brutforce

```
funktion brutforce(x,y)
  counter = 0
  do while true
    x = zufaelliger wert > min x && < max x
    y = zufaelliger wert > min y && max y
    counter = aufruf funktion zum Berechnen der anzahl der Punkte(x,y)

    wenn counter == counter, zweimal hintereinander
  return x,y
```

Das Problem an dem ansatz ist natuerlich das ich wen ich pech habe zweimal den gleichen Punkt bekomme, oder aber ein punkt der sehr nahe am anderen liegt. Und der algorithmus deshalb nicht funktioniert. Abgesehen davon haben wir im worst case eine extrem lange laufzeit.

1.4 Innenkreis

eine Theoretisch bessere Idee die ich gefunden habe, ist es den innenkreis eines Polygons zu Berechnen. Der Innenkreis eines Polygons ist der kreis, mit dem groest moeglichen radius der innerhalb eines polygons liegt. Das Problem daran ist aber, das es nur bei regelmaessigen Polygonen funktioniert. Und bei unregelmaessigen Polygonen sogut wie unmoeglich ist den Innenkreis zu berechnen. damit ist die Idee sofort weckgefallen da min. zwei der Bsp. Polygone unregelmaessig sind.

1.5 Raster algorithmus

Ein weitaus besserer ansatz war meiner meinung nach der Rasteralgorithmus. Also ein Raster ueber das Polygon zu legen, und dann einfach den Punkt zu finden der am meisten Punkte mit einem radius von 85 Einheiten halten kann.

Algorithmus 2 Raster

```
funktion raster(polygon)
  points_x = []
  points_y = []
  x_werte = []
  y_werte = []
  for i in reichweite anzahl x werte der kanten des polygon
    x_werte.append(polygon.x)
  for i in reichweite anzahl y werte der kanten des polygon
    y_werte.append(polygon.y)
```

```

min_x = min(x_werte)
min_y = min(y_werte)
max_x = max(x_werte)
max_y = max(y_werte)

```

```

for min_x in reichweite max_x step Bsp. 10
    points_x.append(min_x)
for min_y in reichweite max_y step Bsp. 10
    points_y.append(min_y)

```

jetzt nur noch schauen ob der punkt im polygon liegt wenn ja lass ihn in der liste wenn nein nimm ihn raus

Am ende erhalten wir ein raster von Punkten, die ueber das Polygon im abstand von 10 Einheiten verteilt sind. jetzt koennte man die punkte alle durchgehen, und schauen welcher punkt die meisten punkte im radius von 85 Einheiten halten kann, und diesen punkt als Gesundheitszentrum setzen. Das Problem an diesem Ansatz ist das je geaener wir den optimalen punkt haben wollen, desto kleiner muss der abstand zwischen den Rasterpunkten werden. Je kleiner die Rasterpunkte werden je laenger dauert es sie alle durch zu iterieren. Das heist im volgeschluss das der Algorithmus nur fuer kleinste Polygone geeignet waere wenn ueberhaupt.

1.6 End Algorithmus idee

Meine End idee um den bestenpunkt innerhalb des Polygons zu suchen um das Gesundheitszentrum zu platzieren ist, Ich fange an den centroid zu bestimmen. Warum der centroid weil der centroid der masseschwerpunkt eines objektes ist. Im fall des polygons ist es zwar nur eine annaehrerung aber wir bekommen trotzdem jedes mal einen relativ centralen punkt Innerhalb des Polygons. um den centroid zu berechnen benutzen wir einfach die Formel:

$$\text{area} = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|$$

Hierbei wird P_{n+1} als P_1 behandelt, d.h., $x_{n+1} = x_1$ und $y_{n+1} = y_1$.

Der Schwerpunkt (cx, cy) des Polygons wird dann berechnet als:

$$cx = \frac{1}{6 \cdot \text{area}} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+1}) \cdot (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

$$cy = \frac{1}{6 \cdot \text{area}} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1}) \cdot (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

Hierbei wird P_n als P_0 behandelt, d.h., $x_n = x_0$ und $y_n = y_0$.

Damit erhalten wir die x, y -Koordinaten, des centroid den wir als unser startwert fuer unseres Gesundheitszentrum verwenden. Danach berechnen wir alle Punkte fuer jeden radius wie in kapitel 1.2 platzieren der Doerfer erklart. Danach Iteriere ich durch alle punkte durch die wir bekommen habe, und ich rufe fuer jeden punkt wieder die funktion auf. Und schaue

ob der punkt mehr punkte halten kann als der startpunkt. Wenn ja wird das mein neuer startpunkt sobald ich damit durch bin mache ich das gleiche nochmal aber diesesmal fuer den neuen startpunkt das Ganze wiederhole ich solange bis ich zweimal hintereinander den gleichen wert erhalte. das heist dann ja das ich nicht mehr den punkt optimieren kann. mit dieser methode sollte ich mich sehr nahe an den perfekten punkt fuer unser Gesundheitszentrum annaehern.

Um die restlichen punkte zu platzieren mache ich wieder das prinzip wie im kapitel 1.2 platzieren der Doerfer. und breche die schleife zum platzieren dann ab wenn ich kein punkt mehr im polygon platzieren kann.

Als erweiterung ist mir direkt eingefallen das man das ganze plotten kann und auch eigentlich sollte da man sonst beim Programmieren, beim endergebnis probleme hat das ganze nachzuvollziehen und wirklich zu ueberpruefen und zu verstehen. Da ich Das ganze in C++ werde ich die library Matplotlibcpp benutzen da es die in meinen gen beste option da fuer ist.

Das Problem was ich an dieser Methode sehe ist wie oben schon angedeutet, das es nur eine annaerung ist und nicht der perfekte oder optimalste punkt ueberhaupt. zudem kann es je nach groesse des polygons zu laengeren berechnungen kommen. auch ein grund warum ich fuer das Projekt am ende C++ benutzt habe.

1.7 Quellen:

- [1] Raycasting, <https://de.wikipedia.org/wiki/Raycasting>
- [2] Checking if a point is inside a polygon is RIDICULOUSLY simple (Ray casting algorithm) - Inside code (YouTube video), <https://www.youtube.com/watch?v=RSXM9bgqxJM>
- [3] Inkreis regelmäßiges Polygon, <https://www.maths2mind.com/schluesselwoerter/inkreis-regelmaessiges-polygon>
- [4] Inkreis, <https://de.wikipedia.org/wiki/Inkreis>

2 Umsetzung

2.1 Die End Umsetzung

3 Beispiele